# Algebra

## 7–8. évfolyam

Szerkesztette:
Blénessy Gabriella, Dobos Sándor, Fazakas Tünde,
Hraskó András, Rubóczky György

2018. március 18.

**Technikai munkák**
*(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)*

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

---

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2017

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

E feladatgyűjtemény megírásához Gábos Adél és Halmos Mária, valamint Pósa Lajos „Algebra” publikálatlan tanítási anyagait vettük alapul. Törekedtünk az alaposabb bevezetésre a hatodik tanévet most befejezett diákok kedvéért, illetve a speciális matematika szakos osztályok diákjaira gondolva bővítettük a feladatanyagot és néhány számítástechnikai példát is mellékeltünk a fejezetek végén.

1. FEJEZET

# Aritmetika

**1.1.** (M) Számoljuk ki az alábbi műveletek eredményét számológép használata nélkül!

**a)** $27 + 18 + (-13) - 61 - (-41)$ **b)** $(-119) - (-25) + 73 - 19$

**c)** $6 + 8 \cdot 13 - 9 \cdot (-2) + 7$ **d)** $8 : 2 - 9 \cdot 3 + 12$

**e)** $(-9) : 2 + 10 : (-4)$ **f)** $(-18) : (-2) - 9 : (-3) + 4$.

**1.2.** (M) Számoljuk ki az alábbi műveletek eredményét számológép használata nélkül!

**a)** $13 + 28 + (-30) - 6 - (-21)$ **b)** $130 + 280 + (-300) - 60 - (-210)$

**c)** $137 + 287 + (-307) - 67 - (-217)$ **d)** $68{,}5 + 143{,}5 + (-153{,}5) - 33{,}5 - (-108{,}5)$.

**1.3.** Válasszuk ki a legnagyobbat vagy a legnagyobbakat az alábbi számok közül!

9961-6991-1996 9961-(6991-1996) (9961-6991)-1996 9961-6991+1996

9961-(6991+1996)

**1.4.** Számoljuk ki az alábbi műveletek eredményét számológép használata nélkül!

**a)** $(18 + 25) - (19 - 3)$ **b)** $(18 + 25) - (19 + 3)$ **c)** $(18 - 25) + (19 - 3)$

**d)** $18 - (25 + 19 - 3)$ **e)** $18 - (25 - 19 - 3)$ **f)** $18 - (25 - (19 - 3))$.

**g)** Döntsük el a fenti kifejezések mindegyikéről, hogy miképpen változik az értékük, ha bennük a 3-as számot 4-re cseréljük!

**h)** A fenti a)-f) kifejezések mindegyikének értékét 1-gyel szeretnénk növelni. Csak a 19-et változtathatjuk. Milyen számot írjunk a helyébe az egyes esetekben?

**1.5.** Számoljuk ki az alábbi műveletek eredményét számológép használata nélkül!

**a)** $3467 - 1234{,}67 + 9732{,}11 - 3465 + (-9700{,}11) + 1234$;

**b)** $1234 - 97{,}56 - 102{,}44 - 2468 + 1233 + 201$.

**1.6.** Végezzük el a műveleteket! Az eredményt tovább nem egyszerűsíthető tört alakjában adjuk meg!

**a)** $\frac{7}{6} + \left(-\frac{4}{9}\right)$ **b)** $\frac{7}{6} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$ **c)** $\frac{7}{6} : \left(-\frac{4}{9}\right)$ **d)** $\frac{7}{6} - \left(-\frac{4}{9}\right)$

**1.7.** Egyszerűsíteni akarom a számolást, melyik módszer helyes? (Több jó válasz is lehetséges.)

$\frac{{}^{7}\cancel{14}}{{}^{3}\cancel{6}} \cdot \frac{3}{2}$ $\frac{14}{{}^{2}\cancel{6}} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{3}}{2}$ $\frac{{}^{7}\cancel{14}}{6} \cdot \frac{3}{{}^{1}\cancel{2}}$ $\frac{14}{{}^{3}\cancel{6}} \cdot \frac{3}{{}^{1}\cancel{2}}$

**1.8.** **a)** Döntsük el, hogy $\frac{7}{6}$ fele az alábbi törtek közül melyikkel egyenlő! (Több jó válasz is lehetséges.)

$\frac{7}{12}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{14}{6}$ $\frac{3{,}5}{6}$

**b)** Döntsük el, hogy ha 2-t elosztjuk $\frac{7}{6}$-dal, melyik eredményt kapjuk!

$\frac{7}{12}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{12}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{24}{14}$

$\frac{6}{3{,}5}$

**1.9. a)** Melyikkel egyenlő $\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{10}$ fele? (Több jó válasz is lehetséges.)

$\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{5}$ $\quad \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10}$ $\quad \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{10}$ $\quad \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$ $\quad \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{5}$ $\quad \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$

**b)** A fenti számok közül melyik a $\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{10}$ kétszerese?

**1.10.** Számoljuk ki fejben az alábbi szorzatok értékét! Az eredményt tovább nem egyszerűsíthető tört alakjában adjuk meg!

**a)** $\frac{10}{6} \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{8}{21}$ **b)** $\frac{3}{8} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{20}{9}$ **c)** $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

**1.11.** Számoljunk fejben, semmit se írjunk le, csak a végeredményt! Utána ellenőrizzünk papíron! Számoljuk össze a találatokat! Ha eredményünket még tovább lehet egyszerűsíteni, akkor csak 1/2 pont jár érte. Az előjel is számít!

**a)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

**b)** $\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{4}{5}$

**c)** $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{7}{4}$

**d)** $\frac{3}{5} - 1{,}5 + \frac{1}{4} + 2$

**e)** $\frac{3}{20} : \left(\frac{7}{8} - 2\right)$

**1.12.** Számoljuk ki az alábbi műveletek eredményét! Az eredményt tovább nem egyszerűsíthető tört alakjában adjuk meg!

**a)** $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)$ **b)** $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)\right]$ **c)** $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{4}{5}\right]$

**d)** $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

**1.13.** Számoljuk ki az alábbi műveletek eredményét! Az eredményt tovább nem egyszerűsíthető tört alakjában adjuk meg!

**a)** $\frac{28}{27} \cdot \frac{9}{8} - \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8}$ **b)** $\frac{28}{27} \cdot \left(\frac{9}{8} - \frac{8}{3}\right) \cdot \frac{9}{8}$ **c)** $\left(\frac{28}{27} \cdot \frac{9}{8} - \frac{8}{3}\right) \cdot \frac{9}{8}$ **d)** $\frac{28}{27} \cdot \left(\frac{9}{8} - \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)$

**1.14.** Rendezzük növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$3$ $\quad \frac{3}{10}$ $\quad \frac{3}{0{,}1}$ $\quad \frac{3 \cdot 0{,}1}{10}$ $\quad 3 \cdot 0{,}1 \cdot 10$ $\quad \frac{3 \cdot 10}{0{,}1}$

$\frac{3}{0{,}1} \cdot 10$ $\quad \frac{3}{0{,}1 \cdot 10}$ $\quad \frac{-3}{0{,}1}$ $\quad \frac{-3}{10}$ $\quad 3 \cdot 10$ $\quad \frac{3}{-0{,}1}$

**1.15.** Számoljuk ki az alábbi műveletek eredményét! Az eredményt tovább nem egyszerűsíthető tört alakjában adjuk meg!

**a)** $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$ **b)** $\dfrac{\frac{3}{4}}{2}$ **c)** $\dfrac{\frac{3}{4}}{6}$ **d)** $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$ **e)** $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}$

**f)** $\dfrac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}$ **g)** $\dfrac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$ **h)** $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2 + 3}$ **i)** $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ **j)** $\dfrac{\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{20}\right) + 4}{\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \cdot 10}$

**1.16.** Rendezzük növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$\frac{1997}{1998}$ $\quad \frac{1998}{1999}$ $\quad \frac{1998}{1997}$ $\quad \frac{1999}{1998}$

**1.17.** Rendezzük növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$\frac{123456788}{123456789}$ $\quad \frac{123456789}{123456790}$ $\quad \frac{123456790}{123456791}$ $\quad \frac{123456791}{123456792}$

**1.18.** Számoljuk ki ügyesen!
$\frac{1}{32}+1+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{32}$

**1.19.** **a)** Írjunk be zárójeleket úgy, hogy a lehető legnagyobb számot kapjuk!

$$16-8-4-2-1$$

**b)** Cseréljünk ki néhány jelet „$-$” -ról „$+$”-ra, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az előbb! (Zárójelek használata most nem engedélyezett!)

$$16-8-4-2-1$$

**1.20.** Íjunk be műveleti jeleket (zárójeleket nem) a törtek közé úgy, teljesüljön az egyenlőség!
**a)** $\frac{2}{3}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{2}{5}=\frac{23}{30}$ **b)** $\frac{5}{6}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{5}{24}=\frac{5}{12}$

**1.21.** Határozzuk meg a
**a)** kétjegyű páros **b)** háromjegyű hárommal nem osztható
számok összegét!

**1.22.** Számoljuk ki az alábbi kifejezések értékét (számológép használata nélkül)!
**a)** $1-2+3+4-5+6+7-8+9+10-11+\ldots+100$,
**b)** $1+2-3+4+5-6+7+8-9+10+11-\ldots+100$,
**c)** Készítsünk hasonló feladatot!

**1.23.** (M) Egy cirkusz nézőterének első sorában 50 ülés található. A második sorban 52, és minden további sorban 2-vel több ülés van, mint az azt megelőzőben.
**a)** Összesen 23 sor van. Hány férőhelyes cirkusz?
**b)** Összesen 2480 férőhely van a cirkuszban. Hány sorból áll a nézőtér?

**1.24.** Egy szultánnak 143 felesége volt. 1000 napon keresztül adót szedett. Az első napon 144 aranyat, a többi napokon pedig mindig egy arannyal többet szedett, mint az azt megelőző napon. Az így beszedett adót egyenlően akarta szétosztani a feleségei között. Meg tudta-e tenni?

**1.25.** [6] Számítsuk ki a következő összeget!

$$\frac{1}{19}+\frac{2}{19}+\frac{3}{19}+\ldots+\frac{18}{19}+\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\ldots\frac{19}{20}+\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\ldots+\frac{20}{21}+\frac{1}{22}+\frac{2}{22}+\ldots+\frac{21}{22}$$

**1.26.** [21] Számítsuk ki a következő összeget!

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2005}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{2005}\right)+\ldots+\left(\frac{2003}{2004}+\frac{2003}{2005}\right)+\left(\frac{2004}{2005}\right)$$

**1.27.** Butusz Maximusz professzor a Gauss módszerrel határozta meg az alábbi összegeket:
**a)** $2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024$,
**b)** $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89$,
**c)** $-10+(-7)+(-4)+(-1)+2+5+8+11+14+17$,
**d)** $-100+(-99)+(-4)+(-1)+0+2+4+5+8+103+104$.
Mely esetekben kapott helyes eredményt?

**1.28.** Elkészítjük az összes négyjegyű számot, amelyben csak az

**a)** 1, 2, 3, 4; **b)** 1, 2, 3, 6

számjegyek szerepelnek (egy számjegy többször is szerepelhet). Határozzuk meg az így kapott számok összegét!

**c)** Most a számjegyek egy számban csak egyszer szerepelhetnek. Így mennyi lesz az összeg?

**1.29.** Határozzuk meg az alábbi $10 \times 10$-es táblázatban található számok összegét!

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |

**1.30.** [14] Egy $10 \times 10$-es négyzetalakú táblázatba beírjuk az egész számokat 0-tól 99-ig úgy, hogy az első sorba 0-töl 9-ig, a másodikba 10-től 19-ig, stb növekvő sorrendbe írjuk le a számokat. Ezután elhelyezünk a táblázaton 10 db korongot úgy, hogy a sakk szabályai szerint mint bástyák ne üssék egymást.

**a)** Hányféleképpen helyezhetők el a korongok?

**b)** A korongok által lefedett számok összegének mennyi a legnagyobb értéke?

**1.31.** Keressük meg a szövegeknek megfelelő számkifejezéseket!

**a)**

| | | |
|---|---|---|
| kétharmad háromnegyede | $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ | |
| kétharmad háromnegyed része | | |
| kétharmad háromnegyedszerese | $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ | |
| kétharmad négyharmadszorosa | | |

**b)**

| | | |
|---|---|---|
| kétharmad ötöde | $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$ | |
| kétharmad ötödrésze | | $\frac{2}{3} \cdot 5$ |
| kétharmad egyötödszöröse | $\frac{2}{3} : \frac{1}{5}$ | |
| kétharmad egyötöde | | $\frac{2}{3} : 5$ |

**1.32.** Két pozitív törtszám összege $\frac{77}{65}$. Melyik ez a két tört, ha mindegyiknek a nevezője kisebb 65-nél?

2. FEJEZET
# Aritmetika (teszt)

**2.1.** (M) Szeretnénk az alábbi kifejezés értékét eggyel növelni.

$$(2007 - 53) - (11 - 3)$$

Négy diákot kérdeztünk erről, az alábbiakat javasolták:

– Anna: 2007 helyére írjunk 2008-at;

– Balázs: 53 helyére írjunk 54-et;

– Cili: 11 helyére írjunk 12-t;

– Dezső: 3 helyére írjunk 4-et.

Kinek volt igaza?
**A)** Csak Annának **B)** Annának és Cilinek **C)** Annának és Dezsőnek
**D)** Csak Cilinek **E)** Mind a négy diáknak

**2.2.** (M) Hogyan változik az alábbi kifejezés értéke, ha egy-egy benne szereplő számot (mindig csak az egyiket) eggyel megnövelünk?

$$(789 - 53) - (45 - (33 - 7))$$

| | 789 | 53 | 45 | 33 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| A) | nő | nő | nő | nő | nő |
| B) | nő | csökken | csökken | csökken | csökken |
| C) | nő | csökken | nő | csökken | nő |
| D) | nő | csökken | csökken | nő | nő |
| E) | nő | csökken | csökken | nő | csökken |

Melyik sorban jó mindegyik válasz?
**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**2.3.** (M) Számoljuk ki az alábbi művelet eredményét fejben!

$$2007{,}13 + 9427{,}54 - 265 - 9027{,}54 + 270 - 2006{,}12$$

**A)** 45,1 **B)** 406,01 **C)** 505,01 **D)** 270 **E)** egyik sem

**2.4.** (M) Az alább megadott számkifejezések közül melyiknek az értéke egyezik meg $\frac{10}{14} \cdot \frac{35}{22}$ értékével?

$$X = \frac{5}{7} \cdot \frac{35}{22} \qquad Y = \frac{10}{2} \cdot \frac{5}{22} \qquad Z = \frac{2}{14} \cdot \frac{7}{22} \qquad V = \frac{5}{14} \cdot \frac{35}{11}$$

**A)** $X, Y$ és $V$ **B)** Csak $X$ **C)** $Y$ és $V$ **D)** Mind a négy
**E)** Egyik sem

**2.5.** (M) Az alább megadott számkifejezések közül melyik nem egyenlő $\frac{33}{25} \cdot \frac{5}{9}$ harmadával?

$$X = \frac{33}{25} \cdot \frac{5}{3} \qquad Y = \frac{33}{25} \cdot \frac{5}{27} \qquad Z = \frac{11}{25} \cdot \frac{5}{9} \qquad V = \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{9}$$

**A)** Csak $X$ **B)** $X$ és $V$
**C)** Csak $Y$ **D)** Csak $V$
**E)** Egyik válasz sem tökéletes

**2.6.** (M) Melyik egyenlő $\frac{5}{8}$-dal?
$X = \frac{5}{16}$ fele $Y = \frac{5}{4}$ fele $Z = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2}$ $V = \frac{5}{16} : \frac{1}{2}$
**A)** Csak $X$ **B)** $X$ és $V$
**C)** $Y$ és $V$ **D)** $Y$ és $Z$
**E)** Egyik válasz sem tökéletes

**2.7.** (M) Alább növekvő sorrendben adunk meg számokat. Melyik közülük az első, amelyik már nagyobb 1-nél?
**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
**E)** Egyik sem

**2.8.** (M) Össze akarjuk hasonlítani az $X = \frac{p}{q}$ és az $Y = \frac{p+2}{q+2}$ tört értékét, ahol $p$ és $q$ egymástól különböző pozitív számok! Melyik állítás helyes?
**A)** $X < Y$ **B)** $X > Y$
**C)** $\begin{array}{ll} X > Y & \text{, ha } X < 1; \\ X < Y & \text{, ha } X > 1. \end{array}$ **D)** $\begin{array}{ll} X > Y & \text{, ha } X > 1; \\ X < Y & \text{, ha } X < 1. \end{array}$
**E)** egyik válasz sem pontos

**2.9.** (M) Az alábbi kifejezések közül hánynak az értéke $\frac{37}{60}$?
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\right)$, $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5}$,
$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\right)$, $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$
**A)** négynek **B)** háromnak **C)** kettőnek **D)** egynek
**E)** egynek sem

**2.10.** (M) Adjuk meg a legalább két 1-es számjegyet tartalmazó pontosan háromjegyű pozitív egészek összegét!
**A)** 1145 **B)** 2605 **C)** 7002 **D)** 6982 **E)** egyik sem

# 3. FEJEZET
# Arányosság

**3.1.** Határozzuk meg
**a)** 15/28-nak a 7/10-ed részét!
**b)** 15/28-nak a 60%-át!
**c)** melyik az a szám, amelynek 15/28-ad része 5/4?

**3.2.** Melyik nagyobb, a 2/3-nak a 3/4 része vagy a 3/4-nek a 2/3 része?

**3.3.** **a)** Mennyi 120 háromnegyed részének és 40 egyötödének a különbsége?
**b)** Mennyi 120 háromnegyed része és 40 különbségének az egyötöde?

**3.4.** Melyik nagyobb és mennyivel?
**a)** $2\frac{3}{4}$ és $1\frac{4}{5}$ különbségének $\frac{3}{10}$-ed része, vagy $2\frac{3}{4}$ és $1\frac{4}{5}$ összegének $\frac{1}{60}$-ad része?
**b)** $2\frac{3}{4}$ és $\left(-1\frac{4}{5}\right)$ különbségének $\frac{3}{10}$-ed része, vagy $2\frac{3}{4}$ és $\left(-1\frac{4}{5}\right)$ összegének $\frac{1}{60}$-ad része?

**3.5.** Egy iskolában a fiú tanulók száma úgy aránylik a lányok számához, mint 9 : 11. Az iskola tanulóinak hány százaléka lány?

**3.6.** Budapest lakosainak száma úgy aránylik Magyarország összlakosságához, mint 1 : 5. Az ország lakosságának hány százaléka él a fővárosban?

**3.7.** [20] 10-et két részre osztottam, és az egyiket a másikkal elosztottam. Hányadosul négyet kaptam. (I. évszázadból való feladat)

**3.8.** [20] A 25-öt bontsuk fel két összeadandóra úgy, hogy közülük a nagyobbik 49-szerese legyen a kisebbiknek. (XVIII. századi feladat)

**3.9.** [20, 8] A mérleg egyik serpenyőjében egy darab szappan van, a másikban egy ugyanolyan szappan $\frac{3}{4}$ része, és még $\frac{3}{4}$ kg súly. A mérleg egyensúlyban van.
Milyen súlyú a szappan?

**3.10.** [20] Hány diákja volt Pithagorasznak, a szamoszi filozófusnak?
– Amikor diákjai száma felöl érdeklődtek, a tudós így válaszolt: A diákjaim fele matézist tanul, a negyedrésze fizikát, a hetedrésze hallgatást, és ezen kívül van még három egészen kis kölyök.
A kérdés: Összesen mennyit tesznek ki? (XVI. századi feladat)

**3.11.** [20] Ím egy fiú megkérdezi az atyját, milyen idős. Az apa így felel neki: Ha Te olyan idős lennél, mint én, és még feleannyi idős, és még negyedannyi idős, és még egy évvel idősebb, akkor 134 éves lennél. (XVI. századi feladat)

**3.12.** Két kocsi ára úgy aránylik egymáshoz, mint 5 : 7. Mennyibe kerülnek külön külön, ha
**a)** a kettő együtt 1 812 000 Ft?
**b)** az egyik 240 000 Ft-tal drágább, mint a másik?

**3.13.** [20] $A$, $B$, $C$, $D$, és $E$ között 100 ezer Ft van prémiumot akarnak kiosztani 10 : 20 : 30 : : 15 : 25 % arányban. Időközben kiderült, hogy $A$ nem kaphat prémiumot. Mennyit kap a többi, ha nem akarnak az arányokon változtatni?

**3.14.** [20] Egy kötél harmada 7 méterrel hosszabb az ötödénél. Milyen hosszú a kötél?

**3.15.** Töltsük ki az alábbi táblázatot!

| Alap | Százalék- | |
|---|---|---|
| | láb | érték |
| 200 | 10% | |
| | 10% | 200 |
| 10 | 200% | |
| 200 | | 10 |
| 10 | | 200 |
| | 200% | 10 |
| 37 | 22% | |
| 37 | 132% | |
| | 22% | 37 |
| | 132% | 37 |
| 37 | | 22 |
| 37 | | 132 |

**3.16.** [9] Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket!
**a)** 500 Ft-nak a 25%-a
**b)** 1200 kg-nak a 45%-a
**c)** 150 m-nek a 18%-a
**d)** 1500 Ft-nak a 35%-a
**e)** 1200 kg-nak a 90%-a
**f)** 250 $m^2$-nek a 35%-a
**g)** 1 órának a 12%-a
**h)** 20 liternek a 85%-a

**3.17.** [9] Melyik több és mennyivel?
**a)** 170 km-nek a 40%-a vagy 85 km-nek a 80%-a?
**b)** 200 liternek a 40%-a vagy 200 liternek a 37%-a?
**c)** 170 g-nak a 35%-a vagy 100 g-nak a 35%-a?
**d)** 170 $cm^2$-nek a 40%-a vagy 340 $cm^2$-nek a 20%-a?
**e)** 72 cm-nek a 66%-a vagy 108 cm-nek a 44%-a?
**f)** 72 cm-nek a 66%-a vagy 108 cm-nek a 45%-a?

**3.18.** Írjuk be a kihagyott helyre a megfelelő adatot úgy, hogy a megadott két kifejezés értéke egyenlő legyen!
**a)** 100 cm-nek a 40%-a ugyanannyi, mint … cm-nek a 60%-a.
**b)** 100 cm-nek a 40%-a ugyanannyi, mint 140 cm-nek a …%-a.
**c)** 100 cm-nek a 40%-a ugyanannyi, mint … mm-nek a 25%-a.
**d)** 150 $cm^2$-nek a 72%-a ugyanannyi, mint … $mm^2$-nek a 60%-a.

**3.19.** [9] A kamillavirág száradáskor elveszti friss tömegének 85%-át. Hány kg száraz kamilla lesz 72,4 kg friss virágból?

**3.20.** [9] A gomba 90% vizet tartalmaz. Téli felhasználásra 5 kg gombát szeleteltünk fel és szárítottunk meg. Mennyi az így kapott szárított gomba tömege?

**3.21.** [9] Péter a nap 24 órájából kb. 40%-ot alvással, 9%-ot étkezéssel, 6,5%-ot utazással, közlekedéssel tölt. Az iskolában töltött ideje a nap 25%-a. Mire mennyi időt fordít?

Az otthoni tanulásra a nap 10%-át fordítja. Mennyi ideig tanul otthon? Jut-e ideje játszani? Ha igen, mennyi időt tölthet játékkal?

**3.22.** **a)** Hány Ft-nak a 17%-a a 91 Ft?
**b)** Hány kg-nak a 13%-a a 16,9 kg?
**c)** Hány cm-nek a 23%-a a 920 mm?
**d)** Hány liternek a 170%-a a 1870 liter?

**3.23.** [9] Egy játszótér 28%-a füves, van homokozó, hinta, mászóka és aszfaltozott tollaslabdapálya. A füves terület 123,2 m$^2$. Hány m$^2$ az egész játszótér területe?

**3.24.** [9] Egy iskola tanulóinak 48%-a fiú. Hány tanuló jár az iskolába, ha 504 fiú tanuló van?

**3.25.** Egy osztály 40 tanulójából 16 lány, a többi fiú. A lányok 12,5%-a szőke.
**a)** Az osztály tanulóinak hány százaléka fiú?
**b)** Az osztály tanulóinak hány százaléka szőke lány?

**3.26.** Két munkás együtt ás föl egy kertet. Az egyik fölássa a kert 65%-át, a másik a megmaradt $910m^2$-t.
Hány négyzetméter a kert területe?

**3.27.** Egy háromfordulós verseny első fordulóján a versenyzők 95%-a kiesett. A döntőben a második fordulóba jutottak 2%-a versenyzett. Hányan indultak az egyes fordulókban, ha a döntőben 23-an versenyeztek?

**3.28.** [20] Mi lehet az a szám, amelynek 35 %-a nagyobb 70-nél, 20 %-a pedig
**a)** nagyobb **b)** kisebb
80-nál?

**3.29.** Év elején egy iskola tanulóinak 40%-a fiú volt. Év közben a fiúk száma 10%-kal növekedett, a lányok száma viszont 5%-kal csökkent. Hány százalékkal változott az iskola tanulóinak összlétszáma?

**3.30.** [17] Az Állami Biztosító 1979-ben 2016 millió Ft-ot fizetett ki 1276 káresetért a lakosság részére. Az előző évhez képest 14%-kal nőtt a káresetek száma és 20%-kal a kifizetett összeg. Mennyit fizettek ki átlagosan egy-egy lakossági kárra 1979-ben és mennyit 1978-ban?

**3.31.** [20] Egy téglalap két párhuzamos oldalát 25%-kal megnöveltük. Hány százalékkal kell csökkenteni a másik két párhuzamos oldalát, hogy a területe ne változzék?

**3.32.** A kenyér árát januárban 10%-kal csökkentették, majd februárban az új ár 10%-ával felemelték.
**a)** Csökkent vagy nőtt a kenyér ára a tavalyi árhoz képest?
**b)** Hány százalékos a változás a tavalyi árhoz képest?

**3.33.** [20] Egy óra árát 25%-kal felemelték, de nem volt elég kelendő, ezért az új árat 25%-kal csökkentették.
Jól vagy rosszul jártak-e végül a vásárlók?

**3.34.** [20] Egy gép árát először 70%-kal felemelték, majd a felemelt árat 40%-kal csökkentették.
Az így kapott ár hány százalékkal több az eredetinél?

**3.35.** [20] Egy óra árát 20%-kal felemelték, majd a felemelt árat 20%-kal csökkentették. Mennyi volt a kezdeti ár, ha végül 480 Ft-ot kértek egy óráért?

**3.36.** Bankba tett pénzünk évi 15%-ot kamatozik. Hány Ft-ot kapunk az 50 000 Ft-nyi betett összegért

**a)** egy év múlva?
**b)** két év múlva?
**c)** három év múlva?

**3.37.** [20] Ha egy szám 15%-ához hozzáadunk $\frac{9}{5}$-öt, akkor a szám 18%-át kapjuk. Határozzuk meg a számot!

**3.38.** Egy edény és a benne lévő víz együttes tömege 2000 gramm. Ha kiöntjük a víz 20%-át, akkor az edény és a víz együttes tömege az eredetinek 88%-ára csökken. Számítsuk ki az edény tömegét!

**3.39.** [9] A friss gomba 90%-a víz. 1,2 kg szárított gomba van egy dobozban. Hány kg friss gombát kell szeletelni. szárítani, hogy ennyi szárított gombánk legyen?

**3.40.** [9] A szilvának 80%-a víz, az aszalt szilvának már csak 40%-a víz. Mennyi szilvából lesz 100 kg aszalt szilva?

**3.41.** Két szám úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 3. Melyik ez a két szám, ha még azt is tudjuk róluk, hogy

**a)** összegük **b)** különbségük **c)** szorzatuk **d)** hányadosuk

150-nel egyenlő?

**3.42.** [20] Két szám összege 170. Az egyik szám $\frac{3}{4}$ része azonos a másik szám $\frac{2}{3}$-ával. Melyek ezek a számok?

**3.43.** [20] Két négyzet oldala úgy aránylik egymáshoz, mint

**a)** 1:2 **b)** 1:3 **c)** 2:3.

Határozzuk meg a kerületük arányát! Hogyan aránylik egymáshoz a területük?

**3.44.** [20] Két háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint

**a)** 1:2 **b)** 1:3 **c)** 2:3.

Határozzuk meg a kerületük arányát! Hogyan aránylik egymáshoz a területük?

**3.45.** [20] Két kör sugara úgy aránylik egymáshoz, mint

**a)** 1:2 **b)** 1:3 **c)** 2:3.

Határozzuk meg a kerületük arányát! Hogyan aránylik egymáshoz a területük?

**3.46.** [20] Két téglalap egyik oldalpárja egymással egyenlő, a másik oldalpár hosszának aránya

**a)** 1:2 **b)** 1:3 **c)** 2:3.

Meghatározható-e a kerületük arány? Hogyan aránylik egymáshoz a területük?

**3.47.** [20] Két négyzet kerületének aránya

**a)** 1:4 **b)** 1:25 **c)** 4:25 **d)** 1:2.

Határozzuk meg oldalaik hosszának arányát!

**3.48.** [20] Két négyzet területének aránya

**a)** 1:4 **b)** 1:25 **c)** 4:25 **d)** 1:2.

Határozzuk meg oldalaik hosszának arányát!

**3.49.** Három szám aránya 1 : 2 : 4, négyzeteik összege pedig 189. Melyik ez a három szám?

**3.50.** [20] Egy gyalogos 5 $\frac{km}{h}$ sebességgel halad. Mennyi idő alatt tesz meg 17 $km$-t?

**3.51.** [20] Egy 100 km hosszú út két végéről egymással szembe ugyanabban a pillanatban indul el két kerékpáros. A gyorsabbik sebessége 6 $\frac{km}{h}$-val nagyobb a másiknál.

A kerékpárosok 3 óra 20 perc múlva találkoznak.

Határozd meg a sebességüket!

**3.52.** [20] Két test egy egyenes úton mozog. Távolságuk 240 méter a mozgás kezdetekor.

Hol találkoznak, ha

**a)** egymással szemben haladnak, és a sebességük 11 $\frac{m}{s}$, illetve 5 $\frac{m}{s}$?

**b)** egy irányban mennek, a gyorsabb van hátul, és a sebességük 7 $\frac{m}{s}$, illetve 4 $\frac{m}{s}$?

**c)** egy irányban mennek, és a hátul levő sebessége ötszöröse az elől haladóénak?

**3.53.** [20, 8] Két vonat halad egymással szemben, párhuzamosan futó síneken: az egyik 36 $\frac{km}{h}$ sebességgel, a másik 45 $\frac{km}{h}$-val. A második vonatban ülő utas megfigyelte, hogy az első szerelvény 6 másodperc alatt robogott el mellette.

Milyen hosszú volt az első vonat?

**3.54.** [20] Ha valaki egy óra alatt munkájának $\frac{3}{7}$ részét képes elvégezni, mikorra készül el az egész munkával? (Feltételezzük, hogy a munkavégzés egyenletes.)

**3.55.** [20, 12] Az előadás szövegének leírását két gépírónőre bízták. Közülük az ügyesebb egyedül 2 óra alatt, a másik pedig 3 óra alatt tudná legépelni az anyagot.

Mennyi idő alatt lesznek készen, ha úgy osztják el az anyagot, hogy a lehető leggyorsabban végezzenek?

**3.56.** [20] Egy kertet az apa 3,5 óra, a fia 6 óra alatt ásna fel egyedül. Ha mindketten dolgoznak, mennyi idő alatt készülnek el?

**3.57.** [20] Egy kád csupán a melegvíz csapból 20 perc alatt, csak a hidegvíz csapból 25 perc alatt telik meg. Kinyitjuk a hidegvíz csapot, majd 4 perc múlva a melegvíz csapot is. Hány perc múlva telik meg a kád?

**3.58.** [20] Imhol egy sakál, egy kutya és egy farkas. Megesznek együtt egy birkát. A sakál egyedül egy óra alatt falná fel a birkát. A farkas három óra alatt. A kutya hat óra alatt. Most az a kérdés, hogy ha mind a hárman együtt eszik a birkát, mennyi idő alatt falják azt fel? (XV. Századi feladat)

4. FEJEZET
# Arányosság (teszt)

Néhány feladatban a Központi Statisztikai Hivatal felmérését használtuk a magyarországi állatállományról. Forrás:

http://portal.ksh.hu/pls/ksh/docs/hun/xftp/idoszaki/allat/allat0708.pdf

Az adatokat néhol kissé módosítottuk a számítások egyszerűsítése kedvéért.

**4.1.** (M) Határozzuk meg az alábbi számok nagyságrendi sorrendjét!
$X$: a 150 kétharmad része;
$Y$: a 200 hétnyolcad részének és a 100 kétharmad részének különbsége;
$Z$: a 180 háromnegyed részének négyötöde.

**A)** $X < Y < Z$ **B)** $X < Z < Y$ **C)** $X < Y = Z$ **D)** $Z < Y < X$
**E)** egyik sem

**4.2.** (M) Állatokat gazdasági társaságok és egyéni vállalkozók is tartanak. 2004. augusztusában a tyúkfélék állománya Magyarországon a gazdasági társaságok és az egyéni vállalkozók között 3 : 5 arányban oszlott meg. A Magyarországi állomány hány százaléka volt ekkor egyéni vállalkozóknál?

**A)** 50%-a **B)** 5/8-ad %-a **C)** 55,5%-a **D)** 62,5%-a
**E)** egyik sem

**4.3.** (M) [20] Ím egy fiú megkérdezi az atyját, milyen idős. Az apa így felel neki: Ha Te olyan idős lennél, mint én, és még feleannyi idős, és még negyedannyi idős (mint én), és még egy évvel idősebb, akkor 134 éves lennél. Hány éves az apa? (XVI. századi feladat)

**A)** 50 **B)** 70 **C)** 74,5 **D)** 76 **E)** egyik sem

**4.4.** (M) 2007-ben a hazai állatállományon belül a libák, a kacsák és a pulykák számának egymás közti aránya kb. 9 : 11 : 16 volt. Hány pulykából állt a magyarországi állomány, ha a három állatfajtából összesen kb. tízmillió kettőszázkilencvenhatezret tartottak?

**A)** 4 564 000 **B)** 3 146 000 **C)** 1 647 360
**D)** több mint 4,6 millió **E)** egyik sem

**4.5.** (M) 2007. augusztusában tyúkfélékből kb. 35 000 000-t tartottak Magyarországon. A tyúkféle állatok 36%-a volt tojó. A hazai tojóállomány melyik két érték közé esett ekkor?

**A)** 10 és 12 millió **B)** 12 és 14 millió **C)** 14 és 16 millió **D)** 0 és 10 millió
**E)** 16 és 35 millió

**4.6.** (M) 2007. augusztusában kb. 321 750 tehenet tartottak Magyarországon. Ez a teljes hazai szarvasmarhaállomány 45%-a. Hány szarvasmarha volt Magyarországon ekkor?

**A)** 450 000 **B)** 715 000 **C)** 144 788
**D)** több mint 750 ezer **E)** egyik sem

**4.7.** (M) Írjuk be a kihagyott helyre a megfelelő adatot úgy, hogy az azonos sorban megadott két kifejezés értéke egyenlő legyen!

| | | |
|---|---|---|
| **I.** | 350 km-nek a 40%; | ... km-nek a 70%-a. |
| **II.** | 45 liternek a 80%; | 18 liternek a ... %-a. |
| **III.** | 400 g-nak a 13%-a; | ... g-nak a 26%-a. |

Mely sorokba írtunk ugyanazt a számot?

**A)** mind a háromba **B)** csak I.-be és II.-ba **C)** csak I.-be és III.-ba
**D)** csak II.-ba és III.-ba **E)** semelyik kettőbe se

**4.8.** (M) Az egyéni gazdálkodóknál tartott tyúkféle állatok száma 2003 és 2007 között folyamatosan csökkent Magyarországon. 2003 és 2004 között 6,3%-os, 2004 és 2005 között 10,7%-os, 2005 és 2006 között 11,4%-os, 2006 és 2007 között 6%-os volt a csökkenés. Szeretnénk kiszámolni, hogy az egyéni gazdálkodóknál tartott tyúkféle állatok 2003. évi állományának hány százaléka a 2007. évi állomány. Melyik képlet adja meg ezt a százalékértéket?

**A)** $6{,}3 + 10{,}7 + 11{,}4 + 6$;
**B)** $100 - (6{,}3 + 10{,}7 + 11{,}4 + 6)$;
**C)** $\left(1 - \frac{6{,}3}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10{,}7}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{11{,}4}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{100}\right)$;
**D)** $100 \cdot \left(1 - \frac{6{,}3}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10{,}7}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{11{,}4}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{6}{100}\right)$;
**E)** egyik sem

**4.9.** (M) Sokféle baromfit – tyúkot, kacsát, libát, pulykát – tenyésztenek hazánkban. Ezeknek általában a húsát esszük. A tyúkok közül azonban a tojókat nem elsősorban húsukért tartják, hanem azért mert tojást tojnak. 2007 augusztusában a Dunántúli baromfiállomány 29.174%-a volt tojó tyúk. A tojó tyúkok aránya a tyúkok között a felmérés szerint 36.773%. Hány baromfit tartottak 2007-ben a Dunántúlon, ha a tyúkok száma 130 016 000 volt?

**A)** 16 405 000-t **B)** 1 396 270-t
**C)** 121 316 000 **D)** 20 millió és 100 millió között
**E)** az előbbiek egyike sem helyes

**4.10.** (M) Ha egy négyzet alakú telek körbekerítéséhez 1089 m kerítésre van szükség, akkor egy négyszer akkora területű szintén négyzet alakú telek bekerítéséhez hány méter kerítés szükségeltetik?

**A)** 2000-nél kevesebb **B)** 2178
**C)** 4356 **D)** 9000-nél több
**E)** az előbbiek egyike sem helyes

**4.11.** (M) [20] Egy tartályba három csapon át folyhat víz. Ha egy-egy csap van nyítva, a tartály 1, 2, illetve 3 óra alatt telik meg.

Mennyi idő alatt telik meg a tartály, ha mindhárom csapot kinyitjuk?

**A)** fél órán belül; **B)** 30 és 32 perc között; **C)** 32 és 34 perc között;
**D)** 34 és 36 perc között; **E)** 36 percnél lassabban

**4.12.** (M) [20] Hány másodperc alatt éri utol a 104 km/h sebességgel menekülő antilopot az azt 10 méterről 110 km/h sebességgel üldöző gepárd?

**A)** 1 másodperc alatt; **B)** 6 másodperc alatt;
**C)** 10 másodperc alatt; **D)** 60 másodperc alatt;
**E)** egyik válasz sem helyes.

5. FEJEZET

# Szöveges feladatok

**5.1.** [20] Ha megélem még a felét annak az időnek, amit már megéltem, meg még egy évet, akkor 100 éves leszek. Hány éves lehetek?

**5.2.** [20] Két szám összeg 100. A nagyobbikat a kisebbikkel elosztva a hányados 2, a maradék 1.

Melyek ezek a számok?

**5.3.** [20] Egy 48 cm kerületű egyenlő szárú háromszög alapja 3 cm-rel hosszabb az egyik száránál. Mekkorák az oldalai?

**5.4.** [20] Valaki gondolt egy számot. Ezt kétszer vette, hozzáadta a gondolt szám háromszorosát; az eredményt megszorozta 3-mal, hozzáadott 5-öt, és amit így kapott, azt elosztotta 2-vel. Ekkor közölte, hogy az eredménye 40. Mit gondolhatott?

**5.5.** [20] Ha az éveim számát megkétszerezem, és ehhez az éveim számának a felét, majd a negyedét még hozzáadom, akkor 1 híján 100-at kapok. Hány éves vagyok?

**5.6.** [20] Három fán 36 varjú ül. Később az egyik fáról átrepül a másik fára 6 varjú, a másodikról a harmadikra 4 varjú, ekkor a három fán a varjak száma egyenlő lett. Hány varjú ült eredetileg a fákon?

**5.7.** [20] Egy háromjegyű számban a legmagasabb helyi értékű számjegy 5. Ha ezt az első helyről töröljük és az utolsónak írjuk, akkor 162-vel kisebb számot nyerünk. Melyik ez a szám?

**5.8.** [20] Egy négyjegyű szám utolsó számjegye 9. Ha ezt a végéről letöröljük, és a szám elejére írjuk, az eredeti számnál 2889-cel nagyobb számot kapunk. Melyik két számról van szó?

**5.9.** [20] Írjunk fel egy háromjegyű számot, majd cseréljük fel az 1. és a 3. jegyét. Képezzük a két szám különbségét. Mi lehetett az eredeti háromjegyű szám, ha az első jegye 7 és a kapott különbség 99-nek a hatszorosa?

**5.10.** [20] 520 Ft-ot egyenlő számú 5 és 10 forintosokban szeretnénk kifizetni. Hány darab 5 és 10 forintosra volna szükségünk?

**5.11.** [20] Balázs mesélte: Egy tál gombócnak az egyharmadát ette meg, nyolccal kevesebbet, mint a felét. Hány gombócot evett meg Balázs?

**5.12.** [20] Egy kocsi első kerekének sugara 40 cm, hátsó kerekének sugara 50 cm. Milyen hosszú úton fordul eggyel többet az első kerék, mint a hátsó?

**5.13.** [20] Egymástól 72 m-re van egy nyúl és egy róka a sík mezőn, mikor megpillantják egymást. A nyúl futásnak ered, a róka utána. A nyúl 8-at ugrik másodpercenként, egy-egy ugrása 1,2 m hosszú, a róka másodpercenként 7-et ugrik, de ugrásai 1,5 m hosszúak. Utoléri-e a róka a nyulat?

**5.14.** [20] Egy agár kergeti a nyulat, mely 90 ugrás előnyben van. Amíg a nyúl 10-et ugrik, az agár 7 ugrást tesz, de az agár két ugrásának a hossza a nyúl öt ugrásának hosszával ér fel. Hány ugrás után éri utol az agár a nyulat?

**5.15.** [20] Egy téglalap egyik oldala fele a másiknak. A téglalap területe 2,88 $m^2$ Mekkorák a téglalap oldalai?

**5.16.** [20] Egy üveg a félig kiálló dugóval együtt 33 cm. Az üveg 30 cm-rel hosszabb, mint a dugó kiálló része. Hány cm az üveg és hány cm a teljes dugó?

**5.17.** [20] Gondoltam egy számot, hozzáadtam 26-ot, az összeget megszoroztam 4-gyel, eredményül a gondolt szám 12-szeresét kaptam. Mely számra gondoltam?

**5.18.** [20] Egy háromszögben $\beta$ szög harmadrésze $\alpha$-nak, de 30 fokkal nagyobb $\gamma$-nál. Mekkorák a háromszög szögei?

**5.19.** [20] A természetes számsor három egymás utáni számának az összege 315. Melyek ezek a számok?

**5.20.** [20] Ha három egymást követő páros szám összegéből levonjuk a köztük levő páratlan számok összegét, 40 marad. Melyek ezek a számok?

**5.21.** [20] Egy kötélnek levágták a negyedrészét és még 2 métert. A maradék 10 méter hosszú. Hány méter volt a kötél?

**5.22.** [20] 80 cm hosszú drótból egy olyan négyzetes oszlop élvázát akarjuk elkészteni, amelynek az oldalélei 5 cm-rel hosszabbak az alapélnél. Mekkorára kell választanunk az alapélt?

**5.23.** [20] Melyik az a két szám, amelyekre teljesül, hogy
**a)** összegük 75, különbségük 26?
**b)** összegük 60, hányadosuk 3?
**c)** különbségük 70, hányadosuk 4?
**d)** arányuk 7:5, különbségük 24?

**5.24.** [20] Két szám összege 1260. Ha az egyik számhoz hozzáadjuk a másik szám négyzetét, akkor is 1260-at kapunk. Melyik ez a két szám?

**5.25.** [20] Két szám úgy aránylik egymáshoz, mint 13 az 5-höz. A két szám különbsége 720. Melyik ez a két szám?

**5.26.** Egy matematikaversenyen az iskola tanulóinak 20%-a indult. Az indulók két feladatot kaptak. Az elsőt a versenyzők 60%-a, a másodikat a versenyzők 65%-a oldotta meg. Minden induló legalább egy feladatot megoldott. Csak a másodikat 80-an oldották meg. Hányan jártak az iskolába?

**5.27.** [20] Zoli 8, apja 38 éves. Hány év múlva lesz az apa életkora
**a)** háromszor
**b)** hatszor akkora, mint a fia életkora?

**5.28.** [3] Egy szolga évi bére 100 tallér és egy öltözet ruha volt. Hét hónap elteltével azonban otthagyta a helyét, s távozáskor megkapta a ruhát és 20 tallért. Hány tallért ér a ruha?

**5.29.** [3] Két borkereskedő érkezett az országhatárra. Az egyiknél 64 akó, a másiknál 20 akó ugyanolyan bor volt. Pénzük azonban kevés volt a vám megfizetésére, így a hiányzó pénzt borral pótolták. Az első kereskedő 40 peták mellett még 5 akó borral fizetett, a másik 2 akó borral fizetett, de visszakapott 40 petákot.

Mennyibe számították a bor akóját és mennyi volt egy akó bor vámja?

**5.30.** [16] Az egyik általános iskola 7. osztálya nagyobb kerékpártúrára indult. Egy idő múlva az osztály megtett útja úgy aránylik a hátralevő úthoz, mint 2 : 3. Ezután az osztály tagjai további 60 km-es utat tettek meg, s ekkor az összes megtett út úgy aránylik a hátralevő úthoz, mint 6 : 5. Mekkora utat tett meg az osztály a túrán, amíg a kiindulási pontjától elért a túra végpontjáig?

**5.31.** [16] Ali, Béla és Cili kártyáznak. A játék elején a gyerekek leírt sorrendjében a náluk levő zsetonok 11 : 10 : 9 arányban oszlottak el. A játék végére ez az arány 22 : 7 : 3-ra módosult. Mennyi zseton volt a gyerekeknél a játék végén, ha tudjuk, hogy valamelyikük 363 zsetont vesztett?

**5.32.** [16] Hamupipőkének egy zsák lencsével összekevert babot kellett szétválasztania. A lencse és a bab tömegének az aránya 2 : 3 volt. Hamupipőke mostohájának úgy tűnt, hogy kevés a lencse, ezért még 2 kg lencsét a zsákba szórt. Így a lencsének a babhoz való arány annyi lett, mint amennyi előtte a bab arány volt a lencséhez. Végül hány kg lencsét és hány kg babot kellett Hamupipőkének szétválasztania?

**5.33.** [20] „Hány óra van?” – kérdezte valaki. „Ha az éjféltől eltelt idő feléhez hozzáadod az éjfélig még hátralevő idő negyedét, akkor a mostani időt kapod!” – ez volt a válasz.

**5.34.** [20] Egy négyzet oldalait 5 cm-rel megnöveltük. Így egy 625 cm$^2$-nel nagyobb területű négyzetet kaptunk. Mekkorák lehetettek az eredeti négyzet oldalai?

**5.35.** [20] Egy négyzet egyik oldalát 1 cm-rel növeljük, az erre merőleges oldalát 4 cm-rel csökkentjük, akkor a kapott téglalap területe 348 cm$^2$. Mekkora volt a négyzet oldala?

**5.36.** [20] Egy vadaskertben nyulak és fácánok vannak. Az állatoknak összesen 50 feje és 140 lába van. Hány nyúl és hány fácán van a vadaskertben?

**5.37.** [20] Hány darab 800 és 1000 forintos könyvet tudunk vásárolni 24000 forintért? Adjuk meg az összes lehetőséget!

**5.38.** [20] Egy tanulmányi verseny alkalmával 12000 forintot osztottak szét. 1000 és 1500 forintos jutalmakat adtak. Hány tanuló kaphatott jutalmat?

**5.39.** [20] Egy turistaházban 100 turista 32 szobát foglalt el. 2 ágyas és 5 ágyas szobák voltak. Hány 2 ágyas és hány 5 ágyas szobát foglaltak le, ha egyetlen ágy sem maradt üresen?

**5.40.** [20] Az iskolai matematikaversenyen 10 feladatot kellett megoldani. A tanulók minden helyesen megoldott feladatért 5 pontot kaptak, a megoldatlan (nem megoldott vagy hibás) feladatokért pedig egyenként 3 pontot levontak nekik.

**a)** Hány feladatot oldott meg az a tanuló, akinek az összeszámláláskor 34 pontja volt?

**b)** És az, akinek 8 pontja volt?

**5.41.** [20] 7200 forintért háromféle ajándéktárgyat vásároltunk, összesen 20 darabot. Az ajándéktárgyak egységára 600 forint, 500 forint, 100 forint volt. Hány darabot vettünk az egyes tárgyakból?

**5.42.** [20] Péter 6, Pál 5 óra alatt teszi meg ugyanazt az utat kerékpárral. Pál 3 $\frac{km}{h}$-val gyorsabb Péternél.

Kinek mekkora a sebessége?

**5.43.** [20] Egy gyalogos után, aki reggel 8 órakor indult el, 10 órakor lovast küldenek. A lovas sebessége 5 $\frac{km}{h}$-val több, mint a gyalogosé, és így azt 12 órakor utóléri.

Hány $km$-t tesz meg a gyalogos óránként?

**5.44.** [20] $A$ és $B$ városok távolsága 60 km. $A$-ból $B$ felé egyszerre indul egy lovaskocsi és egy kerékpár. A kerékpáros, aki kétszer akkora sebességgel halad, mint a lovaskocsi, $B$-be érkezve azonnal visszafordul.

Hol találkozik össze a lovaskocsival?

**5.45.** (M) Egy bolt árlistáját az $n$ elemű $V$ vektorban tároljuk. Készítsünk algoritmust, ami alkalmas arra, hogy bizonyos ($x$ százalékú) áremelést végrehajtson.

**5.46.** (M) Egy bolt árlistáját az $n$ elemű $V$ vektorban tároljuk. Készítsünk algoritmust, ami előállít egy olyan új ($A$) vektort, ami az árak ($x$ százalékú) áfáját tartalmazza.

**5.47.** (M) Egy bolt nettó árlistáját az $n$ elemű $V$ vektorban tároljuk. Készítsünk algoritmust, ami előállít egy olyan új ($B$) vektort, ami a bruttó árakat tartalmazza (alapár+$x$ százalékú áfa).

**5.48.** (M) Készítsünk algoritmust taxisok részére,

**a)** amely a kilométerdíj és a megtett kilométer ismeretében meghatározza a fizetendő összeget!

**b)** Módosítsuk az algoritmus úgy, hogy 10.000 Ft feletti összeg esetén adjon az árból 5% kedvezményt!

# 6. FEJEZET
# Betűkifejezések

Szükség esetén további gyakorló példákat találhatunk a [9] könyvben.

**6.1.** [20] A hétfejű sárkányok birodalmában papírcsákót osztogattak. Minden sárkánynak mind a hét fejére raktak egy csákót. Csak egy olyan sárkány volt, amelynek nem jutott mind a hét fejére csákó, csupán a középsőre és a két szélsőre. Hány csákót oszthattak szét a hétfejűek birodalmában?

**a)** Lehet, hogy 143 csákót osztottak szét? Ha igen, hány sárkány volt a birodalomban?

**b)** Lehet, hogy 153 csákót osztottak szét? Ha igen, hány sárkány volt?

**c)** Hány csákót osztottak szét, ha 39 sárkány volt a birodalomban?

**d)** Gyűjtsünk még lehetőségeket!

**e)** Ha $s$ sárkány volt, közülük egynek 4 feje maradt födetlen, tehát az összes lehetséges megoldást magába foglalja ez a kifejezés:

$$7s - 4,$$

ahol $s$ a sárkányok száma, e magába foglalja ez a kifejezés is:

$$7(s - 1) + 3.$$

Magyarázzuk meg ezt is!

**6.2.** [20] A következő összefüggések közt vannak olyanok, amelyeket le lehet írni röviden a $p = 7s - 4$ képlettel. Jelöljük meg ezeket!

**a)** Gondoltam egy számot ($s$), a padszomszédom egy másikat ($p$). A padszomszéd számához 4-et adva, az én számom hétszeresét kapjuk.

**b)** Gondoltam egy számot ($s$), a padszomszédom egy másikat ($p$). A padszomszédom száma 4-gyel kevesebb, mint az én számom hétszerese.

**c)** Gondoltam egy számot ($s$), a padszomszédom egy másikat ($p$). A padszomszédom számánál 4-gyel kevesebb az én számom hétszerese.

**d)** Gondoltam egy számot ($s$), a padszomszédom egy másikat ($p$). A padszomszédom számának a hetede az én számomnál $\frac{4}{7}$-del több.

**e)** Egy $p$ hosszúságú fonalból $s$ darab egységoldalú szabályos hétszöget és egy egységoldalú szabályos háromszöget alakítunk ki (a fonalból nem marad semmi).

**f)** Keressünk még olyan összefüggést, melyet meg lehet adni a $p = 7s - 4$ képlettel!

**6.3.** [20] Írjuk fel azt a két számot, amely a természetes számok sorában közvetlenül az $n$ szám előtt van!

**6.4.** [20] Három egymás után következő természetes szám közül a középső $b$. Melyik ez a három szám?

**6.5.** [20] Bizonyítsuk be, hogy

**a)** két páratlan szám összege mindig páros;

**b)** egy páros és egy páratlan szám összege mindig páratlan;

**c)** három egymás utáni egész szám összege mindig osztható 3-mal!

**6.6.** [20] Melyik a 120-adik 3-mal osztható pozitív egész szám?
**b)** Melyik a 200-adik olyan pozitív egész szám, amely 3-mal osztható számot követ?
**c)** Melyik a 200-adik olyan pozitív egész szám, amely 3-mal osztva 2-t ad maradékul!

**6.7.** [20] Írjuk fel az $n$-edik
**a)** 3-mal osztható pozitív egész számot!
**b)** olyan pozitív egész számot, amely 3-mal osztva 1-et ad maradékul!
**c)** olyan pozitív egész számot, amely 3-mal osztva 2-t ad maradékul!
**d)** olyan pozitív egész számot, amely nem osztható 3-mal!

**6.8.** [20] Írjuk fel az $n$-edik olyan pozitív egész számot, amely 7-tel osztva 2-t ad maradékul!
Mekkora maradékot ad ennek a számnak az 1111-szerese 7-tel osztva?
Mekkora maradékot ad ennek a számnak az 1112-szerese 7-tel osztva?
Mekkora maradékot ad 7-tel osztva az a szám, amely az előbbi számnál 1000-rel több?

**6.9.** [20] Milyen sorrendben kell elvégezni az alábbi műveleteket?

| | | |
|---|---|---|
| $4 \cdot 3^2$ | $2 + 3 \cdot 43 - 4 - 5$ | $5 + (-6) + 7$ |
| $3 \cdot 4 \cdot 53 + 4^2$ | $-5^2$ | $(2+3) \cdot \frac{4}{7} - 3 \cdot 5^2 + 9 \cdot 4$ |

**6.10.** Írjuk le minél egyszerűbben! Példa: $x$ kétszeresének és $x$ felének a különbsége: $2x - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x = 1{,}5x$.
**a)** $a$ felének és másfélszeresének összege:
**b)** $b$ felének a másfélszerese:
**c)** ha $c$ -ből elvesszük a harmadát, a maradék felét vesszük és kidobjuk annak harmadát, akkor ennyi marad:
**d)** ha $d_1$ ötszörösének és $d_2$ ötszörösének különbségét elosztjuk $d_1$ és $d_2$ különbségével, akkor ennyi a hányados:
**e)** $e$ 20%-ának a 25%-a:
**f)** ha $f$-nek elveszett a 30%-a, de a maradék 10%-kal nőtt, akkor most ennyi van:

**6.11.** Keressük meg a szöveges feladatokhoz a nekik megfelelő egyenletet vagy egyenleteket!
**a)** Az üdítő árának harmada az üveg ára, a folyadék pedig 100 Ft. Mennyibe kerül az üdítő? ($x$-szel jelöljük az üdítő árát)

**a₁)** $\frac{1}{3}x = 100$ **a₂)** $x - \frac{1}{3} = 100$ **a₃)** $x - \frac{1}{3}x = 100$ **a₄)** $\frac{2}{3}x = 100$

**b)** Az osztály tanulóinak 20%-a hiányzik, a jelen levők 60%-a lány, a fiúk pedig mind a nyolcan barna hajúak. Mennyi az osztálylétszám? (Jelöljük az osztálylétszámot $a$-val!)

**b₁)** $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{5}a = 8$ **b₂)** $0{,}2a - 0{,}6a = 8$
**b₃)** $a - 0{,}2a - 0{,}6a = 8$ **b₄)** $(a - 0{,}2a) - 0{,}6(a - 0{,}2a) = 8$
**b₅)** $a - \frac{20}{100} \cdot \frac{4}{100}a = 8$

**c)** A gondolt számból egyharmadot levonva a gondolt szám felénél 20%-kal nagyobb számot kapok. (Legyen a gondolt szám $y$!)

**c₁)** $\frac{2}{3}y = \frac{1}{2}y + \frac{20}{100}$ **c₂)** $\frac{2}{3}y = \frac{1}{2}y + \frac{20}{100}y$ **c₃)** $y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}y + \frac{20}{100}y$
**c₄)** $y - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}y + \frac{20}{100} \cdot \frac{1}{2}y$ **c₅)** $y - \frac{1}{3} = \frac{6}{5} \cdot 12y$ **c₆)** $y - 0{,}3 = 0{,}5y + 0{,}2y$
**c₇)** $y - 0{,}3 = 1{,}2 \cdot 0{,}5y$

**6.12.** [20] Hogyan írjuk le?

**a)** A 6-ot szorozzuk meg a 3 négyzetével, ebből vegyük el 5 és 7 szorzatának a négyzetét, majd az így kapott számot szorozzuk meg 6 és 9 összegével.

**b)** $(-4)$ és 8 összegének négyzetét adjuk össze $(-6)$-tal, ebből vegyük el 7 és 9 szorzatát, az eredményt osszuk el 11-gyel.

**6.13.** [20] Adjuk meg betűkifejezéssel a kívánt értéket!

**a)** Az egyik zsebemben $x$ Ft van, a másikban 10 Ft-tal több, a harmadikban pedig kétszer annyi, mint a másodikban. Összesen mennyi pénz van a három zsebben?

**b)** Egy téglalap egyik oldala $x$ cm, a másik oldal $y$ méter. Hány cm a téglalap kerülete? Hány $\mathrm{cm}^2$ a területe?

**c)** Egy raktárban $x$ tonna áru van. Hétfőn elvisznek innen $y$ tonna árut, kedden 10 tonnával többet, szerdán 4-szer annyit, mint kedden. Mennyi áru marad a raktárban?

**d)** Péternek $x$, Palinak $y$ Ft-ja volt, amikor leültek kártyázni. Az első órában Péter 20 Ft-ot nyert Palitól, a második órában viszont Pali elnyerte Péter (megnövekedett) vagyonának felét. Kinek mennyi pénze volt a játék végén?

**e)** Zsófinak $c$ testvére van. Születésnapjára mindegyik testvére egy-egy tortát sütött neki. A születésnapi zsúron részt vettek a testvérei, a szülei és rajtuk kívül még $d$ osztálytársa is. Mennyi torta jutott egy-egy résztvevőre, ha egyenlően osztották szét a tortákat?

**6.14.** [20] Mikor a házasságot kötik, a menyasszony legyen 7 évvel idősebb, mint a vőlegény életkorának fele. – ezt kívánja a néphit.

**a)** 30 éves vőlegényhez hány éves menyasszony való?

**b)** 30 éves menyasszonyhoz hány éves vőlegény való?

**c)** $v$ éves vőlegényhez hány éves menyasszony való?

**d)** $m$ éves menyasszonyhoz hány éves vőlegény való?

**6.15.** [20] Mit jelentenek az alábbi betűkifejezések?

$a+bc$ $\quad a-(b+c)$ $\quad a-b+c$ $\quad (a+b)\cdot c$ $\quad a-b-c$

$5ab^2$ $\quad a-b(a+2b)$ $\quad \left(a+2+\frac{b}{c}\right)\cdot\frac{c}{a}$ $\quad -(a+b)$

$\left(ab-(c+d)^2\right)\cdot a-(a+b)\cdot ac+\frac{ac^2}{b}$

**6.16.** Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét a megadott $x$ értékeknél!

| A kifejezés | $x=2$ | $x=\frac{1}{2}$ | $x=-1$ | $x=-0{,}5$ |
|---|---|---|---|---|
| $x+2x$ | | | | |
| $3x$ | | | | |
| $3\cdot(2x)$ | | | | |
| $6\cdot(3x)$ | | | | |
| $6\cdot x$ | | | | |
| $2x+1$ | | | | |
| $2\cdot(x+1)$ | | | | |
| $2x^2$ | | | | |
| $(2x)^2$ | | | | |
| $2(-x)^2$ | | | | |
| $\frac{1}{x}$ | | | | |
| $\frac{1}{x-2}$ | | | | |

**6.17.** Megadtuk az alábbi kifejezések négy-négy helyettesítési értékét. Melyik számot helyettesíthettük be?

| A kifejezés | 0 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|
| $5a$ | | | | |
| $6a - a$ | | | | |
| $2 \cdot (5y)$ | | | | |
| $10z$ | | | | |
| $10 \cdot (2v)$ | | | | |
| $2t + 1$ | | | | |
| $2 \cdot (s + 1)$ | | | | |
| $2h^2$ | | | | |
| $(2k)^2$ | | | | |
| $2(-c)^2$ | | | | |
| $\frac{1}{e}$ | | | | |
| $\frac{1}{f-2}$ | | | | |

**6.18.** [20] Végezzük el az összevonásokat!

$$\frac{d}{6} + \frac{d}{12} + \frac{d}{7} + 5 + \frac{d}{2} + 4 = d$$

**6.19.** Válogassuk külön az egynemű kifejezéseket!

**a)** $x$, $\frac{1}{x}$, $-3x$, $\frac{x}{5}$, $x^3$, $23$, $5y$
**b)** $x$, $xy$, $y^2$, $2y \cdot 5y$, $\frac{xy}{3}$, $17y^2$, $\frac{x}{y}$

**6.20.** Végezzük el az összevonásokat, ahol lehet!
**a)** $2y - 3y + 10y - \frac{y}{2}$
**b)** $22y - 3x + 11y - \frac{x}{3} - (-y)$
**c)** $2y - 3 \cdot x \cdot y + 2xy - 10y - \frac{yx}{2}$
**d)** $a^2 - 3 \cdot a \cdot x + \frac{a}{3}x + \frac{a^2}{4} - \frac{x}{2}$

**6.21.** Végezzük el a szorzásokat, ahol lehet. Egyszerűsítsük a kapott kifejezést.
**a)** $(2b) \cdot 7$ **b)** $3 \cdot (4x)$ **c)** $7 \cdot \frac{y}{2}$ **d)** $8 \cdot \frac{3a}{4}$ **e)** $3 \cdot (2x) \cdot 4$

**6.22.** Számítsuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyen!
**a)** $8 - 7a + 3a + 11 - (-a) + 5a$, ha $a = 3{,}1415926$.
**b)** $7b - 4b + (-2b) + 2 - (3b) + b + 4$, ha $b = \frac{11}{41}$.
**c)** $\frac{32}{7}c - 2c - 5 + \frac{6}{14}c + 7$, ha $c = \frac{31}{3}$.
**d)** $\frac{28}{5} \cdot d \cdot e - \frac{7}{3}d - 5e + \frac{4}{10}ed + e + \frac{7}{2}d - \frac{2}{12}d + 4e - d$, ha $d = \frac{31}{3}, e = \frac{6}{31}$.

**6.23.** [20] Írjuk fel egyszerűbb alakban:
**a)** $a + b + a + c + 4a + 2c$
**b)** $5x \cdot 7$

**6.24.** (M) [20] Gondoltam egy számot. Hozzáadtam még annyit és még 23-at, aztán az eredményt elosztottam 3,5-del, és még 7-et elvettem belőle, így maradt 13.
**a)** Jegyezzük le a szöveget egyenlettel!
**b)** Szemléltessük a szöveget összekapcsolt gépekkel!
**c)** Találjuk ki a gondolt számot!

**6.25.** (S) [20] **a)** Mi a gondolatolvasó trükk nyitja?

Gondolj egy egész számot, vedd háromszor, adj hozzá ötöt, vedd az eredmény felét, vonj ki nyolcat! Mondd meg, mit kaptál, és én kitalálom, mire gondoltál!

**b)** Szerepelhet-e bármiféle egész szám az eredmények közt? Próbáljuk ki, lehet-e az eredmény például 1!

**c)** Jelöljük a gondolt számot $g$-vel, és írjuk fel, milyen műveleteket végeztünk vele!

**d)** Milyen számok lehetnek az eredmények közt és milyenek nem?

**e)** Milyen negatív egész számok lehetnek az eredmények közt?

Milyen számra kell gondolni ahhoz, hogy az eredmény

**f)** pozitív **g)** negatív egész **h)** tört

szám legyen?

**6.26.** [20] Gondoltam egy számot, hozzáadtam 1-et, az eredményt megszoroztam 3-mal, elvettem belőle 2-t, az eredményt megszoroztam 5-tel, elvettem belőle 4-et, az eredményt megszoroztam 2-vel, hozzáadtam 3-at, és 35-öt kaptam. Mire gondoltam?

Az egyenlet felírásakor ügyeljünk arra, hogy minden nyitó zárójelnek legyen záró párja, és minden záró zárójelnek legyen nyitó párja.

**a)** Írjuk fel a feladatot egyenlettel!

**b)** Mi is felírtunk egy egyenletet a feladathoz. Vessük ezt össze a saját egyenletünkkel és keressük meg a megoldást: $?g \qquad \Big(((g+1)\cdot 3-2)\cdot 5-4\Big)\cdot 2+3=35$

**6.27.** [20] Mennyi az $n$ oldalú konvex sokszögben **a)** az egy csúcsból húzható átlók száma; **b)** az összes átló száma; **c)** a belső szögek összege; **d)** a külső szögek összege?

**6.28.** [20] Egy számot $b$-vel osztva a hányados 7, a maradék 3. Melyik ez a szám?

Mennyi a szám, ha $b=8$; és ha $b=12$?

**6.29.** [20] Egy városban $e$ számú ember lakik. Hány lakosa lesz a városnak egy év múlva, ha a lakosainak a száma egy év alatt 5%-kal nő?

**6.30.** [20] A $b$ nagyobb, mint az $a$.

**a)** Írjuk fel azt a számot, amelyik $a$ és $b$ között a számegyenesen középen van!

**a)** Írjuk fel azt a számot is, amely $a$ és $b$ között van, és $a$-tól negyed annyira van, mint $b$-től!

**6.31.** [20] **a)** Egy szép nyári reggel egy légy így röpködött a versenyfutópályán: először a célvonaltól repült a starthely felé, és eljutott a pálya feléig, aztán visszafordult, és a célvonal felé repült 25 métert, majd továbbröpült: a célvonaltól való távolságának az $\frac{1}{5}$-ét tette meg a célvonal irányába. Itt pihent meg egy faágon, amely 300 méterre volt a célvonaltól. Hány méteres a futópálya?

**b)** A futópályás feladat Attila és Botond között nagy vitát váltott ki, ugyanis Attila ezzel az egyenlettel akarta megoldani a feladatot ($f$ jelöli a futópálya hosszát):

$$\frac{f}{2}-25-\frac{1}{5}\cdot\frac{f}{2}-25=300$$

Botond azt erősítgette, hogy ez az egyenlet nem vezet el a feladat megoldásához.

Kinek volt igaza?

**6.32.** [20] Mondjunk szöveget ezekhez az egyenletekhez, és oldjuk is meg őket!

**a)** $\left(\frac{\left(\frac{3x+2}{4}-2\right)\cdot 3+1}{2}-1\right)\cdot 2+3=11$

**b)** $3x+2:4-2\cdot 3+1:2-1\cdot 2+3=11$

**c)** A b) egyenlet érdekessége, hogy ha ügyesen helyezünk el benne zárójeleket, akkor ehhez is ugyanaz a szöveg tartozhat, mint az a) egyenlethez.

Próbáljunk így elhelyezni zárójeleket!

**6.33.** Hány forintot fizettem összesen, ha $a$ darab százforintost, $b$-darab tízforintost és $c$ darab egyforintost adtam?

**6.34.** $n$ nap, $o$ óra, $p$ perc és $m$ másodperc összesen hány
**a)** perc? **b)** másodperc?

**6.35.** Ha $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ és $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ akkor $\overline{ab}$ azt a kétjegyű számot jelöli, melynek első jegye $a$, a második jegye $b$. Ha $a$ és $b$ konkrét szám, pld $a = 2$, $b = 3$ akkor nem $\overline{23}$-at, írunk, hanem csak 23-at. A felülhúzás azért kell, hogy ne keverjük össze az $a \cdot b$ szorzatot az $\overline{ab}$ kétjegyű számmal.

Az $\overline{ab}$-nek megfelelő algebrai kifejezés a $10a + 2$, pld $23 = 2 \cdot 10 + 3$. Írjuk fel az
**a)** $\overline{abc}$ **b)** $\overline{aba}$ **c)** $\overline{abcd}$ **d)** $\overline{abab}$ **e)** $\overline{abcabc}$
számnak megfelelő algebrai kifejezést!

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a$, $b$ ($c$) számjegyek esetén
**f)** $101 \mid \overline{abab}$ **g)** $13 \mid \overline{abcabc}$

**6.36.** Írjuk fel az
**a)** ötös **b)** hatos
számrendszerben $\overline{abc}$ alakban írható szám értékét!

**6.37.** **a)** Mutassuk meg, hogy bármely négyjegyű számból kivonva számjegyeinek összegét, eredményül mindig 9-cel osztható számot kapunk!

Igaz-e, hogy bármely négyjegyű számból kivonva számjegyeinek összegét, eredményül mindig
**b)** 7-tel **b)** 3-mal **c)** 11-gyel
osztható számot kapunk?

**6.38.** Alább néhány ismerős képletet adunk meg és megadjunk néhány változó értékét is. Számítsuk ki a kihagyott változó értékét!
**a)** $s = v \cdot t$, $v = 12\frac{m}{sec}$, $t = 7sec$, $s = ?$
**b)** $s = v \cdot t$, $v = 12\frac{m}{sec}$, $s = 3km$, $t = ?$
**c)** $s = v \cdot t$, $s = 3km$, $t = 50sec$, $v = ?$
**e)** $k = 2r\pi$, $r = 5cm$, $k = ?$
**f)** $k = 2r\pi$, $k = 5cm$, $r = ?$
**g)** $V = a^3$, $a = 5cm$, $V = ?$
**h)** $V = a^3$, $V = 512m^3$, $a = ?$

**6.39.** [9] Alább ismerős képleteket olvashatók, amelyek síkidomok kerületét, területét, illetve testek felszínét, térfogatát adják meg.

Határozzuk meg hogy az egyes képletek mely idom melyik mennyiségének kiszámolását adják meg! Fejezzük ki a különböző változókat a többi segítségével a képletből! (Pld a $t = ab$ képlet a téglalap területét adja meg. Ebből $a = \frac{t}{b}$, $b = \frac{t}{a}$.)
**a)** $k = 3a$; $a = ?$
**b)** $k = 2(a + b)$; $a = ?$, $b = ?$
**c)** $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$; $a = ?$, $m_a = ?$
**d)** $t = \frac{(a+c) \cdot m}{2}$; $a = ?$, $m = ?$
**e)** $A = 2a^2 + 4ab$; $b = ?$

**f)** $A = 2(ab + bc + ca)$; $a = ?$
**g)** $V = a^2m$; $m = ?$
**h)** $V = abc$; $a = ?$

7. FEJEZET

# Betűkifejezések (teszt)

**7.1.** (M) Fel szeretnénk írni a pozitív egész számok közül az $n$-edik olyat, amely a tízes számrendszerben 5-ös számjegyre végződik. Az alábbi képletek közül hány helyes?

**I.)** $10n + 5$, **II.)** $10n - 5$, **III.)** $10(n - 1) + 5$, **IV.)** $20n - 15$.

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**7.2.** (M) Fel szeretnénk írni az $n$-edik háromjegyű páros számot. Azt is jelöljük, hogy mik lehetnek $n$ lehetséges értékei. Melyik képlet a helyes?

**A)** $2n$, $(1 \leq n < 500)$ **B)** $2n + 98$, $(1 \leq n < 500)$

**C)** $2n + 98$, $(1 \leq n \leq 450)$ **D)** $2n + 100$, $(0 \leq n \leq 450)$

**E)** egyik sem

**7.3.** (M) Ha $g$-nek elveszett a 10%-a, de a maradék 20%-kal nőtt, akkor most ennyi van. Írjuk le az eredményt minél egyszerűbben! Melyik algebrai megfogalmazás helyes?

**A)** $(g - g \cdot 10) \cdot 120$ **B)** $g \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{20}{100}$ **C)** $\left(g - \frac{10}{100}\right) \cdot \frac{120}{100}$

**D)** $g \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}2$ **E)** egyik sem

**7.4.** (M) Melyik esetben kapjuk a legnagyobb értéket, ha az alábbi kifejezések mindegyikébe behelyettesítünk $x = -\frac{1}{2}$-et?

**A)** $3 \cdot (x + 0{,}9)$ **B)** $3 \cdot x + 1$ **C)** $2.8 - (1 - x)$ **D)** $3 - (1{,}1 - x)$

**E)** $\frac{-x}{1+x}$

**7.5.** (M) Melyik számot helyettesíthettük be az egyes kifejezésekbe, ha helyettesítési értéknek 3-t kaptunk?

$5 \cdot x$; $5 \cdot (y - 1)$; $\frac{5}{z+\frac{2}{3}}$; $\frac{u+3}{7}$.

**A)** $x = 15$; $y = 10$; $z = \frac{15}{11}$; $u = \frac{6}{7}$ **B)** $x = 0{,}6$; $y = -0.4$; $z = 1$; $u = 18$

**C)** $x = 0{,}6$; $y = 1.6$; $z = 1$; $u = 18$ **D)** $x = 15$; $y = 10$; $z = 1$; $u = 18$

**E)** egyik sem tökéletes

**7.6.** (M) Melyik szöveges állításnak melyik algebrai összefüggés felel meg?

**I.)** $b$ az $a$ számnál hárommal kisebb szám négyzetének fele;
**II.)** $b$ az $a$ szám négyzeténél hárommal kisebb szám fele;
**III.)** $b$ az $a$ szám felének négyzeténél hárommal kisebb szám;
**IV.)** $b$ az a szám, amelynek fele $a$ négyzeténél hárommal kisebb;
**V.)** $b$ az a szám, amelynél hárommal kisebb szám az $a$ négyzetének fele;

**a)** $b = \frac{(a+3)^2}{2}$; **b)** $b = \frac{a^2}{2} - 3$; **c)** $\frac{b}{2} = (a - 3)^2$; **d)** $b = \frac{(a-3)^2}{2}$;

**e)** $\frac{b}{2} = a^2 - 3$; **f)** $b = \frac{a^2-3}{2}$; **g)** $b^2 = \frac{a-3}{2}$; **h)** $b = \frac{a^2}{2} + 3$

**i)** $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 3$.

**A)** I. – d; II. – e; III. – i; IV. – f; V. – b. **B)** I. – d; II. – f; III. – i; IV. – e; V. – h. **C)** I. – i; II. – f; III. – d; IV. – e; V. – h. **D)** I. – a; II. – e; III. – d; IV. – f; V. – i. **E)** egyik párosítás sem tökéletes

**7.7.** (M) Számítsuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyen!
**I.)** $a+3+2a-11+4a+7{,}5+3a$, ha $a=1.25$.
**II.)** $3b-(-2b)+\frac{7}{4}-b+0{,}25-(-b)$, ha $b=\frac{11}{5}$.
**III.)** $\frac{3}{4}\cdot c\cdot d-\frac{2}{7}\cdot c+\frac{d}{2}-\frac{2}{3}\cdot c\cdot d-\frac{d}{6}+\frac{1}{5}\cdot c-\frac{5}{6}\cdot c\cdot d+\frac{2d}{3}+\frac{3}{4}\cdot c\cdot d+\frac{3}{35}\cdot c$, ha $c=\frac{13}{5}$ és $d=\frac{21}{7}$.
A három kapott érték $s$ összege melyik tartományba esik?

**A)** $s\le 20$ **B)** $20<s\le 24$ **C)** $24<s\le 28$ **D)** $28<s\le 32$
**E)** $32<s$

**7.8.** (M) Gondoltam egy számot. Hozzáadtam a harmadát és még 11-et és az így kapott számnak kidobtam a harmadát és a maradékból 4-et elvéve az $x$ számot kaptam. Mi lehetett a gondolt szám? Fejezzük ki $x$-szel!

**A)** $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}(x+4)-11\right)$ **B)** $\frac{1}{3}\left(3\cdot(x+4)-11\right)$ **C)** $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}(x-4)+11\right)$
**D)** $\left(x\cdot\frac{4}{3}+11\right)\cdot\frac{2}{3}-4$ **E)** egyik sem helyes

**7.9.** (M) A $b$ nagyobb, mint az $a$. Írjuk fel azt a számot, amely annyival nagyobb $b$-nél, amennyivel $b$ nagyobb $a$-nál! Vonjuk össze a kapott kifejezést! Melyik a helyes eredmény az alábbiak közül?

**A)** $b+a$ **B)** $2b-a$ **C)** $\frac{b+a}{2}$
**D)** $b+2a$ **E)** egyik sem helyes

**7.10.** (M) Bergengócia elsőosztályú focibajnokságában $f$ csapat játszik. A bajnokság körmérkőzéses: minden csapat minden másikkal két mérkőzést játszik. A mérkőzéseken az átlagos nézőszám $n$. Egy jegy ára $j$ bengóc, bérlet és kedvezmény nincs. Évente hány bengócot költenek a bergengócok a focimecsek belépőire? Melyik képlet adja meg a helyes választ?

**A)** $f\cdot f\cdot n\cdot j$ **B)** $\frac{f\cdot(f-1)}{2}\cdot n\cdot j$ **C)** $f\cdot(f-1)\cdot n\cdot j$
**D)** $2f-1+n+j$ **E)** egyik képlet sem jó

# 8. FEJEZET
# Műveleti azonosságok

**8.1.** [20] Számítsuk ki fejben:
**a)** $97 \cdot 615 + 615 \cdot 3$ **b)** $398 + 2351 + 2$ **c)** $4 \cdot 376 \cdot 25$ **d)** $329 + 615 - 5017 - 327 + 1236 - 614 + 5019$

**e)** Fogalmazzuk meg azokat az azonosságokat, amelyekre az előző feladat megoldásához szükség volt!

**8.2.** Melyik a nagyobb? Számoljunk fejben!
**a)** $x = 5000 - (3000 - 45)$ vagy $y = 5000 - (3000 - 46)$ ?
**b)** $u = 5000 - (3000 + 45)$ vagy $v = 5000 - (3000 + 46)$ ?

**8.3.** [20] Állapítsuk meg fejben, hogy $63 \cdot 936$ harmada az alábbi számok közül melyikkel egyenlő!
$21 \cdot 312$ $63 \cdot 312$ $21 \cdot 936$

**8.4.** [20] Állapítsuk meg fejben, hogy $B$, $C$ és $D$ közül melyik egyenlő $3A$-val!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | $A = 1132 + 2025$ | $B = 3396 + 6075$ | $C = 3396 + 2025$ | $D = 1132 + 6075$ |
| **b)** | $A = 1132 - 2025$ | $B = 3396 - 6075$ | $C = 3396 - 2025$ | $D = 1132 - 6075$ |
| **c)** | $A = 1132 \cdot 2025$ | $B = 3396 \cdot 6075$ | $C = 3396 \cdot 2025$ | $D = 1132 \cdot 6075$ |
| **d)** | $A = \frac{1132}{2025}$ | $B = \frac{3396}{6075}$ | $C = \frac{3396}{2025}$ | $D = \frac{1132}{6075}$ |

**8.5.** Adott három törtszám. Az első és a második szorzata 60,9 az első és a harmadik szorzata pedig 113,1. Mennyi az első számnak és a másik két szám összegének a szorzata?

**8.6.** [20] Melyik nagyobb és mennyivel?
**a)** $x - (y + 2)$ vagy $x - y$
**b)** $x - (y - 3)$ vagy $x - y$
**c)** $x - 2(y + 5)$ vagy $x - 2y$
**d)** $x - 3(y - 7)$ vagy $x - 3y$

**8.7.** [20] Írjuk fel zárójelek nélkül!
**a)** $a - (b + c)$ **b)** $a - (b - c)$ **c)** $a - 5(b + c)$
**d)** $a - 7(b - c)$ **e)** $a - 4(b - c + d - e)$

**8.8.** [20] Gondoljunk egy számot! Adjunk hozzá 4-et, a kapott számot szorozzuk meg 5-tel, az eredményből vonjuk ki a gondolt szám dupláját, adjunk 3-at hozzá, a most kapott számból vegyük el a gondolt szám háromszorosát, az eredményt szorozzuk meg önmagával!

Dr. Agy nem ismeri a gondolt számot, mégis meg tudja mondani a végeredményt. Hogyan lehetséges ez?

**8.9.** [20] Mondjunk olyan $x$ számot, amelyre **nem igaz**:
**a)** $2(x + 3) + x = 4x - 1$ **b)** $3(x + 4) - 2x = x + 12$

**8.10.** [20] Egy pozitív négyjegyű szám két szélső jegye és két középső jegye is megegyezik. Bizonyítsd be, hogy ha a számból kivonjuk a második jegy 110-szeresét, akkor mindig az első jegy 1001-szeresét kapjuk!

**8.11.** Számoljuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyen, majd vonjunk össze és az összevonás után is helyettesítsünk be. Ha az eredmények nem egyenlők, akkor keressük meg a hibát, hibákat!

**a)** $3a-(2a+5)+(1-a)$, ha $a=3{,}2$;
**b)** $2b+(3+\frac{b}{3})-(1+\frac{b}{3})$, ha $b=\frac{1}{2}$;
**c)** $2-c-(3-\frac{1}{2}c)-(1+\frac{c}{2})$, ha $c=-1$;
**d)** $d-(3-d-e)-(2-d)+(e+2d)-(3d+2e)$, ha $d=\frac{3}{4}, e=\frac{1}{2}$;

**8.12.** Számoljuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyen, majd vonjunk össze és az összevonás után is helyettesítsünk be. Ha az eredmények nem egyenlők, akkor keressük meg a hibát, hibákat!

**a)** $3ax-(ax+a)+(a-2ax+7)-(6+3ax-a)-4xa$, ha $a=3, x=2$;
**b)** $2-by+(b-y+yb)-(b+y\frac{b}{2})-(\frac{by}{2}-y)$, ha $b=1, y=4$;
**c)** $4c^2+3z-(c^2-3c+z)-(2c^2+c-2z)+(-2c+\frac{1}{2}c^2+1)$, ha $c=-2, z=3$;
**d)** $(2du-u\cdot\frac{2}{3}d)-(1-d+\frac{1}{3}ud)-(d^2+du)+(\frac{1}{2}du-d^2)$, ha $d=4, u=-6$;

**8.13.** Végezzük el a kijelölt szorzást! (Bontsuk fel a zárójelet!)

**a)** $2\cdot(a+3)$ **b)** $3\cdot(b-2)$ **c)** $-2\cdot(c+3)$ **d)** $-2\cdot(3-d)$
**e)** $\frac{2}{3}\cdot(1-3e)$ **f)** $(2f-4)\cdot 5$ **g)** $(3-2g)\cdot\frac{2}{3}$ **h)** $(\frac{3}{5}h-1)\cdot 10$

**8.14.** Végezzük el a kijelölt szorzást! (Bontsuk fel a zárójelet!)

**a)** $2{,}5\cdot(a+3)$ **b)** $3{,}3\cdot(2b-1)$ **c)** $-2\cdot(4{,}1c+6{,}7)$ **d)** $-2{,}5\cdot(4-2{,}5d)$
**e)** $\frac{2}{3}\cdot(1-1{,}5e)$ **f)** $(2{,}5f-4)\cdot\frac{5}{2}$ **g)** $(\frac{3}{4}-2g)\cdot\frac{2}{3}$ **h)** $(\frac{3}{5}h-10)\cdot 0{,}1$

**8.15.** Bontsuk fel a zárójeleket, vonjunk össze!

**a)** $2(a+3)+3(1+a)$ **b)** $3(2b+1)+2(1-b)$
**c)** $(c-1)\cdot 4+3(c-2)$ **d)** $5(3-d)+7(d-2)$
**e)** $6(-3-e)+(2e-2)\cdot 3$ **f)** $2(3-f+7-2f-5)+4(f-2-2f)$

**8.16.** [9] Bontsuk fel a zárójeleket, vonjunk össze!

**a)** $2(a+3)-3(1+a)$ **b)** $3(2b+1)-2(1-b)$
**c)** $(c-1)\cdot 4-3(c-2)$ **d)** $5(3-d)-7(d-2)$
**e)** $6(-3-e)-(2e-2)\cdot 3$ **f)** $2(3-f+7-2f-5)-4(f-2-2f)$

**8.17.** Kössük össze pirossal azokat a kifejezéseket, amelyek minden egész $x$-re egyenlők, kékkel azokat, amelyek végtelen sok egész helyen egyenlők, zölddel azokat, amelyek egy egészre egyenlők és feketével azokat, amelyek értéke semmilyen egész $x$ érték esetén sem egyenlő!

$$3(x-2)-2(x-1)$$
$$|x-8| \qquad\qquad x-4$$
$$|x-4| \qquad\qquad x-8$$
$$4(4x+3)-5(3x+4)$$

**8.18.** Bizonyítsuk be, hogy $2(a-3)+8(a+2)$ osztható 5-tel az $a$ változó minden egész értéke esetén!

**8.19.** Az $n$ változó mely egész értéke esetén lesz az $5(n+2)-3(1-3n)$ kifejezés értéke prímszám?

**8.20. a)** $2x+5(x+3)$ kifejezést vizsgáljuk az $x$ változó egész értékei esetén, továbbá a kifejezés értékének 7-tel való maradékos osztásakor fellépő hányadost és maradékot. Töltsük ki az alábbi táblázatot!

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+5(x+3)$ | | | | | | | |
| hányados | | | | | | | |
| maradék | | | | | | | |

Adjuk meg a hányadost és a maradékot $x$ függvényében is!

**b)** Adjuk meg a hányadost és a maradékot a változó függvényében az alábbi esetekben is!

| osztandó | osztó | hányados | maradék |
|---|---|---|---|
| $3(y-2)+5(3y+5)$ | 9 | | |
| $7(2-3z)+6(5z-3)$ | 3 | | |
| $7(2-3z)-6(5z-3)$ | 3 | | |
| $4(2a+3)-2(a-3)$ | 6 | | |

**8.21.** [20] Határozzuk meg $\frac{3x+21}{x+7}$ értékét, ha $x=6187{,}115$!

**8.22.** [20] Mindig igaz? Néha igaz? Sohasem igaz?

**a)** $(2+13)\cdot a = 2\cdot a + 13\cdot a$
**b)** $130\cdot a - a = (130-1)\cdot a$
**c)** $(a+b)\cdot 9 = a + 9\cdot b$
**d)** $(7+a+b)\cdot 10 = 10\cdot a + 10\cdot b + 7$
**e)** $(7+a+b)\cdot 10 = 10\cdot a + 10\cdot b + 70$
**f)** $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$
**g)** $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$
**h)** $(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + b\cdot d$
**i)** $(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d$

Azokat az egyenlőségeket, amelyek mindig igazak, írjuk le a füzetbe, és fogalmazzuk meg szavakban is!

**8.23.** (M) [20] Szemléltessük pozitív $a$, $b$, $c$, $d$ számokra az

**a)** $c\cdot(a+b) = ca + cb$ **b)** $(a+b)\cdot(c+d) = ac + bc + ad + bd$

azonosságot!

**8.24.** [20] Számítsuk ki minél egyszerűbben! Írjuk le, mi segít a számításban!

**a)** $17\,530\cdot 17\,533 - 17\,531^2$

**b)** $17\,531\cdot 17\,534 - 17\,532^2$

**c)** $17\,532\cdot 17\,535 - 17\,533^2$

**d)** $56\,384\cdot 56\,387 - 56\,385^2$

**8.25.** [20] Melyik szám nagyobb? Indokoljuk a választ!

**a)** $58\,216^2$ vagy $\frac{58\,215^2+58\,217^2}{2}$

**b)** $58\,216^2$ vagy $\frac{58\,214^2+58\,218^2}{2}$

**c)** $58\,216^2$ vagy $\frac{58\,213^2+58\,219^2}{2}$

**d)** $1\,234^2$ vagy $\frac{1\,235^2+1\,233^2}{2}$

**8.26.** [20] Négy szomszédos páratlan szám közül a két középső szorzatából levontuk a két szélső szorzatát. Eredményül 12-t kaptunk. Mi volt a négy szám?

**8.27.** [20] Az alábbi kifejezések közül melyeknek azonos mindig az értéke?

**a)** $(a-b)(c+d)$ **b)** $(a+b)(c-d)$ **c)** $(a-b)(c-d)$

**d)** $ac+bc-ad-bd$ **e)** $ac-bc-ad-bd$ **f)** $ac-bc-ad+bd$

**g)** $ac-bc+ad+bd$ **h)** $3x^2$ **i)** $6x^2$

**j)** $(3x)^2$ **k)** $(ab)^2$ **l)** $ab^2$

**m)** $a^2b$ **n)** $a^2b^2$

**8.28.** [20] Írjuk föl minél egyszerűbb alakban!

**a)** $2xyxy\cdot 8$
**b)** $4a^2ba^3bab\cdot\frac{1}{2}$
**c)** $(5x)\cdot 4$
**d)** $(3x+2)\cdot 7$
**e)** $(2a^3+a^2b+ab^2)a$

**8.29.** [20] Írjuk fel zárójel nélkül!

**a)** $(a+b)\cdot(c+d)$ **b)** $(2a-3b)\cdot(4c+5d+6f)$ **c)** $(a^2+2b)\cdot(a+3b)$

**d)** $(a+b)^2$ **e)** $5(a-b)$

**8.30.** [20] Töltsük ki a hiányzó jobb oldalakat úgy, hogy azonosságokat kapjunk! (Zárójeleket ne használjunk!)

$(x+1)^2=$ $(x+2)^2=$ $(x+3)^2=$ $(x+4)^2=$

Oldjuk meg a feladatot általánosan is!

**8.31.** [20] Bontsuk fel a zárójeleket!

**a)** $(2x-y)^2=$ **b)** $(3c-2b)^2=$ **c)** $(2b-3c)^2=$ **d)** $\left(4x-\frac{y}{8}\right)^2=$

**8.32.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket:

**a)** $(x+5)^2=36$ **b)** $(x+6139)^2=(x+6138)^2+15$

**c)** $(x+3)\cdot(x+4)-(x+1)\cdot(x+6)=6$

**8.33.** [20] Azonosságok-e a következő egyenlőségek?

**a)** $(x+1)\cdot(x+2)+(x+1)\cdot(x-2)+(x-1)\cdot(x+2)+(x-1)\cdot(x-2)=4x^2$
**b)** $(x+2)^2=x^2+4$

**8.34.** [20] Milyen $x$-re igaz?

$(x+1)\cdot(x+5)-(3x-1)=8x-(2-x)\cdot(x-3)$

**8.35.** [20] Jelöljük meg azonos jelzéssel azokat a kifejezéseket, amelyek értéke mindig azonos!

**a)** $a-(b+c)$ **b)** $a-(b-c)$ **c)** $(a-b)^2$ **d)** $(a+b)^2$
**e)** $a+(-b)$ **f)** $-(b+a)$ **g)** $a+(-1)b$ **h)** $a-b+c$
**i)** $a-b-c$ **j)** $-(b+c-a)$ **k)** $-(b-c-a)$ **l)** $a^2-2ab-b^2$
**m)** $a^2+b^2$ **n)** $a^2-b^2$ **p)** $a^2+2ab+b^2$ **q)** $(-1)(a+b)$
**r)** $(-1)(b-a)$ **s)** $(-a)b$ **t)** $(-a)(-b)$ **u)** $-ab$
**v)** $a(-b)$

**8.36.** [20] Jelöljük azonos jelzéssel azokat a kifejezéseket, amelyek értéke mindig azonos (amikor mindkettő értelmes)!

**a)** $\frac{a}{b}$ **b)** $\frac{ac}{b}$ **c)** $\frac{a:c}{b}$ **d)** $\frac{a}{bc}$ **e)** $\frac{a}{b:c}$ **f)** $\frac{a}{b}:c$ **g)** $\frac{a}{b}\cdot c$
**h)** $c:\frac{a}{b}$ **i)** $c:\frac{b}{a}$ **j)** $\frac{ac}{bc}$ **k)** $\frac{a:c}{b:c}$

**8.37.** [20] Írjuk fel minél egyszerűbben!

**a)** $\frac{x}{3}\cdot 15$ **b)** $\frac{c}{4}\cdot 24$ **c)** $\frac{5}{x}\cdot xy$ **d)** $\frac{a}{x}\cdot x^2$
**e)** $\frac{17}{5x}\cdot 25x^2$ **f)** $\frac{3}{x-2}\cdot x(x-2)$ **g)** $\frac{x^2+5x}{x+5}$ **h)** $\frac{2x^2+x}{x}$

**8.38.** [20] Írjuk fel egyetlen törtvonal alkalmazásával a lehető legegyszerűbb alakban az alábbi kifejezéseket!

**a)** $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}$ **b)** $\frac{x}{3}\cdot\frac{y}{4}$ **c)** $\frac{x}{3}:\frac{y}{4}$ **d)** $\frac{6x}{7}:3$ **e)** $\frac{6x}{7}:5$
**f)** $\frac{11x}{12}\cdot 4$ **g)** $\frac{11x}{12}\cdot 5$ **h)** $\frac{11x}{12}\cdot 36$ **i)** $\frac{2}{3x}+\frac{3}{5x}$ **j)** $\frac{x}{4}\cdot\frac{7}{x}$
**k)** $x:\frac{3}{x}$ **l)** $\frac{\frac{1}{x}+2+a}{4-\frac{a}{x}}$ **m)** $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

**8.39.** [20] Írjuk fel egyetlen törtvonallal!

**a)** $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{2}{x}+\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$ **d)** $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$ **e)** $\frac{3}{2x}+\frac{4}{7x}$

**8.40.** [20] Írjuk fel minél egyszerűbben!

**a)** $\frac{3x^2-5x}{2x^2+3x}$ **b)** $\frac{2x+\frac{1}{x}+1}{3x-\frac{1}{x}-2}$ **c)** $\frac{2x}{x+2}+\frac{4}{x+2}$ **d)** $\frac{6x+9}{8x+12}$ **e)** $\frac{8a}{7}:2$
**f)** $\frac{8b}{5}:3$ **g)** $\frac{7b}{12}\cdot 3$ **h)** $\frac{12b}{7}\cdot 3$ **i)** $\frac{2x}{4}\cdot\frac{6}{x^2}$ **j)** $\frac{x^2}{10}:\frac{x}{5}$
**k)** $\frac{6(3x+9)}{3}$ **l)** $\frac{2x+6}{x+3}$ **m)** $\frac{x^2+1}{x+1}$ **n)** $\frac{x^2-1}{x-1}$

**8.41.** [20] Az alábbi egyenlőségek közül melyik azonosság és melyik nem az?

**a)** $\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{x}=12$ **b)** $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
**c)** $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ **d)** $3(a+b+ab)=3a+3b+(3a)(3b)$
**e)** $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$ **f)** $\frac{a}{b-c}-1=\frac{a-b-c}{b-c}$
**g)** $\frac{4x+y}{2x-y}=\frac{2x+y}{x-y}$ **h)** $\frac{3x+4y+2}{2x-y+2}=\frac{3x+4y}{2x-y}$

**8.42.** [20] Az alábbi állítások mellé írjunk **1-est**, ha mindig igazak (vagyis a benne szereplő betűk minden behelyettesíthető értékére igazak); **2-est**, ha sohasem igazak; $x$**-et** az összes többi esetben!

**a)** $(a+b)^2=a^2+b^2$ **b)** $(a-b)^2=a^2-2ab-b^2$ **c)** $3(x+2)=3x+2$
**d)** $3\cdot(2x)=6\cdot 3x$ **e)** $(4x)^2=4x^2$ **f)** $\frac{4b}{7}21=12b$

**g)** $\left(a - \frac{b+2}{3}\right)3 = 3a - b + 2$ **h)** $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$ **i)** $(a-b)^2 = (b-a)^2$

**8.43.** Ha $a$ és $b$ nullánál nagyobb természetes számok, és $b$ nagyobb $a$-nál, akkor melyik a nagyobb:

$$\frac{2a+b}{a} \quad \text{vagy} \quad \frac{a+2b}{b} \quad ?$$

**8.44.** Az $ABC$ háromszögben az $A$, $B$ csúcsoknál található belső szögek $\alpha$ és $\beta$. Fejezzük ki ezekkel

**a)** a $C$ csúcsnál fekvő külső szöget!
**b)** a $C$ csúcsnál fekvő belső szöget!
**c)** az $A$-nál és $B$-nél fekvő belső szögek szögfelezői által egymással bezárt szöget!
**d)** a $C$ csúcsnál fekvő belső és külső szög szögfelezőjének egymással bezárt szögét!

**8.45.** Az $ABC$ háromszögben a $B$ csúcsnál lévő belső szög $90°$ -kal nagyobb, mint az $A$ csúcsnál lévő belső szög. A $C$ csúcsnál lévő belső szög szögfelező egyenese az $AB$ oldalt $D$-ben, míg a $C$ csúcsnál lévő külső szög szögfelezője az $AB$ egyenest $E$-ben metszi. Számítsuk ki a $CDE$ háromszög szögeit!

**8.46.** Igaz-e, hogy bármely paralelogramma szögfelezői téglalapot határolnak?

**8.47.** Az $ABC$ derékszögű háromszög $AB$ átfogóján felvett $D$, $E$ pontokra $AE = AC$, $BD = BC$. Határozzuk meg a $DCE$ szög nagyságát!

# 9. FEJEZET
# Műveleti azonosságok (teszt)

A teszt megoldásakor ne használjunk számológépet!

**9.1.** (M) Legyen $A = 472{,}124 + 4511{,}67$. Állapítsuk meg fejben, hogy $X$, $Y$ és $Z$ közül melyik egyenlő $10A$-val!

$X = 4721{,}24 + 4511{,}67$; $Y = 472{,}124 + 45116{,}7$; $Z = 4721{,}24 + 45116{,}7$.

**A)** csak $X$ **B)** csak $Y$ **C)** csak $Z$ **D)** $X$ és $Y$ is **E)** egyik sem

**9.2.** (M) Legyen $A = 472{,}124 \cdot 4511{,}67$. Állapítsuk meg fejben, hogy $X$, $Y$ és $Z$ közül melyik egyenlő $10A$-val!

$X = 4721{,}24 \cdot 4511{,}67$; $Y = 472{,}124 \cdot 45116{,}7$; $Z = 4721{,}24 \cdot 45116{,}7$.

**A)** csak $X$ **B)** csak $Y$ **C)** csak $Z$ **D)** $X$ és $Y$ is **E)** egyik sem

**9.3.** (M) Legyen $A = \frac{53472{,}124}{4511{,}67}$. Állapítsuk meg fejben, hogy $X$, $Y$ és $Z$ közül melyik egyenlő $10A$-val!

$X = \frac{534721{,}24}{4511{,}67}$; $Y = \frac{53472{,}124}{45116{,}7}$; $Z = \frac{534721{,}24}{45116{,}7}$.

**A)** csak $X$ **B)** csak $Y$ **C)** csak $Z$ **D)** $X$ és $Y$ is **E)** egyik sem

**9.4.** (M) Legyen $A = 472{,}124 + 4511{,}67$. Állapítsuk meg fejben, hogy $X$, $Y$ és $Z$ közül melyik egyenlő $A + 10$-zel!

$X = 482{,}124 + 4511{,}67$; $Y = 472{,}124 + 4521{,}67$; $Z = 482{,}124 + 4521{,}67$.

**A)** csak $X$ **B)** csak $Y$ **C)** csak $Z$ **D)** $X$ és $Y$ is **E)** egyik sem

**9.5.** (M) Legyen $A = 472{,}124 \cdot 4511{,}67$. Állapítsuk meg fejben, hogy $X$, $Y$ és $Z$ közül melyik egyenlő $A + 10$-zel!

$X = 482{,}124 \cdot 4511{,}67$; $Y = 472{,}124 \cdot 4521{,}67$; $Z = 482{,}124 \cdot 4521{,}67$.

**A)** csak $X$ **B)** csak $Y$ **C)** csak $Z$ **D)** $X$ és $Y$ is **E)** egyik sem

**9.6.** (M) Melyik a legnagyobb?

**A)** $x - 3(y - 5)$ **B)** $x - 3(y + 5)$
**C)** $x - 3y - 4$ **D)** $x - 3y + 6$
**E)** a válasz függ $x$-től és $y$-tól

**9.7.** (M) Döntsük el az alábbi egyenletekről külön-külön, hogy miképpen teljesülnek a racionális számokra? Minden $x$-re teljesül ($\forall$)? Van olyan $x$ – de nem mind olyan –, amire teljesül ($\exists$)? Egyik racionális $x$-re sem teljesül ($\nexists$)?

**I.)** $(x - 3) \cdot 7 = 7x - 21$

**II.)** $(x-5)\cdot(x-4)=x^2-9x-20$
**III.)** $(x+2)\cdot(3+x)=5x+6$
**IV.)** $2x-(3-(x-1))=3x-2$

**A)** I. $-\forall$, II. $-\nexists$, III. $-\exists$, IV. $-\nexists$ **B)** I. $-\forall$, II. $-\forall$, III. $-\nexists$, IV. $-\nexists$
**C)** I. $-\forall$, II. $-\nexists$, III. $-\nexists$, IV. $-\forall$ **D)** I. $-\exists$, II. $-\nexists$, III. $-\exists$, IV. $-\nexists$
**E)** I. $-\nexists$, II. $-\exists$, III. $-\forall$, IV. $-\forall$

**9.8.** (M) Az alábbi $X$, $Y$, $Z$, $U$, $V$ számok között hány különböző van?
$X=1993\cdot1998-1995^2$; $Y=1995\cdot2001-1997\cdot1998$;
$U=1997^2-1995\cdot1999$; $V=1991\cdot1995-1992\cdot1993$;
$Z=1990\cdot1993-1991^2$.
**A)** egy **B)** kettő **C)** három **D)** négy **E)** öt

**9.9.** (M) Az alábbi $X$, $Y$, $Z$, $U$, $V$ számok között hány különböző van?
$X=\frac{2001}{1998}$; $Y=\frac{2001}{2000}\cdot\frac{2000}{1999}\cdot\frac{1999}{1998}$; $U=\frac{1}{2}+\frac{501}{999}$;
$V=\frac{667}{1998}+\frac{667}{999}$; $Z=\frac{667}{666}$.
**A)** egy **B)** kettő **C)** három **D)** négy **E)** öt

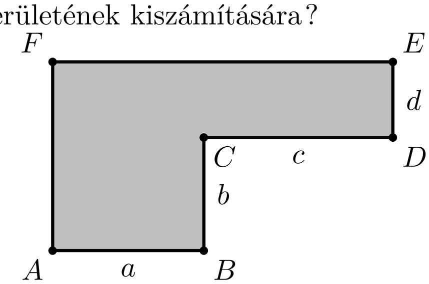
**9.10.** (M) Hány azonosság van az alábbi négy egyenlőség között?
**I.)** $\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ **II.)** $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$ **III.)** $\frac{3x+15}{x+5}=3$
**IV.)** $x:\frac{5}{x}=\frac{1}{5}$
**A)** nulla **B)** egy **C)** kettő **D)** három **E)** négy

**9.11.** (M) Hány olyan pozitív egész szám van, amellyel

$$4(2n+5)-2(7-2n)$$

az $n$ minden pozitív egész értéke esetén osztható?
**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 4-nél több

**9.12.** (M) Az $ABCDEF$ hatszög minden belső szöge 90°-os kivéve a $C$-nél fekvő szögét, mert az 270°-os (lásd a 9.0.1. ábrát). Az $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ oldalak hossza rendre $a$, $b$, $c$ és $d$. Melyik képlet *nem* alkalmas a hatszög területének kiszámítására?




9.12.1. ábra.

**A)** $(a+c)\cdot(b+d)-b\cdot c$ **B)** $a\cdot b+(a+c)\cdot d$ **C)** $c\cdot d+a\cdot(b+d)$
**D)** $b\cdot a+a\cdot d+d\cdot c$ **E)** mindegyik alkalmas

## 10. FEJEZET
# Hatványozás

**10.1.** [20] A legenda szerint, mikor a sakkjáték feltalálóját meg szerette volna jutalmazni a perzsa király, az a következő – első hallásra szerénynek tűnő – kívánsággal állt elő: „A sakktábla első mezőjére tégy nekem 1 búzaszemet, a másodikra 2-t, a harmadikra 4-et,... és így tovább, minden négyzetre az előző négyzeten levő búzaszemek kétszeresét.”

**a)** Vajon teljesítette a király a kérést?

**b)** Hány búzaszem kerül az utolsó négyzetre? Becsüljük meg az idekerülő búzamennyiség tárfogatát (1 $m^3$-ben körülbelül 15 millió búzaszem fér el)!

**c)** Számítsuk ki, hogy hány búzaszem kerül a sakktáblára összesen és becsüljük meg a térfogatát is!

**10.2.** [20] Okos Tóni és Együgyű Jankó furcsa szerződést kötött. Jankó vállalta, hogy január 1-jétől a hónap utolsó napjáig naponta 100 000 forintot visz Tóninak, igen csekély ellenszolgáltatás fejében: Tóni 1-jén 1 forintot fizet, 2-án 2 forintot, 3-án 4 forintot, és a következő napokon is az előző nap kifizetett összeg dupláját. Okos Tóni annyira megörült a várható nagy nyereségnek, hogy ki sem számította, pontosan mennyit kell fizetnie a 3,1 millió forintért. Számítsuk ki helyette!

**10.3.** (S) [20] Egy $\frac{1}{10}$ mm vastag papírlapot 50-szer félbehajtunk. Milyen vastag lesz?

Először tippeljünk, és utána próbáljuk a tippet számítással ellenőrizni!

**10.4.** [20] Melyik nagyobb?

$3^4$ vagy $4^3$
$2^5$ vagy $5^2$
$10^3$ vagy $3^{10}$

**10.5.** [20] Mik az utolsó jegyei a következő számoknak?

$2^{10}$ $2^{20}$ $(2^{10})^{20}$ $3^{20}$ $3^{100}$ $6^{100}$ $8^{16}$
$15^{15}$ $81^6$ $81^7$ $81^{81}$ $99^{77}$

**10.6.** [20] Milyen $x$ értékekre igazak a következő egyenletek és egyenlőtlenségek?

$2^{x+1} = 32$ $3^{2x-1} = 81$ $7^{x-3} < 49$ $7^{x-3} > 49$ $4^{2x+3} > 8192$
$3^{2x-1} = 0$

**10.7.** Kössük össze az egymással egyenlőket!

$5^{12}$ $5^3 \cdot 5^4$ $5^7$ $5^7 \cdot 5^2$

$(5^3)^4$ $\frac{5^{12}}{5^5}$ $(5^6)^2$ $2^7 + 3^7$

**10.8.** Kössük össze az egymással egyenlőket!

$2^6 \cdot 5^6$ $2 \cdot (2 \cdot 5)^5 \cdot 5$ $10^6$ $10^{12}$

$(10^3)^4$ $\frac{20^{12}}{2^{12}}$ $8^6 + 2^6$ $(2 \cdot 5)^{12}$

**10.9.** [20] **a)** Milyen $x$-re igazak a következő egyenlőségek?

$3^5 \cdot 3^3 = 3^{x+3}$ $\qquad$ $8^5 \cdot 8^x = 8^7$

**b)** Hányszor szerepel az $a$ tényező az $a^m \cdot a^n$ szorzatban ($m$ és $n$ természetes számok)?

$a^m \cdot a^n =$

**c)** Fogalmazzuk meg, hogyan szorozhatunk egyenlő alapú hatványokat!

**10.10.** [20] **a)** Milyen $x$-re igazak a következő egyenlőségek?

$2^4 \cdot 2^x = 2^9$ $\qquad$ $5^3 \cdot 5^x = 5^8$

**b)** A feladatok osztásként is fölírhatók:

$\frac{2^9}{2^4} = 2^x$ $\qquad$ $\frac{5^8}{5^3} = 5^x$

Hányszor szerepel az $a$ tényező az $\frac{a^m}{a^n}$ hányados egyszerűsített alakjában ($m$ és $n$ természetes számok)?

Ha $m \geq n$, $\frac{a^m}{a^n} =$ $\qquad$ Ha $m < n$, $\frac{a^m}{a^n} =$

**c)** Fogalmazzuk meg, hogyan oszthatunk egyenlő alapú hatványokat!

**10.11.** [20] Melyik a nagyobb?

$(2 \cdot 5)^4$ vagy $2^4 \cdot 5^4$ $\qquad$ $(3 \cdot 8)^3$ vagy $3^4 \cdot 8^3$

Indokoljunk is!

**10.12.** [20] **a)** Számítsuk ki minél ügyesebben!

$2^7 \cdot 5^3 =$ $\qquad$ $4^3 \cdot 25^2 =$

Indokoljunk is!

**b)** Általánosan: $(a \cdot b)^n =$

Fogalmazzuk meg, hogyan hatványozhatunk szorzatot!

**10.13.** [20] **a)** Számoljunk ügyesen, indokoljunk is!

$\frac{38^3}{19^3} =$

$\frac{48^4}{27 \cdot 16^4} =$

**b)** Igazoljuk az $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ összefüggést!

**10.14.** [20] Milyen $x, y \in \mathbb{N}$-re igazak a következő egyenlőségek?

$4^x = 2^y$

$8^x = 4^y$

**10.15.** [20] **a)** Melyik nagyobb? Próbáljunk minél kevesebb számolással válaszolni!

$\left(2^5\right)^3$ vagy $\frac{6^{15}}{3^{11}}$ $\qquad$ $49^6$ vagy $35^8$

**b)** Általánosan: $(a^m)^n =$

Fogalmazzuk meg, hatványt hogyan hatványozhatunk!

**10.16.** [20] Mivel egyenlő?

**a)** $52 \cdot 3^7 + 8 \cdot 3^8 - 25 \cdot 3^8$

**b)** $\left(2^5\right)^5$

**c)** $2^2 \cdot 5^2$

**d)** $2^3 \cdot 5$

**e)** $2^3 \cdot 5^3$

**f)** $2^3 \cdot 5^4$

**g)** $3^6 + 9^3$

**h)** $2^6 + 6^3$

**10.17.** [20] Rendezzük a következő számokat növekvő sorrendbe!
$30^2$ $2^{30}$ $20^3$ $15^4$ $4^{15}$ $10^6$
$6^{10}$

**10.18.** [20] Milyen $x$-re igazak?
$2^{x+2} - 2^x = 96$ $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^x = 39$

**10.19.** [20] Tedd ki két-két szám közé a $<$, a $>$ vagy az $=$ jelek közül a megfelelőt!
**a)** $7^7$ $6 \cdot 7^6$ **b)** $2 \cdot 3^{10} + 5 \cdot 3^{11} + 3^{12}$ $3^{13}$
**c)** $9^7 + 8 \cdot 9^7$ $9^8$ **d)** $4^{15} + 4^{15} + 4^{15} + 4^{15}$ $4^{17}$
**e)** $2^9 + 2^6$ $9 \cdot 2^6$ **f)** $\frac{2^{15}-2^{14}}{2^{13}}$ $2$
**g)** $\frac{3}{3^{10} \cdot 5^8}$ $\frac{1}{3^9 \cdot 5^6}$ **h)** $\frac{3^{10} \cdot 5^8}{3}$ $\frac{3^9 \cdot 5^6}{3}$

**10.20.** [20] Melyik nagyobb?
$8^5$ vagy $3 \cdot 4^7$ $48 \cdot 50^5$ vagy $10^{10}$ $3^{200}$ vagy $4^{150}$

**10.21.** [20] Készítsünk a füzetbe ilyen táblázatot! Próbáljuk meg lefelé is folytatni!

| kitevő | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | 8 | | | | | |
| 2 | | 0 | 1 | 4 | 9 | | | | |
| 1 | **alap:** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{2}$ |
| 0 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | | | | | | | | | |
| -2 | | | | | | | | | |

Írjuk le, milyen szabályszerűség alapján folytattuk a kitöltést!
Ennek alapján hogyan értelmezzük a pozitív számok negatív kitevőjű hatványait?

**10.22.** [20] Nézzük meg, igazak-e a következő egyenlőségek!
$2^{-5} \cdot 2^5 = 2^{-5+5} = 2^0$ $3^0 \cdot 3^4 = 3^{0+4} = 3^4$ $5^{-9} \cdot 5^{-7} \cdot 5^{-6} = 5^{-22}$
$3^0 \cdot 3^{-4} = 3^{0-4} = 3^{-4}$ $\left(5^{-2}\right)^3 = 5^{-2 \cdot 3} = 5^{-6}$ $\left(2^5\right)^{-4} = 2^{5 \cdot (-4)} = 2^{-20}$
$2^{-3} \cdot 3^{-3} = (2 \cdot 3)^{-3}$ $\frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

**10.23.** [20] A hatványozás azonosságai közül (szorzat hatványam hányados hatványa, hatvány hatványa stb.) válasszunk ki egyet és igazoljuk abban az esetben, amikor negatív kitevőjű hatványokat is megengedünk!

**10.24.** [20] Egy alumíniumlemezben az atomok távolsága:

$$0{,}000\,000\,025 \text{ cm}$$

Írjuk fel ezt is röviden!

**10.25.** [20] Adjuk meg az alábbi számok normálalakját!
$95 \cdot 10^{23}$ $1983 \cdot 10^{30}$ $188\,385 \cdot 10^{53}$ $0{,}000\,000\,025$

**10.26.** [20] A 7 hatványainak felhasználásával végezzük el az itt szereplő műveleteket minél egyszerűbben!

| | |
|---|---|
| $7^0 =$ | 1 |
| $7^1 =$ | 7 |
| $7^2 =$ | 49 |
| $7^3 =$ | 343 |
| $7^4 =$ | 2401 |
| $7^5 =$ | 16 807 |
| $7^6 =$ | 117 649 |
| $7^7 =$ | 823 543 |
| $7^8 =$ | 5 764 801 |
| $7^9 =$ | 40 353 607 |
| $7^{10} =$ | 282 475 249 |
| $7^{11} =$ | 1 977 326 743 |
| $7^{12} =$ | 13 841 287 201 |
| $7^{13} =$ | 96 889 010 407 |
| $7^{14} =$ | 678 223 072 849 |
| $7^{15} =$ | 4 747 561 509 943 |

$2401 \cdot 49 =$ $\quad$ $16\,807^2 =$ $\quad$ $343^5 =$ $\quad$ $\frac{5\,764\,801}{16\,807} =$

$117\,649 \cdot 5\,764\,801 =$ $\quad$ $\left(\frac{823\,543}{117\,649}\right)^{10} =$

Keress még olyan műveleteket, amelyeknek az eredményét könnyen meg tudod adni az itt szereplő 7 hatványok segítségével!

**10.27.** [20] Számítsuk ki!

$2^{15} \cdot 2^{-3} =$ $\quad$ $2^{15} : 2^{-3} =$ $\quad$ $2^{-5} : 2^{-3} =$ $\quad$ $2^{-5} + 2^{-3} =$ $\quad$ $5^{-6} : 5^{-10} =$

$2^{-5} + 6^{-5} =$ $\quad$ $\left(4 \cdot 2^{-3}\right)^5 =$ $\quad$ $\left(3 \cdot 10^{-4}\right)^{-5} =$ $\quad$ $\left(3 \cdot 10^{-4}\right)^5 =$

**10.28.** [20] Egyszerűsítsük a következő törteket!

$\frac{72^4}{108^3}$ $\quad$ $\frac{84^4}{21^3 \cdot 12^2}$ $\quad$ $\frac{2^{15}+2^{12}}{3 \cdot 2^{13}+2^{12}}$ $\quad$ $\frac{2^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot 2^4 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-3}}$

**10.29.** [20] Számítsuk ki!

$\left(\frac{3^6}{2^7} + \frac{3^7}{2^8}\right) \cdot \frac{2^8}{3^6} =$ $\quad$ $\left(2^7 \cdot 3^5 + 2^6 \cdot 3^6\right) : 2^7 \cdot 3^7 =$ $\quad$ $\frac{(-3)^6 \cdot \left(2^2\right)^6 \cdot 3^{-2} \cdot 5^4 \cdot 2^{-10}}{5^8 \cdot 3^8 \cdot 2^6 \cdot 5^{-4} \cdot 2^{-4}} =$

$\frac{\left(\frac{3^{-6}}{2^{-7}}+\frac{3^{-7}}{4^{-4}}\right)}{\cdot} \frac{4^{-4}}{9^{-3}} =$ $\quad$ $\frac{\left(12^{-3}\right)^{-2} \cdot 75^{-2} \cdot 4^{-5}}{\left(25^{-2}\right)^2 \cdot 18^6 \cdot 10^4} =$ $\quad$ $\frac{\left(2^{-3}\right)^2 \cdot 18^{-5}}{9^{-2} \cdot 6^{-6} \cdot 4^{-3}} =$

**10.30.** [20] Képzeljük el, hogy egy 10 m élű kockát mm$^3$-es kockákkal raktak ki. Az alábbi kérdésekre először gyors becsléssel válaszoljunk, utána számítsuk ki a pontos eredményt!

**a)** Ha ezeket a mm$^3$-es kockákat egyrétűen helyeznénk el, hány m$^2$-es területet fedhetnénk be velük?

**b)** Egymás után rakva a kis kockákat hány km hosszú sor alakulna ki belőlük?

**10.31.** [20] A Föld tömege $6 \cdot 10^{27}$ g. A Nap tömege $2 \cdot 10^{33}$ g. Hányszorosa a Nap tömege a Föld tömegének?

**10.32.** [20] A Föld felszínének minden cm$^2$-ére 1 kg tömegű levegő nehezedik. A Föld felszíne $51 \cdot 10^7$ km$^2$ Hányszorosa a Föld a ránehezedő levegő tömegének?

**10.33.** [20] **a)** Hány mm$^3$-es kocka fér el egy 1 m$^3$-es kockában?

**b)** A kis kockák felszínének összege hányszorosa az 1 m$^3$-es kocka felszínének?

**10.34.** [20] A Föld sugara kerekítve 6400 km. Egy ilyen élű kocka köbtartalma hány $m^3$ volna? Előbb becsüld meg, csak azután számítsd ki! A végén nézzétek meg, kinek volt az osztályban a legjobb a becslése!

**10.35.** [20] Az alumíniumban két atom közötti távolság körülbelül $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm. Hányszorosa ennek a Nap és a Föld távolsága, amely körülbelül $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km?

**10.36.** [20] A Föld térfogata körülbelül $10^{21}$ $m^3$. Az arany sűrűsége 19,3 $gcm^3$. Mekkora lenne a Föld tömege, ha színaranyból lenne?

**10.37.** [20] A Kossuth rádió hullámhossza kereken 555 m, a sárga fényé $6 \cdot 10^{-4}$ milliméter. Hányszorosa a Kossuth rádió hullámhossza a sárga fényének?

**10.38.** [20] Mekkora a területe annak a négyzetnek, és mekkora a térfogata annak a kockának, amelynek az élhossza $3{,}2 \cdot 10^{-10}$ mm?

**10.39.** [20] Egy korong alakú vörösvérsejt alapkörének átmérője közelítőleg $7{,}4 \cdot 10^{-6}$ mm; magassága pedig közelítőleg $2 \cdot 10^{-6}$ mm. Mekkora a térfogata?

**10.40.** [20] 1 $mm^3$ vérben közelítőleg 5 000 000 vörösvérsejt van. Egy embernek átlag 5 liter a vére. Ebben mennyi a vörösvérsejt? Mekkora ezeknek az együttes térfogata? (Használd fel az előző feladat eredményét!)

**10.41.** [20] Egy mikrobiológus megfigyelte, hogy egy papucsállatka 8061-szer osztódott, és hogy az első negyven generáció térfogata körülbelül 1 $m^3$. Mekkora teret foglalt volna el az utolsó generáció, ha közben egyetlen papucsállatka sem pusztult volna el?

**10.42.** [20] Egy érett mákgubóban körülbelül 3000 mákszem van. Ideális körülmények között a következő nyáron akár mindegyikből nőhet egy új tő, amely legalább egy gubót tartalmaz, és a régiek is megmaradnak. 10 év múlva körülbelül mekkora területet borítana mák?

(Veheted úgy, hogy 1 $m^2$-en legfeljebb 200 tő mák terem.)

**10.43.** [20] Milyen $x$ értékekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek? Igyekezzünk ügyesen átalakítani az egyenlőtlenségeket!

$2^x > 4^x$ $\qquad$ $3^{x+4} < 9^x$ $\qquad$ $2^{x+3} \leq 3^x$ $\qquad$ $3^{2x} \geq 9^x$

**10.44.** [20] Minél kevesebb számolással állapítsuk meg, melyik a nagyobb!

$2^{12} + 2^{13}$ vagy $2^{14}$ $\qquad$ $9^{30}$ vagy $3^{61}$ $\qquad$ $50^5$ vagy $2^{10} \cdot 3^{10}$

$125^4$ vagy $9 \cdot 9^7$ $\qquad$ $\left(3^3\right)^3$ vagy $3^{\left(3^3\right)}$ $\qquad$ $\left(4^4\right)^4$ vagy $4^{\left(4^4\right)}$

**10.45.** [20] Írjuk fel a lehető legnagyobb számot

**a)** 4 darab 2-es számjegy felhasználásával;

**b)** 4 darab 5-ös számjeggyel!

(A kifejezésekben a számjegyeken kívül csak a +, −, :, ·, ), ( jelek használhatók!)

**10.46.** [20] Milyen $x$-re igazak?

$2 \cdot 2^x = 1024$ $\qquad$ $32 \cdot 2^x = 2^{10}$ $\qquad$ $10 \cdot 2^x = 5120$

**10.47.** [20] Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket!

$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot \frac{10}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$ $\qquad$ $\frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}{7} \cdot \frac{7^2}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$ $\qquad$ $\frac{2^{14}+2^{12}}{3 \cdot 2^{13}-2^{12}}$ $\qquad$ $\frac{5^8-5^7}{5^7-5^6}$

$\frac{2^{20}+3 \cdot 2^{18}+2^{17}}{3 \cdot 2^{18}-2^{17}}$ $\qquad$ $\frac{6^{18}+6^6 \cdot 6^{12}}{3 \cdot 6^{18}+6^{15} \cdot 6^3}$ $\qquad$ $\frac{72^3}{108^2}$ $\qquad$ $\frac{36^3}{27^2 \cdot 8^2}$

**10.48.** Adjuk meg az alábbi számok prímtényezős felbontását!

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 90 | 900 | 9000 | 90000 | 18 | 180 |
| 1800 | 18000 | 180000 | | | | |

**10.49.** Egy bolha ugrál a számegyenesen. A 0 pontból indul, első ugrásával 1-be érkezik. Minden további ugrása feleakkora, mint a megelőző volt. Hová jut 10. ugrásával a bolha, ha

**a)** mindig ugyanabba az irányba ugrik;

**b)** minden ugrása után irányt változtat?

**10.50.** Váltsuk át a hármas számrendszerben 11111111 alakú számot 10-es számrendszerbe!

**10.51.** Határozzuk meg a $\frac{10^{2006}-1}{9}$ szám számjegyeinek összegét!

**10.52.** [7] Figyeljük meg a következő két egyenlőséget:

$$11 - 2 = 3^2, \qquad 1111 - 22 = 33^2.$$

Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az általánosítást!

**10.53.** Valaki egy négyzetet a következőképpen „díszített” ki. Először 9 egybevágó kis négyzetre osztotta, majd első lépésként beszínezte a középső négyzetet. Másodszor, a megmaradó 8 kis négyzet mindegyikét újra 9 egybevágó, még kisebb négyzetre osztotta, és mindegyikben beszínezte a középső kis négyzetet. Ezt az eljárást végül is összesen ötször hajtotta végre. Hányad részét színezte be az eredeti négyzetnek?

11. FEJEZET

# Hatványozás (teszt)

**11.1.** (M) A Föld lakossága 1800-ban kb. 1 milliárd volt. Egy modell szerint az emberek száma minden 200 évben megötszöröződik. Ezzel a modellel számolva mennyi lenne a Föld $L$ lakossága 3000-ben?

**A)** $L \leq 10^{10}$ **B)** $10^{10} < L \leq 10^{11}$ **C)** $10^{11} < L \leq 10^{12}$
**D)** $10^{12} < L \leq 10^{13}$ **E)** $10^{13} < L$

**11.2.** (M) A Földet tekintsük 6400 km sugarú gömbnek. Az $r$ sugarú gömb felszínét a $4r^2\pi$ képlet adja meg. A 11.1. feladatban leírt modellel számolva átlagosan hány négyzetméter terület jutna egy emberre, ha felosztanánk a Föld felszínét – az óceánokat, tavakat, tengereket is beszámítva – a lakosok között? A keresett $T$ területre (m$^2$-ben):

**A)** $T \leq 10$ **B)** $10 < T \leq 5 \cdot 10^2$ **C)** $5 \cdot 10^2 < L \leq 10^3$
**D)** $10^3 < L \leq 5 \cdot 10^3$ **E)** $5 \cdot 10^3 < L$

**11.3.** (M) Rendezzük a következő számokat növekvő sorrendbe!

$X = 9^{10}$ $Y = 2^{30}$ $Z = 10^9$

Melyik sorrend a helyes?

**A)** $Z < Y < X$ **B)** $Z < X < Y$ **C)** $Y < Z < X$ **D)** $X < Y < Z$
**E)** egyik sem

**11.4.** (M) Válasszuk ki negyvenkétmillió prímtényezős felbontását!

**A)** $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^5$ **B)** $2^5 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot 7$ **C)** $2^6 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot 7$ **D)** $2^7 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 7^2$
**E)** egyik sem

**11.5.** (M) Legyen $n = 2007$ és tekintsük az alábbi hat számot:

$T = 5^n \cdot 5^n$; $U = 5^{(n^2)}$; $V = 5^{2n}$; $X = 25^n$; $Y = (5^5)^n$; $Z = (5^n)^n$.

A hat érték között lehetnek egyenlőek. Le szeretnénk kódolni, hogy melyik értékből hány van. Az $(1,1,1,3)$ kódban a három egyes azt jelenti, hogy van három érték, amelyik csak egyszer-egyszer fordul elő, a hármas pedig azt, hogy van három kifejezés, amelynek ugyanaz az értéke. Mi a fenti hat számnak megfelelő kód?

**A)** $(1,1,2,2)$ **B)** $(2,2,2)$ **C)** $(1,2,3)$ **D)** $(1,1,4)$ **E)** egyik sem

**11.6.** (M) Hány olyan $(x;y)$ egész számokból álló pár elégíti ki az alábbi egyenletet, amelyre $0 < x \leq 19$, $0 < y \leq 19$?

$$16^x = 32^y$$

**A)** egy sem **B)** egy **C)** kettő **D)** három
**E)** legalább négy

**11.7.** (M) Hány olyan $(x;y)$ egész számokból álló pár elégíti ki az alábbi egyenletet, amelyre $0 < x \leq 19$, $0 < y \leq 19$?

$$\frac{4^x}{4^y} = 16$$

A megoldások $m$ számára
**A)** $0 \leq m < 4$ **B)** $4 \leq m < 8$ **C)** $8 \leq m < 12$ **D)** $12 \leq m < 16$
**E)** $16 \leq m < 20$

**11.8.** (M) [20] A fény 1 másodperc alatt 300 000 km utat tesz meg. Hány másodperc alatt tesz meg 1 mm-t? Az alábbiak közül melyik szám közelíti meg legjobban a helyes eredményt?
**A)** $3 \cdot 10^{-12}$ **B)** $3 \cdot 10^{-11}$ **C)** $3 \cdot 10^{-10}$ **D)** $3 \cdot 10^{-9}$ **E)** $3 \cdot 10^{-8}$

## 12. FEJEZET

# Egyenletek I.

**12.1.** Oldjuk meg fejben az alábbi egyenleteket!

**a)** $5000 - (2000 + x) = 1996$ $\quad x = \quad ?$

**b)** $5000 - (y - 4) = 1996$ $\quad y = \quad ?$

**12.2.** (MS) [20] Milyen $x$ értékekre igazak a következő egyenletek?

**a)** $\Big((6 \cdot x - 4 \cdot x) \cdot 3 + 2\Big) \cdot 4 - 28 = 28$

**b)** $\frac{(5 \cdot x + x) \cdot 5 - 6}{3} \cdot 2 = 28$

**12.3.** (MS) Az alábbi egyenletek közül melyeknek megoldása $x = 1$ és melyeknek $x = -2$?

**a)** $3x + 7 = -x - 1$; **b)** $x^2 + x = 2$;

**c)** $\frac{2-3x}{x+6} = x + 4$; **d)** $x^2 - 2x = 0$;

**e)** $x^2 - x = 0$; **f)** $2 - 3(3 - 5x) = 4(1 + 2x) - (11 - 7x)$.

**12.4.** (M) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

**a)** $8 \cdot x - 3 = x + 11$; **b)** $3 - 5 \cdot x = x + 33$; **c)** $5 \cdot x - 7 = 3 \cdot x - 1$;

**d)** $7 - 3 \cdot x = 3 - 7 \cdot x$;

**12.5.** Színezzük a számegyenest! Legyenek pirosak, zöldek illetve kékek azok a pontok, amelyekre az alább megadott kifejezés értéke pozitív, nulla illetve negatív.

**a)** $x - 2$ **b)** $2x + 1$ **c)** $(x - 2) \cdot (2x + 1)$

**d)** $3 - 2x$ **e)** $(3 - 2x) \cdot (2x + 1)$ **f)** $\frac{3-2x}{2x+1}$

**g)** $x^2$ **h)** $x^2 - x$

**12.6.** (M) [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket!

**a)** $9x - 1 - (3x + 2) = 3x + 3$

**b)** $17x - 6 - (6x + 2) = 3x + 8$

**c)** $25x - 11 - (9x - 2) = 4x + 3$

**d)** $8 \cdot x - 2 = (x + 11) \cdot 11$

**e)** $\frac{11 \cdot (8x - 3)}{7} = (x + 11) \cdot 11$

**12.7.** (MS) [20] Egy háromszög legnagyobb, illetve legkisebb szöge 4°-kal nagyobb, illetve 13°-kal kisebb a középsőnél.

Melyik szög hány fokos?

**12.8.** [20] Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének a különbsége 36°.

Mekkorák ezek a szögek?

**12.9.** [20] Egy egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 21°-kal kisebbek a csúcsnál lévő szögnél.

Határozzuk meg a háromszög szögeinek nagyságát!

**12.10.** (M) [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket!

**a)** $5x - (x + 8) = 2(x + 20)$
**b)** $30 - (2x - 5) + 3(x - 8) = 0$
**c)** $x - 3(x - 2) = 100$
**d)** $2x - 5(x - 3) + 42 = 0$
**e)** $12(x + 2) = 7(2x + 1) - 3$
**f)** $30(x - 7) - 56(5 - x) = 26$

**12.11.** (MS) [20] 10 évvel ezelőtt az apa 6-szor idősebb volt a fiánál. 10 év múlva már csak kétszer lesz nála idősebb. Hány évesek most?

**12.12.** (M) [20] Diophantosz, a III. században élt híres alexandriai matematikus sírkövén a következő felirat állt:

*Itt nyugszik Diophantosz. Mily csoda! Sírköve is még*
*Nagy tudományával hirdeti élte korát,*
*Egyhatodát gyermekkornak rendelte az isten.*
*Orcájára pehelyt tett feleannyi*[1] *után.*
*Eltelt egyheted*[2] *és fáklyát gyújtott lakodalmán,*
*Múlik öt év, s fiúval áldja meg ekkor a nászt.*
*Jaj, későn született, jaj, vézna fiú! Feleannyit*
*éltél, mint apád, s máris a máglya emészt.*
*Négy évig gyászát tudománnyal csillapította.*
*S élete hosszát ím: – Látod e bölcs sorokon.*
**LÁTOD?**

**12.13.** (MS) [20] 10 liter 20%-os alkoholhoz hány liter 50%-os alkoholt öntsünk, ha 30%-os alkoholt szeretnénk kapni?

**12.14.** (MS) [20] Egy osztályban a fiúk és a lányok aránya 3:4. Ha kihívunk 3 fiút és 5 lányt, az arány 4:5-re változik.

Hány fiú és hány lány jár ebbe az osztályba?

**12.15.** [20] Egy pozitív egész szám háromszorosa nagyobb, mint 26; kétszerese kisebb, mint 20. Melyik ez az egész szám?

**12.16.** [20] Egy pozitív egész számhoz négyet adva a kétszeresénél kisebb számot kapunk. Melyik ez a szám?

**12.17.** (S) [20] Oldjuk meg egyenlet felírásának segítségével a következő feladatokat!

**a)** Egy $\frac{1}{2}$ kg-os kávésdoboz kétféle kávéval van tele: 20 dkg 770 Ft-os [3] kávé van benne, és 30 dkg másik féle. Mennyibe kerül 1 kg a másik kávéból, ha a kávékeverék kilója 860 Ft?

**b)** Kétféle kekszből akarnak 50 kg kekszkeveréket csinálni úgy, hogy annak kg-ja 720 Ft legyen. Mennyit tegyenek bele az egyik fajta és mennyit a másik fajta kekszből, ha az egyikből 900 Ft-ba, a másikból 600 Ft-ba kerül 1 kg?

**c)** 200g $8{,}3\frac{g}{cm^3}$ sűrűségű sárgarezet akarnak készteni $8{,}8\frac{g}{cm^3}$ sűrűségű rézből és $7{,}2\frac{g}{cm^3}$ sűrűségű cinkből.

Mennyi réz és mennyi cink kell hozzá?

[1] A „feleannyi” így értendő: élte egyhatodának fele.
[2] az „egyheted” így értendő: élte egyhetede
[3] értsd: kilónként 770 Ft-os

**12.18.** (S) [20] Karcsi 8 éves. Károly 4-szer annyi idős, mint Karcsi. Mikor lesz vagy volt Károly 2-szer, 3-szor, 5-ször annyi idős, mint Karcsi?

**12.19.** (S) [20] Három évvel ezelőtt az apa 7-szer idősebb volt a fiánál. Öt év múlva már csak 3-szor lesz nála idősebb. Hány évesek most?

**12.20.** (S) [20] Amikor $B$ kétszerannyi idős volt, mint $C$, akkor $A$ 6 éves volt. Most, amikor $C$ 21 éves, $B$ életkora épp kétszerese $A$ életkorának. Melyikük hány éves?

**12.21.** (S) [20] Péter és Zoli ketten vannak testvérek. Zoli születésekor anyjuk 4-szer, apjuk 5-ször annyi idős volt, mint Péter. Az apa 45-ötödik születésnapján a család átlagos életkora 25 év. Ki hány éves akkor?

**12.22.** (S) [20] Egy négyjegyű szám első jegye 2. Ha ezt a kettest töröljük és a szám végére írjuk, 63-mal nagyobb számot kapunk. Mi volt a négyjegyű szám, és mi lett belőle?

**12.23.** (S) [20] Egy négyjegyű szám első három számjegye megegyezik. Jegyeinek összege 30. Ha hozzáadunk 1998-at, egy másik négyjegyű számot kapunk. A két négyjegyű számnak ugyanazok a jegyei, de ellentétes sorrendben. Mi az eredeti szám?

**12.24.** [20] Egy háromjegyű szám jegyeinek összege 6. Kivontuk belőle azt a számot, amit úgy kaptunk, hogy a jegyeket fordított sorrendben írtuk. 100-nál kisebb számot kaptunk.

Mi lehetett az eredeti háromjegyű szám?

**12.25.** (S) [20] $A$ és $B$ falu egy út mentén helyezkedik el. Az $A$ faluból és a $B$ faluból reggel 8-kor egyszerre indul egy irányban két autó. Az $A$ faluból induló autó sebessége 80 $\frac{km}{h}$, a $B$ faluból indulóé 60 $\frac{km}{h}$. 9-kor háromszor akkora a két autó távolsága, mint fél 11-kor.

Milyen messze van egymástól a két falu? Hány órakor találkozik a két autó? (Feltételezzük, hogy az autók egyenes vonalú egyenletes mozgással haladtak.)

**12.26.** (S) [20] $A$ városból $C$ városba 7 órakor 70 $\frac{km}{h}$ sebességgel indult egy vonat. Egy szembejövő vonat $C$-ből fél 10-kor indult $B$ felé 80 $\frac{km}{h}$ sebességgel. 15 óra 10 perckor találkoznak. Ezt megelőzően mikor volt a távolságuk 30 km?

**12.27.** [20] Otthonról egy közeli üdülőtelepre gyalog 4 $\frac{km}{h}$ sebességgel mentem. Visszafelé ugyanazon az úton kerékpárral 15 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladtam.

Visszafelé 2 óra 12 perccel rövidebb idő alatt tettem meg az utat, mint odafelé.

Milyen messze van a házunktól az üdülőtelep?

**12.28.** (S) [20] Egy 100 km-es úton kerékpárral indult el Bendegúz. Útközben elromlott a kerékpárja, és így onnan kezdve, a 20 $\frac{km}{h}$ sebesség helyett, 4 $\frac{km}{h}$ sebességgel gyalogolt, s így 9 óra alatt ért célba.

Hol romlott el a kerékpárja?

**12.29.** (S) [20] Két tengerparti város egymástól 180 km-re van. Egyikből a másikba kétféleképpen lehet eljutni: 8 órát hajóval és utána 2 órát busszal, vagy 3 órát hajóval és utána 3 órát busszal. Mennyi a hajó sebessége, mennyi a buszé?

(A hajó sebessége mindkét alkalommal ugyanaz, a buszé szintén.)

**12.30.** (S) [20] Egy tartályba 3 cső vezet. Az egyikkel 15 perc alatt lehet megtölteni, a másikkal 20 perc alatt, a harmadikkal 30 perc alatt. Mennyi idő alatt telik meg, ha egyszerre mindhárom csőből folyik a víz? (Feltételezzük, hogy a csapok egyenletes sebességgel töltik a tartályt.)

**12.31.** [20] Ibolya, Margit és Róza kukoricát morzsolnak. Ibolya 6 óra alatt morzsolná le az összes kukoricát, Margitnak ehhez 3 óra, Rózának 4 óra kellene.

Mennyi idő alatt végzik el a munkát hárman együtt? (A munkavégzéses feladatokban feltételezzük, hogy azonos idő alatt a munkavégző azonos munkát végez és mindig egyenletes sebességgel.)

**12.32.** (MS) [20] Egy medencébe 2 csőből folyhat a víz. A kettő együtt 30 perc alatt tölti meg a medencét. Egy alkalommal 6 percig mindkét csapból folyt a víz, utána az egyiket elzárták, és még 40 perc telt el, mire a másik csap megtöltötte a medencét.

Mennyi idő alatt lett tele a medence, ha csak az egyik vagy csak a másik csap van nyitva?

**12.33.** (S) [20] Egy munkát Andor és Béla 4 óra alatt csinál meg. Béla és Cecil 3 óra alatt, Cecil és Andor 6 óra alatt.

Mennyi idő alatt csinálja meg Andor egymagában?

Mennyi idő alatt Béla? Mennyi idő alatt Cecil?

**12.34.** [20] A következő feladatokban mindegyik szöveghez több egyenletet, egyenlőtlenséget, táblázatot adunk meg, de köztük vannak hibásak is. Keressük ki a jókat! Mondjuk meg, mit jelöl az ismeretlen, és oldjuk meg a feladatot!

**a)** Egy négyjegyű szám első és utolsó jegye megegyezik. A második jegye egyenlő a harmadikkal és néggyel nagyobb a szélső jegyeknél. Ha 19-cel elosztjuk a számot, a hányados 315 lesz, a maradék pedig a négyjegyű szám első jegyének a kétszerese.

Mi lehet a négyjegyű szám?

$$1000x + 100x + 4 + 10x + 4 + x = 315 \cdot 19 + 2x \tag{1}$$

$$\frac{1000x + 100 \cdot (x+4) + 10 \cdot (x+4) + x}{19} = 315 + x \tag{2}$$

$$1000x + 100 \cdot (x+4) + 10 \cdot (x+4) + x = 5985 + 2x \tag{3}$$

**b)** Mi lehet az az 1-nél kisebb (két egész szám hányadosaként felírt) tört, amelynek az értéke 1-re változik, ha a számlálóját 10-zel elosztjuk, a nevezőjéből pedig 100-at kivonjuk.

$$\frac{x \cdot 10}{x+100} < 1 \tag{4}$$

$$\frac{x}{10} < x - 100 \tag{5}$$

$$x \cdot 10 < x + 100 \tag{6}$$

(A kapott tört számlálóját, és a vele megegyező nevezőjét jelöljük $x$-szel, amely egész szám.) Gondoljuk meg, hogy $x$ miért egész szám!

**c)** Mekkorák a háromszög szögei, ha az első szög kétszeresénél 10°-kal nagyobb a második, a harmadik szög pedig 22°-kal kisebb a másodiknak a háromszorosánál.

$$x + 2x + 10 + 3x - 22 = 180 \tag{7}$$

$$x + 2x + 10 + 6x + 10 - 22 = 180 \tag{8}$$

$$x + 2x + 10 + 6x + 22 = 180 \tag{9}$$

$$x + 2x + 10 + 6x + 30 - 22 = 180 \tag{10}$$

**d)**Hat géprónő nyolc napra vállal el egy munkát. A hatodik napon közbejött akadályok miatt egyikük sem tud dolgozni. Hány géprónőt kell még az utolsó két napra a munkába bevonni, hogy mégis nyolc nap alatt elkészüljenek. (Mindegyik géprónő minden nap ugyanannyi oldalt ír.)

$$\frac{(6+x)\cdot 2}{48}+\frac{6\cdot 5}{48} = 1 \tag{11}$$
$$(6+x)\cdot 2+6\cdot 5 = 1 \tag{12}$$

**e)**Szezonvégi kiárustáskor 2000 egyforma kabát árát leszállÍtották 30%-kal. Csak a kabátok negyedét sikerült eladni. A megmaradt kabátok árát a leszálltott ár 20%-ával fölemelték, és így a következő szezonban mind eladták. Mennyibe került eredetileg a kabát, ha a megmaradt kabátokból a bevétel 3millió 780 ezer Ft volt.

$$(0{,}7x+0{,}2x)\cdot 1500 = 3780000 \tag{13}$$
$$1{,}2\cdot 0{,}7\cdot x\cdot 1500 = 3780000 \tag{14}$$

**f)**Egy motorcsónak a folyón lefelé 3 km-t annyi idő alatt tesz meg, mint felfelé 3 km-t. Egy alkalommal lement a folyón 24 km-nyire, majd visszatért kiindulási helyére. A két út menetideje összesen 2,5 óra volt. Mekkora a folyóvíz sebessége és a motorcsónak sebessége állóvízben?

$$\frac{x+a}{x-a} = \tfrac{2}{3} \tag{15}$$
$$\frac{24}{x+a}+\frac{24}{x-a} = 2{,}5 \tag{16}$$

**g)**Egy kocsi egyik kerekének átmérője 60 cm, a másiké 75 cm. Mekkora távolságon fordul a kisebbik kerék 50 híján kétszer annyit, mint a nagyobbik?

$$x\cdot 75\cdot\pi = (2x-50)\cdot 60\cdot\pi \tag{17}$$
$$x\cdot 75\cdot\pi = (2x+50)\cdot 60\cdot\pi \tag{18}$$
$$x\cdot 75 = 2x\cdot 60-50 \tag{19}$$
$$x\cdot 60\cdot\pi = (2x-50)\cdot 75\cdot\pi \tag{20}$$

**12.35.** (S) [20] Egy háromszögben a leghosszabb oldal 5 cm-rel kisebb, mint a másik két oldal összege. A két rövidebb oldal közül a kisebbik 10 cm-rel rövidebb, mint a nagyobbik. A háromszög kerülete 39 cm. Mekkorák az oldalak?

**12.36.** (S) [20] 16-ot úgy kell három részre osztani, hogy ha az elsőből elveszünk 2-t, a másodikat megszorozzuk 2-vel, a harmadikat pedig osztjuk 2-vel, mindig ugyanazt a számot kapjuk. Melyik ez a három szám?

**12.37.** (S) [20] Három testvér összesen 1500 forintot kapott az apjától. Az egyiknek volt már 200 forintja, a másik 200 forintot költött el a kapott pénzből, a harmadik a pénz felét költötte el. Ekkor tapasztalták, hogy mindegyiknek ugyanannyi pénze van.

Ki mennyit kapott?

**12.38.** [20] Gondolj egy számot! A kapott számot szorozd meg 6-tal, az eredményhez adj hozzá 24-et, a most kapott számból vedd el a gondolt szám ötszörösét!

Mondd meg az eredményt, és én kitalálom mire gondoltál? Hogyan lehetséges ez?

**12.39.** [20] Gondolj egy számot! A kapott számot szorozd meg 6-tal, az eredményhez adj hozzá 24-et, a most kapott számból vedd el a gondolt szám ötszörösét, ezután az eredményhez adj 12-t, majd vedd el a gondolt számot!

Én nem ismerem azt a számot, amire gondoltál, mégis meg tudom mondani a végeredményt. Hogyan lehetséges ez?

**12.40.** [20] **a)** Gondoltam egy számot, megszorzom 6-tal, hozzáadok 24-et, majd az eredményből levonom a gondolt szám kétszeresét, és ezután megmondom az eredményt.

Hogyan lehet ebből kitalálni, hogy mi volt a gondolt szám?

**b)** Most a gondolt szám felénél kettővel nagyobb számot megszorzom 6-tal, és az így kapott értéket fogom közölni.

Ebből hogyan lehet kitalálni, hogy mi volt a gondolt szám?

**12.41.** [20] Gondoljunk egy számot, szorozzuk meg 2-vel, a szorzathoz adjunk 50-et, a kapott számot osszuk el 2-vel, a hányadosból vegyük el a gondolt számot, és az eredmény 25 lesz. Magyarázzuk meg, hogy miért lesz az eredmény mindig 25, bármely számra gondolunk is!

**12.42.** (M) [20] Egy tégla tömege 1 kg és egy fél tégla. Milyen tömegű a tégla?

**12.43.** [20] Két zsebemben együttvéve 100 Ft van. Ha az egyikben levő összeg harmadrészét és még 6 Ft-ot átteszek a másikba, akkor ugyanannyi pénz lesz mindkét zsebemben. Mennyi volt eredetileg mindkét zsebemben?

**12.44.** [20] Mekkorák az olyan egyenlő szárú háromszög szögei, melyben az alapon levő szög harmadrésze 10 fokkal kisebb a csúcsnál lévő szög felénél?

**12.45.** (M) [20] Oldjuk meg a következő szöveges feladatokat!

**a)** A jobb zsebemben 39 Ft-tal több van, mint a bal zsebemben. Ha a jobb zsebemben levő pénz felét átteszem a balba, ott kétszer annyi lesz, mint a jobb zsebemben. Mennyi pénz volt a zsebeimben?

**b)** Oldjuk meg ugyanezt a feladatot más adattal, 39 helyett 77-tel!

**c)** Oldjuk meg a feladatot paraméteresen: 39 helyett tetszőleges $k$-val!

**d)** Most térjünk vissza arra az esetre, amikor a jobb zsebemben 39 Ft-tal van több pénz, mint a balban. Megint átteszem a jobb zsebemben levő pénz felét a balba, de most csak másfélszer annyi lett a balban, mint a jobb zsebemben. Mennyi pénz volt a zsebeimben?

**12.46.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket!

**a)** $(x-1)^2 = x^2 - 10$ **b)** $(x-2)^2 = x^2 - 20$

**c)** $(x-3)^2 = x^2 + 10$ **d)** $(x+2)(x-3) - (x-1)(x-2) = 10$

**12.47.** (MS) [20] A $3(x+2) - 2(x-1) = 5x + 16$ egyenletben szereplő számok (tehát a 3, 2, 2 ,1, 5, 16) közül **egyet** megváltoztathatunk, de csak pozitív számot tehetünk a helyére. Más változtatásra nincs lehetőség.

El lehet-e érni ilyen módon, hogy a keletkező egyenletnek

**a)** ne legyen megoldása?

**b)** minden szám a megoldása legyen?

**12.48.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket:

**a)** $x - \frac{2x-1}{3} = 2x - 3(5-2x)$ **b)** $(x+1)(x+2) - (x+3)(x-5) = 5x+6$

**c)** $\frac{(x+1)^2}{2x-1} - \frac{(x-2)^2}{2x-1} = 3$ **d)** $x^2 + 6x = 0$

**12.49.** [20] Adjunk meg olyan egyenletet, amelynek

**a)** kettő kivételével minden szám megoldása;

**b)** pontosan három megoldása van!

**12.50.**

$$2x + 1 =$$

Írjunk kifejezést a fenti egyenlet jobb oldalára úgy, hogy a kapott egyenletnek

**a)** minden szám megoldása legyen;

**b)** ne legyen megoldása;

A megoldások száma

**c)** pontosan 1; **d)** pontosan 2; **e)** pontosan 3; **f)** végtelen

legyen, illetve

**g)** 1 szám; **h)** 2 szám

kivételével minden szám megoldása legyen.

**12.51.** Adjunk meg olyan egyenletet, amelynek végtelen sok megoldása van és végtelen sok olyan szám is van, amely nem megoldása!

**12.52.** Pótoljuk a szöveg lejegyzését törttel és tizedestörttel, illetve találjunk ki a képletnek megfelelő szöveget is!

| szöveg | lejegyzés | |
|---|---|---|
| | törttel | tizedestörttel |
| $x$ 20% -ából kidobva a 70%-át marad: | $\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5} \cdot x$ | $0{,}3 \cdot 0{,}8x$ |
| $y$ 25%-át 40%-kal növelve a kapott mennyiség: | | |
| $z$-t csökkentjük a 10%-ával, majd ez $z$ 20%-ával növeljük: | | |
| | | $1{,}3 \cdot 0{,}7v$ |
| | | $1{,}3v + 0{,}7v$ |

**12.53.** Mesebeli János elszegődött egy évre a sárkányhoz 1000 aranyért és egy rend ruháért. Egy hónapi szolgálata után a sárkány felmondott, kiszámította János bérét, és fizetségül csak egy rend ruhát adott, aranyat nem, sőt még János fizetett egy aranyat a sárkánynak.

Számítsuk ki hány aranyat ért egy rend ruha!

**12.54.** [20] Két munkás egy házban lakik és egy üzemben dolgozik. Reggel az idősebb 5 perccel korábban indul, mint a másik. A korábban induló munkás a lakás és az üzem közti távolságot 30 perc alatt teszi meg, fiatalabb lakótársa 20 perc alatt. Hány perc múlva éri utol a fiatalabb az idősebbet?

**12.55.** [20] Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 13. Ha a számot 12-vel osztjuk, akkor a hányados megegyezik a szám utolsó jegyével, a maradék pedig 2-vel kisebb. Melyik ez a szám?

**12.56.** [20] Hét jó barát egy kosár diót kap. Ha egyenlően elosztják egymás között, 2 dió megmarad. Jött egy nyolcadik barát is, ha vele megosztoznak, 4 dió marad, és a hét barát mindegyike 7-tel kevesebbet kap, mint előbb. Hány dió volt a kosárban?

**12.57.** [20] Két egyenlő magasságú gyertyát gyújtunk egyszerre meg. Az első 4, a második 3 óra alatt ég el. (A gyertyák magassága egyenletesen csökken). Hány óra múlva lesz az első gyertyacsonk kétszer olyan magas, mint a második?

**12.58.** [20] $B$ ezt mondja öccsének: „Ha éveim számának kétszereséből levonod kettőnk korkülönbségének felét, 30-cal többet kapsz, mint ha összeadnád éveink számát, és ezt az összeget megfeleznéd."

Hány éves $B$?

**12.59.** [20] $B$ ezt mondja $C$-nek: „Én most háromszor annyi éves vagyok, mint ahány éves te voltál akkor, amikor én olyan korú voltam, mint te most." $C$ így válaszol: „Érdekes, én meg azt vettem észre, hogy amikor én olyan idős leszek, mint te most, akkor te kétszer olyan öreg leszel mint én most"

Mit állapíthatunk meg $B$ és $C$ életkoráról?

**12.60.** (M) [20] Négy szám összege 100. Ha az egyik számhoz 4-et adunk, a másikból 4-et elveszünk, a harmadikat 4-gyel szorozzuk, a negyediket 4-gyel elosztjuk, csupa egyenlő számot kapunk.

Melyik ez a négy szám?

**12.61.** [20] Kovács nagypapa, akinek életkora 50 és 70 esztendő közé esik, a következőket szokta mondani barátainak: „Mindegyik gyermekemnek annyi gyermeke van, mint ahány testvére; Gyermekeim és unokáim száma pedig együttvéve annyi, mint életéveimnek száma!"

Hány éves a nagypapa?

**12.62.** [20] Egy háromszög egyik szöge a másik kettő számtani közepe. A két nagyobb szög összege akkora mint a két kisebb szög háromszorosa. Soroljuk fel nagyságrendben a háromszög szögeit!

**12.63.** [20] Mekkorák az olyan egyenlő szárú háromszög szögei, melyben az alapon levő szög harmadrésze $10°$-kal kisebb a csúcsnál lévő szög felénél?

**12.64.** (MS) [20] Egy kerékpáros egy bizonyos távolságot 5 óra alatt tesz meg. Ha az út harmadának megtétele után 40 percet kell várakoznia, akkor, hogy lemaradását behozza, az út további részén óránként 4km-rel többet kell megtennie, mint idáig.

Mekkora a megteendő út és az eredeti sebessége?

**12.65.** (M) [20] $B$-ből $C$-be 8 órakor indul egy motorkerékpár, $C$-ből $B$-be 7 órakor indul egy autó. Az autó sebessége 10 $\frac{km}{h}$-val nagyobb a motorkerékpárénál. 10 órakor távolságuk fele a teljes út hosszának. 12 órakor pedig már csak 60 km-re vannak egymástól. Milyen messze van $B$ helyiség $C$-től?

**12.66.** [20] Egy motoros hazafelé menet útépítési munkálatok miatt kerülő úton volt kénytelen menni. Hogy a 8 km-es távolságnövekedést ellensúlyozza, sebességét 2 $\frac{km}{h}$-val megnövelte. Így is a megszokott 30 perc helyett 35 percig tartott. Mekkora utat tett meg a motoros hazafelé?

**12.67.** (M) [20] $A$ és $B$ távolsága 9 km. $A$-ból $B$ felé indul egy kerékpáros, és ugyanakkor indul $B$-ből egy autóbusz $A$ felé (de $A$-n csak áthalad, jóval rajta túl fog megállni). A két jármű indulás után 10 perccel találkozik, és ezután 10 perccel ismét egyenlő távolságra vannak $A$-tól.

Mekkora a sebességük?

**12.68.** [20] Ketten lovagolnak egy körpályán. Ha szembe haladnak, akkor 7,5 percenként, ha egy irányba, akkor félóránként találkoznak. Mennyi idő alatt tesz meg egy kört a gyorsabb lovas?

**12.69.** [20] Két kerékpáros egyszerre indul el egymás felé 6 $\frac{m}{s}$, illetve 8 $\frac{m}{s}$ sebességgel. Az elindulásuktól számtott 40-edik és 50-edik másodpercben ugyanakkora lesz az egymástól való távolságuk.

Milyen messze voltak egymástól induláskor?

**12.70.** [20] Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 11. Ha a számhoz 63-at adunk, olyan számot kapunk, amely ugyanazokat a számjegyeket tartalmazza, mint az eredeti, csak fordított sorrendben. Melyik az eredeti szám?

**12.71.** [20] Egy utat kerékpárral haladva az egyik irányban 20 $\frac{km}{h}$ a másik irányban 30 $\frac{km}{h}$ sebességgel tettem meg. Összesen 4 órán át kerékpároztam.

Mekkora távolságot jártam be?

**12.72.** [20] Az $A$-ból $B$-be vezető 42 $km$-es út eleinte sík terepen vezet, majd egy meredek kaptató következik. Egy gyalogos, aki a sík részen 6 $\frac{km}{h}$, a kaptatón pedig 3 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladt, az egész utat 9 óra alatt tette meg.

Milyen hosszú az út sík, illetve meredek része?

**12.73.** [20] Az $A$-ból $B$-be vezető 180 km-es vasútvonalra új típusú mozdonyokat helyeztek. Ennek következtében a vonatok átlagsebessége 20%-kal növekedett, a menetidő pedig 45 perccel csökkent. Mekkora a vonatok jelenlegi sebessége?

**12.74.** [20] Az $A$-ból $B$-be vezető 42 km-es út eleinte sík terepen vezet, majd egy meredek kaptató következik. Egy gyalogos, aki a sík részen 6 km/ó, a kaptatón pedig 3 km/ó sebességgel haladt, az egész utat 9 óra alatt tette meg. Milyen hosszú az út sík része, és milyen hosszú a meredek része?

**12.75.** [20] A $C$-ből $D$-be vezető 43 $km$-es út egy sík és egy meredeken felfelé vívő részből áll. Egy gyalogos, aki felfelé 2 $\frac{km}{h}$, lefelé pedig 6 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladt, megtette az utat oda is és vissza is. Odafelé 14 órát, visszafelé 8 órát vett igénybe az utazás.

Mekkora sebességgel haladt az út vizszintes részén?

**12.76.** [20] $B$-ből $C$-be 8 órakor elindul egy motorkerékpár, $C$-ből $B$-be 7 órakor indul egy autó. Az autó sebessége 10 $\frac{km}{h}$-val nagyobb a motorkerékpárénál. 10 órakor a távolságuk fele a teljes út hosszának, 12 órakor pedig már csak 60 km-re vannak egymástól.

Milyen messze van $B$ $C$-től?

**12.77.** [20] Négy szomszédos páratlan szám közül a két középső szorzatából levontuk a két szélső szorzatát. Eredményül 12-t kaptunk.

Mi volt ez a négy szám?

**12.78.** [20] Négy szomszédos egész szám közül a két középső szorzatából levontuk a két szélső szorzatát. Eredményül 2-t kaptunk. Mi volt a négy szám?

**12.79.** [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenletek és egyenlőtlenségek?

**a)** $9x - (7x - (2x + (2x - 1) \cdot 7) + 1) = (9x - 7) \cdot 8$
**b)** $\frac{8x-35}{7} - \frac{x}{7} = \frac{9x-3}{3} - 4 \cdot \frac{25x-40}{5}$
**c)** $9x - 81 < \frac{75x-450}{4} - 3 \cdot (7x - 8)$

**12.80.** [20] Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelynek az egyik szöge 30 fokkal nagyobb a másiknál, és e két szögének a számtani közepével egyezik meg a harmadik szöge?

**12.81.** [20] Ha három tanuló ül egy-egy asztalnál, akkor 5-nek nincs helye. Ha azonban négyen ülnének egy-egy asztalnál, akkor az egyik asztalhoz csak három gyerek jutna. Hány asztal van az osztályban és hány gyerek?

**12.82.** [20] Ha négyszer annyi pénzem lenne, mint amennyi van, akkor 1000 forintnál annyival lenne több pénzem, amennyivel most kevesebb a pénzem 1000 forintnál. Hány forintom van?

**12.83.** [20] Egy négyjegyű számban az első és a harmadik jegy egyenlő, és a második és a negyedik jegy is megegyezik egymással. A négy jegy összege 20. Ha az egyesek elhagyásával nyert háromjegyű számhoz hozzáadjuk az elhagyott jegyet, 200-at kapunk.

Melyik ez a négyjegyű szám?

Oldjuk meg a feladatot okoskodással is!

**12.84.** [20] Két jó barát közül az idősebb 1,3-szer olyan idős, mint a fiatalabb. 15 év múlva a fiatalabb olyan idős lesz, mint az idősebb most. Hány évesek?

**12.85.** (S) [20] Amikor $B$ 3-szor volt idősebb $C$-nél, $A$ 4 éves volt. Most, amikor $C$ 14 éves, $B$ életkora épp 3-szorosa $A$ életkorának. Melyikük hány éves?

**12.86.** (S) [20] $A$ 3-szor olyan idős, mint amilyen $B$ volt, amikor $A$ olyan idős volt, mint $B$. Amikor $B$ olyan idős lesz, mint most $A$, éveik száma összesen 105 lesz. Hány éves most $A$ és hány éves $B$?

**12.87.** (S) [20] Megkérdeztem egyik barátomat, hogy családjának tagjai hány évesek. Így válaszolt:

– Hat év múlva apám háromszor olyan idős lesz, mint én voltam amikor apám éveinek száma egyenlő volt az én és a húgom akkori évei számának összegével. Jelenlegi korom ugyanannyi, mint apám kora volt akkor. 19 év múlva apám kétszer olyan idős lesz, mint a húgom ma.

Meg tudod-e mondani, hogy hány évesek a barátom családtagjai?

**12.88.** [20] Négy szám összege 100. Ha az elsőt hárommal megszorozzuk, a másodikat megfelezzük, a harmadikból hatot elveszünk, a negyediket tízzel növeljük, azonos számokat kapunk. Mi volt a négy szám?

**12.89.** [20] A természetes számsorban két egymás utáni szám szorzata 326-tal kevesebb, mint az utánuk következő két szám szorzata. Melyik két számról van szó? Mi a helyzet, ha a feladatban 326 helyett 328 szerepel?

**12.90.** [20] Mekkora annak a négyzetnek egy oldala, amelynek a területe ugyanannyi $cm^2$, mint ahány cm a kerülete?

**12.91.** [20] Egy kiránduló útjának a felét 2,5 km/h átlagsebességgel tette meg a tervezett 5 km/h átlagsebesség helyett. Legalább mekkora sebességgel haladjon az út hátralevő részén, hogy az út végéig behozza a lemaradását?

**12.92.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket:

**a)** $4(x-3)-x=x+100$

**b)** $3(x+1)-\frac{x}{4}=x+10$

**12.93.** (M) [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket!

**a)** $4x-\frac{2x+7}{3}=100$;

**b)** $\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=4$

**12.94.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket:

**a)** $x - \frac{2x+1}{5} = -1$ **b)** $\frac{x}{2} - 2(3x-1) = 7{,}5$ **c)** $\frac{2(x+1)}{3} - 3\frac{1-2x}{4} = x + 0{,}5$

**d)** $\frac{3x+5}{1-2x} = 2$

**12.95.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket!

**a)** $(x+2)^2 = 9$ **b)** $(x-1)\cdot(2x+1) = 0$ **c)** $5x - 2(x+3) = 3x - 6$

**d)** $7x - 4(x-2) = 3x - 8$ **e)** $\frac{2x+1}{3} - \frac{2x-1}{4} = 1$ **f)** $\frac{1}{2+\frac{1}{3+x}} = 5$

**g)** $\frac{6x+5}{5x+4} = 3$ **h)** $\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 1 + \frac{x+5}{x^2-1}$ **i)** $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = 4$

**12.96.** [20] Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$\begin{aligned} (x+2)(x+4) - x^2 &= 200 \\ x &= ? \end{aligned}$$

**12.97.** [20] Megkapjuk $(2x+3)(5x+2) - 10x^2$ értékét. Hogyan tudjuk ebből a lehető leggyorsabban megmondani $x$ értékét?

**12.98.** [20] **a)** Gondoltam egy számot. Megszoroztam 4-gyel, és az eredményből levontam a gondolt számnál 5-tel nagyobb szám kétszeresét. Ehhez a gondolt számot hozzáadva azt kaptam, hogy . . . .

Gondoljuk végig, hogy a kipontozott rész ismeretében hogyan lehetne a lehető leggyorsabban meghatározni a gondolt számot!

**b)** Most a gondolt számnál kettővel nagyobb szám négyzetéből levonom a gondolt szám négyzetét, és az így kapott értéket fogom közölni.

A kérdés ugyanaz.

**12.99.** [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenletek?

**a)** $\frac{x-499}{501} = \frac{x-501}{499}$ **b)** $\frac{x-54}{23} - \frac{x+53}{163} = \frac{x-37}{63}$ **c)** $x\cdot(x-2) = 0$

**d)** $(x+8)\cdot(x-3)\cdot 2x = 0$ **e)** $(x+2)\cdot(x-2) = x+2$ **f)** $\frac{x+2}{x+3} = 0$

**g)** $\frac{x+2}{x+3} = x+2$ **h)** $\frac{x+2}{x+4} = x+2$ **i)** $\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{2+x} = 0$

**j)** $\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{2-x} = 1-x$

**k)** $\frac{x-949}{51} + \frac{x-828}{43} = \frac{x-926}{37} + \frac{x-931}{23}$ **l)** $(95x+96)\cdot(97x+98)\cdot(99x+100) = 0$

**m)** $(x-1)^4 = 1$ **n)** $(x+2)^2 - 1 = 8$ **o)** $x^3 + x^4 = 0$ **p)** $x^3 + x^4 = x + 1$

**q)** $x^{101} = x$

**12.100.** [20] A következő egyenletek megoldását vissza lehet vezetni elsőfokú egyenletek megoldására. Hogyan?

Milyen $x$-re igaz?

**a)** $x^2 + 121 = (x+11)\cdot x$

**b)** $x^2 - 2\cdot x = 0$ (Óvakodjunk, nehogy gyököt veszítsünk!)

**c)** $\frac{2x^2-3x}{x} = 23$

**d)** $\frac{2x^2-3x}{2x-3} = 0$

**12.101.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket!

**a)** $(x-1)^2-(x+3)\cdot(x-2)=70$
**b)** $2+6x^2-\frac{x^2-1}{3}=1-6\cdot(x^2-8)$
**c)** $x^2+5x=0$
**d)** $(x-3)\cdot(2x+1)=0$
**e)** $\frac{(x+1)^2-(x-2)^2}{2x-1}=6$
**f)** $\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)^2=25$
**g)** $\frac{(x+2)^2+(x-2)^2}{4}=(x+1)^2+(x-1)^2$
**h)** $(x+1)\cdot(x+5)-(3x-1)=8x-(2-x)\cdot(x-3)$

**12.102.** Oldjuk meg a következő egyenleteket!

**a)** $2(x^2-1)+5=3x^2-6$
**b)** $2(|x|-1)+5=3|x|-6$
**c)** $2(\frac{1}{x}-1)+5=\frac{3}{x}-6$
**d)** $2[(x-1)^2-1]+5=3(x-1)^2-6$
**e)** $2x^3+5=3(x^3+1)-6$

**12.103.** (M) Készítsünk algoritmust, ami eldönti az $ax+b=0$ típusú egyenletről, hogy van-e megoldása (bemenő érték: $a$ és $b$)!

**12.104.** (M) Készítsünk algoritmust, ami megoldja az $ax+b=0$ típusú egyenletet (bemenő érték: $a$ és $b$, kimenő érték(ek): $x$)!

13. FEJEZET

# Egyenletek I. (teszt)

**13.1.** (M) Alább megadjuk, hogy az $1 - 0{,}5 \cdot x$ kifejezés mely $x$ számok esetén negatív, nulla, illetve pozitív (ebben a sorrendben). Melyik válasz a helyes?

**A)** $x < 2$, $x = 2$, $2 < x$ **B)** $x < -2$, $x = -2$, $-2 < x$

**C)** $2 < x$, $x = 2$, $x < 2$ **D)** $-2 < x$, $x = -2$, $x < -2$

**E)** egyik sem

**13.2.** (M) Oldjuk meg fejben az alábbi egyenleteket! Melyiknek a megoldása a legnagyobb szám?

**A)** $2007 - (1199 + x) = 500$ **B)** $2007 - (1200 + y) = 500$

**C)** $2008 - (1199 + z) = 500$ **D)** $2005 - (1199 + u) = 501$

**E)** $2008 - (1199 + v) = 504$

**13.3.** (M) A $7x - (x - 9) = 3(x + 2)$ egyenletet szeretnénk megoldani. Melyik zárójelfelbontási lépés helyes az alábbiak közül?

**I.** $7x - x - 9 = 3(x + 2)$ **II.** $7x - x + 9 = 3(x + 2)$ **III.** $7x - (x - 9) = 3x + 2$

**IV.** $7x - (x - 9) = 3x + 6$

**A)** I. és III. **B)** I. és IV. **C)** II. és III. **D)** II. és IV. **E)** egyik sem

**13.4.** (M) Melyik halmazba esik a $6x - (x + 2) = 3(3x + 2)$ egyenlet megoldása?

**A)** $x < -4$ **B)** $-4 \leq x < -1$

**C)** $-1 \leq x < 1$ **D)** $1 \leq x$

**E)** nem egyértelmű a megoldás

**13.5.** (M) [20] A jobb zsebemben kétszer annyi pénz van, mint a balban. Ha a jobb zsebemből 16 forintot átteszek a balba, ugyanannyi lesz a két zsebemben. Hány forint volt eredetileg a zsebeimben?

Jelölje $j$ a jobb zsebemben eredetileg található pénz mennyiségét! Melyik a feladat szövegének megfelelő egyenlet $j$-re?

**A)** $0{,}5j + 16 = j$ **B)** $0{,}5j + 16 = j - 16$ **C)** $2j + 16 = j - 16$

**D)** $0{,}5j - 16 = j + 16$ **E)** egyik sem

**13.6.** (M) [20] Egy kosárból kivettünk három almát, azután a maradék harmadrészét, majd újból három almát. Így az almák fele maradt a kosárban. Hány alma volt eredetileg a kosárban?

Visszafelé gondolkozunk. Jelölje a végén a kosárban maradt almák számát $a$! Melyik egyenlet írja le a feladatot?

**A)** $2a = (a - 3) \cdot \frac{1}{3} - 3$ **B)** $2a = (a + 3) \cdot \frac{4}{3} + 3$ **C)** $2a = (a + 3) \cdot 3 + 3$

**D)** $2a = (a + 3) \cdot \frac{3}{2} + 3$ **E)** egyik sem

**13.7.** (M) [20] Az alábbi három szöveges feladat között vannak-e olyanok, amelyek megoldásának számértéke egyenlő egymással?

**I.** Valamely egyenlő szárú háromszög szára 8 cm-rel hosszabb az alapjánál. Kerülete 31 cm. Milyen hosszú az alapja cm-ben?

**II.** Egy férj 10 évvel idősebb feleségénél, aki 26 éves volt, amikor a fiuk született. Hány éves a gyerek, ha hárman együtt 77 évesek?

**III.** A háromszög szögei közül az első 19°-kal kisebb a másodiknál, a harmadik pedig 70°-kal kisebb az elsőnél. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge?

**A)** I. és II. **B)** I. és III. **C)** II. és III.

**D)** nincsenek egyenlők **E)** mind a három egyenlő

**13.8.** (M) [20] Hány éves az, aki ezt mondja: „3 év múlva feleannyi idős leszek, hat éve pedig harmadannyi idős voltam, mint amennyi Péter most”? Válasszuk ki, hogy a kérdezett $k$ kor (évben) melyik halmazba esik!

**A)** $0 \le k < 14$ **B)** $14 \le k < 21$ **C)** $21 \le x < 28$ **D)** $28 \le k < 35$

**E)** $35 \le k$

**13.9.** (M) [20] 4 szám összege 100. Ha az elsőt hárommal megszorozzuk, a másodikat megfelezzük, a harmadikból 6-ot elveszünk, a negyediket 10-zel növeljük, azonos számokat kapunk.

Mi volt ez a szám, amit mind a négy esetben kaptunk? Válaszuk ki hogy az alábbi listában melyik teljesül a keresett szám számjegyeinek $s$ összegére!

**A)** $0 \le s < 6$ **B)** $6 \le s < 12$ **C)** $12 \le s < 18$ **D)** $18 \le s < 24$

**E)** $24 \le s$

**13.10.** (M) [20] Hány liter 60%-os és mennyi 80%-os alkohol összekeverésével juthatunk 10 liter 75%-os alkoholhoz? (Ebben a feladatban feltételezzük, hogy a víz és az alkohol összekeverésével az elegy térfogata megegyezik az eredeti térfogatok összegével, noha a valóságban ez csak közelítőleg igaz.)

A két kérdezett mennyiség $\Delta$ különbsége az alábbiak közül melyik halmazba tartozik (literben)?

**A)** $0 \le \Delta < 2$ **B)** $2 \le \Delta < 4$ **C)** $4 \le \Delta < 6$ **D)** $6 \le \Delta < 8$

**E)** $8 \le \Delta < 10$

**13.11.** (M) [20] Egy kétjegyű számban az egyesek száma három híján annyi, mint a tizesek számának a kétszerese. Ha a számjegyeket felcseréljük, 9-cel nagyobb számot kapunk.

Jelölje az eredeti számban a tízesek helyén álló számjegyet $n$! Melyik egyenlet írja le a feladatot?

**A)** $n + (2n + 3) = (2n + 3) + n + 9$ **B)** $10n + (2n + 3) = 10(2n + 3) + n + 9$

**C)** $10n + (2n - 3) + 9 = 10(2n - 3) + n$ **D)** $10n + (2n - 3) - 9 = 10(2n - 3) + n$

**E)** egyik sem

**13.12.** (M) [20] Péter 8-kor indult el $A$-ból 20 $\frac{km}{h}$ sebességgel, Pál pedig 10 órakor 55 $\frac{km}{h}$-val.

Mikor lesz Pál kétszer olyan messze $A$-tól, mint Péter? Válasszuk ki az alábbi listából, hogy a megfelelő (nem feltüntetett) óra hányadik percében ($p$) következik be az említett esemény!

**A)** $0 \le p < 12$ **B)** $12 \le p < 24$ **C)** $24 \le p < 36$ **D)** $36 \le p < 48$

**E)** $48 \le p < 60$

**13.13.** (M) [20] Két futó egyszerre indul el az egymástól 200 m-re eső $A$-ból és $B$-ből. Ha egymás felé loholnak, 20 mp, ha egy irányba haladnak, 80 mp múlva találkoznak. A két futó közül a gyorsabb $v$ sebessége melyik intervallumba esik (méter/másodperc-ben)?

**A)** $5 \leq v < 6$ **B)** $6 \leq v < 7$ **C)** $7 \leq v < 8$ **D)** $8 \leq v < 9$
**E)** egyikbe sem

**13.14.** (M) [20] A $2(6-3x)+5(4x-1)=11x+7$ egyenletben szereplő számok (tehát a 2, 6, 3, 5, 4, 1, 11, 7) közül **egyet** megváltoztathatunk, de csak pozitív egész számot tehetünk a helyére. Más változtatásra nincs lehetőség.

El lehet-e érni ilyen módon, hogy a keletkező egyenletnek megoldása legyen $x=1$? Melyiket változtassuk?

**A)** a 2-est vagy a 6-ost **B)** a 3-ast vagy az 5-öst
**C)** a 4-est vagy az 1-est **D)** a 11-est vagy a 7-est
**E)** nincs ilyen változtatás vagy több is van

**13.15.** (M) [20] A $2(6-3x)+5(4x-1)=11x+7$ egyenletben szereplő számok (tehát a 2, 6, 3, 5, 4, 1, 11, 7) közül **egyet** megváltoztathatunk, de csak pozitív egész számot tehetünk a helyére. Más változtatásra nincs lehetőség.

El lehet-e érni ilyen módon, hogy a keletkező egyenletnek ne legyen megoldása? Melyiket változtassuk? A megváltoztatandó szám az alábbi halmaz egyik eleme:

**A)** $\{2;6\}$ **B)** $\{3;5\}$
**C)** $\{4;1\}$ **D)** $\{11;7\}$
**E)** nincs ilyen változtatás vagy több is van

**13.16.** (M) [20] A $2(6-3x)+5(4x-1)=11x+7$ egyenletben szereplő számok (tehát a 2, 6, 3, 5, 4, 1, 11, 7) közül **egyet** megváltoztathatunk, de csak pozitív egész számot tehetünk a helyére. Más változtatásra nincs lehetőség.

El lehet-e érni ilyen módon, hogy a keletkező egyenletnek minden szám megoldása legyen? Melyiket változtassuk?A megváltoztatandó szám az alábbi halmaz egyik eleme:

**A)** $\{2;6\}$ **B)** $\{3;5\}$
**C)** $\{4;1\}$ **D)** $\{11;7\}$
**E)** nincs ilyen változtatás vagy több is van

**13.17.** (M) Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$\frac{x}{3}-\frac{5x-2}{2}=20+x$$

Válasszuk ki, hogy melyik intervallumba esik az egyenlet megoldása!

**A)** $x < -4$ **B)** $-4 \leq x < 1$ **C)** $1 \leq x < 6$ **D)** $6 \leq x < 11$
**E)** $11 \leq x$

# 14. FEJEZET
# Egyenlőtlenségek

**14.1.** Létezik-e a változóknak olyan értéke, amelyekre a megadott két egyenlőtlenség közül pontosan az egyik teljesül? Ha igen, adjunk meg ilyen értékeket!

**a)** $a > b$, $\quad 5 \cdot a > 5 \cdot b$,
**b)** $a > b$, $\quad a + 5 > b + 5$,
**c)** $a > b$, $\quad c \cdot a > c \cdot b$,
**d)** $a > b$, $\quad a + c > b + c$,
**e)** $a > b$, $\quad a^2 > b^2$,
**f)** $a > b$, $\quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,
**g)** $a > b$, $\quad a^3 > b^3$,

**14.2.** Igaz-e, hogy
**a)** ha $a > b$ és $c > d$, akkor $a \cdot c > b \cdot d$?
**b)** ha $a \cdot c > b \cdot d$, akkor $a > b$ és $c > d$?
**c)** ha $a \cdot c > b \cdot d$ és $a > b$, akkor $c > d$?

**14.3.** [20] Egy iskolában a tanév évgén 14 jó tanuló között 5000 forintos és 2000 forintos könyvutalványokat akarnak szétosztani, legfeljebb 50 000 forint értékben.
**a)** Legfeljebb hány tanuló kaphat 5000 Ft-os utalványt?
**b)** 50 000 forintból legfeljebb hány tanulót lehet 5000 vagy 2000 forintos utalvánnyal jutalmazni?

**14.4.** [20] Egy egész szám háromszorosa nagyobb, mint 16, kétszerese kisebb, mint 14.
Mi lehet ez a szám?

**14.5.** [20] Egy egész szám háromszorosa nagyobb, mint 1000, a kétszerese kisebb,mint 1500. Mi lehet a szám?

**14.6.** [20] Egy számhoz négyet adva kisebb számot kapunk a kétszeresénél. Nagyobb-e ez a szám háromnál?

**14.7.** [20] Van-e olyan pozitív egész szám, amelyiknek a hatszorosa nagyobb a nála 128-cal nagyobb számnál?

**14.8.** [20] Egy fogaskeréken 30 fog van. Ha tizenháromszor megforgatjuk, akkor a hozzákapcsolódó másik fogaskerék nem egészen kilencszer fordul. Hány foga lehet a másik fogaskeréknek?

**14.9.** [20] Balázs $5\frac{m}{s}$ sebességgel fut. Sanyival versenyt futva fél perc alatt legalább 15 méteres előnyre tesz szert minden alkalommal.
Legfeljebb milyen sebességgel tud Sanyi futni?

**14.10.** [20] Attila 10 $\frac{km}{h}$ sebességgel kerékpározik. Laci 15 perc múlva indul utána. Negyedóra múlva is még több, mint 1 km-rel van Attila mögött.
Mekkora lehet Laci sebessége?

**14.11.** [20] Egy motoros 50 $\frac{km}{h}$ sebességgel halad Szegedről Pestre. Indulása után fél órával egy autó ered utána. A vezető 1 órán belül utol szeretné érni a motorost.

Legalább hány km-t kell megtennie óránként?

**14.12.** [20] Zsuzsi és Kati úszásban versenyeztek. Kati 5 perc alatt több mint 18 méterrel marad le. Zsuzsi percenként 50 métert úszik. Hány métert úszik Kati percenként?

**14.13.** [20] Gondoltam egy egész számot, amelyhez 5-öt adva, kisebb számot kaptam a gondolt szám kétszeresénél, 14-et adva, nagyobbat a gondolt szám háromszorosánál. Mi lehet ez a szám?

**14.14.** [20] Egy egész szám $\frac{1}{15}$-öd része nagyobb, mint 3. A $\frac{2}{3}$ része kisebb, mint 31. Mi lehet ez a szám?

**14.15.** [20] Egy szám $\frac{3}{5}$ része nagyobb, mint a $\frac{8}{5}$-énél 10-zel nagyobb szám. Nagyobb-e ez a szám 147,5-nél?

**14.16.** [20] Ádám és Éva naptárokat gyűjt. Ádámnak január 1-én már volt három naptárja, és ezután naponta kettőt szerzett. Éva csak január 2-án kezdett a naptárgyűjtéshez, de ő attól kezdve minden nap hármat szerzett. Hányadikán lett Évának több naptárja, mint Ádámnak?

**14.17.** [20] Egy téglalap egyik oldala $\frac{1}{3}$. Mekkora lehet a másik oldala, ha tudjuk, hogy a téglalap területének mérőszáma

**a)** kisebb, mint a kerületé;

**b)** nagyobb, mint a kerületé;

**c)** ugyanakkora, mint a kerületé?

**14.18.** [20] Egy kétjegyű szám egyik jegye kétszerese a másiknak. A jegyeket felcserélve a szám nő, de ez a növekedés kevesebb, mint 48. Mi lehet a szám?

**14.19.** [20] Egy kétjegyű szám jegyeinek az összege 10. A szám kisebb a számjegyei felcserélésével kapott szám felénél. Mi lehet a szám?

**14.20.** [20] Egy motorkerékpáros elindul, és 50 km/óra sebességgel halad. Fél óra múlva autó indul utána sürgős üzenettel, amit egy órán belül át kell adnia. Legalább mekkora sebességgel kell haladnia?

**14.21.** [20] Marci nagyon lassan rakja fel a sakkfigurákat. Még a 8 tisztet sem helyezte fel, mikorra Gergő már mind a 16 figurát felállította. Gergő egyedül 1 perc alatt rakta föl az összes bábút. Készen vannak-e 40 mp alatt, ha együtt rakják föl az összes figurát?

**14.22.** [20] Milyen x-re igazak a következő egyenlőtlenségek?

**a)** $3x + 71 < 2000$

**b)** $-3x + 71 < 2000$

**c)** $\frac{3}{x} < 21$

**d)** $3x \geq 6 - \frac{2x-4}{5}$

**e)** $2 \cdot (x + 3) \leq 9 \cdot (2x - 1)$

**14.23.** (S) [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenlőtlenségek?

**a)** $3(x - 2) > 0$ **b)** $\frac{3}{x-2} > 0$ **c)** $5(2x - 3) < 0$

**d)** $\frac{5}{2x-3} < 0$ **e)** $(x + 1)(2x - 1) > 0$ **f)** $\frac{x+1}{2x-1} > 0$

**g)** $\frac{3}{x-2} > 1$

**14.24.** [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenletek és egyenlőtlenségek?

**a)** $x-7=3\cdot(x-7)$ **b)** $\frac{1}{x-7}=\frac{3}{x-7}$ **c)** $x-7<3\cdot(x-7)$

**d)** $\frac{1}{x-7}<\frac{3}{x-7}$ **e)** $x-7>3\cdot(x-7)$ **f)** $\frac{1}{x-7}>\frac{3}{x-7}$

**14.25.** [20] Milyen pozitív egész számokra igazak a következő egyenlőtlenségek?

**a)** $2\cdot(x+2)>3-25x$
**b)** $3\cdot(x-2)-5<x+5$
**c)** $7x-6\geq\frac{28x+24}{4}$
**d)** $2x-7>x-\frac{39-4x}{4}$
**e)** $-\frac{x}{5}\leq 2x-\frac{4-6x}{15}$

**14.26.** [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenlőtlenségek?

**a)** $\frac{2x-1}{3}\leq 10-\frac{3x-1}{2}$
**b)** $\frac{1-2x}{3}+\frac{x}{2}<x-2$
**c)** Nézzük meg ezt is, hogy milyen $x$-re igaz egyszerre az a), b) egyenlőtlenség!

**14.27.** [20] 6 liter 15 fokos vízből 16 liter 40 foknál nem melegebb vizet szeretnénk kapni. Milyen meleg lehet az a 10 liter víz, amit hozzáöntünk?

**14.28.** [20] Egy 18-nál nagyobb számra gondoltam. Amikor a gondolt szám háromszorosához 2-t adtam, nagyobb számot kaptam, mint a gondolt számnál 12-vel nagyobb szám. Amikor viszont a gondolt szám négyszereséből hatot elvettem, kisebb számot kaptam, mint a gondolt szám háromszorosánál 14-gyel nagyobb szám. Mire gondolhattam?

**14.29.** [20] Egy edényben 20 liter víz van. Milyen meleg lehet, ha 6 liter 30 fokos vizet hozzáöntve, 40 fokosnál melegebb lesz a víz. Ha viszont 6 liter 45 fokos vizet öntünk hozzá, akkor sem éri el az edényben levő víz az 50 fokot?

**14.30.** [20] Milyen meleg lehet 10 liter víz, ha 6 liter 15°C-os víz hozzáadása után az így kapott 16 liter víz még mindig 40°C-osnál is melegebb?

**14.31.** [20] Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 9. A jegyek felcserélésével olyan számot kapunk, amely az eredeti szám kétszerese és háromszorosa közé esik. Melyik ez a kétjegyű szám?

**14.32.** [20] **a)** Van-e olyan szám, amelynek a négyszereséből kettőt elvéve kisebb számot kapunk, mint ha a háromszorosához hetet adunk, maga a szám pedig nagyobb, mint a nála 5-tel nagyobb szám?

**b)** Van-e olyan szám, amelynek a hatszorosához tizenötöt adva a szám ötszörösénél 1-gyel nagyobb számnál is nagyobbat kapunk, másfélszereséből hetet elvéve még magánál a számnál is nagyobb számhoz jutunk?

**c)** Az a), b) feladat közül annak a szövegét, amelynek nem volt megoldása, módosítsuk úgy, hogy legyen megoldása. Oldjuk is meg!

**14.33.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

**a)** $x-3\geq 0$ **b)** $3-2x\geq 0$

**c)** Mely $x$ valós számokra teljesül egyszerre az a) és a b) egyenlőtlenség?

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket is!

**d)** $(x-3)\cdot(3-2x)\geq 0$ **e)** $\frac{x-3}{3-2x}\geq 0$ **f)** $(x-3)+(3-2x)\geq 0$

**g)** $(x-3)^2\cdot(3-2x)^2\geq 0$ **h)** $\frac{(x-3)^2}{(3-2x)^2}\geq 0$ **i)** $(x-3)^2\cdot(3-2x)\geq 0$

**14.34.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

**a)** $x+1 \geq 0$ **b)** $2-x \geq 0$

**c)** Mely $x$ valós számokra teljesül egyszerre az a) és a b) egyenlőtlenség?
Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket is!

**d)** $(x+1)\cdot(2-x) \geq 0$ **e)** $\frac{x+1}{2-x} \geq 0$ **f)** $(x+1)+(2-x) \geq 0$

**g)** $(x+1)^2\cdot(2-x)^2 \geq 0$ **h)** $\frac{(x+1)^2}{(2-x)^2} \geq 0$ **i)** $(x+1)^2\cdot(2-x) \geq 0$

**14.35.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

**a)** $(x-1)\cdot(x-10) > 0$;

**b)** $\frac{x-2}{3-x} > 0$;

**c)** Mely $x$ valós számokra teljesül egyszerre az a) és a b) egyenlőtlenség?

**d)** Oldjuk meg az $\frac{(x-1)\cdot(x-10)\cdot(x-2)}{3-x} > 0$ egyenlőtlenséget!

**14.36.** [20] Melyik megoldás jó és miért? Keressük meg a hibát a hibás okoskodásokban!

$$\frac{7x-3}{4x-2} < 0$$

Számegyenesen is jelöljük a megoldásokat!

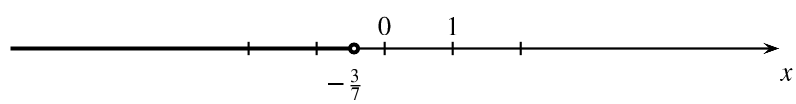
**I.megoldás:**

Végigszorozzuk az egyenlőtlenséget $(4x-2)$-vel

$$7x-3 < 0 \qquad (1)$$

$$x < -\frac{3}{7} \qquad (2)$$

Lásd a 14.0.1. ábrát!




14.36.1. ábra.

**II.megoldás:**

Egy tört csak úgy lehet negatív, ha számlálója és nevezője különböző előjelű. Két eset lehet:

| 1. eset | 2. eset |
|---|---|
| $7x-3 > 0$ | $7x-3 < 0$ |
| és | és |
| $4x-2 < 0$ | $4x-2 > 0$ |
| ebből | ebből |
| $x > \frac{3}{7}$ | $x < \frac{3}{7}$ |
| és | és |
| $x < \frac{1}{2}$ | $x > \frac{1}{2}$ |
| | Ez a két feltétel egyszerre nem teljesülhet. |

Tehát a megoldás:

$$\frac{3}{7} < x < \frac{1}{2}$$

**III.megoldás:**

A $\frac{7x-3}{4x-2} < 0$ egyenlőtlenség megoldásában úgy akarunk elindulni, hogy az egyenlőtlenség két oldalát pozitív számmal szorozzuk, ekvivalens átalakítást végzünk. Ez azt jelenti, hogy az új egyenlőtlenségnek ugyanazok a gyökei, mint az eredetinek. Amikor negatív számmal szorozzuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát, akkor megfordul az egyenlőtlenség jele, és az így kapott egyenlőtlenség lesz az eredetivel ekvivalens. Ezért két esetet kell megnézni:

| 1. eset | 2. eset |
|---|---|
| $4x-2 > 0$ | $4x-2 < 0$ |
| vagyis | vagyis |
| $x > \frac{1}{2}$ | $x < \frac{1}{2}$ |
| $(4x-2)$-vel szorozzuk: | $(4x-2)$-vel szorozzuk: |
| Itt nem fordul meg az egyenlőtlenség. | Itt megfordul az egyenlőtlenség. |
| $7x-3 < 0$ | $7x-3 > 0$ |
| $x < \frac{3}{7}$ | $x > \frac{3}{7}$ |
| $x < \frac{3}{7}$ és $x > \frac{1}{2}$ | |
| nem lehet egyszerre igaz, | |
| így ebből nem adódik megoldás | Ebből azt kapjuk: |
| | $\frac{3}{7} < x < \frac{1}{2}$ |

**IV.megoldás:**

Látható, hogy a számláló, illetve a nevező $x = \frac{3}{7}$ illetve $x = \frac{1}{2}$ esetén zérus. Osszuk fel a számegyenest ezekkel az osztópontokkal és vizsgáljuk a számláló és a nevező előjelét az egyes részeken és a határpontokban külön-külön. Az alábbi táblázat sorai a tört számlálójának, nevezőjének illetve magának a törtnek felel meg, az oszlopok a számegyenes megadott részére vonatkoznak. Az utolsó sorból leolvasható a feladat megoldása: $\frac{3}{7} < x < \frac{1}{2}$.

| | $x < \frac{3}{7}$ | $x = \frac{3}{7}$ | $\frac{3}{7} < x < \frac{1}{2}$ | $x = \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} < x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-7$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $4x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\frac{3x-7}{4x-2}$ | $+$ | 0 | $-$ | nem ért. | $+$ |

Milyen tanulságok vonhatók le a megoldásokból?

**14.37.** (S) [20] Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

**a)** $\frac{7x+3}{4x-2} > 0$; **b)** $\frac{7x+3}{4x-2} < 2$; **c)** $\frac{3x-8}{5-x} \geq 2$; **d)** $\frac{3(x-3)}{2(x-3)} < \frac{4x-7}{x-3}$.

**14.38.** [20] Hozzátartozik-e az adott egyenlőtlenség megoldáshalmazához a megadott intervallum?

| Egyenlőtlenségek: | Intervallumok: |
|---|---|
| **a)** $\frac{2}{x-4} < -1$ | $[5{,}10]$ |
| **b)** $\frac{x-1}{x+2} > \frac{x+3}{x+2}$ | $[-4, -3]$ |
| **c)** $\frac{x}{x-3} > \frac{1-x}{3-x}$ | $[-1{,}1]$ |

**14.39.** [20] Ekvivalensek-e a következő egyenlőtlenségek?

**a)** $\frac{x-3}{x-1} > 3$ és $x-3 > 3(x-1)$

**b)** $x+3 > 2$ és $x+\frac{1}{x}+3 > 2+\frac{1}{x}$

**14.40.** [20] Milyen $x$-re teljesül egyszerre a következő két egyenlőtlenség?

$$\frac{x+2}{x-1} < \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{2} < \frac{x-1}{x+2}$$

**14.41.** [20] Milyen $x$-re igaz a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{5}{2x-3} > 10$$

**14.42.** [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenlőtlenségek?

**a)** $\frac{x+6}{3x-2} \geq 11$

**b)** $\frac{x-6}{4\cdot(x-2)} - \frac{x+10}{6\cdot(x-2)} < \frac{1}{9}$

**c)** Nézzük meg azt is, hogy milyen $x$-re igaz egyszerre a két egyenlőtlenség!

**14.43.** [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenletek és egyenlőtlenségek?

**a)** $(2x^2+5x-6)-(2x^2-7x+8) = x+14$

**b)** $-5x+(6x-7) \geq 9-(12-11x)$

**c)** $\frac{19}{x-5} = \frac{25}{x+5} - \frac{7}{x-5}$

**d)** $\frac{19}{x-5} < \frac{25}{x+5} + \frac{7}{x-5}$

**e)** $4x^2-(2x+1)\cdot(2x-1) = 9+7x$

**f)** $7\cdot(x+2)\cdot(x+3)-(7x-1)\cdot(x+6) = 59$

**g)** Nézzük meg azt is, mikor igaz egyszerre a **b)** és a **d)** egyenlőtlenség!

**14.44.** [20] Milyen egész $x$ értékre igazak a következő egyenlőtlenségek?

**a)** $\frac{7x-3}{5x-4} < 1$

**b)** $x+\frac{1}{x} \leq 2$

15. FEJEZET
# Nevezetes azonosságok

További gyakorlásra ajánljuk még a [2] könyv III. fejezetének 48-134. példáit (esetleg még 135-143f.) vagy a [4] kötet IV. fejezetének 653-697. feladatait (esetleg kiegészítésül a 698-706. gyakorlatokat).

**15.1. a)** Egy szám kétszereséből kivontuk az ugyanezen számnál 3-mal kisebb szám kétszeresét. A kapott különbség négyzete 36. Mi lehetet a gondolt szám?

**b)** Gondoltam egy számot, levontam belőle 3-at, az eredményt megszoroztam 2-vel, majd az így nyert számhoz hozzáadtam hatot, így az eredeti szám kétszeresét kaptam. Mi lehetett a gondolt szám?

**c)** Gondoltam egy számot és a felénél 1-gyel kisebb számot megszoroztam 2-vel. Így a gondolt számnál ...

Ki lehet-e egészíteni az előző mondatot úgy, hogy bármely gondolt számra teljesüljön?

**15.2.** [20] Egy gépbe algebrai mondatokat tápláltunk be. A gép kétféle jelet dob ki:

$$\forall,$$

jelentése: a változó (vagy változók) minden olyan értékére igaz, melyekre a bennük szereplő kifejezéseknek értéke van.

$$\neg\forall,$$

jelentése: a változó (vagy változók) nem minden megengedett értékére igaz.

Ahol kell pótoljuk, és minden esetben indokoljuk a gép válaszát!

| be: | ki: |
|---|---|
| $2ab = a \cdot (a+1) + b \cdot (b-1) - (a-b) \cdot (a-b+1)$ | $\forall$ |
| $\frac{ab}{ac+ba} = \frac{b}{c+b}$ | $\forall$ |
| $\frac{2}{3}x + 7 = \frac{1}{5} \cdot (x-3)$ | |
| $-a \cdot (b-a) = -ab - a^2$ | |
| $\frac{1}{x^2} > 0$ | |
| $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \ldots \cdot (x-n) = 0$ | |
| $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$ | |
| $\frac{x^2}{x^2-1} > 0$ | |
| $\frac{2x-13}{1+5x} < 0$ | |
| $\frac{5x}{5x+1} = \frac{x}{x+1}$ | |
| $(2a-5)^2 - 1 = 4 \cdot (a-2) \cdot (a-3)$ | |
| $2x^2 - 3x + 4 > x^2 - x + 3$ | |

**15.3.** [20] Egy gépbe algebrai mondatokat táplálhatunk be. Alább néhány példában megadjuk mit ad ki a gép. Találjuk ki a gép szabályát és határozzuk meg mit ad ki azokban az esetekben, ahol nincs megadva!

| be: | ki: |
|---|---|
| $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ | $a = 0$ és $b$ bármi<br>vagy<br>$b = 0$ és $a$ bármi |
| $2ab = a \cdot (a+1) + b \cdot (b-1) - (a-b) \cdot (a-b+1)$ | $a$ bármi<br>és $b$ bármi |
| $\frac{ab}{ac+ba} = \frac{b}{c+b}$ | $a \neq 0$,<br>$c+b \neq 0$,<br>egyébként bármi |
| $\frac{2}{3}x + 7 = \frac{1}{5} \cdot (x-3)$ | $x = -\frac{114}{7}$ |
| $-a \cdot (b-a) = -ab - a^2$ | |
| $\frac{1}{x^2} > 0$ | |
| $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot ...... \cdot (x-n) = 0$ | |
| $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$ | |
| $\frac{x^2}{x^2-1} > 0$ | |
| $\frac{2x-13}{1+5x} < 0$ | |
| $\frac{5x}{5x+1} = \frac{x}{x+1}$ | |
| $(2a-5)^2 - 1 = 4 \cdot (a-2) \cdot (a-3)$ | |
| $2x^2 - 3x + 4 > x^2 - x + 3$ | |

**15.4.** [20] Vajon minden $a$-ra igaz-e a következő egyenlőség?
$(a^2 + 35) \cdot a^2 + 24 = 10a \cdot (a^2 + 5)$
**a)** Próbáljuk ki $a = 1$, $a = 2$ ,$a = 3$ és $a = 4$ esetére!
**b)** Próbálgatás útján kiderülhet-e egy egyenlőségről, hogy azonosság?
**c)** És az kiderülhet, hogy nem azonosság?
**d)** Tegyünk további próbát! Nézzük meg például $a = 0$-ra!

**15.5.** [20] Igaz-e, hogy $a$ minden értékére fennáll a következő egyenlőség?

$$a^2 + 15 \cdot (a+2) + 1 = a \cdot (a+15) + 31$$

**a)** Hogyan járhatunk ennek utána?
**b)** Próbáljuk igazolni, hogy azonosság!
**c)** Fogalmazzuk meg, mikor azonosság egy egyenlőség!

**15.6.** [20] „Piaci szorzás”
Ha valaki csak 5-ig tudja az egyszeregyet, az ujjait felhasználva, így szorozhat két 5 és 10 közötti számot egymással: két kezén annyi ujjat nyújt fel, amennyivel több a két tényező 5-nél,

a felnyújtott ujjak együttes számát 10-szer veszi, és ehhez hozzáadja a két kezén behajtott ujjak szorzatát. Például a $9\cdot 7$ szorzást így végzi el: 4 és 2, összesen 6 ujjat nyújt fel, 1 és 3 ujjat hajlít be, tehát így számol:

$$9 \cdot 7 = 10 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 63.$$

**a)** Próbáljuk ki két 5 és 10 közé eső számmal!
**b)** Valóban mindig jó ez az eljárás?
Írjuk le általánosan ($a$ és $b$ az 5 és 10 közé eső számok):

$$ab = 10 \cdot (a - 5 + b - 5) + (10 - a) \cdot (10 - b)$$

Igazoljuk az eljárás helyességét!

**15.7.** [20] 10 és 15 közé eső számokat pedig úgy szorozhatunk gyorsan, hogy két kezünkön annyi ujjat nyújtunk fel, amennyivel több a két tényező 10-nél, azután 100-hoz hozzáadjuk a felmutatott ujjak számának 10-szeres összegét, meg a felmutatott ujjak szorzatát. Például:

$$13 \cdot 12 = 100 + 10 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 156.$$

Milyen azonosság a nyitja ennek a számolásmódnak?

**15.8.** [20] „Diákszorzás”.
Hogyan lehet gyorsan meghatározni az 5-re végződő számok négyzetét?

| $5^2$ | $15^2$ | $25^2$ | ... |
|---|---|---|---|
| 25 | 225 | 625 | ... |

Folytassuk a táblázat kitöltését! Keressünk egyszerű szabályt! Próbáljuk meg igazolni a szabály érvényességét!

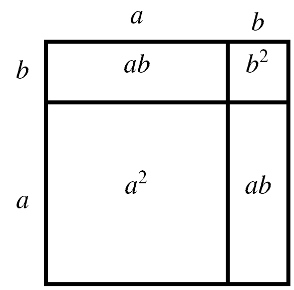
**15.9.** [20] Próbáljuk igazolni a „diákszorzás” (lásd a 15.8. feladatot!) következő általánosítását: ha két szám tízesei megegyeznek, egyesei pedig 10-re egészítik ki egymást, akkor is szorozhatjuk őket úgy egymással, hogy a tízesek (közös) számát a természetes számsorban rákövetkező számmal szorozzuk, és a kapott szorzat után írjuk az egyesek szorzatát. (Ha a szorzat egyjegyű, akkor egy 0-t írunk elé.) Például:

$$74 \cdot 76 = 5624.$$

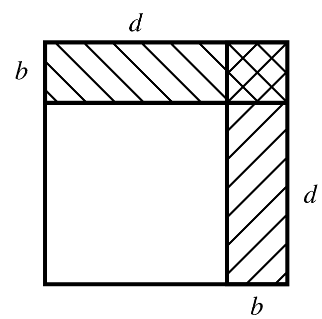
**a)** Próbáljuk ki az eljárást!
**b)** Írjuk fel azt az azonosságot, amely ennek a számolási módnak a helyességét igazolja!

**15.10.** (M) [20] Keressünk módszert az 5-tel kezdődő (nem túl nagy) számok négyzetének fejben való kiszámítására!

**15.11.** [20] Milyen azonosságokat szemléltetnek a következő ábrák?
**a)** 15.0.1. ábra **b)** 15.0.2. ábra **c)** 15.0.3. ábra **d)** 15.0.4. ábra **e)** 15.0.5. ábra
**f)** Gondoljuk meg, hogy ezekkel az ábrákkal a felírt azonosságokat milyen értékekre szemléltettük!
**g)** Bizonyítsuk be algebrai úton ezeket az azonosságokat!




15.11.1. ábra.




15.11.2. ábra.

**15.12.** [20] Keressünk szemléltetést a következő azonosságokhoz! Némelyik azonosságot csak elkezdtük, azokat fejezzük is be!

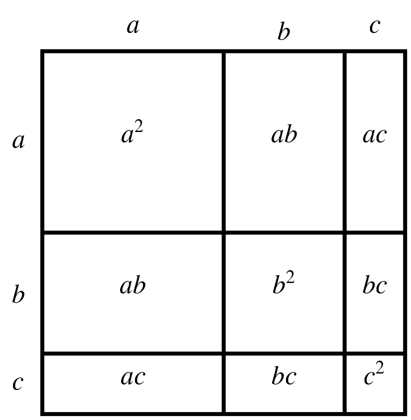
**a)** $(a+1)\cdot(b+1)=ab+a+b+1$
**b)** $(a+b)^2=$
**c)** $(a+b)\cdot(c+d)=ac+bc+ad+bd$
**d)** $(a+b+c)^2=$
**e)** $(a-b)^2=$
**f)** $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$
**g)** $(a+b)^3=$
**h)** $(a-b)^3=$
Gondoljuk meg, hogy ábráinkkal a felírt azonosságokat milyen értékekre szemléltettük!

**15.13.** [20] Vágjuk fel a 15.0.1. ábrán látható $a^3-b^3$ térfogatú csonka kockát részekre, írjuk fel a résztestek térfogatát és a leolvasható azonosságot!

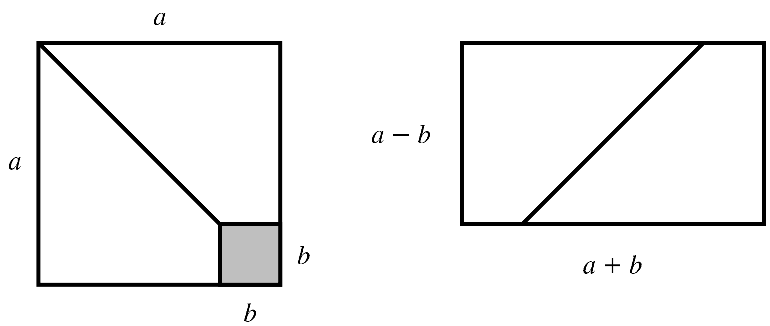
**15.14.** [20] **a)** Az $(a+b)^4$ kifejtett alakjára esélyes találni valamilyen szemléltetést?
**b)** Írjunk fel azonosságot algebrai úton $(a+b)^4$-re és kifejtett alakjára!
**c)** Határozzuk meg $(a-b)^4$ kifejtett alakját!

**15.15.** **a)** Folytassuk a sorok kitöltését azonosságokkal! A kifejtett alakot $a$ hatványai szerinti csökkenő sorrendben írjuk!

$(a+b)^0=1$
$(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot b$
$(a+b)^2=1\cdot a^2+2\cdot ab+1\cdot b^2$
$(a+b)^3=$
$(a+b)^4=$
$(a+b)^5=$
$(a+b)^6=$




15.11.3. ábra.




15.11.4. ábra.

**b)** Írjuk fel $(a-b)$ hatványait is ehhez hasonlóan!

**15.16.** [20] Bontsuk fel a zárójeleket!

**a)** $(2x+3y)\cdot(2x-3y)=$
**b)** $\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{4}\right)\cdot\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}\right)=$
**c)** $(-x+2)\cdot(-x-2)=$
**d)** $(-2x+y)\cdot(2x+y)=$
**e)** $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2=$
**f)** $(3x+\frac{y}{2})^2=$
**h)** $(2x^2-5)\cdot(2x^2+5)=$

**15.17.** [20] Bontsuk fel a zárójelet!

**a)** $(2c+3)^2=$ **b)** $(3c+5)^2=$ **c)** $(3a+2b)^2=$ **d)** $\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}\right)^2=$

**15.18.** [20] Írjuk fel zárójel nélkül!

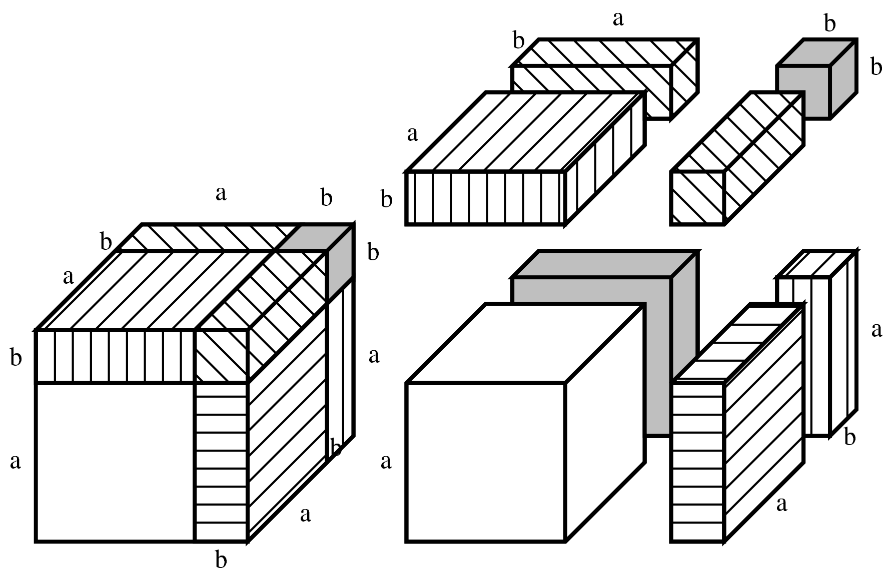
**a)** $(2x+3c)(2x-3c)$ **b)** $(3x-4)^2$ **c)** $(4x-\frac{y}{3})\,(4x+\frac{y}{3})$
**d)** $(x^2+3)^2$

**15.19.** [20] Melyik szám nagyobb és mennyivel:

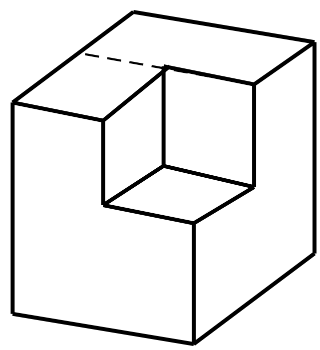
$$71\,234\,561\cdot 71\,234\,563 \qquad \text{vagy} \qquad 71\,234\,562^2\,.?$$

**15.20.** [20] Számológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik nagyobb és mennyivel:

$$777\,666^2 \qquad \text{vagy} \qquad 777\,663\cdot 777\,669\,?$$




15.11.5. ábra.



15.13.1. ábra.

Kérdezzünk tovább!

**15.21.** [20] Igaz-e hogy,

**a)** két egymást követő egész szám négyzetének a különbsége a két szám összegével egyenlő? Például: $3^2 - 2^2 = 3 + 2$.

**b)** ha egy egész szám négyzetéből a nála kettővel kisebb egész szám négyzetét kivonjuk, a köztük levő egész szám négyzetét kapjuk? Például: $5^2 - 3^2 = 4^2$.

**c)** ha egy egész szám négyzetéből a nála kettővel kisebb egész szám négyzetét kivonjuk, a köztük levő egész szám négyszeresét kapjuk. Például: $5^2 - 3^2 = 4 \cdot 4$.

**d)** minden $n$ egész számra $(n + 30)^2 - (n - 30)^2$ osztható 120-szal?

**15.22.** [20] Egészítsük ki a képleteket úgy, hogy azonosságokat kapjunk!

**a)** $x^2 - 16 = (x - 4)(\qquad)$ **b)** $(3x + \bigcirc)^2 = 9x^2 + 48x + \triangle$

**c)** $ax + bx + cx = x(\qquad)$ **d)** $x^2 + axy = x(\qquad)$

**e)** $2x^2 + ax + x = x(\qquad)$ **f)** $a^2b + ab^2 = ab(\qquad)$

**15.23.** [20] Egészítsük ki az egyenlőségeket úgy, hogy minden $x$-re igazak legyenek!

**a)** $(3x - \quad) \cdot (3x + \quad) = 9x^2 - 25$

**b)** $(3x + \quad)^2 = 9x^2 + 48x + \_$

**c)** $x^2 + 2x - 35 = (x + 7) \cdot (\qquad)$
**d)** $x^2 + 12x + 35 = (x + 7) \cdot (\qquad)$
**e)** $x^4 - 1 = (x^2 + 1) \cdot (\qquad)$

**15.24.** [20] Számoljunk fejben!
**a)** $\left(3\frac{1}{5}\right)^2 =$
**b)** $\left(6\frac{7}{12}\right)^2 =$

**15.25.** [20] Bizonyítsuk be, hogy akármilyen egész szám is $x$,

$$(x + 498)^2 - (x - 494)^2$$

osztható 1984-gyel!

**15.26.** [20] Keress olyan $a$ egész értékeket, hogy milyen egész $x$-re
**a)** $(x + a)^2 - (x - a)^2$ osztható legyen 1848-cal!
**b)** $(x + a)^2 - (x - a)^2$ osztható legyen 1984-cal!
**c)** $(x + a)^2 - (x - a)^2$ 5-re végződő szám legyen!

**15.27.** [20] **a)** Válasszunk egy 3-nál nagyobb prímszámot! Számítsuk ki a négyzetét, adjunk hozzá 17-et, és nézzük meg, hogy milyen maradékot ad a kapott szám 12-vel osztva! Csináljuk végig ugyanezt több 3-nál nagyobb prímszámmal is! Véletlen-e, hogy mindig ugyanaz a maradék adódott?
**b)** Mi a helyzet, ha 24-gyel osztunk? Mi lehet a magyarázat?

**15.28.** [20] Melyik igaz a következő két állítás közül! Az igaz állítást bizonyítsuk be, a nem igazra mondjunk ellenpéldát!
**a)**Minden 3-nál nagyobb prímszám négyzetének a kisebbik szomszédja osztható 12-vel.
**b)**Minden prímszám kisebbik szomszédjának a négyzete osztható 12-vel.

**15.29.** [20] Határozzuk meg az értelmezési tartomány azon részeit, melyeken a következő kifejezések értéke 0-val egyenlő, 0-nál kisebb, 0-nál nagyobb! A megoldást ábrázoljuk számegyenesen!
**a)** $(a + 2)^2 - 16$ **b)** $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$ **c)** $16x^2 - (x + 1)^2$ **d)** $x^2 + 2x + 3$
**e)** $2x^2 - 14x + 12$

**15.30.** [20] Bontsuk két tényező szorzatára!
**a)** $x^2 + 2x + 1 - y^2$
**b)** $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$

**15.31.** [20] Bontsuk tényezőkre a következő számokat! Ezt felhasználva keressünk osztókat a számokhoz a hatványok kiszámítása nélkül!
**a)** $17^2 - 1$ **b)** $17^2 - 3^2$ **c)** $25^2 - 17^2$

**15.32.** [20] Számítsuk ki fejben!
**a)** $20{,}1^2$ **b)** $\left(6\frac{1}{6}\right)^2$ **c)** $\left(10\frac{1}{5}\right)^2$

**15.33.** [20] Számítsuk ki fejben!

**a)** $307^2 - 207^2$ **b)** $40{,}2^2$ **c)** $1503^2 - 1502^2$ **d)** $\left(7\frac{1}{14}\right)^2$

**e)** $\frac{1987^2-49}{1994}$ **f)** $19{,}9^2$

**15.34.** (S) [20] Számítsuk ki fejben!

**a)** $703^2 - 603^2$ **b)** $703^2 - 693^2$ **c)** $703^2 - 693^2$ **d)** $\frac{703^2-81}{694}$ **e)** $299{,}9^2$

**f)** $300{,}1^2$ **g)** $\left(9\frac{1}{18}\right)^2$

Írjuk le, mi segített a számításban!

**15.35.** [20] Oldjuk meg minél egyszerűbben!

**a)** $\frac{9x-18}{x-2} = ?$, ha $x = 223\,455$ **b)** $\frac{x^2+4x+4}{x+2} = ?$, ha $x = 1987{,}1987$

**c)** $\frac{15x-10}{6x-4} = ?$, ha $x = 9876{,}1234$ **d)** $\frac{x^2-9}{x+3} = ?$, ha $x = 5555{,}67$

**15.36.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket:

**a)** $\frac{x^2+6x+9}{x+3} = 100$ **b)** $\frac{x^2-25}{x+5} = 3x$

**15.37.** [20] A következő állítások közül jelöljük meg az igazakat! Ezeket bizonyítsuk is be, a nem igazakra adjunk ellenpéldát, és nézzük meg, hogy milyen feltételekkel tehetők igazzá!

**a)** Minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul.

**b)** Egyetlen páratlan szám négyzete sem osztható 8-cal.

**c)** Ha $n$ tetszőleges pozitív egész, akkor $(2n + 1)^2$ osztható 8-cal.

**d)** Ha $a$ tetszőleges természetes szám, $a^2 - a$ osztható 6-tal.

**e)** Ha $a$ tetszőleges természetes szám, $a^3 - a$ osztható 6-tal.

**f)** Egy négyzetszám utolsó jegye nem lehet sem 2, sem 3, sem 7, sem 8.

**15.38.** [20] Igaz-e, hogy

**a)** minden prímszámnak van olyan szomszédja, amelyik osztható 6-tal, és olyan szomszédja is van, amelyik 4-gyel osztható. Például: 17-nek a kisebbik szomszédja 4-gyel, a nagyobbik 6-tal osztható, 37 kisebb szomszédja 4-gyel is, 6-tal is osztható.

**b)** minden prímszámnak van olyan szomszédja, amelyik 3-mal osztható?

**c)** csak a 3-nál nagyobb prímszámokra igaz, hogy mindegyiknek van olyan szomszédja is, amelyik osztható 6-tal, és olyan szomszédja is, amelyik 4-gyel osztható?

**d)** van olyan $n$ egész szám, amelyre $n^5 - n$ nem osztható 5-tel?

**15.39.** [20] Az alábbi egyenlőségek közül melyik azonosság, és melyik nem az?

**a)** $(x + 1) \cdot (x + 2) + (x + 1) \cdot (x - 2) + (x - 1) \cdot (x + 2) + (x - 1) \cdot (x - 2) = 4x^2$

**b)** $\frac{4x^2+6x}{x+2} = \frac{4x^2}{x} + \frac{4x^2}{2} + \frac{6x}{x} + \frac{6x}{2} = 4x + 2x^2 + 6 + 3x$

**c)** $\frac{4x^2+6x}{x+2} = \frac{4x^2}{x} + \frac{6x}{2} = 4x + 3x$

**d)** $\frac{3}{x+y} = \frac{3}{x} + \frac{3}{y}$

**e)** $\frac{4x^2+6x}{x+2} = \frac{4x^2}{x+2} + \frac{6x}{x+2}$

**f)** $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

**g)** $(a^2+35)a^2+35=a^2+35(a^2+1)$

**h)** $\frac{1}{1a+1b}=\frac{ab}{a+b}$

**i)** $(x+2)^2=x^2+4$

**j)** $(x-y)^2=x^2-2xy-y^2$

**k)** $|x-100|+|x+100|=200$

**l)** $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$

**m)** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

**n)** $\frac{4x+y}{2x-y}=\frac{2x+y}{x-y}$

**o)** $\frac{4x+y}{2x-y}=\frac{16x^2-y^2}{(2x-y)\cdot(4x+y)}$

**p)** $\frac{3x+4y+2}{2x-y+2}=\frac{3x+4y}{2x-y}$

**q)** $\frac{3x+4y}{2x-y}=\frac{3x+4y\cdot 2}{2x-y\cdot 2}$

**r)** $\frac{(3x+4y)\cdot 2}{(2x-y)\cdot 2}=\frac{3x+4y}{2x-y}$

**s)** $\frac{x^2+6x+9}{x+3}=x-3$

**t)** $3(a+b+ab)=3a+3b+(3a)\cdot(3b)$

**15.40.** [20] Számítsuk ki a kifejezések helyettesítési értékét a megadott helyen!

**a)** $\frac{x^2-9x+18}{x-3}$ $\quad x=917{,}518$
**b)** $\frac{3x^2-15}{x^2-5}$ $\quad x=123{,}432$
**c)** $\frac{x^2-10x+25}{x-5}$ $\quad x=909{,}09$
**d)** $\frac{x^2-16}{x+4}$ $\quad x=191\,615$

**15.41.** [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenlőségek?
**a)** $\frac{x^2+4x+4}{x+2}=3x+6$
**b)** $\frac{x^2-9}{x+3}=x-3$
**c)** $\frac{x^4-16}{x^2+4}=5$
**d)** $\frac{(x+1)^2-(x-2)^2}{2x-1}=3$

**15.42.** [20] Milyen számot írhatunk $x$ helyébe, hogy igaz állítást kapjunk?
**a)** $4x\le x^2$ **b)** $4x=x^2$ **c)** $4x>x^2$

**15.43.** [20] Ha azonosságot akarunk igazolni, gyakran célravezető az egyenlőségben szereplő két kifejezést polinommá alakítani.
Például itt is:

$$a^4-4a-1=(a^2+1)^2-2(a+1)^2$$

Nézzük meg, hogy azonosság-e ez az egyenlőség!

**15.44.** [20] Igazoljuk szorzattá alakítással, hogy az alábbi egyenlőség azonosság!

$$(a-b)\cdot(a+b)-3ac-3bc=(a+b)\cdot(a-b-3c)$$

**15.45.** (S) [20] Azonosság-e a következő egyenlőség?

$$(a+b-2c)^2-(a-b)^2=4(a-c)\cdot(b-c)$$

**15.46.** [20] Döntsük el a két oldal polinommá, vagy (ahol az segít) szorzattá alakításával, hogy azonosságok-e a következő egyenlőségek!

**a)** $25\cdot(a^2+b^2)=(3a+4b)^2+(4a-3b)^2$
**b)** $r^4+4=(r^2+2+2r)\cdot(r^2+2-2r)$
**c)** $(a-b)^2-(b-a)^2=0$
**d)** $(a-b)^3-(b-a)^3=0$
**e)** $(a-b)^4-(b-a)^4=0$
**f)** $a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)\cdot(a^2-2ab+2b^2)$
**g)** $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\cdot(a+b)$
**h)** $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-(a-b-c)^2=8ac$
**i)** $a^3-b^3=(a-b)^3-3ab\cdot(a+b)$
**j)** $a^3\cdot(b-c)+b^3\cdot(c-a)+c^3\cdot(a-b)+(b-c)\cdot(c-a)\cdot(a-b)\cdot(a+b+c)=0$
**k)** $(a^2-b^2)\cdot(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$
**l)** $(a^2-b^2)\cdot(a^2+b^2)=a^4+a^2\cdot b^2-b^4$

**15.47.** [20] Láttuk, hogy $a^2-b^2$ és $a^3-b^3$ is szorzattá alakítható:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

**a)** Alakítsuk szorzattá az $a^4-b^4$ kifejezést! Mutassuk meg, hogy kiemelhető belőle: $a-b$. Nézzük meg, mivel kell megszorozni, hogy $(a^4-b^4)$-t kapjunk!
**b)** Mutassuk meg, hogy az $a^6-b^6$ kifejezésből is kiemelhető $a-b$.
**c)** Vajon szorzattá alakítható-e, és ha igen, hogyan az $a^5-b^5$ kifejezés?
**d)** Látjuk-e már, hogy $a^7-b^7$ és $a^8-b^8$ milyen szorzattá alakítható?

**15.48.** [20] Igazoljuk, hogy a következő kifejezésekből kiemelhető $a+b$.
**a)** $a^3+b^3=(a+b)\cdot\ldots\ldots$
**b)** $a^4-b^4=(a+b)\cdot\ldots\ldots$
**c)** $a^5+b^5=(a+b)\cdot\ldots\ldots$
**d)** Keressünk további hasonló azonosságokat!

**15.49.** [20] **a)** Igazoljuk, hogy ha $a$ és $b$ tetszőleges egész számok, akkor az $a^{12}-b^{12}$ szám osztható $(a^4-b^4)$-nel és $(a^3-b^3)$-nal is!
**a)** Mivel osztható még $a^{12}-b^{12}$? Igazoljuk is az állításokat!
**c)** Bontsuk fel minél több tényező szorzatára $a^{12}-b^{12}$-t!

**15.50.** (S) [20] Bizonyítsuk be, hogy
**a)** $3^{12}-1$ osztható 4-gyel!
**b)** $3^{12}-1$ osztható 13-mal!
**c)** Keressük meg $(13^{12}-1)$ néhány további osztóját!

**15.51.** [20] Keressük meg az alábbi számok néhány osztóját!
**a)** $(7^{84} - 1)$ **b)** $(7^{85} - 1)$ **c)** $(7^{85} + 1)$

**15.52.** [20] Hozzuk egyszerűbb alakra!
**a)** $\frac{4-2x+x^2}{x+2} - x - 2$

**b)** $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$

**c)** $\frac{1}{(a-b)\cdot(a-c)} + \frac{1}{(b-a)\cdot(b-c)} + \frac{1}{(c-a)\cdot(c-b)}$

**d)** $\frac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-4b^2}$

**15.53.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket:
**a)** $\frac{x^2-5x+6}{x-2} = 4$

**b)** $(x^2 - 4) \cdot (2x^2 + 3) + 2(x^2 - 4) = 7x^2 - 28$

**c)** $\frac{4x^4-9}{2x^2-3} = 11$

**d)** $\frac{x^2-25}{x-5} = 10$

**15.54.** [20] Határozzuk meg minél egyszerűbben a következő számok egészre kerekített értékét (lefelé kerekíts)! Ha lehet, számoljunk fejben!
**a)** $\left(4\,\frac{1}{7}\right)^2$

**b)** $\left(6\,\frac{7}{12}\right)^2$

**c)** $\frac{1983^2}{1979}$

**d)** $\frac{1983^2}{1989}$

**15.55.** [20] Állapítsuk meg fejben, hogy $\frac{1}{999} - \frac{1}{1001}$ értékéhez az alábbi számok közül melyik esik a legközelebb!

0,0001 0,00001 0,000001

**15.56.** [20] Becsüljük meg (számológép használata nélkül), hogy körülbelül mekkora lehet az eltérés $\frac{1}{6}$ és $\frac{1}{6{,}001}$ között (harmadik tizedes jegyük különbözik először)!

# 16. FEJEZET
# Nevezetes azonosságok (teszt)

Számológép használata nélkül töltsük ki a tesztet!

**16.1.** (M) Az alábbi kifejezések közül hánynak az értéke állandó?

$\dfrac{4x-6y}{6x-9y}$; $\dfrac{k^2+1}{(k+1)^2}$; $\dfrac{a^2-25}{a+5}-a$;

$(3x^2-4)^2+24x^2-9x^4$;

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**16.2.** (M) Alább azonosságokat kezdtünk el írni. Fejezzük be őket! Próbáljuk ugyanazt a kifejezést minél több helyre beírni, hogy azonosságot kapjunk! (Pl. az $\frac{a+1}{...}=1$ és $(...)^2=a^2+$ $+2a+1$ hiányos azonosságok mindegyikébe beírhatjuk az „$a+1$” kifejezést).

$4x^2-20x+25=(...)^2$; $\frac{4x^2-25}{...}=2x+5$;

$2x^2-3x-5=(x+1)\cdot(...)$; $(x+2)^2-(x+3)^2=...$;

$(5x+2)^2+(...)^2=29(x^2+1)$;

A szükséges különböző kifejezések minimális száma:

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**16.3.** (M) Határozzuk meg

$$20072005\cdot 20072011-20072007^2$$

pontos értékét!

**A)** 6 **B)** 20072006 **C)** 40144006 **D)** 60216016 **E)** egyik sem

**16.4.** (M) Válasszuk úgy meg $x$ és $y$ értékét, hogy azokat az alábbi tíz kifejezésbe beírva (ugyanazt az értékpárt mindegyik kifejezésbe) minél többféle értéket kapjunk!

$(x-y)^2$; $(x+y)(x-y)$; $(y-x)^2$;

$x^2-y^2$; $x^2-2xy+y^2$; $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$;

$(-x-y)(y-x)$; $(x+y)^2-4xy$; $-(x-y)(y-x)$;

$\dfrac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x-y}$.

Legfeljebb hány különböző érték érhető el egy megfelelő $x$, $y$ pár alkalmazásával?

**A)** 1 vagy 2 **B)** 3 vagy 4 **C)** 5 vagy 6 **D)** 7 vagy 8 **E)** 9 vagy 10

**16.5.** (M) Számoljunk fejben! Válasszuk ki az alábbi listából $\left(5\frac{1}{5}\right)^2$ (öt egész egyötöd négyzetének) értékét!

**A)** $25\frac{1}{25}$ **B)** $26\frac{1}{25}$ **C)** $27\frac{1}{25}$ **D)** $30\frac{1}{5}$ **E)** egyik sem

**16.6.** (M) Számoljunk fejben! Válasszuk ki az alábbi listából $99\,997^2$ értékét!

**A)** 9 999 999 991 **B)** 9 999 999 949 **C)** 9 999 994 009 **D)** 9 999 499 999

**E)** egyik sem

**16.7.** (M) Számoljunk fejben! Válasszuk ki az alábbi listából azt a tartományt, amelybe $n = 2008^2 - 2007^2$ tartozik!

**A)** $0 < n \leq 10$ **B)** $10 < n \leq 100$ **C)** $100 < n \leq 1000$ **D)** $1000 < n \leq 10000$ **E)** $10000 < n$

**16.8.** (M) Számoljunk fejben! Az $510^2 - 503^2$ szám legnagyobb valódi osztóját keressük. Jelölje azt az osztót $q$. Melyik halmazba esik $q$?

**A)** $0 < q \leq 10$ **B)** $10 < n \leq 100$ **C)** $100 < n \leq 1000$ **D)** $1000 < n \leq 2000$ **E)** $2000 < n$

**16.9.** (M) Az alábbi egyenletek mindegyikében megváltoztathatunk egy „+” vagy „−” jelet (tehát a „+”-t „−”-ra, a „−”-t „+”-ra cserélhetjük, de összesen csak egyet).
$(p - 2q)^2 = p^2 - 4pq - 4q^2$; $9a^2 + 4b^2 = (3a - 2b)(3a + 2b)$; $(0{,}5u - 2v)^2 = 0{,}25u^2 - 4v^2$;
$(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$;

Hány olyan egyenlet van a négy között, amelyből így azonosságot is kaphatunk?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**16.10.** (M) Az alábbi egyenletből azonosságot szeretnénk kapni. Ehhez megváltoztathatunk legfeljebb két együtthatót (a 2, 1, 4, 12, 1 számok közül egyet vagy kettőt), de csak pozitív egész számra cserélhetünk.

$$(2a + 1)^2 = 4a^2 + 12a + 1$$

Hány megoldás van?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** legalább 4

17. FEJEZET

# Egyenletek II.

**17.1.** Írjunk a betűk helyére számokat úgy, hogy a megadott két állítás közül pontosan egy legyen igaz, amennyiben ez lehetséges!

**a)** $x+y=2, \quad 3x+3y=36.$
**b)** $x-y=10, \quad 4x-4y=50.$
**c)** $x+y=5, \quad x+3y=11.$
**d)** $x<3, \quad x^2>9.$
**e)** $x+y<5, \quad x^2+2xy+y^2=25.$
**f)** $x^2+y^2=25, \quad x+y=5.$

**17.2.** (M) [20] Lehet-e a betűk helyére számokat írni úgy, hogy a megadott két állítás közül pontosan egy legyen igaz?

**a)** $x+y=10 \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=5$
**b)** $x+y=2 \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$
**c)** $x+y=3 \quad x^2+y^2=9$
**d)** $x+y=4 \quad x^2+2xy+y^2=4x+4y$
**e)** $x^2+2x+1=y^2 \quad y-x=1$

**17.3.** Jelöljük koordinátarendszerben az alábbi egyenletek illetve egyenlőtlenségek megoldáshalmazát! (Melyek azok a $P(x;y)$ pontok a síkban, amelyeknek koordinátáira teljesülnek a megadott összefüggések?)

**a)** $x\cdot y=0$ **b)** $x=0$ **c)** $x>0$ **d)** $x\cdot y>0$ **e)** $x+y=0$
**f)** $x-y=0$ **g)** $x+y>0$ **h)** $x-y>0$ **i)** $x^2>y^2$

**17.4.** [20] A következő feladatok megoldásában keressük meg a hibát, és javítsuk ki a hibás megoldásokat!

**a)** $6(x+2)+7(x+2)=15(x+2)$
Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát $(x+2)$-vel: $6+7=15 \Rightarrow 13=15$, tehát nincs megoldás.

**b)** $\frac{1}{x}+\frac{3}{x}+1=\frac{4+x}{x}$
Megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $x$-szel: $1+3+x=4+x \Leftrightarrow 4+x=4+x$, így minden szám megoldás.

**c)** $x+\frac{1}{x-3}=3+\frac{1}{x-3}$
Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $(x-3)$-mal:

$$x\cdot(x-3)+1=3\cdot(x-3)+1$$

$$x\cdot(x-3)-3\cdot(x-3)=0$$

$$(x-3)\cdot(x-3)=0$$

(Kiemeltünk $(x-3)$-at.) Az utolsó egyenlőség csak akkor igaz, ha $x=3$.

Tehát a megoldás: $x=3$.

Az $x+\frac{1}{x-3}=3+\frac{1}{x-3}$ egyenletet egyszerűbben is meg lehet oldani, mindkét oldalból kivonjuk az egyező törtes kifejezéseket: $x=3$

**d)** $x\cdot\frac{3x-51}{17-x}=-51$
$(17-x)$-szel egyszerűsítünk: $x\cdot\frac{-3(17-x)}{17-x}=-51 \Leftrightarrow -3x=-51 \Leftrightarrow x=17.$

**17.5.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket! Egyszerűsítsd a törteket ezekben az egyenletekben:

**a)** $\frac{3x^2-6x}{3x-6}=0$

**b)** $\frac{3x^2-6x}{x}=36$

Mi történik a gyökökkel? (Gyökvesztés? Hamis gyök? Mindkettő? Egyik sem?)

**17.6.** [20] Melyik az a szám, amelynek a felét és a harmadát összeszorozva, a szám négyszeresét kapjuk?

**17.7.** [20] Milyen számokra igaz:

**a)** $(5x-2)\cdot(x-3)=0$

**b)** $2x^2-5x=0$

**c)** $3x\cdot(x+3)-6\cdot(x+3)=0$?

**17.8.** [20] Mi a hiba ebben a megoldásban?

A $6x-8=9x-12$ egyenlet mindkét oldalából emeljük ki a közös tényezőt:

$2\cdot(3x-4)=3\cdot(3x-4)$. Az egyenlet mindkét oldalát osszuk el $(3x-4)$-gyel: $2=3$.

Az ilyen lehetetlen eredmény általában azt jelenti, hogy az egyenletnek nincs gyöke (mert semmilyen $x$-re nem igaz, hogy $2=3$).

Ha az egyenletet más úton oldjuk meg, azt kapjuk, hogy van gyöke:

$$x=\frac{4}{3}$$

**17.9.** [20] Milyen $x$-re igaz, hogy

**a)** $(2x+1)\cdot(x+1)=(x-5)\cdot(x+1)$

**b)** $(3x-1)\cdot(x+7)=(2x-5)\cdot(3x-1)$

**c)** $4(x-7)+3x\cdot(x-7)=5x\cdot(x-7)+7-x$

**d)** $x+3-\frac{5x\cdot(x+3)}{4}=\frac{3x\cdot(x+3)}{2}-x-3$?

**17.10.** [20] Milyen $x$-re igaz, hogy

**a)** $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$

**b)** $\frac{1}{x-5}+6=\frac{6-x}{x-5}$

**c)** $\frac{2}{x-2}+3=\frac{x+2}{x-2}$

**d)** $6x-\frac{x}{x-2}=\frac{x\cdot(x-3)}{x-2}$?

**17.11.** [20] Keressünk az alábbiak között olyan függvényeket, amelyeknek ugyanaz az értelmezési tartománya, és az értékkészlete is megegyezik! Vázoljuk is a függvények grafikonját!

$f(x)=\frac{x}{x-2}$ $\quad g(x)=\frac{(7-3x)\cdot(x-2)}{x-2}$ $\quad h(x)=\frac{(2x-3)\cdot(x-2)}{x-2}$ $\quad k(x)=\frac{7x+5}{3x+6}$

$m(x)=\frac{7x-14}{3x-6}$ $\quad n(x)=\frac{7x+14}{3x+6}$ $\quad p(x)=\frac{7x^2-14x}{6x-12}$

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

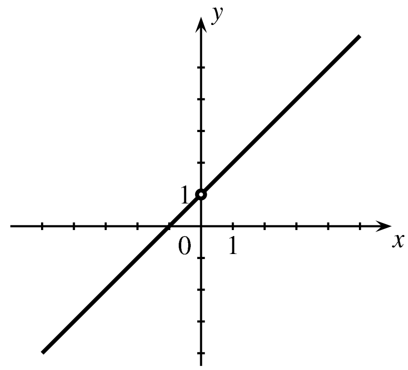
**a)** $f(x)=-2$ **b)** $f(x)=-1$ **c)** $f(x)=0$ **d)** $f(x)=1$ **e)** $m(x)=0$

**f)** $m(x)=1$ **g)** $m(x)=\frac{7}{3}$ **h)** $p(x)=\frac{7}{3}$ **i)** $k(x)=n(x)$ **j)** $g(x)=h(x)$

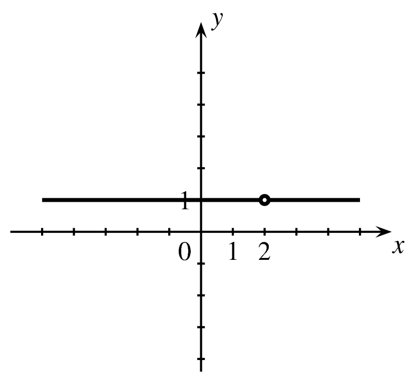
**j)** Írjunk fel az előző feladatban szereplő függvényekkel további egyenleteket! Oldjuk is meg őket! Legyenek köztük olyanok is, amelyeknek nincs megoldása, és olyanok is, amelyeket a változó minden megengedett értéke igazzá tesz!

**17.12.** [20] Keressünk képleteket az alábbi grafikonokkal megadott függvényekhez! A karikákról leolvasható, hogy milyen helyeken nincsenek értelmezve a függvények.

**a)** 17.0.1. ábra **b)** 17.0.2. ábra **c)** 17.0.3. ábra **d)** 17.0.4. ábra




17.12.1. ábra.




17.12.2. ábra.

Írjunk fel ezekkel a függvényekkel is olyan egyenleteket, amelyeknek nincs megoldása, egy megoldása van, két megoldása van, és olyanokat is, amelyeknek az értelmezési tartománya minden eleme megoldása!

**17.13.** [20] Melyik megoldás jó és miért? Hol a hiba a hibás okoskodásokban?

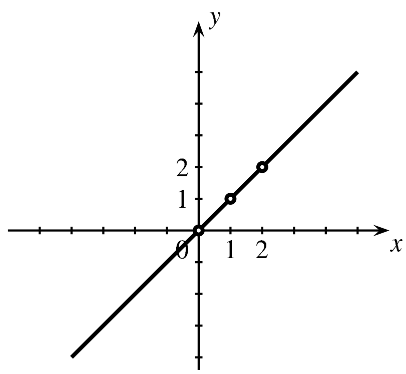
$$\frac{14x-10}{7x-5}=\frac{28x-20}{7x-5}$$

**I.megoldás:** Végig szorzom az egyenletet $(7x-5)$-tel:

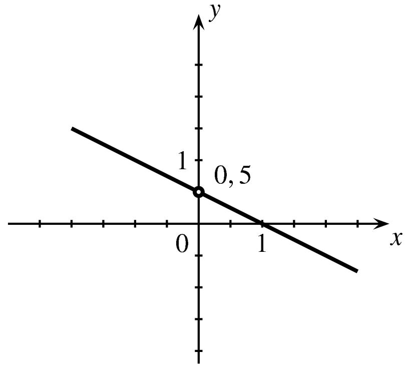
$$14x-10= \quad 28x-20 \qquad (1)$$
$$14x= \quad 10 \qquad (2)$$
$$x= \quad \tfrac{5}{7} \qquad (3)$$

**II.megoldás:**
A számlálóban mindkét oldalon kiemelhetek:

$$\frac{2(7x-5)}{7x-5}=\frac{4(7x-5)}{7x-5}$$




17.12.3. ábra.




17.12.4. ábra.

$(7x-5)$-tel egyszerűsítek: $2 = 4$
Ez azt jelenti, hogy nincs megoldása az egyenletnek, mert ez semmilyen $x$-re sem igaz.

**III.megoldás:**
Rendezem az egyenletet:

$$\frac{28x-20}{7x-5} - \frac{14x-10}{7x-5} = 0 \tag{4}$$
$$\frac{14x-10}{7x-5} = 0 \tag{5}$$
$$\frac{2(7x-5)}{7x-5} = 0 \tag{6}$$

Egy tört értéke csak úgy lehet 0, ha a számlálója 0. Ez csak úgy lehet, ha $7x-5=0$, $7x-5$ viszont nem lehet 0, mert akkor a tört nevezője 0 lenne. Tehát nincs megoldása az egyenletnek.

**IV.megoldás:**
Úgy indulok el, mint a második megoldásban: $\frac{2(7x-5)}{7x-5} = \frac{4(7x-5)}{7x-5}$
$(7x-5)$-tel akarok egyszerűsíteni. Ekkor két esetet kell megnézni:
**1.eset**: $7x-5=0$, de ez nem lehet, mert a nevező 0 lenne.
**2.eset**: $7x-5 \neq 0$. Egyszerűsítek vele. Azt kapom, hogy $2 = 4$, ami azt jelenti, hogy nincs megoldása az egyenletnek.

**17.14.** [20] Melyik megoldás jó és miért? Hol a hiba a hibás okoskodásokban?

$$\frac{14x-10}{7x+5}=\frac{28x-20}{7x+5}$$

**I.megoldás:**
Először megállapítom, hogy $x \neq -\frac{5}{7}$ , mert akkor a törtek nevezőjében 0 állna.
Beszorzok $(7x+5)$-tel:

$$14x-10 \quad = 28x-20 \tag{1}$$
$$x \quad = \frac{5}{7} \tag{2}$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez valóban megoldás.

**II.megoldás:**
Átalakítom az egyenletet:

$$\frac{2(7x-5)}{7x+5}=\frac{4(7x-5)}{7x+5}$$

A két egyenlő nevezőjű tört csak úgy lehet egyenlő, ha a számlálójuk is megegyezik:

$$2(7x-5)=4(7x-5)$$

$(7x-5)$-tel elosztom az egyenlet mindkét oldalát:

$$2=4.$$

Tehát az egyenletnek nincs megoldása.

**III.megoldás:**
Kiemelek, mint az előző megoldásban, és utána $(7x-5)$-tel elosztom az egyenlet mindkét oldalát:

$$\frac{2}{7x+5}=\frac{4}{7x+5}$$

Ha két tört megegyezik, ekkor a reciprokuk is:

$$\frac{7x+5}{2}=\frac{7x+5}{4}$$

Beszorzok 4-gyel:

$$4(7x+5)= \quad 2(7x+5), \quad \text{ebből} \tag{3}$$
$$2(7x+5)= \quad 0 \tag{4}$$

Ez csak úgy lehet, ha $7x+5=0$. Tehát $x=-\frac{5}{7}$ a megoldás.

**17.15.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

**a)** $\frac{x(x-5)}{x-5} = 1$

**b)** $\frac{x(x-5)}{x-5} = 5$

**c)** $\frac{x(x-5)}{x-5} > 5$

**d)** $\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(2x+4)}{x-1}$

**e)** $\frac{(x+4)\cdot(x-1)}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(2x+3)}{x-1}$

**f)** $\frac{(x-4)\cdot(x-1)}{x-1} > \frac{(x-1)\cdot(2x+3)}{x-1}$

**g)** $\frac{3(x-3)}{2(x-3)} = \frac{4x+7}{x-3}$

**h)** $\frac{11x-6}{x+1} - \frac{33x-18}{3x+3} + 23x = -23$

**i)** $\frac{5-14x}{3-8x} = \frac{7+12x}{8x-3}$

**j)** $\frac{x-8}{4-x} = \frac{2-6x}{x-4}$

**k)** $\frac{6x+13}{3x-9} = 1 - \frac{4x-15}{x-3}$

**l)** $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-5}{x-3}$

**m)** $\frac{2x-9}{2x+1} = \frac{2x-9}{5+2x}$

**n)** $5 + \frac{2x-9}{2x+1} = \frac{2x-9}{2x+1}$

**o)** $5 - \frac{2x-9}{2x+1} = \frac{2x-9}{2x+1}$

**p)** $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$

**17.16.** [20] Jelöljük meg nyilakkal, hogy melyik állítás igazságából lehet valamelyik állítás igazságára következtetni!

Például, ha $x = 3$, akkor $x^2 = 9$ biztosan igaz, az $x = 3$ állításból következik az $x^2 = 9$ állítás, amit így jelölünk: $x = 3 \implies x^2 = 9$. Az $x^2 = 9$ állításból viszont nem következik az $x = 3$, mert ha $x^2 = 9$ igaz, akkor még nem biztos, hogy $x = 3$, lehet, hogy $x = -3$. Így jelöljük: $x^2 = 9 \not\Longrightarrow x = 3$.

**a)** $4x - 8y = 23$ $\quad 8y = 23 - 4x$ $\quad 4x - 23 = 8y$ $\quad (4x - 8y)^2 = 529$ $\quad |4x - 8y| = 23$ $\quad 4x - 8y = \sqrt{529}$

**b)** $y = 3x + 2$ $\quad xy = 3x^2 + 2x$

**c)** $y = 3x + 2$ $\quad \frac{y}{x} = \frac{3x+2}{x}$ $\quad \frac{y-2}{3} = x$

**d)** $y > 2$ $\quad 3y > 6$ $\quad -3y > -6$ $\quad \frac{1}{y} > \frac{1}{6}$ $\quad yx > 2x$ $\quad -3y < -6$ $\quad y \cdot |x| > 2 \cdot |x|$

**e)** $y = x + 1$ $\quad y - x = 1$ $\quad y^2 = (x+1)^2$

**f)** $(x+1)^2 = y^2 + 1$ $\quad (x-y)^2 + 2x = 0$ $\quad \frac{x+2}{y} = \frac{y}{x}$

**g)** Keressünk olyan állításokat, amelyek közt oda-vissza halad nyíl (az egyik állításból következik a másik, és a másikból is következik az egyik). Ezek ekvivalens (egyenértékű) állítások.

**17.17.** [20] Van-e olyan tört, amelyiknek a számlálóját 5-tel, a nevezőjét 2-vel növelve, nem változik az értéke?

**17.18.** [20] Egész szám megoldásokra számíthatunk a következő feladatokban. Mi lehet az $x$?

**a)** $x^2 + 6x - 7 = 0$ $\quad$ **b)** $x^2 + 10x - 39 = 0$ $\quad$ **c)** $x^2 - 12x + 32 = 0$

**d)** $(x+2)^2 - 1 = 8$ $\quad$ **e)** $x^2 - 12x + 20 = 0$

Próbáljuk megfogalmazni, hogyan lehet a 0-ra redukált másodfokú egyenletben (ha az $x^2$ együtthatója 1) az $x$ együtthatójáról és a konstans tagról leolvasni a megoldást!

**17.19.** [20] Milyen $x$ értékekre igazak az alábbi egyenletek és egyenlőtlenségek? A megoldáshalmazt ábrázoljuk számegyenesen!

**a)** $(x+3) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

**b)** $x \cdot (-2x + 3) < 0$

**c)** $x^2 + x - 30 \leq 0$

**d)** $(x-4) \cdot (x^2 - 9x + 20) > 0$

**e)** $\frac{(4x-7)\cdot(x-1)}{x-1} = 0$

**f)** $\frac{(4x-7)\cdot(5x-8)}{x-1} = 0$

**g)** $2x^2 - 4x < 0$

**h)** $x^2 - 4x \leq -3$

**i)** $a \cdot (x^2 - 2bx + b^2) \geq 0$

**17.20.** [20] Keress olyan egyenleteket, amelyeknek a megoldása
**a)** 3 és $-3$;
**b)** 5 és 2;
**c)** 3 és $-4$;
**d)** 0, 1 és 2;
**e)** 1, 2, 3, és 4!

**17.21.** [20] Alkalmazzuk a "teljes négyzetté kiegészítést" a következő feladatokban!
$?x$: $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$
$?x$: $3x^2 - 5x - 2 = 0$
$?x$: $x^2 + 10x + 30 = 0$

**17.22.** [20] Egy szám annyiszor van meg a 18-ban, mint ahányszor meg van benne a 8. Melyik ez a szám? Kiszámítás előtt becsüljük meg legfeljebb mekkora lehet az a szám!

**17.23.** [20] Három egymás után következő egész szám összege a szorzatukkal egyenlő. Melyek ezek a számok?

**17.24.** [20] Egy négyzet egyik oldalát $3\,cm$-rel növeljük, a mellette levőt ugyanannyival csökkentjük. Az így nyert téglalap területe $27\,cm^2$. Mekkora volt a négyzet oldala?

**17.25.** [20] Kiválasztottunk egy számot. Ha a nála 12-vel kisebb és a nála 12-vel nagyobb számot összeszorozzuk, akkor 25-öt kapunk. Melyik számot választottuk.

**17.26.** [20] Milyen $x$-re igaz, hogy
**a)** $\frac{2}{(x+3)\cdot(x-1)} > 0$
**b)** $\frac{3}{x^2-4x+3}$
**c)** $\frac{x^2-6}{(3-x^2)\cdot 5x} < 0$
**d)** $(x^2-1)\cdot(x^4-1) > 0$?

**17.27.** [20] Milyen $x$-re igazak a következő egyenletek?
**a)** $3 \cdot x^3 - 4 = 20$
**b)** $2x \cdot (x+7) \cdot (x-1) = 0$
**c)** $x^{11} = x$
**d)** $x^4 + 2x^3 + x^2 = 0$
**e)** $(x^2-4)\cdot(x^3+1)\cdot(x^4+2) = 0$
**f)** $x^6 - 2x^4 + x^2 = 0$
**g)** $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$
**h)** $x + x^2 - x^3 - x^4 = 0$
**i)** $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 0$
**j)** $9x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$

**17.28.** [20] Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az alábbi számpárok:
**a)** $(2;-3)$ **b)** $(0;-2)$ **c)** $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ **b)** $(5;5)$

**17.29.** [20] Határozzuk meg $q$ értékét úgy, hogy az $5x^2 - 19x + q = 0$ egyenlet egyik gyöke a 3 legyen:

**17.30.** [20] Hány oldalú sokszögnek van ugyanannyi oldala, mint ahány átlója?

**17.31.** [20] Minden érettségiző kapott egy-egy fényképet a társától. Hányan érettségiztek, ha összesen 435 fényképcsere történt?

**17.32.** [20] Egy kétjegyű szám egyik számjegye 2-vel nagyobb, mint a másik. A szám négyzetének és a jegyek felcserélésével kapott szám négyzetének összege 4034. Mi az eredeti szám?

**17.33.** [20] A könyvtárból 720 oldalas könyvet kölcsönöztem. Ha minden nap 20 oldallal többet olvasnék el, mint amennyit eredetileg terveztem, akkor 3 nappal előbb olvasnám el. Hány nap alatt olvastam volna el a eredetileg a könyvet?

**17.34.** [20] A 12-es szám milyen számrendszerben lesz 422 alakú?

**17.35.** [20] Döntsük el, hogy jók-e az alábbi megoldások! Húzzuk alá a hibás lépéseket! A hibás megoldás helyett írjunk jó megoldást!

**a)** $\frac{x^2-25}{x-5} = x+5$

Végigszorzunk $(x-5)$-tel: $x^2-25 = x^2-25$. Tehát az egyenlet minden valós számra igaz.

**b)** $\frac{x^2-7x+10}{x-5} = 0$

Egyszerűsítünk $(x-5)$-tel: $x+2=0$, azaz $x=-2$.

**c)** $\frac{4x^2-25}{2x-5} = 0$

Egyszerűsítünk $(2x-5)$-tel: $2x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=5 \quad \Leftrightarrow \quad x=2{,}5$.
Ekkor viszont a nevezőben szereplő kifejezés értéke 0 lenne, tehát nincs megoldása az egyenletnek.

**17.36.** [20] Oldjuk meg a következő egyenleteket:

**a)** $\frac{x^2-7x+12}{x-3} = 5$

**b)** $\frac{x^2-7x+12}{x-3} = -1$

**c)** $\frac{(x^2+1)\cdot(x^2-1)}{x-1} = 2x+2$

**d)** $\frac{(x^2+1)\cdot(x^2-1)}{x-1} = 4x+4$

**e)** $\frac{36x^2-1}{x+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{x-6}}{6-\frac{1}{x}}$

**f)** $\frac{4x-x^2-4}{(x-2)^2} = 2x^2-7$

**g)** $\frac{x^3-x^2-4}{x^2-9} = 0$

**17.37.** [20] Döntsük el, hogy jók-e az alábbi megoldások! Húzzuk alá a hibás lépéseket! A hibás megoldások helyett írjunk jókat!

**a)**

$$\begin{aligned}
\frac{6x+12}{2x+3} &= 2x \\
\frac{6x}{2x} + \frac{6x}{3} + \frac{12}{2x} + \frac{12}{3} &= 2x \\
3 + 2x + \frac{6}{x} + 4 &= 2x \\
6 &= -7x \\
x &= -\frac{6}{7}
\end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}
\tfrac{6x+12}{2x+3} &= 2x\\
\tfrac{6x}{2x}+\tfrac{12}{3} &= 2x\\
3+4 &= 2x\\
7 &= 2x\\
x &= 3{,}5
\end{aligned}$$

**c)**

$$\begin{aligned}
6(x+2)+7(x+2) &= 15(x+2)\\
\text{Osszunk} &\ (x+2)\text{-vel!}\\
6+7 &= 15\\
13 &= 15
\end{aligned}$$

Tehát nincs megoldása az egyenletnek.

**d)**

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{x}+\tfrac{3}{x}+1 &= \tfrac{4+x}{x}\\
\text{Szorozzunk} &\ x\text{-szel!}\\
1+3+x &= 4+x\\
4x &= 4+x
\end{aligned}$$

Tehát az egyenletnek minden szám megoldása.

**e)**

$$\begin{aligned}
4x^2+9 &= 1600\\
(2x)^2+3^2 &= 40^2\\
2x+3 &= 40\\
2x &= 37\\
x &= 18{,}5
\end{aligned}$$

**f)**

$$\left.\begin{aligned}
(*)\quad 3x-2y &= 1\\
(**)\quad y &= x+8
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}
(*)\text{-ból:}\quad 2y &= 1-3x\\
\text{Ide helyettesítjük}(**)\text{-ot:}\quad 2(x+8) &= 1-3x\\
2x+16 &= 1-3x\\
5x &= -15\\
x=-3 \ \text{ és } \quad y &= 5
\end{aligned}$$

**17.38.** (S) [20] Jelöljük nyilakkal, hogy melyik állítás igazságából lehet valamelyik másik állítás igazságára következtetni!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a)** | $x=-y$ | $\frac{x}{y}=-1$ | $x^2=-y^2$ | |
| **b)** | $\frac{x+2}{x}=3x$ | $x+2=3x^2$ | $x=0$ | $x=1$ |
| **c)** | $x(x^2+4x+4)=10x^2$ | $x^2+4x+4=10x$ | $\frac{x^2+4x+4}{2x}=5$ | |
| **d)** | $\frac{9x^2-4}{3x-2}=4$ | $3x-2=6$ | $3x+2=6$ | $3x-2\neq 0$ |
| **e)** | $\frac{12x^2-8}{3x-2}=4$ | $\left.\begin{array}{rl}12x^2-12x & =0\\ \text{és } 3x-2 & \neq 0\end{array}\right\}$ | | $4x-4=4$ |
| **f)** | $\frac{4x^2-8x}{x-2}=0$ | $x=0$ | $x-2=0$ | |
| **g)** | $\frac{9x^2+6x+1}{3x+1}=0$ | $3x+1=1$ | $x\neq 13$ | |
| **h)** | $\frac{(x^2-a^2)\cdot(x^2-a^2)}{x-a}=x+a;$ | $\frac{(x+a)^2\cdot(x-a)^2}{x-a}=x+a$ | $x^2-a^2=1$ | |

**17.39.** [20] Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

**a)** $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}=\left(\frac{2}{x-2}\right)^2$

**b)** $(x^2-17)^2=64$

**c)** $\frac{2x}{x-3}+1=\frac{x+3}{x-3}$

**17.40.** [20] Melyik öt egymást követő természetes szám rendelkezik azzal az érdekes tulajdonsággal, hogy az első három szám négyzetének összege éppen annyi, mint az utolsó két szám négyzetének összege?

18. FEJEZET

# Egyenletek II. (teszt)

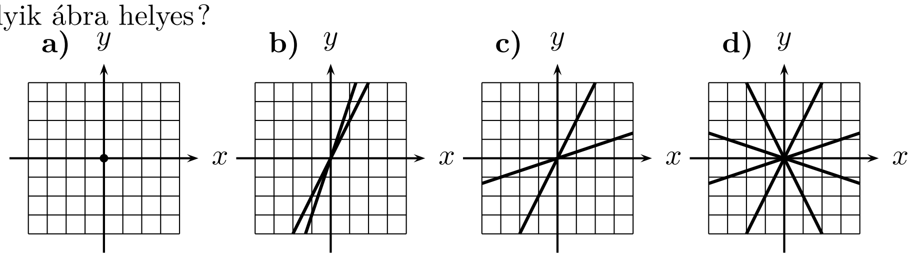
**18.1.** (M) Lehet-e a betűk helyére számokat írni úgy, hogy a megadott két állítás közül pontosan egy legyen igaz?

| | | |
|---|---|---|
| **a)** | $x - y = 0$ | $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ |
| **b)** | $a^2 + 2ab + b^2 = 4$ | $a + b = 2$ |
| **c)** | $6p - 8q = 14$ | $15p - 20p - 35 = 0$ |
| **d)** | $u \cdot v = 0$ | $u^2 + v^2 = 0$ |

Válasszuk ki, hogy hány esetben lehet ezt megtenni (a fenti négyből)!

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**18.2.** (M) Jelöljük koordinátarendszerben az $(2x - y)(3y - x) = 0$ egyenlet megoldáshalmazát! (Melyek azok a $P(x; y)$ pontok a síkban, amelyeknek koordinátáira teljesül a megadott összefüggés?) Melyik ábra helyes?




18.2.1. ábra.

**A)** 18.0.1. a) **B)** 18.0.1. b) **C)** 18.0.1. c) **D)** 18.0.1. d) **E)** egyik sem

**18.3.** (M) Adjuk meg az alábbi egyenlet megoldáshalmazát!

$$(3x + 1) \cdot (x - 2) = (x - 2) \cdot (x - 1)$$

**A)** $\{1\}$ **B)** $\{-1\}$ **C)** $\{2\}$ **D)** $\{-1, \quad 2\}$ **E)** egyik sem

**18.4.** (M) Melyik megoldás jó?

$$\frac{6x - 6}{2x + 3} + \frac{3 - 4x}{2x + 3} = 0$$

**I. megoldás:** Végezzük el az osztásokat:

$$\begin{aligned}
\tfrac{6x}{2x} - \tfrac{6}{2x} + \tfrac{6x}{3} - \tfrac{6}{3} + \tfrac{3}{2x} - \tfrac{4x}{2x} + \tfrac{3}{3} - \tfrac{4x}{3} &= 0 \\
3 - 3\tfrac{1}{x} + 2x - 2 + \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{x} - 2 + 1 - \tfrac{4}{3}x &= 0 \\
\tfrac{2}{3}x - \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{x} &= 0 \\
\tfrac{2}{3}x &= \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{x} \\
\tfrac{2}{3}x^2 &= \tfrac{3}{2} \\
x^2 &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \\
x = \tfrac{3}{2} \text{ vagy} \quad x &= -\tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

**II. megoldás:**

$$\frac{6x-6}{2x+3}+\frac{3-4x}{2x+3}=0$$

Szorozzunk át $(2x+3)$-mal:

$$\begin{aligned}(6x-6)+(3-4x)&=0\\ 2x-3&=0\\ 2x&=3\\ x&=\tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

**III. megoldás:**
Rendezzük az egyenletet:

$$\frac{6x-6}{2x+3}=-\frac{3-4x}{2x+3}$$

Átszorzunk $(2x+3)$-mal: $6x-6=-3-4x$, majd rendezünk: $10x=3$, $\quad x=\frac{3}{10}$.

**IV. megoldás:** Rendezzük az egyenletet:

$$\frac{6x-6}{2x+3}=-\frac{3-4x}{2x+3}$$

Vegyük mindkét oldal reciprokát!

$$\frac{2x+3}{6x-6}=-\frac{2x+3}{3-4x}$$

Most két esetet különböztethetünk meg.

**I. eset** $2x+3=0$, azaz $x=-\frac{3}{2}$. Ilyenkor mindkét oldal zérus értékű, az egyenlet teljesül.

**II. eset** $2x+3\neq 0$, azaz $x\neq-\frac{3}{2}$. Most leoszthatunk $(2x+3)$-mal: $\frac{1}{6x-6}=-\frac{1}{3-4x}$, azaz $3-4x=-(6x-6)$, $\quad 3-4x=-6x+6$, $\quad 2x=3$, $\quad x=\frac{3}{2}$.

Tehát az egyenletnek két megoldása van: $x=\pm\frac{3}{2}$.

**A)** I. **B)** II. **C)** III. **D)** IV. **E)** I. és IV.

**18.5.** (M)

$$2a-3b+5=0$$

Gyűjtsük egy $K$ halmazba az alábbiak közül azokat az állításokat, amelyek következnek a fenti állításból és tegyük az $L$ halmazba azokat az állításokat, amelyekből következik a fenti állítás (egy állítás lehet egyszerre $L$-ben és $K$-ban is)! Például, ha $x=3$, akkor $x^2=9$ biztosan igaz, tehát az $x=3$ állításból következik az $x^2=9$ állítás. Az $x^2=9$ állításból viszont nem következik az $x=3$, mert ha $x^2=9$ igaz, akkor még nem biztos, hogy $x=3$, lehet, hogy $x=-3$.

**I.** $(2a-3b)^2=-25$ **II.** $b=-a=1$ **III.** $|2a-3b|=5$ **IV.** $3b-2a=\sqrt{25}$
**V.** $3b=2a+5$

Melyik a helyes csoportosítás?

**A)** $K=\{III., IV., V.\}, L=\{II., IV., V.\}$ **B)** $K=\{I., III., V.\}, L=\{IV., V.\}$
**C)** $K=\{III., IV., V.\}, L=\{V.\}$ **D)** $K=\{IV., V.\}, L=\{I., II., III.\}$
**E)** egyik sem helyes

**18.6.** (M) Egy 36 $cm^2$ területű téglalap egyik párhuzamos oldalpárját 4 cm-rel növelve, a másik párhuzamos oldalpárt 5 cm-rel csökkentve négyzetet kapunk. Határozzuk meg az így kapott négyzet oldalát!

Jelölje $x$ a négyzet oldalát cm-ben. Melyik egyenlet írja le a feladatot?

**A)** $(x-4)(x-5)=36$ **B)** $(x-4)(x+5)=36$ **C)** $(x+4)(x+5)=36$
**D)** $(x+4)(x-5)=36$ **E)** egyik sem

**18.7.** (M) Hány egész szám elégíti ki az alábbi egyenletet?

$$(x^5 - x)(x^3 - 6x^2 + 9x) = 0$$

**A)** legfeljebb egy **B)** kettő **C)** három **D)** négy
**E)** legalább öt

**18.8.** (M) Hány olyan $q$ érték van, amelyre a $3x^2 - 2x + q = 0$ egyenlet egyik gyöke a 2?
**A)** nincs ilyen **B)** egy **C)** kettő **D)** három
**E)** legalább négy

**18.9.** (M) [20] Egy szabályos $n$-szögnek ötször annyi átlója van, mint oldala. Mekkora lehet az $n$?
Az $n$ szám utolsó jegye tízes számrendszerben:
**A)** 0 vagy 1 **B)** 2 vagy 3 **C)** 4 vagy 5 **D)** 6 vagy 7 **E)** 8 vagy 9

**18.10.** (M) Egy szabályos $n$-szög átlóinak száma 90-nel nagyobb az oldalak számának két és félszereresénél. Mekkora lehet az $n$?
Az $n$ szám utolsó jegye tízes számrendszerben:
**A)** 0 vagy 1 **B)** 2 vagy 3 **C)** 4 vagy 5 **D)** 6 vagy 7 **E)** 8 vagy 9

## 19. FEJEZET
# Egyenletrendszerek

**19.1.** Írjunk a betűk helyére számokat úgy, hogy mindkét megadott állítás igaz legyen! Hány megoldás van az egyes esetekben?

**a)** $x + y = 2,\quad 3x + 3y = 36.$
**b)** $x - y = 10,\quad 4x - 4y = 50.$
**c)** $x + y = 5,\quad x + 3y = 11.$
**d)** $x < 3,\quad x^2 > 9.$
**e)** $x + y < 5,\quad x^2 + 2xy + y^2 = 25.$
**f)** $x^2 + y^2 = 25,\quad x + y = 5.$

**19.2.** **a)** Ábrázoljuk az alábbi egyenletek megoldáshalmazát közös koordinátarendszerben!
$0 = 2x + 1 - y \qquad 2y - x = 2 \qquad y = 2x - 2$
Olvassuk le az ábráról az alábbi egyenletek közös megoldásait!

**b)** $0 = 2x + 1 - y,\quad 2y - x = 2.$
**c)** $2y - x = 2,\quad y = 2x - 2.$
**d)** $0 = 2x + 1 - y,\quad y = 2x - 2.$

**19.3.** **a)** Ábrázoljuk az $y = \frac{3}{4}x$ és az $y = [x]$ függvények grafikonját közös koordinátarendszerben!
**b)** Hány metszéspontja van a két grafikonnak?
**c)** Adjuk meg a metszéspontok koordinátáit!

**19.4.** **a)** Ábrázoljuk az $y = x$ és az $y = -\frac{1}{3}x + 1$ függvények grafikonját közös koordinátarendszerben!
**b)** Rajzoljuk újra a grafikont négyzethálós papíron! Válasszuk meg úgy az egységet, hogy a metszéspont a négyzethálón rácspont legyen!
**c)** Olvassuk le a két grafikon közös pontjának koordinátáit!

**19.5.** Oldjuk meg grafikonok segítségével az alábbi egyenletrendszereket! (Válasszunk „ügyesen” egységet!)

**a)** $y = x,\quad y = -\frac{1}{3}x + 1000.$
**b)** $y = 3000x,\ y = -1000x + 3000.$

**19.6.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

**a)** $y = 2x + 1,\quad y = x - 1.$
**b)** $y = 2x + 1,\quad y = x.$
**c)** $y = 2x + 1,\quad y = x + 1.$
**d)** $y = 2x + 1,\quad y = x + 2.$
**e)** $y = 2x + 1,\quad y = x + 3.$

Az alábbi kérdések az $y = 2x + 1$, $y = x + c$ egyenletrendszerre vonatkoznak.
**f)** Írhatunk-e $c$ helyére valós számot úgy, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása?
**g)** Mely $c$ esetén lesz az egyenletrendszer megoldásában $x = 10$?
**h)** Mely $c$ esetén lesz az egyenletrendszer megoldásában $x < 0$?
**i)** Mely $c$ esetén lesz az egyenletrendszer megoldásában $y > 5$?

**19.7.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

**a)** $2y = x + 1, \qquad y = -2x.$
**b)** $2y = x + 1, \qquad y = -x.$
**c)** $2y = x + 1, \qquad y = 0.$
**d)** $2y = x + 1, \qquad y = x.$
**e)** $2y = x + 1, \qquad y = 2x.$

Az alábbi kérdések az $y = x + 1$, $y = mx$ egyenletrendszerre vonatkoznak.
**f)** Írhatunk-e $m$ helyére valós számot úgy, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása?
**g)** Mely $m$ esetén lesz az egyenletrendszer megoldásában $x = 10$?
**h)** Mely $m$ esetén lesz az egyenletrendszer megoldásában $x < 0$?
**i)** Mely $m$ esetén lesz az egyenletrendszer megoldásában $y > 5$?

**19.8.** **a)** Ábrázoljuk az $y = mx + m$ függvény grafikonját $m = -4$, $m = -2$, $m = 0$, $m = 2$ és $m = 4$ esetén!
**b)** Az $m$ paraméter értékétől függően hány megoldása van az

$$y - x = 1, \qquad y = mx + m$$

egyenletrendszernek? (Adjuk meg minden valós $m$-re az egyenletrendszer megoldásainak számát!)

**19.9.** (M) Van-e olyan $(x; y)$ számpár, amely az $m$ paraméter bármely értéke esetén kielégíti az

$$y = mx - 2m + 1$$

egyenletet?

**19.10.** Egy paralelogramma oldalegyenesei az

$$y = \frac{99}{100}x, \qquad y = x, \qquad y = \frac{99}{100}x + 2, \qquad y = x - 2$$

függvények grafikonjai. Számoljuk ki a csúcsok koordinátáit!

**19.11.** [20] Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

**a)** $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 1 \\ 3x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 5 \\ 3x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 7 \\ 3x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$

**d)** $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 19 \\ 3x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$ **e)** $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 21 \\ 3x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$

Az f) és g) feladatoknál készüljünk fel, hogy ha a tanár megadja $a$ és $b$ értékét, akkor minél hamarabb megtudjuk adni az egyenletrendszer megoldásait, az $x$ és $y$ számokat!

**f)** $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= a \\ 3x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$ **g)** $\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= a \\ 3x + 2y &= b \end{aligned}\right\}$

**19.12.** [20] Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

**a)** $\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ 3x - 4y &= 1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x - y &= 5 \\ 2x + 3y &= 20 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 15 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$

**d)** $\left.\begin{aligned} 3x &= y + 5 \\ 2y + 5x &= 23 \end{aligned}\right\}$ **e)** $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 19 \\ 3x + 4y &= 3 \end{aligned}\right\}$ **f)** $\left.\begin{aligned} 5x + 2y + 8 &= 0 \\ 3x + 7y - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$

**g)** $\left.\begin{aligned} 4x &= 8 + 6y \\ 6x - 9y &= 12 \end{aligned}\right\}$ **h)** $\left.\begin{aligned} 10x + 30y &= 8 \\ 25x + 75y &= -7 \end{aligned}\right\}$

**19.13.** [20] Milyen $(x;\ y)$ számpárokra igaz?

**a)** $\left.\begin{aligned} 3x &= 1+5y \\ 2x &= 2+2y \end{aligned}\right\}$

**b)** $\left.\begin{aligned} 2y-3x &= 5 \\ 3(4y-6) &= 18y+12 \end{aligned}\right\}$

**c)** $\left.\begin{aligned} 2y-3x &= 5 \\ 3(4y-6) &= 18x+30 \end{aligned}\right\}$

**d)** $\left.\begin{aligned} 3y-11 &= 2x \\ 3x-y &= 1 \end{aligned}\right\}$

**19.14.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

**a)** $\left.\begin{aligned} 2x-5y &= 7 \\ x+3y &= 9 \\ 3x-2y &= 16 \end{aligned}\right\}$

**b)** $\left.\begin{aligned} x+2y &= 8 \\ 2x-y &= 7 \\ x-3y &= 3 \end{aligned}\right\}$

**c)** $\left.\begin{aligned} 2x+y &= 7 \\ x &= 3{,}5-\tfrac{y}{2} \\ y &= 7-2x \end{aligned}\right\}$

**d)** $\left.\begin{aligned} 2x-y &= 7 \\ 8x+6y &= 10 \\ 11x+7y &= 16 \end{aligned}\right\}$

**19.15.** [2] Pista vásárolt egy körzőt egy ceruzát és egy radírt. Ha egy körző az ötödébe, egy ceruza a felébe és egy radír a kétötödébe kerülne, akkor 96 Ft-ot, ha egy körző a felébe, egy ceruza a negyedébe és egy radír a harmadába kerülne, akkor 144 Ft-ot fizetett volna. Mennyit fizetett? A körző vagy a ceruza a drágább?

**19.16.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

**a)** $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2x+2y+z &= 5 \\ 5x+3y+2z &= 9 \end{aligned}\right\}$

**b)** $\left.\begin{aligned} 2x-y+3z &= 6 \\ 5x+y-2z &= -9 \\ 3x+3y+z &= 13 \end{aligned}\right\}$

**c)** $\left.\begin{aligned} 2x+4y+5z &= -1 \\ 4x-4y+10z &= 7 \\ x+6y-10z &= -6 \end{aligned}\right\}$

**d)** $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2x+2y+z &= 5 \\ x+y-z &= 10 \end{aligned}\right\}$

**e)** $\left.\begin{aligned} 4x-2y+6z &= 12 \\ 6x-3y+9z &= 18 \\ 10x-5y+15z &= 30 \end{aligned}\right\}$

**f)** $\left.\begin{aligned} 2x+4y+5z &= -1 \\ 5x+14y &= -8 \\ x+6y-10z &= -6 \end{aligned}\right\}$

**g)** $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2x+2y+z &= 5 \\ x+y-z &= 12 \end{aligned}\right\}$

**h)** $\left.\begin{aligned} 4x-2y+6z &= 12 \\ 6x-3y+9z &= 15 \\ 10x-5y+15z &= 30 \end{aligned}\right\}$

**i)** $\left.\begin{aligned} 2x+4y+5z &= 2 \\ 5x+14y &= -8 \\ x+6y-10z &= -6 \end{aligned}\right\}$

**19.17.** [20] Néhány egyenletrendszer megoldását elkezdtük. Fejezzük be! Ne feledjük, hogy mindkét ismeretlen számértékét meg kell találnunk!

**a)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y} &= \tfrac{1}{5} \\ \tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{y} &= \tfrac{1}{7} \end{aligned}\right\}$ A két egyenletet összeadjuk: $\frac{2}{x}=\frac{12}{35}$

**b)** $\left.\begin{aligned} 5x+\tfrac{10}{y} &= -7 \\ 2x+\tfrac{5}{y} &= -2 \end{aligned}\right\}$

A második egyenletet 2-vel szorozzuk, és ezután az első egyenletből kivonjuk a másodikat.

$$\left.\begin{aligned} 5x+\tfrac{10}{y} &= -7 \\ 4x+\tfrac{10}{y} &= -4 \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad x=-3.$$

**c)** $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 925 \\ xy &= 150 \end{aligned}\right\}$

A második egyenletet szorozzuk meg 2-vel és adjuk hozzá az első egyenlethez:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 925 \\ 2xy &= 300 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+2xy=1225.$$

Innen $(x+y)^2=35^2$, amiből $x+y=35$ vagy $x+y=-35$.

**d)** $\left.\begin{aligned} y-x^2 &= 3 \\ y-x &= 3 \end{aligned}\right\}$

Rendezzük az egyenleteket:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3+x^2 \\ y &= 3+x \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 3+x^2=3+x.$$

**e)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{x}{y} &= 3 \\ x+y &= 60 \end{aligned}\right\}$

Az első egyenletből: $x=3y$. Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe: $3y+y=60$.

**f)** $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 15 \\ x+y+u &= 16 \\ x+z+u &= 18 \\ y+z+u &= 20 \end{aligned}\right\}$

Az egyenletek megfelelő oldalait összeadva: $3(x+y+z+u)=69$, amiből $x+y+u+z=23$. Az első egyenletet is figyelembe véve $u=8$.

**19.18.** [20] Milyen $(x;y)$ számpárra teljesülnek a következő egyenletrendszerek?

**a)** $\left.\begin{aligned} 3^x\cdot 2^x &= y \\ y &= 1296 \end{aligned}\right\}$

**b)** $\left.\begin{aligned} 2^{x+y}\cdot 5^{x+y} &= 10\,000 \\ x+3y &= 10 \end{aligned}\right\}$

**c)** $\left.\begin{aligned} 3^x+3^y &= 108 \\ 3^x-3^y &= 54 \end{aligned}\right\}$

**19.19.** (M) [20] Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} 3(x+y) &= 2-y \\ 2(x-y) &= 7+y \end{aligned}\right\}$$

**19.20.** [20] Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{x+1}{3}-\tfrac{3y-1}{4} &= -2 \\ \tfrac{x-1}{2}-\tfrac{y+1}{3}-4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

**19.21.** [20] Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{x+y}{3x-y} &= 7 \\ \tfrac{x+y+1}{y-2x+3} &= 2 \end{aligned}\right\}$$

**19.22.** [20] $x$-ről és $y$-ról csak annyit tudunk, hogy $x+y=10$ és $xy=20$. Határozzuk meg

**a)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

**b)** $x^2+y^2$

értékét!

**19.23.** [20] Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

**a)** $\left.\begin{aligned} 3(x+y)-(2x+1) &= 6 \\ 4(x+2y) &= x-y+1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{x+y}{2}-\tfrac{x-y-1}{3} &= 2 \\ \tfrac{x}{2-y} &= 5 \end{aligned}\right\}$

**c)** $\left.\begin{aligned} x^2+2x+1 &= y^2 \\ x^2+2xy+y^2 &= 1 \end{aligned}\right\}$ **d)** $\left.\begin{aligned} x^2+2xy+y^2 &= 4 \\ x &= 2y-1 \end{aligned}\right\}$

**e)** $\left.\begin{aligned} y^2-2x^2 &= 1 \\ 5x^2-2y^2 &= 2 \end{aligned}\right\}$ **f)** $\left.\begin{aligned} (x+1)^2-2(y+2)^2 &= 4 \\ 3(x+1)^2+(y+2)^2 &= 5 \end{aligned}\right\}$

**g)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{12}{x+y}-\tfrac{10}{x-y} &= -2 \\ \tfrac{6}{x+y}+\tfrac{7}{x-y} &= 5 \end{aligned}\right\}$ **h)** $\left.\begin{aligned} (x+2)\cdot(y-3) &= xy-5 \\ 3(y-x)-\tfrac{x+y}{2} &= 2 \end{aligned}\right\}$

**19.24.** [20] Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

**a)** $\left.\begin{aligned} x-2y-3\cdot\tfrac{2x+3y+1}{2} &= 2y-2(3x+y-2) \\ \tfrac{2x-3}{2-y} &= 3 \end{aligned}\right\}$

**b)** $\left.\begin{aligned} (x+2)^2-y^2 &= x^2-(y-3)^2+21 \\ \tfrac{3x+2y-1}{5x-y-1} &= 2 \end{aligned}\right\}$

**c)** $\left.\begin{aligned} (x+1)^2+(y+1)^2 &= x^2+y^2 \\ x+y-3\cdot\tfrac{x-y}{5} &= y \end{aligned}\right\}$

**d)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y} &= y \\ 2x+3y+14 &= 0 \end{aligned}\right\}$

**e)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{x^2-y^2}{x+y} &= 2x+2+y \\ 3x-y &= 8 \end{aligned}\right\}$

**19.25.** [20] A $k$ paraméter mely értékeire van a

$\left.\begin{aligned} 3x+y &= 1 \\ 6x+ky &= 2 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszernek

**a)** egyértelmű megoldása?

**b)** végtelen sok megoldása?

**19.26.** [20] A $k$ paraméter mely értékeire van az

$\left.\begin{aligned} x+y &= k \\ x-y &= 5 \end{aligned}\right\}$

egyenletrendszernek pozitív $x$ és pozitív $y$ megoldása?

**19.27.** [20] Milyen $(x;\ y)$ számpárokra igaz?

**a)** $\left.\begin{aligned} x-2yx &= 3 \\ 3x-y &= 1 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 9x+2y &= 8 \\ xy+27 &= 0 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y} &= 1 \\ x+y &= 4 \end{aligned}\right\}$

**d)** $\left.\begin{aligned} xy-2y &= 4 \\ \tfrac{y}{x-2} &= 1 \end{aligned}\right\}$ **e)** $\left.\begin{aligned} x+y+3xy &= -3 \\ xy+1 &= 0 \end{aligned}\right\}$

**19.28.** (S) [20] Milyen $x;\ y;\ z$ számhármasokra igaz?

**a)** $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 9{,}6 \\ 2x+3y &= 5z \\ x-y &= z \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{5x+7y}{x+y} &= 6 \\ \tfrac{3z-x}{x-y-z} &= 1 \\ \tfrac{2x+3y-z}{\frac{x}{2}+3} &= 4 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} \tfrac{xy}{5x+4y} &= 6 \\ \tfrac{xz}{3x+2z} &= 8 \\ \tfrac{yz}{3y+5z} &= 6 \end{aligned}\right\}$

**19.29.** [20] Egy háromszög egyik szögét megháromszorozva, a másikat megduplázva, a harmadikat $7°$-kal növelve ugyanezt a szöget kapjuk.

Határozzuk meg a háromszög szögeit!

**19.30.** [20] Egy kétjegyű számot keresünk. A következőket tudjuk róla:

**1.** Ha a háromszorosából levonjuk a jegyeinek felcserélésével létrejövő számot, 31-et kaptunk.

**2.** Ha két jegye közé egy 0-át írunk, majd ezt elosztjuk az eredeti számmal, a hányados 8 és a maradék 4.

**19.31.** [20] Egy derékszögű háromszög hosszabbik befogóját 4-gyel, a másodikat 2-vel csökkentve egy 21-gyel kisebb területű háromszöget kapunk.

Ha a hosszabb befogót csökkentjük 2-vel, a rövidebbiket pedig 4-gyel növeljük, akkor egy 11-gyel nagyobb területű háromszöghöz jutunk.

Határozzuk meg az eredeti háromszög befogóinak hosszát!

**19.32.** [20, 11] Egy kör alakú versenypályán két kerékpáros halad állandó sebességgel. Amikor a kerékpárosok ellentétes irányban köröznek, minden 10 mp-ben találkoznak, amikor pedig egy irányba haladnak, egyik a másikat 170 mp-enként előzi meg.

Mekkora sebességgel haladnak a kerékpárosok külön-külön, ha a körpálya hossza 170 m?

**19.33.** [20, 11] Egy motorversenyen három versenyző indul. A második, aki óránként 15 km-rel kevesebbet tesz meg az elsőnél, és 3 km-rel többet a harmadiknál, 12 perccel később ér a célba, mint az első, és három perccel korábban mint a harmadik. Mekkora a pálya hossza, a motorok sebessége és versenyideje?

**19.34.** [20] Kétfajta alkoholunk van. Az elsőből 2 litert, a másodikból 3 litert véve 46%-os alkoholhoz jutunk. Ha viszont az elsőből 5, a másodikból 2 litert öntünk össze, akkor 35%-os alkoholt kapunk. Állapítsuk meg, hogy hány %-os alkoholokat öntögettünk össze!

**19.35.** [20] Kétféle alkoholunk van. Az elsőből 2 litert, a másodikból 3 litert véve 46 %-os alkoholhoz jutunk. Ha viszont az elsőből 5, a másodikból 2 litert öntünk össze, akkor 35 %-os alkoholt kapunk.

Állapítsuk meg , hogy hány %-os alkoholokat öntögettünk össze?

**19.36.** [20] A $B$ városból a tőle 180 $km$ távolságra fekvő $C$ városba eljuthatunk 6 órai hajózás után két órai autóbusz utazással, vagy 3 óra hajóút után 3 órányi autóbusz utazással is.

Állapítsuk meg a hajó és a busz sebességét! (Feltételezzük, hogy ezek sebessége nem változik.)

**19.37.** [20] Egy alkalmi munkásnak hétfőtől péntekig minden nap ugyanannyival emelték a fizetését. A két utolsó napon együttvéve 560 forintot, az egész héten összesen 1000 forintot keresett. Mi volt a keresete napról napra?

**19.38.** [20] Egy biciklista hazafelé menet útépítési munkálatok miatt kerülőúton volt kénytelen menni. Hogy a 3 km-es távolságnövekedést ellensúlyozza, sebességét 2 $\frac{km}{h}$-val megnövelte. Útja így is a megszokott 30 perc helyett 35 percig tartott.

Mekkora utat tett meg a kerékpáros hazafelé?

**19.39.** [20, 11] Egy gőzhajó halad lefelé a folyón $A$ városból $B$ városba (megállás nélkül) 5 órán át. Visszafelé ár ellen (ugyanazzal a saját és szintén megállás nélkül)7 óra hosszat megy. Kérdés: hány óra alatt úsznának le tutajok $A$ városból $B$ városba, ha sebességük ugyanakkora, mint a folyó folyási sebessége?

**19.40.** (S) [20] **a)** Egy motorcsónak a folyón lefelé haladva 3 óra alatt tesz meg annyit, mint ha 4 óráig felfelé haladna. (A motor ugyanolyan teljesítményre van kapcsolva.) A folyó sebessége 2 km/ó. Mi a motorcsónak sebessége állóvízben?

**b)** Egy motorcsónak a folyón lefelé haladva 3 km-t annyi idő alatt tesz meg, mint felfelé 2 km-t. Egy alkalommal lement a folyón 24 km-nyire, majd visszatért kiindulási helyére. A két út menetideje összesen 2,5 óra volt.

Mekkora a folyóvíz sebessége és mekkora a motorcsónak sebessége állóvízben?

**19.41.** (S) [20] Egy út két végéről két gyalogos egyszerre indul el egymással szemben. 10 perc múlva találkoznak, ez alatt a gyorsabbik 100 m-rel hosszabb utat tett meg, mint a másik. Folytatják útjukat, és egyikük 12,5 perccel, másikuk 8 perccel találkozásuk után ér az út végére. Milyen sebesen haladtak, és milyen hosszú az út? Van-e a leírt adatok között felesleges (melyre tehát nincs szükség a feladat megoldásához)?

**19.42.** [20, 11] Egy gépkocsi két város közt az utat 60 $\frac{km}{h}$-s egyenletes sebességgel teszi meg. Visszafelé ugyanezen az úton 40 $\frac{km}{h}$-s egyenletes sebességgel haladt. Mekkora az átlagsebessége a teljes úton?

**19.43.** (S) [20] $A$, $B$, $C$, $D$ egy vasútvonal ebben a sorrendben elhelyezkedő állomásai. Reggel $A$-ból egyszerre indul $D$ felé egy személy-, egy gyors-, és egy expresszvonat. A gyorsvonat 20 km/ó-val gyorsabb, mint a személyvonat és 30 km/ó-val lassabb, mint az expresszvonat. A személyvonat 11 órakor még csak $B$-ben van, amíg a gyorsvonat már fél 11-re $C$-be ér, az expresszvonat pedig 10 órakor fut be $D$-be. Még azt is tudjuk, hogy a $C$ állomás a $B$-től és a $D$-től egyaránt 30 km távolságra van.

Mikor indulnak a vonatok $A$-ból?

**19.44.** [20] $B$ kétszer annyi idő alatt ásná fel a kertet, mint $C$. Ha $B$ és $D$ együtt dolgoznak, 6 óra alatt végzik el ezt a munkát. Ha mindhárman dolgoznának, akkor 4 órára lenne szükségük a kert felásásához.

Mennyi idő alatt végeznék el ezt a munkát külön-külön?

**19.45.** [20] Egy medencébe 3 csapon át folyhat víz. Ha 2 csap van nyitva, a tartály 4 óra, 4 $\frac{1}{2}$ óra, illetve 7 óra 12 perc alatt telik meg (attól függően, hogy melyik két csapot nyitottuk ki). Mennyi időre van szükség, ha 1-1 csap van csak nyitva?

**19.46.** [20, 13] Egy kereskedőnek kétféle keksze van. Az egyik kilogrammonként 90 Ft-ba, a másik 60 Ft-ba kerül. Olyan 50 kg súlyú keveréket akar készíteni, amelynek ára 72 Ft-lesz kilogrammonként.

Hány kilogrammot kell az egyes fajtákból felhasználnia?

**19.47.** [20] Péter és Pál távolsága 300 méter. Ha egymás felé futnak, akkor 1 perc múlva találkoznak, ha Péter üldözőbe veszi Pált, akkor, akkor 2,5 perc múlva éri utól. (Ugyanaz a személy mindkét esetben ugyanakkora sebességgel fut.)

Kinek mekkora a sebessége?

**19.48.** [20] Andi az $A$, Bandi a $B$ városban lakik. Minden szombaton biciklivel elindulnak a két várost összekötő országúton, hogy majd valahol találkozzanak. Bandi óránként 5 $km$-rel többet tesz meg mint Andi. (Feltehető, hogy mindketten állandó sebességgel, megállás nélkül hajtanak.)

Andi mindig 9 órakor indul, Bandi pedig általában fél 10 órakor. Így déli 12 órakor találkoznak.

Egy napon azonban Bandi már reggel 6-kor elindult, és így 10-kor találkozott Andival.

Milyen messze van $A$-tól $B$?

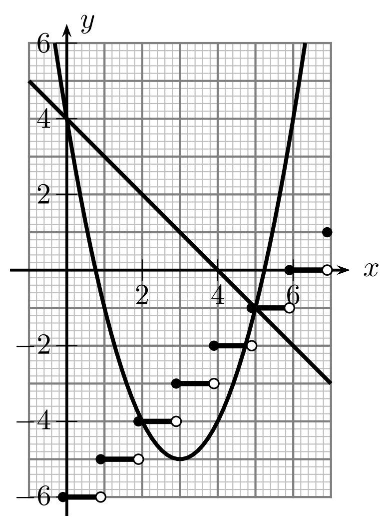
20. FEJEZET

# Egyenletrendszerek (teszt)

**20.1.** (M) A 20.0.1. ábrán az

$x \longrightarrow 4 - x,$ $\qquad$ $x \longrightarrow x^2 - 6x + 4,$ $\qquad$ $x \longrightarrow [x - 5{,}9]$

függvények grafikonjai láthatók. Olvassuk le az ábráról az alábbi egyenletrendszerek megoldásainak számát!




20.1.1. ábra.

**I.** $\begin{cases} y &= 4 - x \\ y &= [x - 5{,}9] \end{cases}$ ; $\qquad$ **II.** $\begin{cases} y &= 4 - x \\ y &= x^2 - 6x + 4 \end{cases}$ ; $\qquad$ **III.** $\begin{cases} y &= [x - 5{,}9] \\ y &= x^2 - 6x + 4 \end{cases}$ ;

**IV.** $\begin{cases} y &= [x - 5{,}9] \\ y &= x^2 - 6x + 4 \\ y &= 4 - x \end{cases}$ .

A megoldások száma:

**A)** I. – kettő, II. – egy, III. – kettő, IV. – nulla **B)** I. – egy, II. – kettő, III. – egy, IV. – egy **C)** I. – egy, II. – kettő, III. – három, IV. – egy **D)** I. – egy, II. – kettő, III. – három, IV. – négy **E)** egyik sem

**20.2.** (M) Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 14 \\ 2x + 6y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert! A megoldásban az $x \cdot y$ szorzat értéke melyik halmazba esik?

**A)** $x \cdot y \leq 0$ **B)** $0 < x \cdot y \leq 3$ **C)** $3 < x \cdot y \leq 7$ **D)** $7 < x \cdot y \leq 10$ **E)** $10 < x \cdot y$

**20.3.** (M) Fejezzük ki $a$-val és $b$-vel $x$-et az

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= a \\ 2x + 6y &= b \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből! Melyik képlet helyes?

**A)** $x = \dfrac{3a+b}{17}$ **B)** $x = \dfrac{3a-b}{17}$ **C)** $x = \dfrac{2a-5b}{34}$ **D)** $x = \dfrac{2a+5b}{10}$

**E)** egyik sem

**20.4.** (M) Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{5} - \frac{3-5y}{4} &= 3 \\ \frac{2x+1}{2} - \frac{y+3}{4} - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert! A megoldásban az $x \cdot y$ szorzat értéke melyik halmazba esik?

**A)** $x \cdot y \le 0$ **B)** $0 < x \cdot y \le 3$ **C)** $3 < x \cdot y \le 7$ **D)** $7 < x \cdot y \le 10$

**E)** $10 < x \cdot y$

**20.5.** (M) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -2 \\ 2x + 2y + z &= 17 \\ 3x + 5y - 6z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

A megoldásban az $x \cdot y \cdot z$ szorzat értéke melyik halmazba esik?

**A)** $x \cdot y \cdot z \le 0$ **B)** $0 < x \cdot y \cdot z \le 3$ **C)** $3 < x \cdot y \cdot z \le 7$

**D)** $7 < x \cdot y \cdot z \le 10$ **E)** $10 < x \cdot y \cdot z$

**20.6.** (M) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= 1 + \tfrac{21}{y} \\ x^2 + \tfrac{15}{y} &= 9 - 2x \end{aligned}\right\}$$

A lehetséges megoldásokban az $x + y$ összeg minimális értéke melyik halmazba esik?

**A)** $x + y \le 0$ **B)** $0 < x + y \le 3$ **C)** $3 < x + y \le 7$ **D)** $7 < x + y \le 10$

**E)** $10 < x + y$

**20.7.** (M) Egy folyón partján folyásirányban ebben a sorrendben helyezkedik el három város: $A$, $B$ és $C$. $A$ és $B$ távolsága a folyón 25 km, $B$ és $C$ távolsága pedig 30 km. Egy hajó $B$-ből $C$-be megy, majd onnan vissza $B$-be. Tiszta menetideje 3 óra. Ha a hajó $B$-ből $A$-ba megy, majd onnan $C$-be, akkor tiszta menetideje 3,5 óra. Határozzuk meg a folyó sebességét! (Feltételezzük, hogy a hajó motorjának teljesítménye – azaz a hajó sebessége álló vízben – állandó.)

A folyó $v_f$ sebessége (km/h-ban mérve) melyik halmazba esik?

**A)** $v_f \le 2$ **B)** $2 < v_f \le 4$ **C)** $4 < v_f \le 6$ **D)** $6 < v_f \le 8$

**E)** $8 < v_f$

**20.8.** (M) Egy medencébe 3 csapon át folyhat víz. Ha 2 csap van nyitva, a tartály 4 óra, 5 óra, illetve 6 alatt telik meg (attól függően, hogy melyik két csapot nyitottuk ki). Mennyi időre van szükség, ha mindhárom csap nyitva van?

A szükséges $t$ időre (percben):

**A)** $t \le 120$ **B)** $120 < t \le 160$ **C)** $160 < t \le 200$ **D)** $200 < t \le 240$ **E)** $240 < t$

**20.9.** (M) Melyik az az $(x; y)$ számpár, amely az $m$ paraméter bármely értéke esetén kielégíti az

$$y = mx + 3m + 2$$

egyenletet?

**A)** $(3; 2)$ **B)** $(0; 0)$ **C)** $(-2; 1)$ **D)** $(-3; 2)$ **E)** egyik sem

**20.10.** (M) Ebben a feladatban az

$$\begin{cases} y &= mx + 3m + 2 \\ y &= |x| \end{cases}$$

paraméteres egyenletrendszer megoldásainak számát vizsgáljuk. Tekintsük az $m$ paraméter alábbi értékeit!

$m = -10$; $m = -\frac{5}{2}$; $m = -1$; $m = -\frac{1}{2}$; $m = \frac{1}{2}$; $m = 1$; $m = \frac{5}{2}$; $m = 10$.

Ezek között hány olyan van, amelyre a megadott egyenletrendszernek pontosan két megoldása van?

**A)** legfeljebb egy **B)** kettő vagy három **C)** négy, öt vagy hat **D)** hét vagy nyolc **E)** kilenc vagy tíz

21. FEJEZET

# Négyzetgyök

**21.1.** Adott egy négyzet. Szerkesztendő kétszer akkora területű négyzet.

**21.2.** Milyen hosszú az oldala annak a négyzetnek, amelynek területe
**a)** $9\ cm^2$ **b)** $10\ cm^2$

**21.3.** **a)** Egy négyzet oldala $3\ cm$. Milyen hosszú a négyzet átlója?
**b)** Egy négyzet átlója $3\ cm$. Milyen hosszú a négyzet oldala?

**21.4.** **a)** Egy kocka oldaléle $3\ cm$. Milyen hosszú a kocka testátlója?
**b)** Egy kocka testátlója $3\ cm$. Milyen hosszú a kocka oldala?

**21.5.** **a)** Egy szabályos háromszög oldala $3\ cm$. Milyen hosszú a háromszög magassága? Határozzuk meg a háromszög beírt és körülírt körének sugarának hosszát valamint a háromszög területét!
**b)** Egy szabályos háromszög területe $3\ cm^2$. Mekkora az oldala?

**21.6.** Kör területe $100\ cm^2$. Mekkora a sugara?

**21.7.** **a)** Szabályos tetraéder oldaléle $3\ cm$. Határozzuk meg a testmagasságát és a térfogatát!
**b)** Szabályos tetraéder testmagassága $3\ cm$. Határozzuk meg a tetraéder oldallapjának területét!

**21.8.** Két egymást követő évben az infláció egyenlő mértékű volt. A kenyér ára a két év alatt 44%-kal emelkedett. Hány százalékos volt az éves infláció?

**21.9.** Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek?
**a)** $x^2 = 4$ **b)** $x^2 = 3$ **c)** $x^2 = 0$ **d)** $x^2 = -2$

**21.10.** Hány pontban metszi egymást az alábbi függvények grafikonjai?
**a)** $y = x^2$ és $y = 2x^2 - 4$ **b)** $y = x^2$ és $y = 2x^2 - 5$ **c)** $y = x^2$ és $y = 2x^2 + 1$
Adjuk meg a metszéspontok koordinátáit!

**21.11.** Számológép használata nélkül állípítsuk meg, hogy az alább megadott számok melyik két szomszédos egész szám közé esnek!
$\sqrt{3}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{55}$ $\sqrt{130}$ $\sqrt{600}$ $\sqrt{1000}$
$\sqrt{250001}$ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ $\sqrt{27}$ $3 \cdot \sqrt{3}$

**21.12.** Melyik a nagyobb, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ vagy $\sqrt{3+2}$?

**21.13.** Állítsuk nagyságrendi sorrendbe az alábbi számokat!
$1$ $2$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ $\sqrt{2} + \sqrt{2}$
$(\sqrt{2})^2$

**21.14.** Állítsuk nagyságrendi sorrendbe az alábbi számokat!
$(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)$ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ $\sqrt{2} + 1$
$\sqrt{2} - 1$ $1$

**21.15.** Válasszuk ki az alábbi kifejezések közül azokat, amelyek értéke egyenlő!

$\sqrt{6}$ $\quad 2 \cdot \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ $\quad 3 \cdot \sqrt{2}$ $\quad \sqrt{3} + \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{12}$

$\frac{6}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{6}{\sqrt{6}}$ $\quad \frac{\sqrt{24}}{2}$

**21.16.** Válasszuk ki az alábbi kifejezések közül azokat, amelyek értéke egyenlő!

$\sqrt{6} + \sqrt{7}$ $\quad \sqrt{6+7}$ $\quad \sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$ $\quad \sqrt{6 \cdot 7}$ $\quad (\sqrt{7})^6$ $\quad \sqrt{7^6}$

$(\frac{7}{2})^6$ $\quad 7^{\frac{6}{2}}$ $\quad (\sqrt{6-7})^2$ $\quad \sqrt{(6-7)^2}$ $\quad 6-7$ $\quad 7-6$

$\sqrt{6} - \sqrt{7}$

**21.17.** Melyik a kakukktojás?

$2\sqrt{2}$ $\quad (\sqrt{2})^2$ $\quad \sqrt{8}$ $\quad \frac{4}{\sqrt{2}}$ $\quad (\sqrt{2})^3$ $\quad \sqrt{2} + \sqrt{2}$

**21.18.** Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza

**a)** 3 és 4 *cm* **b)** 3 és 5 *cm*.

Milyen hosszú az átfogó? Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó magasság?

**21.19.** Egy derékszögű háromszög befogóinak az átfogóra eső merőleges vetülete

**a)** 2 és 8 *cm* **b)** 3 és 4 *cm*.

Mekkora az átfogó és az átfogóhoz tartozó magasság?

**21.20.** Adott egy háromszög. Szerkesztendő az egyik oldallal párhuzamos olyan egyenes, amely megfelezi a háromszög területét.

**21.21.** Számoljuk ki az alábbi kifejezés pontos értékét ($[x]$ az $x$ valós szám egészrészét jelöli)!

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{100}]$$

# 22. FEJEZET
# Négyzetgyök (teszt)

**22.1.** (M) Tekintsük az alábbi mennyiségeket!

$U =$ az egységnyi élű kocka átlójának fele;

$V =$ az egységnyi oldalú szabályos háromszög magassága;

$X =$ annak a rombusznak a területe (egységnégyzetben), amelynek minden oldala egységnyi és van két 120°-os szöge;

$Y = \frac{3}{2\sqrt{3}}$;

$Z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Az öt érték között lehetnek egyenlőek. Le szeretnénk kódolni, hogy melyik értékből hány van. Az $(1, 1, 3)$ kódban a két egyes azt jelenti, hogy van két érték, amelyik csak egyszer-egyszer fordul elő, a hármas pedig azt, hogy van három kifejezés, amelynek ugyanaz az értéke. Mi a fenti öt számnak megfelelő kód?

**A)** $(1, 2, 2)$ **B)** $(1, 1, 3)$ **C)** $(2, 3)$ **D)** $(1, 4)$ **E)** egyik sem

**22.2.** (M) Melyik a $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$ duplája?

$U = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{8}}$; $V = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{8}}$; $X = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}$; $Y = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

**A)** csak $U$ **B)** csak $V$ **C)** csak $X$ **D)** csak $Y$ **E)** $V$ és $Y$

**22.3.** (M) Kocka felszíne 36 $cm^2$. Mekkora a térfogata $cm^3$-ben?

**A)** 216 **B)** 27 **C)** $6\sqrt{6}$ **D)** $3\sqrt{6}$ **E)** egyik sem

**22.4.** (M) Az alábbi számkifejezések közül hánynak az értéke 40?

$U = \sqrt{1598} + \sqrt{2}$, $V = \sqrt{2}\sqrt{800}$, $X = 5\sqrt{2^6}$, $Y = \frac{\sqrt{40\,000}}{5}$,

$Z = \sqrt{(10 - 50)^2}$.

**A)** egynek **B)** kettőnek **C)** háromnak

**D)** négynek **E)** ötnek vagy egynek sem

## 23. FEJEZET

# Vegyes feladatok

**23.1.** Elvehetünk egy függőleges állású gyufát, hogy növeljük a kifejezés értékét. Melyik gyufát válasszuk? Keressük meg az összes megoldást!

**a)** XIX-(XII-VIII) **b)** $\frac{XXII}{VII}+\frac{IX}{IV}$ **c)** $\frac{XII}{XII}-\frac{VII}{VI}$ **d)** $\frac{XVI}{XXI}-\left(\frac{VII}{VI}-\frac{XIX}{VIII}\right)$

**23.2.** Tortákat cikkekre vágunk. Egy vágás a torta közepétől a széléig tart. Próbáljunk minél kevesebb vágással igazságosan elosztani

**a)** öt tortát hat ember között;

**b)** hét tortát tizenkét ember között!

**23.3.** Melyik szám a nagyobb és miért:

$\frac{22222222221}{22222222223}$ vagy $\frac{33333333331}{33333333334}$?

**23.4.** Melyik tört a nagyobb:

$\frac{10^{2004}+1}{10^{2005}+1}$ vagy $\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}$?

**23.5.** András vásárolt két könyvet, majd később eladta azokat, mindkettőt ugyanannyiért. Az egyiken 20%-ot vesztett, a másikon 20%-ot nyert, és így összesen 50 Ft-ot vesztett. Mennyiért vette és adta el a könyveket András?

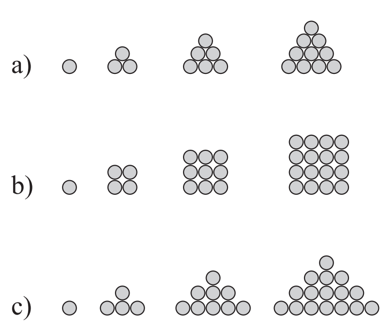
**23.6.** Egy téglatest élei egész szám hosszúságúak, felszíne $340 cm^2$. Különböző nagyságú oldallapjainak területe úgy aránylik egymáshoz, mint 4 : 5 : 8. Mekkora a térfogata?

**23.7.** Felírtuk egy sorozat első néhány tagját:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1+3}{2+4}$, $\frac{1+3+5}{2+4+6}$, ...

A sorozatot olyan törtekből készítettük, amelyek számlálójában az első $n$ páratlan szám, nevezőjében az első $n$ páros szám összege áll. Számoljuk ki a sorozat 100. tagjának értékét!

**23.8.** Határozzuk meg, hány korong van a 100. kupacban! (Lásd a 23.0.1. ábrát!)




23.8.1. ábra.

**23.9.** [20] Gondolj egy számot! Adj hozzá 3-at, az eredményt szorozd meg 4 -gyel, és add hozzá a gondolt számhoz, vegyél el belőle 2-t, a kapott számot oszd el 5-tel, a hányadosból vond ki a gondolt számot!

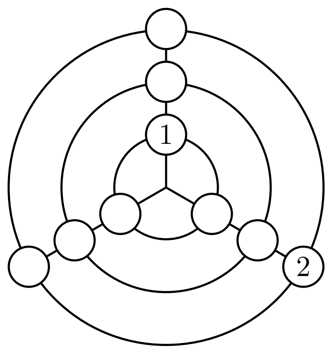
Az eredmény 2, igaz?

Hogyan lehet ezt előre tudni?

**23.10.** Megkértünk valakit, hogy gondoljon egy tetszőleges többjegyű számra, majd számítsa ki a jegyek összegét, és ezt vonja ki a gondolt számból. A kapott különbségből egy tetszőleges, 0-tól különböző számjegyet töröl, és a megmaradt jegyek összegét megmondja (vagy magukat a megmaradt jegyeket ) . Ebből ki tudjuk találni a törölt számjegyet. Hogyan?

**23.11.** El lehet-e szállítani 7 kéttonnás teherautóval 50 kőtömböt, melyek súlya 250, 251, 252, . . . , 299 kg? (A kövek nem darabolhatók, a teherautók csak egyszer vehetők igénybe és mindegyikre legfeljebb 2 tonna teher rakható.)

**23.12.** [18] Hogyan kell a 23.0.1. ábra hiányzó helyeire beírni 3-tól 9-ig a természetes számokat úgy, hogy a számok összege minden sugár és kör mentén ugyanaz legyen?




23.12.1. ábra.

**23.13.** Írjuk be a

**a)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 **b)** 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

számokat egy 3×3-as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban ugyanannyi legyen a számok összege!

**23.14.** Egy $3 \times 3$-as bűvös négyzet varázsszáma $B$. (Azaz az egy sorban, egy átlóban, vagy egy oszlopban álló három szám összege mindig $B$.) Határozzuk meg a bűvös négyzet középső mezőjén álló számot!

**23.15.** Folytassuk a 23.0.1. ábrán látható bűvös négyzetek kitöltését (ugyanannyi legyen a három szám összege mindegyik sorban, oszlopban és a két átlóban is)!

**a)**

| | | |
|---|---|---|
| | 20 | 4 |
| 2 | | |
| | | |

**b)**

| | | |
|---|---|---|
| 9 | | 11 |
| | 7 | |
| | | |

**c)**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 5 |
| | | |
| | 9 | |

23.15.1. ábra.

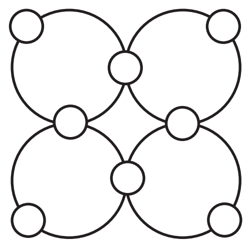
**23.16.** Elhelyezhető-e a következő 9 szám egy bűvös négyzetbe?

**a)** 1, 3, 6, 11, 17, 42, 57, 58, 70.

**b)** 0, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

**23.17.** (M) Meg lehet-e adni egy $3 \times 3$-as négyzet három mezőjében egy-egy számot úgy, hogy azt többféleképpen is be lehessen fejezni bűvös négyzetté?

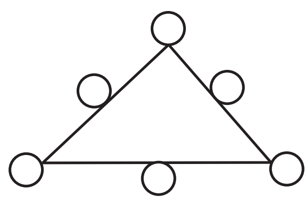
**23.18.** Helyezzük el az 1, 2, 3, ..., 8 számjegyeket a 23.0.1. ábrán látható kis körökbe úgy, hogy bármelyik nagyobb körvonal mentén a számok összege ugyanannyi legyen!



23.18.1. ábra.

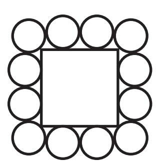
**23.19.** Egy négyzet alakú $3 \times 3$-as táblázat mindegyik mezőjébe a 7, 8, 9 számok valamelyikét írjuk be. Kitölthető-e a táblázat úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban és a két átlóban is csupa különböző eredményt adjon a beírt számok összege?

**23.20.** [6] Helyezzük el a 2,5; 3,2; 3,9; 4,6; 5,3 és 6 számokat a 23.0.1. ábrán látható hat karikába úgy, hogy a háromszög oldalain levő három-három karikában a számok összege ugyanannyi legyen!



23.20.1. ábra.

**23.21.** [6] Írjuk be a 13-nál kisebb egész számokat a 23.0.1. ábrán látható körökbe úgy, hogy a négyzetnek mind a négy oldalán 22 legyen a számok összege!

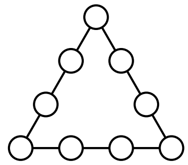


23.21.1. ábra.

**23.22.** (M) Írjuk be az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat a 23.0.1. ábrán látható kilenc karikába úgy, hogy a háromszög oldalain található négy-négy szám összege egyenlő legyen

**a)** 20-szal;

**b)** egymással és a lehető legnagyobb legyen.



23.22.1. ábra.

**23.23.** Írjunk be 9 különböző pozitív egész egész számot egy $3 \times 3$-as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban ugyanannyi legyen a számok *szorzata*!

**23.24.** Egy $4 \times 4$-es táblázatban 16 szám volt. Az alábbi táblázatot úgy kaptuk az eredetiből, hogy egy lépésben egyszerre minden számot helyettesítettünk a sorában és oszlopában álló másik hat szám számtani közepével.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 9 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 9 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 7 |

Hogyan volt kitöltve az eredeti táblázat?

**23.25.** Egy $3 \times 3$-as táblázatban elhelyeztünk 9 számot. Egy ilyen táblázatot bűvös négyzetnek nevezünk, ha a számok összege minden sorban, minden oszlopban ás mindkét főátlóban ugyanaz az érték. Igaz-e, hogy a bűvös négyzet fölső sorában álló számok négyzetének összege mindig megegyezik az alsó sorban álló számok négyzetösszegével?

**23.26.** Egy $4 \times 4$-es táblázat 16 mezőjébe egy-egy egész számot írtak. Tudjuk, hogy a táblázat mindegyik $3 \times 3$-as részében (tehát mind a négyben) a 9 szám összege negatív. Következik-e ebből, hogy a $4 \times 4$-es táblázatban található 16 szám összege is negatív?

**23.27.** Egy kocka éleinek hossza $10cm$. Minden lapjának közepére ráragasztunk egy-egy $5cm$ élhosszúságú kockát és a kapott testet kékre festjük. Hány $cm^2$-t kell befestenünk?

**23.28.** Egy háromszög egyik szöge háromszorosa egy másik szögének. Bizonyítsd be, hogy fel lehet bontani a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre!

**23.29.** [20] Három szám átlaga 22. A számok közt szerepel egy, ami nagyobb 3-nál és egy, ami nagyobb 61-nél. Mi lehet a harmadik szám?

**23.30.** [20] Egy szám köbe kisebb ugyanannak a számnak a négyzeténél, a tízszerese pedig nagyobb 5-nél. Mi lehet a szám?

**23.31.** Egy állatkereskedő 100 aranyért teheneket, juhokat és nyulakat akar vásárolni, összesen 100 darabot. Egy tehén ára 10 arany, egy juhé 3 és egy aranyért két nyulat adnak. Hány tehenet, hány juhot és hány nyulat vásárol, ha mindegyikből vesz legalább egyet?

**23.32.** Írjunk a _ jellel ellátott helyekre egy-egy számjegyet úgy, hogy egy helyes írásbeli szorzást kapjunk!

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \_ & \_ & \_ & \cdot & \_ & 2 & \_ \\
\cline{2-4}
 & \_ & 8 & \_ & & & & \\
 & \_ & \_ & 7 & \_ & & & \\
 & & & \_ & \_ & \_ & & \\
\cline{2-6}
\_ & \_ & \_ & 4 & 2 & \_ & &
\end{array}
$$

**23.33.** Az alábbi összeadásban a betűk számjegyeket jelentenek: ugyanaz a betű ugyanazt a számjegyet, különböző betűk különböző számjegyeket. Írjuk föl az összeadást számjegyekkel is!

$$
\begin{array}{ccccc}
 & B & D, & C & E \\
+ & B & D, & A & E \\
\hline
A & E & C, & B & E
\end{array}
$$

**23.34.** [20, 11] Egy táncestélyen huszan vettek részt. Mária hét férfival táncolt, Olga nyolccal, Vera kilenccel és így tovább, egészen Nyináig, aki minden férfival táncolt.

Kérdés, hány férfi volt az estélyen?

**23.35.** [20] Egy fiú szamarakat látott legelni a réten.

– Jó napot száz szamár– köszöntötte őket.

Ekkor az egyik szamár váratlanul megszólalt:

– Mi már régen nem vagyunk százan. De ha még egyszer annyian lennénk, mint ahányan vagyunk, meg még félszer annyian, meg még negyedszer annyian, és még Te is beállnál közénk, akkor éppen százan lennénk.

Hány szamár legelt a réten?

**23.36.** [20] Egy Euklidésztől származó feladat:

Nehéz zsákokkal rakottan dúsan,
Szamár s öszvér haladnak nagy búsan.
Nyög a szamár, mire a pajtása:
– Talán fáj már uraságod háta?
Én nem nyögök, pedig ha egy zsákot
Adnál abból, ami nyomja hátod,
Kétszer annyit, mint te, vinnék akkor,
De ha tőlem átvennél egy zsákot,
Egyformán szidhatnók a világot. –
Számtantudós! Ennyi bánat láttán
Hamar mondd meg:
Hány zsák volt az állatoknak hátán?

**23.37.** [20] Egy lánytól azt kérdezték, hány éves. Így felelt:

„Én annyi vagyok, amennyi
Anyám kétszer ennyi
Apám öttel több
Összesen 100 évesek vagyunk."

Hány éves a lány? (XVIII. századi feladat)

**23.38.** **a)** Van-e olyan háromjegyű szám, amelyet kétszer egymás mellé írva a kapott hatjegyű szám osztható lesz 13-mal?

**b)** Van-e olyan háromjegyű szám, amelyet kétszer egymás mellé írva a kapott hatjegyű szám nem lesz osztható 13-mal?

**23.39.** [20] Melyik az a négyjegyű szám, amelynek a legmagasabb helyiértékű jegye 2, ha ezt az első helyről töröljük és utolsónak írjuk, 27 híján az eredeti szám háromszorosát kapjuk?

**23.40.** [20] Reggel 8-kor $B$ városból autóval elmenekül egy betörő. Később egy rendőr kocsi utána indul, 20 $\frac{km}{h}$-val nagyobb sebességgel, mint a betörő. 1/2 11-kor érte utol. Mikor volt a távolság 5 km közöttük?

**23.41.** [20] Panni és Mari csokoládét kap. Panni 2 és fél dobozt és még kettőt, Mari egy ugyanolyan dobozzal, mint Panni, és még 11-et. Hány darab csoki volt egy-egy dobozban, ha ki-ki összeszámolva saját csokoládéit, meglepődve tapasztalja, hogy mindkettőjüknek ugyanannyi darab csokijuk van?

**23.42.** [20] Képzeljünk magunk elé elé egy mutatós órát!
**a)** 2 óra után mikor fedik egymást először az óra mutatói?
**b)** Mikor zárnak be először 72°-os szöget?

**23.43.** [20] Déli 12 óra után hány perccel zár be derékszöget az óra nagy és kismutatója?

**23.44.** [20] Az I/B osztály létszáma öttel nagyobb az I/A osztályánál. Az I/A osztályba kétszer annyi fiú jár, mint ahány lány, a B-ben viszont azonos a fiúk és a lányok száma. Még azt is tudjuk, hogy hárommal több fiú jár az A-ba, mint a másik osztályba.
Hány lány és hány fiú tanul ebben a két osztályban?

**23.45.** [20] Egy osztály tanulóinak fele matematika, a harmada pedig fizika szakkörre jár. Öten járnak mindkét szakkörre, kilenc diák viszont egyik szakkörnek sem tagja.
Határozzuk meg az osztálylétszámot!

**23.46.** Egy háromjegyű szám (balról) első jegyét töröljük, majd a kapott kétjegyű számot megszorozzuk 7-tel. Eredményül az eredeti háromjegyű számot kapjuk. Mi lehetett a háromjegyű szám?

**23.47.** Egy ökölvívó mérkőzés több menetből állt. Az első menet után a nézők 20%-a távozott, a második menet után az ottmaradt nézők 20%-a ment el, és így tovább, hasonlóan távozott el a többi menet után is az ottmaradt nézők 20%-a, míg a végén 4096 néző maradt.
**a)** Hány menetből állt a mérkőzés, ha a kezdéskor ottlévő nézők száma nem osztható 4-gyel?
**b)** Hány néző volt a lelátón a mérkőzés elején?

**23.48.** [20] Péter és Zoli testvérek. Zoli születésekor anyjuk 4-szer, apjuk 5-ször olyan idős volt mint Péter. Az apa 45-ödik születésnapján a család átlagos életkora 25 év.
Ki hány éves ekkor?

**23.49.** [20] Egy négyzet egyik oldalát 2, a másikat 3 cm-rel megnövelve egy 666 $cm^2$-rel nagyobb területű téglalapot kaptunk. Mekkora a volt négyzet oldala?

**23.50.** [20] Egy téglalap egyik oldalát 2, a másikat 3 cm-rel megnövelve egy 104 $cm^2$-rel nagyobb területű négyzetet kapunk. Mekkorák a téglalap oldalai?

**23.51.** (S) [20] Egy réten a fű egyenletes sebességgel nő. Az összes füvet 70 tehén 24 nap alatt, vagy pedig 30 tehén 60 nap alatt legelné le. Hány tehén legelné le a rét összes füvét 96 nap alatt?

**23.52.** [20] Két hordó borunk van, az elsőben 220 liter, a másodikban 180 liter. Egységáruk különbözuő. Mindkét hordóból ugyanannyit kiveszünk, és amit az elsőből kivettünk, azt a másodikba, amit pedig a másodikból kivettünk, azt az elsőbe öntjük.

Hány litert vettünk ki az egyes hordókból, ha az eljárás után mindegyik keverék literje ugyanannyiba kerül?

**23.53.** Az autó hűtőrendszerét vízzel töltöttük fel. Eresszük le a víz negyedrészét, és töltsük fel a hűtőt fagyálló folyadékkal. Ismételjük meg ezt az eljárást: eresszük le a hűtőben levő folyadék negyedrészét, majd töltsük fel a hűtőt újar tiszta fagyálló folyadékkal! Ismételjük meg ezt még kétszer! Határozzuk meg a negyedik töltés után a fagyálló folyadék és a víz arányát!

**23.54.** [20] Három fáradt utazó tért be egy fogadóba. Asztalhoz ülve szilvásgombócot rendeltek. Mire a fogadós kihozta a tál gombócot, mindhárman aludtak. Fél óra múlva az egyik fölébredt, megette a gombócok harmadrészét, aztán tovább aludt. Felébredt a másik is, nem vette észre, hogy egyikük már evett a gombócból. Így ő is megette a maradék gombóc harmadrészét, és ő is tovább aludt. Végül a harmadik is fölébredt, és megette a maradék gombóc harmadát. Ezután még nyolc gombóc maradt a tálon. Hány gombócot hozott be eredetileg a fogadós?

**23.55.** [20, 5] Egy apa számos gyermeket hagyott hátra, és így végrendelkezett a vagyonáról:

Az elsőé legyen 100 korona és a maradék tizede, a másodiké 200 korona és a maradék tizede, a harmadiké 300 korona és a maradék tizede és így tovább.

A végén kiderült, hogy mindegyik gyereknek ugyanannyi jutott. Mekkora volt a vagyon, hány gyermeke volt, és mindegyiknek mennyi jutott?

**23.56.** [20] Aligát és Benkőt 120 km-es nyílegyenes út köti össze. Ugyanabban a percben egy versenykerékpárosokból álló karaván Aligából Benkő irányába, s néhány amatőr kerékpáros Benkőből Aliga felé. Az előbbiek 25 $\frac{km}{h}$, az utóbbiak 15 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladnak. Abban a pillanatban, amikor Aligáról elindult a versenykerékpárosok raja, egy légy röpült előre 100 km-es sebességgel egészen addig, amíg a szemközti csoporthoz nem ért, s akkor sebességéből semmit se vesztve visszafordult az előbbi csoport irányába. Így repült oda-vissza a két csoport között, s itt is halt tragikus halált a két kerékpáros had véletlen összeütközésekor. Meg tudnád mondani, hogy hősi emlékezetű legyünk hány km-t repült megállás nélkül?

**23.57.** A 0, 1, 2, …, 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer felhasználva állíts össze három olyan – tízes számrendszerben felírt – pozitív egész számot, amelyik közül az egyik háromszorosa, a másik ötszöröse a legkisebbiknek!

**23.58.** Egy természetes számot „kedves”-nek hívnak, ha számjegyei két csoportba oszthatók úgy, hogy az egyik csoporban levő számok összege megegyezik a másikban levők összegével. (pld. kedves számok a 66, 352, 1276 stb.)

**a)** Keressük meg a két legkisebb szomszédos kedves számot!

**b)** Keressünk három szomszédos kedves számot!

**23.59.** A négyzetszámokból a következő tizedestörtet készítjük: 0,149162536…. Mi ennek a számnak a

**a)** 100-adik **b)** 1000-edik

tizedesjegye?

**23.60.** [20, 5] Cambridge-ből Northy-ba két mérföldes szerpentin autóút vezet, az út első mérföldje nehéz hegyi úton a Northy feletti magas hegy tetejére vezet s a második mérföldön ereszkedik alá Northy-ba. Egy neves autóversenyző vállakozott arra, hogy a rendkívül nehéz terep ellenére 30 $\frac{km}{h}$ átlagsebességgel jut el Cambridge-ből Northy-ba. A felfelé vezető úton, mint ahogy a hegy tetején elhelyezett megfigyelők konstatálták, csak 15 $\frac{km}{h}$ sebességgel tudott haladni, mégis alig néhány másodperces késéssel ért Northy városába. Harmadnap temették.

Miben halt meg?

**23.61.** [20, 12] Egy síelő kiszámította, hogy ha 10 km-t tesz meg óránként, akkor déli 1 órakor ér célba, óránként 15 km-es sebességgel pedig délelőtt 11-kor.

Milyen sebességgel haladjon, hogy pontosan délben érkezzen a célba?

**23.62.** Számítsuk ki az alábbi szorzat értékét!
$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{36}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{49}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{64}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$

**23.63.** Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\ldots+\frac{1}{200}>\frac{1}{2}$$

**23.64.** Melyek azok az $n$ természetes számok, amelyekre igaz, hogy

$$\frac{1}{4}<\frac{n}{n+12}<\frac{1}{3}$$

**23.65.** Határozzuk meg az összes olyan $p$, $q$, $r$ számhármast, amelyre igaz, hogy

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}!$$

**23.66.** A 2, 3, 6 számok érdekes tulajdonsága, hogy összegük 11 és reciprokaik összege: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{6}=1$

Állítsuk elő a 24-et és a 31-et is olyan pozitív egészek összegeként, amelyeknek reciprokait összeadva 1-et kapunk!

**23.67.** [20] Két szám különbsége 7. A négyzeteik különbsége 91.

Melyek ezek a számok?

**23.68.** Egy üdülőhajó 159 kabinjának minden helyét elfoglalta a 379 utas. A kabinok két-, három-, illetve négyszemélyesek. A hajón nyolcszor annyi kétszemélyes kabin volt, mint ahány négyszemélyes.

Mennyi két-, három-, illetve négyszemélyes kabin volt a hajón?

**23.69.** [20] Keressük meg a leírt bizonyításban a hibát!

Induljunk ki abból, hogy $a$ nagyobb, mint $b$, és jelöljük $c$-vel azt a számot, amennyivel $a$ nagyobb $b$-nél; azaz legyen

$$a=b+c$$

Szorozzuk a felírt egyenlőség mindkét oldalát előbb $a$-val aztán $b$-vel:

$$a\cdot a=a\cdot(b+c)$$

és

$$b\cdot a=b\cdot(b+c)$$

A két baloldal különbsége ugyanannyi, mint a velük megegyező jobboldalak különbsége:

$$a \cdot a - b \cdot a = a \cdot (b + c) - b \cdot (b + c)$$

Adjunk mindkét oldalhoz $b \cdot a$-t és vegyünk el mindkét oldalból $a \cdot (b + c)$-t

$$a \cdot a - a \cdot (b + c) = b \cdot a - b \cdot (b + c)$$

Most kiemelhetjük a baloldal tagjaiból az $a$ tényezőt, a jobboldal tagjaiból a $b$ tényezőt:

$$a \cdot (a - (b + c)) = b \cdot (a - (b + c))$$

Osszuk el mindkét oldalt $(a - (b + c))$-vel!

Így kapjuk azt, hogy

$$a = b,$$

holott $b$-nél nagyobb $a$-ból indultunk ki.

Az $a$ és $b$ helyébe bármilyen két számot gondolhatunk, csak arra ügyelve, hogy $a$ nagyobb legyen $b$-nél, így például lehet $a = 2$ és $b = 1$, vagy $a = 0{,}3$ és $b = 0{,}2$ és így tovább.

Ekkor az előző gondolatmenet arra az eredményre vezet, hogy $2 = 1$, $0{,}3 = 0{,}2 \ldots$

Tehát bármelyik két szám egyenlő.

**23.70.** [20] Egy háromjegyű számot keresünk. A következőket tudjuk róla:

1. Jegyeinek összege 19.
2. A két szélső jegye azonos.
3. Ha elosztjuk az utolsó két jegyéből álló (kétjegyű) számmal,

akkor a hányados 13, a maradék pedig 16.

Melyik ez a két szám?

**23.71.** [20] Valaki 5 órán át gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, aztán megfordult, és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 km-t tett meg óránként. Mekkora utat járt be?

**23.72.** [20] Ketten lovagolnak egy körpályán. Ha szemben haladna, akkor ötször olyan sűrűn találkoznak, mintha egy irányban haladnának.

Határozzuk meg a lovasok sebességének arányát!

**23.73.** [20, 23] Mária és Anna életkorának összege 56 év. Mária kétszer olyan idős, mint Anna volt akkor, amikor Mária feleannyi éves volt, mint Anna lesz akkor, amikor Anna háromszor annyi idős lesz, mint Mária volt akkor, amikor Mária háromszor olyan idős volt, mint Anna.

Melyikük hány éves?

**23.74.** [20] Három egymást követő egész szám szorzata az összegük 16-szorosa. Melyek ezek a számok?

**23.75.** [20] **a)** Négy egymást követő szám szorzata 3024. Melyik a legkisebb?

**b)** Három egymást követő szám szorzata 2730. Melyik a középső?

**c)** Három egymást követő szám szorzata 0. Melyik a legnagyobb?

**d)** Helyettesítsük az a)-c) feladatokban a „szorzata” szót az „összege” szóra és oldjuk meg az így kapott feladatokat is!

**23.76.** [20] Szabályt keresünk. Ezekből a példákból induljunk ki:
$11 \cdot 19 = 209$
$24 \cdot 26 = 624$
$53 \cdot 57 = 3021$
$72 \cdot 78 = 5616$ stb.
Megfigyelések alapján fogalmazzunk meg szabályt és próbáljuk meg igazolni!

**23.77.** [20] Mi lehet az utolsó négy jegye egy 25-re végződő szám négyzetének?

**23.78.** Számoljuk ki 3421548832 négyzetét zsebszámológép segítségével! (A pontos értéket keressük.)

**23.79.** [20] Milyen $x$-re teljesülnek a következő egyenletek?
**a)** $2^x \cdot 5^x = 1000$ **b)** $100^{12} = 1000^x$
**c)** $9^8 : 3^{2x} = 81$ **d)** $3^{x+1} \cdot 2^{x-1} = 6^{10} \cdot 9$
**e)** $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$

**23.80.** [20] Milyen $x$-re igaz?
$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$

**23.81.** [22] Határozzuk meg a 2000 db kilencesből álló szám köbében a számjegyek összegét!

**23.82.** [20, 11] Egy motorversenyen három motorkerékpáros indul. A második motorkerékpáros, aki óránként 15 km-rel kevesebbet tesz meg az elsőnél, és 3 km-rel többet a harmadiknál, 12 perccel később ér célba, mint az első és 3 perccel korábban, mint a harmadik.
Határozzuk meg:
**a)** a versenypálya hosszát;
**b)** a motorkerékpárosok sebességét;
**c)** a motorok versenyidejét.

**23.83.** [20] $A$-ból $B$-be, $B$-ből $A$-ba egyszerre indul egy-egy vonat. Találkozásuk után 4, illetve 9 órával érnek célba. Mennyi ideig tartott a teljes utazás az egyik és a másik vonaton?

**23.84.** (S) [20] Valaki csónakjával a Dunán felfelé evez. Induláskor – épp 8 órakor – a csónakból kiesik egy labda, de ezt csak később veszi észre. Amikor észreveszi, visszafordul, és ezután negyedóra múlva éri el a labdát. Ekkor mennyi az idő?

**23.85.** (S) [20] Egy gőzhajó halad lefelé a folyón $A$ városból $B$ városba 5 órán át. Visszafelé, ár ellen 7 óra hosszat megy. Útközben sehol sem áll meg, és végig maximális sebességgel halad. Hány óra alatt sodorna le a víz $A$ városból $B$ városba egy fadarabot?

**23.86.** (S) [20] Egy úton ugyanabban az időpontban, azonos irányban három jármű indul el az $A$, $B$, $C$ helyekről. $B$ az $A$ és $C$ között félúton van. Az $A$-ból induló jármű indulása után 2 óra múlva éri utol a $B$-ből indulót, míg a $B$-ből induló 3 óra múlva éri utol a $C$-ből indulót. Mikor találkozik az $A$-ból induló jármű a $C$-ből indulóval?

**23.87.** (S) [20] $A$-ból $B$-be reggel 8 órakor indul el egy gyalogos és egy kerékpáros. A kerékpáros $B$-be érve azonnal visszafordul, és 9 órakor találkozik a gyalogossal. A találkozás után a kerékpáros megfordul, és mind a ketten $B$ felé haladnak. A kerékpáros $B$-be érve ismét visszafordul és 9 óra 40 perckor újra találkozik a gyalogossal. Mikor ér a gyalogos $B$ -be?

**23.88.** [20, 8] Egyszer egy úszó a csónakból a folyóba ugrott. Bizonyos ideig ár ellen úszott, majd megfordult, s visszaúszott a csónakhoz. Melyik út vett több időt igénybe: az-e, amelyeket az ár ellen tett meg, vagy az, amelyet árral?

(Tételezzzük fel, hogy mindkét irányban ugyanakkora erővel és ugyanolyan technikával úszott.)

**23.89.** [20, 8] Két sportevezős edzést tartott. Egyszerre indultak, az egyik a folyón, a másik a folyó melletti tavon, és egyenlő távolságokat is tettek meg, egyszer oda, egyszer vissza. A folyón evező először az ár irányában, majd az ár ellen evezett. Tegyük fel, hogy a két sportoló ugyanolyan jól evezett, és felszerelésük is egyforma volt. Melyik ért vissza hamarabb kikindulási helyére?

(A forduláshoz szükséges időt nem kell számításba vennünk.)

**23.90.** [20, 8] Két motorkerékpáros egy időben indult el kirándulni. Egyenlő távolságot tettek meg, s egy időben érték haza.

Az úton mindketten megpihentek. Annyit tudunk, hogy az egyik kétszer annyi ideig volt úton, mint amennyit a másik pihent, a másik pedig háromszor annyit volt úton, mint amennyit az első pihent.

Melyik haladt gyorsabban?

**23.91.** [20, 8] A műhelyben négy óra is mutatta a pontos időt: egy falióra, egy állóóra, egy ébresztőóra és egy karóra.

A falióra a pontos időjelzéshez képest óránként 2 percet késett, az állóóra a faliórához képest óránként két percet sietett, az ébresztőóra az állóórához viszonyítva óránként két percet késett, a karóra pedig az ébresztőórához két percet sietett. Déli 12-órakor valamennyit a pontos időre állították.

Mennyit mutat a karóra a 19 órai pontos időjelzéskor?

**23.92.** [20, 5] Aligát és Benkőt 120 km-es nyílegyenes út köti össze. Ugyanabban a percben indul el egy versenykerékpárosokból álló karaván Aligából Benkő irányába, s néhány amatőr kerékpáros Benkőből Aliga felé. Az előbbiek 25 $\frac{km}{h}$, az utóbbiak 15 $\frac{km}{h}$ sebességgel haladnak.

Abban a pillanatban, amikor Aligáról elindult a versenykerékpárosok raja, egy légy röpült előre 100 $\frac{km}{h}$-ás sebességgel egészen addig, amíg a szemközti csoporthoz nem ért, s akkor sebességéből semmit sem vesztve visszafordult az előbbi csoport irányába. Igy repült oda-vissza a két csoport között, s itt is halt tragikus halált a két kerékpáros had véletlen összeütközésekor.

Meg tudnánk mondani, hogy hősi emlékezetű legyünk hány km-t repült megállás nélkül?

**23.93.** [20, 15] $A$ és $B$ városból egyszerre indul két gépkocsi egymással szemben. Átlagsebességük állandó, a sebességük aránya 5:4. (Az $A$-ból induló gépkocsinak nagyobb a sebessége.)

Menet közben találkoznak, majd beérve az $A$, illetve a $B$ városba, azonnal visszafordulnak, így újbol találkoznak. A második találkozó 24 km-rel közelebb történik az $A$ városhoz, mint az első.

Milyen messze van egymástól a két város?

**23.94.** [20, 15] Jancsi a falujából ($A$) gyalog ment a szomszéd községbe ($B$), ahonnét vele egyidőben elindult Béla is az $A$ faluba. Útközben találkoztak és üdvözölték egymást, majd tovább mentek. A faluba érve mindketten egy-egy órát ott tartózkodtak, majd hazafelé vették az útjukat. Ekkor ismét találkoztak.

A találkozásuk első helye $A$ falutól 500 méterre, másodszor a $B$ falutól 300 méterre volt.

Milyen távol van egymástól a szóbanforgó két falu és mennyi a két fiú sebességének aránya?

**23.95.** (S) [20] Keressük meg azokat az $x$, $y$ (és $z$) *természetes* számokat, amelyek kielégítik az alábbi egyenleteket!

**a)** $x + y + z = 5$ **b)** $y = 2 + \frac{18}{x-7}$ **c)** $(x + 2) \cdot (y - 6) = 42$

**d)** $2xy - x - 2y = 5$ **e)** $7x^2 - 4y^2 = 21$

**a')-e')** Keressünk a fenti egyenletekhez még minél több *valós* megoldást, sejtsük meg és ábrázoljuk a teljes megoldáshalmazt a síkban illetve a térben.

**23.96.** [20] **a)** Melyek azok az $x$, $y$ prímszámok, amelyekre

$$x^2 - 2y^2 = 1?$$

**b)** Keressünk az adott egyenlethez még minél több *valós* megoldást, sejtsük meg és ábrázoljuk a teljes megoldáshalmazt a síkban.

**23.97.** Hümér három évvel ezelőtt betett egy bizonyos összeget a bankba. Ma lekérdezte és kiderült, hogy jelenleg 20 000 Ft van a számláján.

**a)** Mennyi pénzt tett be három éve

**b)** és mennyi pénze lesz Hümérnek három év múlva

a bankszámlán, ha a kamat megbízhatóan mindig évi 15%-os?

**c)** Mennyi pénzt tegyen még most be Hümér a bankba 20 000 Ft-ja mellé, ha három év múlva 40 000 Ft-ot szeretne kivenni?

**23.98.** [20] Két háromjegyű szám összege 999. Ha a két számot egymás mellé írjuk, és tizedesvesszővel választjuk el, akkor az egyik esetben (amikor a nagyobb szám van a tizedesvessző előtt) hatszor akkora számot kapunk, mint a másik esetben. Melyik ez a két szám?

**23.99.** [19] Egy vonat egy egyenes alagúton állandó sebességgel halad át. A vonat elején haladó mozdonynak az alagútba érkezésétől számítva 20 másodperc telik el addig, amíg a szerelvény utolsó kocsija is elhagyja az alagutat. Az alagút mennyezetén levő lámpák akkor kezdenek el világítani, amikor a mozdony közvetlenül alájuk ér, és akkor alszanak ki, amikor az utolsó kocsi is elhaladt alattuk. Milyen hosszú a vonat, ha az alagút 300 méter hosszú, és mindegyik mennyezeti lámpa pontosan 10 másodpercig ég?

**23.100.** [20] Egy bűnügy felderítéséhez tanukat hallgattak ki. Három, az országúton egyenletes sebességgel haladó autó útját kell rekonstruálni. A tanuk elmondják , hogy amikor a fekete kocsi a 38-as kilométerkőnél volt, akkor a piros kocsi a 40-es, a zöld a 42-es kilométerkő mellett robogott el. Később, amikor a fekete és a piros kocsi a 42-es kilométerkőnél összetalálkozott, a zöld kocsi a 45-ös kilométerkőnél tartott.

Megtudjuk-e mondani ezek alapján, hogy:

**a)** hol találkozott össze a fekete és a zöld kocsi, és hol volt ekkor a piros?

**b)** hol találkozott össze a piros és a zöld kocsi, és hol volt ekkor a fekete?

**23.101.** [20] Egy róka üldözőbe vesz egy nyulat. Kezdetben 60m a róka hátránya, de háromszor olyan gyorsan fut, mint a nyúl. Mikor a nyúl észreveszi, hogy a róka elért odáig, ahol ő volt kezdetben, megkétszerezi a sebességét.

Hol éri utol a róka a nyulat?

**23.102.** [20, 10] Thomas Alva Edisonnak (1847-1931) jó érzéke volt volt a szellemes tréfákhoz. Nagyszámú vendégserege gyakran csodálkozott, hogy csak milyen nagy fáradtsággal lehet a ház előtti kertajtót kinyitni. Végül is az egyik barátja így szólt a nagy feltalálóhoz: „Egy ilyen technikai zseni, mint te, igazán megcsinálhatná a kertajtót, hogy rendesen működjön!"

Edison mosolyogva így válaszolt:

„A kapumat meglehetősen értelmesen terveztem meg. Rákötöttem a ciszternára. Mindenki, aki hozzám jön, 20 liter vizet pumpál a ciszternába.”

Amikor Edison 20 literes edényről 25 literes edényre tért át, 12 látogatóval kevesebb kellett csak a ciszterna megtöltéséhez.

Mekkora volt a ciszterna befogadóképessége?

**23.103.** [20, 11] Egy ízben párhuzamosan haladva a villamossínekkel, észrevettem, hogy minden 12 percben megelőz engem egy villamos, és minden 4 percben találkozom egy szembejövő villamossal. (Én is és a villamos is egyenletes sebességgel haladtunk.) Hány percenként indulnak a villamosok a végállomásról?

**23.104.** Figyeljük meg a következő összeadásokat:

$$\begin{aligned} 15 &= 1+2+3+4+5, \\ 1353 &= 13+14+15+\ldots+52+53, \\ 133533 &= 133+134+\ldots+532+533. \end{aligned}$$

Mennyit kapunk, ha 1333-tól 5333-ig összeadjuk az egész számokat?

**23.105.** Igaz-e, hogy a következő alakú, tízes számrendszerben fölírt számok mind négyzetszámok: 49, 4489, 444889, 44448889, ...?

**23.106.** Egy ember azt állítja, hogy ránézésre meg tudja állapítani egy fáról, hogy hány levele van.

Hogyan tudnánk meggyőződni arról, hogy igazat beszél-e?

**23.107.** Létezik-e olyan tíz különböző számjegyből álló szám, amelynek kétszerese is tíz különböző számjegyből áll?

**23.108.** [1] Az ellenség körülzárt egy várat. Még 3 év és a védőknek meg kell adniuk magukat, vagy éhenhalnak. Győznek viszont, ha sikerül felépíteniük egy 9 emeletes tornyot és onnan egy napig tudják lőni az ellenséget. Az a nehézség, hogy míg a védők csak éjszaka építkezhetnek és csak két emeletnyit tudnak elkészíteni egy éjjel, addig az ostromlók minden reggel szétlőnek egy teljes tornyot, akár milyen magas is az. Ezért a védőknek építési tervet kell készíteni. Valami ilyesformát:

1. nap: két egyemeletes torony építése.
2. nap: egy egyemeletes torony építése
és egy korábban épített toronyra egy második emelet építése.
stb.

Van-e esélye a védőknek, vagy biztosan nyernek a támadók?

**23.109.** Számítógépen küldtem el néhány műveleti azonosságot, de a levelező szoftver a műveleti jeleket nem ismerte és más jeleket írt be a helyükre. Mik lehettek az eredeti műveleti jelek? (Nem csak egy megoldás lehetséges!)

**a)** $(a \ \$ \ b) \ \# \ c = (a \ \# \ c) \ \$ \ (b \ \# \ c)$
**b)** $(a \ @ \ b) \ \% \ c = (a \ \% \ c) \ @ \ b$
**c)** $(a \ \S \ b) * c = a \ \S \ (b \ \S \ c)$

**23.110.** Két egyenlő magasságú gyertyát 18 órakor meggyújtottak. Az egyik 22 órakor, a másik 21 órakor aludt el, miután tövig égtek. Közben a magasságuk egyenletesen csökkent. Hány órakor volt az egyik gyertyacsonk kétszer olyan magas, mint a másik?

**23.111.** [20] Milyen természetes számokra igazak a következő egyenlőségek?

**a)** $x^2 - y^2 = 1984$

**b)** $x^2 - y^2 = 1986$

**c)** $xy^2 + 2xy + x - 243y = 0$

**d)** $2x^2 - 3xy + 8xy - 12y^2 = 28$

**23.112.** [20] Egy számhoz hozzáadjuk a reciprokát,

**a)** az összeg 2. Mi lehet ez a szám? Csak egy ilyen van?

**b)** az összeg 10,1. Mi lehet a szám? Hány ilyen van?

**c)** az összeg 1. Mi lehet a szám?

**d)** Mit állíthatunk általában egy pozitív számnak és a reciprokának az összegéről? Igazoljuk a sejtést!

**23.113.** [20] **a)** Vegyünk két számot, és az összegüket szorozzuk meg a két szám reciprokának összegével! Több esetben is végezzük el a számolást!

**b)** Igaz-e, hogy mindig 2-nél nagyobb a szorzat?

**c)** Igaz-e, hogy mindig 6-nál is nagyobb a szorzat?

**d)** Fogalmazzunk meg sejtést arról, hogy két pozitív szám összegének és reciproka összegének a szorzata legalább mekkora! A következő egyenlőtlenség jobb oldalára a legnagyobb olyan számot írjuk, amellyel mindig igaz az egyenlőség!

$$(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \ldots \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

**e)** Igazoljuk a sejtést!

**23.114.** [20] **a)** Vegyünk három pozitív egész számot, adjuk össze őket és az összeget szorozzuk meg a számok reciprokának összegével! Végezzük el ezt több számhármassal is!

**b)** Fogalmazzunk meg sejtést arról, hogy legalább mekkora ez a szorzat! A következő egyenlőtlenség jobb oldalára a legnagyobb olyan számot írjuk, amellyel mindig igaz az egyenlőtlenség!

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \ldots \qquad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

**c)** Igazoljuk a sejtést!

**23.115.** Szögei szerint mely háromszögek oldalaira teljesül az

**a)** $a^2b^2 + c^4 = b^4 + a^2c^2$

**b)** $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}$

összefüggés?

# Segítség, útmutatás

## 1. Aritmetika

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 2. Aritmetika (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 3. Arányosság

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 4. Arányosság (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 5. Szöveges feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 6. Betűkifejezések

**6.25.** Nem lehet az eredmény akármilyen egész szám, például 1 sem lehet, mert ha $g$-vel jelöljük a gondolt számot, akkor

$$\frac{3g+5}{2} - 8 = 1.$$

Ebből a gondolt szám $\frac{13}{3}$, pedig csak egész számra lehetett gondolni.

Gondoljuk meg általánosan is, hogy az eredmény nem lehet akármilyen egész szám! Használjuk föl, hogy a $g$ csak egész szám lehet, és nézzük meg, hogy milyen egész szám lehet így az eredmény, vagyis milyen egész értékeket vehet föl a

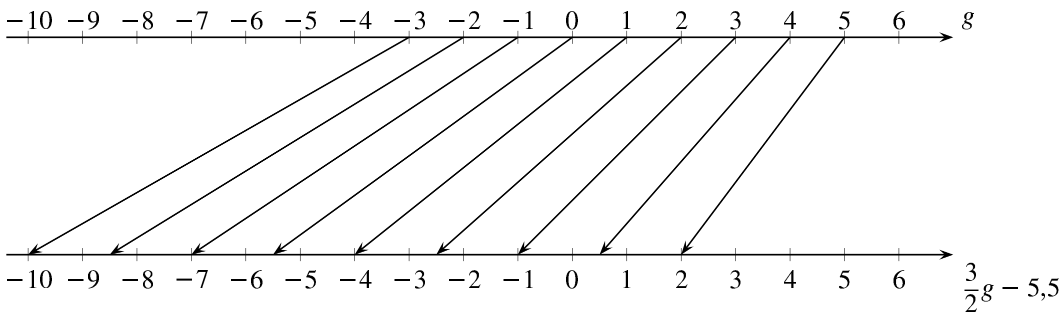
$$\frac{3g+5}{2} - 8$$

kifejezés?

Milyennek kell a $\frac{3g+5}{2} - 8$ kifejezésben a tört számlálójának lenni ahhoz, hogy az eredmény egész szám legyen? Ez milyen $g$ egész számokra következik be?

(Másképp: milyen lehet $g$, ha $\frac{3}{2}g - 5{,}5$ értéke egész?)

A 6.1. nyíldiagramos ábrázolásból jól látszik, hogy a $g$-től függően mi lehet az eredmény.




6.25S.1. ábra.

# 7. Betűkifejezések (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

# 8. Műveleti azonosságok

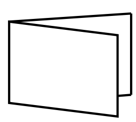
Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

# 9. Műveleti azonosságok (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

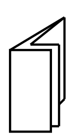
# 10. Hatványozás

**10.3.** Ha kettéhajtunk egy papírlapot, akkor 2 réteg lesz egymáson (lásd a 10.1. ábrát).



10.3S.1. ábra.

Ha még egyszer kettéhajtjuk, már összesen 4 réteget látunk (lásd a 10.2. ábrát).



10.3S.2. ábra.

Ha harmadszorra is kettéhajtjuk, akkor összesen hány réteg keletkezik?
Az $n$-edszeri kettéhajtás után hány réteg lesz? Ennek mennyi az összvastagsága?

# 11. Hatványozás (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

# 12. Egyenletek I.

**12.2.** Gondolkodjunk visszafelé! Pl. a)-ban kezdhetjük így: melyik az a szám, amelyet 28-cal csökkentve 28-at kapunk?

**12.3.** Helyettesítsük be az egyenletek mindkét oldalába a megadott értékeket!

**12.7.** Jelülje $k$ a középső szög nagyságát! Fejezzük ki $k$-val a háromszög többi szögét és a három belső szög összegét is!

**12.11.** Jelölje $f$ a fiú 10 évvel ezelőtti korát! Fejezzük ki a $f$-fel rendre

– az apa 10 évvel ezelőtti korát;

– a fiú korát 10 év múlva;

– az apja korát 10 év múlva!

Mit nem használtuk még fel a példa szövegéből?

**12.13.** Jelölje az 50%-os alkoholból szükséges mennyiséget literben $x$! Írjuk fel a (tiszta) alkohol mennyiségét

– 10 liter 20%-os alkoholban;

– $x$ liter 50%-os alkoholban;

– és a keverékben!

Az utóbbit fejezzük ki kétféleképpen is!

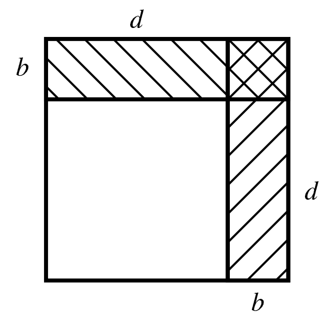
**12.14.** Legyen a fiúk száma $3x$. Írjuk fel a lányok számát kihívás előtt és után, valamint a fiúk kihívás utáni számát! Használjuk fel, hogy a kihívás utáni arány 4 : 5!

**12.17. a)** Jegyezzük le!

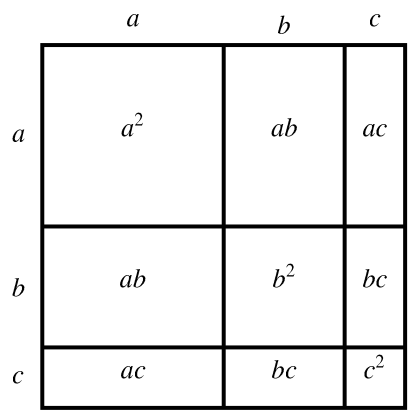
| | |
|---|---|
| a 20 dkg 770 Ft-os kávé ennyibe kerül: | |
| a 30 dkg $x$ Ft-os kávé ennyibe kerül: | |
| az összes kávé ennyibe kerül: | |
| Írjunk fel egyenletet! | |

**c)** Jegyezzük le!

| | |
|---|---|
| A réz mennyisége grammban: | $r$ |
| A cink mennyisége: | $200 - r$ |
| $r$ gramm réz térfogata $cm^3$-ben: | |
| $200 - r$ gramm cink térfogata: | |
| 200 gramm sárgaréz térfogata: | |
| Az egyenlet: | |




12.18S.1. ábra.




12.18S.2. ábra.

**12.18.** A 12.1. ábráról leolvasható a megoldás.

Gondoljunk arra, hogy Karcsi és Károly közt a korkülönbség mindig 24 év marad. Amikor például Károly 5-ször annyi idős, mint Karcsi, akkor a 12.2 ábrán látható módon alakul a rajz.

A 24 év Karcsi korának hányszorosa?

A feladatot egyenlettel is meg lehet oldani. Jegyezzük le az adatokat!

| | Karcsi | Károly |
|---|---|---|
| kora most (évben): | 8 | 32 |
| kora 8 év múlva: | $8 + x$ | $32 + x$ |

Nézzük azt az esetet, amikor Károly 3-szor olyan idős, mint Karcsi! Az egyenlet: $3 \cdot (8 + x) = 32 + x$.

**12.19.** Elkezdtük az adatok lejegyzését:

| Időpont | az apa kora | a fiú kora |
|---|---|---|
| Három évvel ezelőtt: | | $x$ |
| Most: | | $x + 3$ |
| Öt év múlva: | | $x + 8$ |

Hányszor kell venni az $(x + 8)$-at ahhoz, hogy megkapjuk az apa akkori életkorát?

Írjuk fel egyenlettel, és oldjuk meg a feladatot!

**12.20.** Folytassuk az adatok lejegyzését!

| Időpont | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| Korábban: | | $2x$ | $x$ |
| Most: | | $2x+21-x$ | 21 |

A táblázatból leolvasható, hogy közben $21-x$ év telt el. Írjunk fel egyenletet és oldjuk meg a feladatot!

**12.21.** Folytassuk a táblázat kitöltését!

| Időpont | Péter kora | Zoli kora | Anyjuk kora | Apjuk kora |
|---|---|---|---|---|
| Z. születésekor: | $x$ | 0 | $4x$ | $5x$ |
| Apa 45. szül. napján: | | | | 45 |

Használjuk fel, hogy a két időpont között eltelt idő $45-5x$.

**12.22.** Egyenlettel így jegyezhetjük le a feladatot:

| | |
|---|---|
| Először írjuk le a négyjegyű szám első jegyét: | 2 |
| Ez az ezresek helyén áll, ezért 2000-et ér | 2000 |
| A hozzá csatlakozó háromjegyű szám: | $x$ |
| Az eredeti négyjegyű szám: | $2000+x$ |
| Ha 2-t a szám elejéről a szám végére tesszük: | $10x+2$ |
| Az így kapott szám nagyobb, mint az eredeti: | $10x+2=(2000+x)+63$ |

Oldjuk meg az egyenletet, majd ellenőrizzünk vissza a szövegbe!

Másképp is okoskodhatunk! Találjuk ki egyenként a számjegyeket miközben végigkövetjük az írásbeli összeadást! Ne feledkezzünk el róla, hogy alább a kihagyott helyeken sréen beírandó számok egymással egyenlők!

$$\begin{array}{r} 6\ \ 3 \\ +\ 2\ \_\ \_\ \_ \\ \hline \_\ \_\ \_\ 2 \end{array}$$

**12.23.**

| | |
|---|---|
| Az első három (megegyező) jegy: | $x$ |
| A negyedik jegy: | $30-3x$ |
| Az eredeti négyjegyű szám: | $1000x+100x+10x+(30-3x)$ |
| Ugyanaz a jegyek fordított sorrendjében: | $1000\cdot(30-3x)+100x+10x+x$ |
| Az utóbbi szám 1998-cal nagyobb: | |

$$1000\cdot(30-3x)+100x+10x+x=1998+1000x+100x+10x+(30-3x)$$

**12.25.** Jelöljük a két falu távolságát $x$-szel.

| | $A$-ból induló autó távolsága $A$-tól | $B$-ből induló autó távolsága $A$-tól | távolságuk egymástól |
|---|---|---|---|
| 8-kor (km) | 0 | $x$ | $x$ |
| 9-kor (km) | 80 | $x+60$ | $x-20$ |
| fél 11-kor(km) | 200 | $x+150$ | $x-50$ |

Írjunk fel egyenletet, oldjuk meg és válaszoljunk mindkét kérdésre!

A megoldást könnyen ki lehet gondolni egyenlet nélkül is. Próbáljuk meg!

**12.26.** A feladatot nem is érdemes egyenlettel megoldani:
Tudjuk, hogy egy óra alatt $70+80$, vagyis 150 km-rel csökken a távolság köztük. Ebből már könnyen ki tudjuk számítani, hogy mikor volt 30, illetve 225 km a távolságuk. Ezekből kapjuk, hogy mekkora volt $B$ és $C$ város távolsága.

**12.28.** Jelölje $x$ azt a távolságot km-ben, amelynek megtétele után elromlott a kerékpár!

| szakasz | út ($km$) | idő ($h$) | sebesség ($\frac{km}{h}$) |
|---|---|---|---|
| eleje | $x$ | | 20 |
| maradék | $100-x$ | | 4 |
| összesen | 100 | 9 | — |

Töltsük ki a táblázat üres részeit! Írjunk fel egyenletet a két részidő összegének a teljes idővel való összevetéséből!

Választhatjuk ismeretlennek azt az időt is, amely addig telt el, amíg a kerékpár elromlott. Próbáljunk így is táblázatot készteni, majd megoldani a feladatot!

**12.29.** A hajó sebességét jelöljük $x$-szel!

| | hajó | | | busz | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | idő | seb. | út | idő | seb. | út |
| egyik mód: | 8 | $x$ | $8x$ | 2 | | $180-8x$ |
| másik mód: | 3 | $x$ | | | | |

Folytassuk a táblázat kitöltését! Egyenletet annak alapján lehet fölírni, hogy a busz sebességét kétféleképpen írthatjuk föl.

Mást is lehet ismeretlennek választani, akkor más egyenlethez juthatunk.

Úgy is megoldhatjuk a feladatot, hogy két ismeretlent használunk, például $x$-szel jelöljük a hajó sebességét, $y$-nal a busz sebességét. Ekkor két egyenletet írhatunk fel, egyiket az egyik elindulási lehetőségről, másikat a másikról.

**12.30.** A tartályba férő vízmennyiséget vegyük 1-nek!

| | | |
|---|---|---|
| A tartály mekkora részét tölti meg 1 perc alatt | az első cső: | $\frac{1}{15}$ |
| | a második cső: | $\frac{1}{20}$ |
| | a harmadik cső: | $\frac{1}{30}$ |
| A tartály mekkora részét tölti meg $t$ perc alatt | az első cső: | |
| | a második cső: | |
| | a harmadik cső: | |
| A három cső együtt $t$ perc alatt ekkora részt tölt meg: | | |

Írjunk fel egyenletet!

**12.32.**

Vezessünk be változókat így:

Ha csak az egyik csap van nyitva,

$x$ perc alatt lesz tele a medence,

ha csak a másik,

$y$ perc alatt.

vagy így:

Legyen a medencébe férő víz mennyisége 1.

1 perc alatt ennyi víz jön ki az első csapon:

$\rho_1$

1 perc alatt ennyi víz jön ki a második csapon:

$\rho_2$.

Írjunk fel egyenleteket!

Dolgozhatunk egyenlet nélkül is, okoskodással.

**12.33.** Három ismeretlent érdemes bevezetni, például Andor $a$ nap alatt csinálta meg a munkát, Béla $b$ nap alatt, Cecil $c$ nap alatt. Három egyenletet lehet felírni, amelyben $\frac{1}{a}$ $\frac{1}{b}$ és $\frac{1}{c}$ szerepel. Ezeket az egyenleteket is úgy könnyebb megoldani, ha $\frac{1}{a}$-t, $\frac{1}{b}$-t, $\frac{1}{c}$-t számítjuk ki először.

Okoskodással még hamarabb el lehet jutni a helyes válaszhoz.

**12.35.** A legkisebb oldalt jelöljük $x$-szel és fejezzük ki vele a többi oldalt is!

**12.36.** A létrejövő azonos számot jelöljük $x$-szel!

**12.37.** A létrejövő azonos számot jelöljük $x$-szel!

**12.47.** Ha nem esik ki az egyenletből az $x$, akkor kifejezhető belőle, így egyértelmú a megoldás. Az kell tehát, hogy kiessen az $x$.

**12.64.** A feladatban négy mozgási folyamatot különböztethetünk meg.

| folyamat | út | idő | sebesség |
|---|---|---|---|
| a teljes út szokásosan | $s$ | $t$ | $v$ |
| most, 1. rész | $s_1$ | $t_1$ | $v_1$ |
| most, 2. rész | $s_2$ | $t_2$ | $v_2$ |
| most, 3. rész | $s_3$ | $t_3$ | $v_3$ |

Próbáljuk csökkenteni az ismeretlenek számát, írjunk fel a szöveg alapján összefüggéseket. Pl. $s_2 = 0$, $t_2 = \frac{2}{3}$ óra, $v_2 = 0$!

**12.85.** Amikor $A$ 4 éves volt, akkor $C$ $x$ éves. Írjuk fel $x$ segítségével, hogy hány év telt el azóta!

**12.86.** Jelöljük $x$-szel $A$ életkorát, $y$-nal $B$ életkorát! Hány éve volt $A$ annyi idős, mint $B$? Hány év múlva lesz $B$ annyi idős mint most $A$?

**12.87.** A három ember mostani életkorát jelöljük egy-egy ismeretlennel! Az ismeretlenek segítségével írjuk fel, hogy hány évvel ezelőtt volt apám annyi idős, mint én most, és akkor hány éves voltam én, és hány éves volt a húgom!

## 13. Egyenletek I. (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 14. Egyenlőtlenségek

**14.23.** Gondoljuk meg, hogy egy szorzat, illetve egy tört értéke milyen esetekben lehet pozitív!
**g)** Rendezzük úgy az egyenlőtlenséget, hogy az egyik oldalon 0 álljon!

**14.37.** A b) feladatban érdemes úgy rendezni, hogy az egyik oldalon 0 álljon, mert úgy közös nevezőre hozás után az a) feladattal azonos nehézségűvé válik a probléma.

## 15. Nevezetes azonosságok

**15.34.** Próbáljuk $a^2 - b^2$-t felírni szorzatalakban!

**15.45.** Alakítsuk szorzattá a bal oldalon található kifejezést!

**15.50.** **b)** Elég igazolni, hogy 13 valamelyik többszörösével osztható!

## 16. Nevezetes azonosságok (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 17. Egyenletek II.

**17.38.** Az $(i)$ egyenletből akkor és csakis akkor következik az $(ii)$ egyenlet, ha $(i)$ megoldáshalmaza része $(ii)$ megoldáshalmazának. Alább mintának megoldjuk az a) feladatrészt.

Az $x = -y$ egyenletből nem következik az $\frac{x}{y} = -1$ egyenlet, mert $x = y = 0$ megoldása az előbbinek, de az utóbbinak nem. Az utóbbi egyenletből viszont következik az előbbi.

Az $x = -y$ egyenletből nem következik az $x^2 = -y^2$ egyenlet, mert pl. $x = 1, y = -1$ megoldása az előbbinek, de az utóbbinak nem. A fordított következtetés jogos, hiszen $x^2 = -y^2$ csak $x = y = 0$ esetén teljesül és ezekre az értékekre fennáll az $x = -y$ reláció is.

Végül példákkal igazolható, hogy az $x^2 = -y^2$, $\frac{x}{y} = -1$ egyenletek egyikéből sem következik a másik.

## 18. Egyenletek II. (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 19. Egyenletrendszerek

**19.28. c)** Gondoljuk meg, lehet-e valamelyik gyök 0! A törtek eltávolítása után osszuk végig az első egyenletet $xy$-nal, a másodikat $xz$-vel, a harmadikat $yz$-vel, ezután új ismeretlen bevezetésével egyszerűen meg lehet oldani az egyenletrendszert.

**19.40. a)** Válasszuk ismeretlennek a csónak állóvízben mért sebességét! Gondoljuk meg, mekkora a csónak sebessége a parthoz képest lefelé, illetve felfelé!

**19.41.** Jelöljük $v_1$-gyel az egyik, $v_2$-vel a másik gyalogos sebességét, $x$-szel a lassabb gyalogos által a találkozásig megtett utat. Gondoljuk meg, mekkora utat tettek meg a találkozás után az egyes gyalogosok!

**19.43.** Jelöljük $v$-vel a személyvonat sebességét, $s$-sel az $A$ és $B$ távolságát, $t$-vel jelöljük, hogy hány óra telt el az indulástól 11-ig. A személyvonatra ezt az egyenletet írhatjuk: $s = v \cdot t$. Írjunk fel a gyorsvonat és az expresszvonat útjára is egyenleteket!

Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy észrevesszük, hogy a személyvonat és a gyorsvonat közti távolság fél 11-kor $30 + \frac{v}{2}$ km.

## 20. Egyenletrendszerek (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 21. Négyzetgyök

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 22. Négyzetgyök (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 23. Vegyes feladatok

**23.51.** Jelöljük $x$-szel azt a fűmennyiséget, amit egy tehén egy nap alatt legel le, $v$-vel azt a fűmennyiséget, ami egy nap alatt nő! Írjunk fel egyenleteket!

**23.84.** Gondoljuk meg, hogy a *vízhez képest* mennyit mozdult el a labda, és mekkora a csónak sebessége?

**23.85.** Jelölje $v$ a gőzhajó sebességét, $x$ a folyó sebességét, $t$ pedig a kérdezett időt! A két város távolságát írjuk fel többféleképpen! Ezekből az egyenletekből ki tudjuk számítani a két sebesség arányát és az időt.

**23.86.** Gondoljuk meg, hogy 1 óra alatt mennyit csökkent a távolság az $A$ -ból induló és a $B$-ből induló között, illetve a $B$-ből és a $C$-ből induló között!

Mennyit csökkent a távolság 1 óra alatt az $A$-ból induló és a $C$-ből induló között?

**23.87.**

**1. segítség, útmutatás.** Készítsünk grafikont, keressünk hasonlósági középpontot!

**2. segítség, útmutatás.** 8-tól 9-ig a gyalogos és a kerékpáros együttesen megteszik az út kétszeresét. 9-től 9 óra 40 percig a találkozási ponttól hátralevő út kétszeresét. Következtessünk ebből ara, hogy a hátralevő út mekkora része az egész útnak!

**23.95. d)** Próbáljunk szorzattá alakítani úgy, hogy a c) feladatrészhez hasonló egyenletet kapjunk!

**e)** A négyzetszámok négyes maradékára érdemes figyelni.

# Megoldások

## 1. Aritmetika

**1.1.** **a)** 12 **b)** $-40$ **c)** 135 **d)** $-11$ **e)** $-7$
**f)** 16.

**1.2.** **a)** 26 **b)** 260 **c)** 267 **d)** 133,5.

**1.23.** **a)** 1656 férőhelyes; **b)** 31 sorból.

## 2. Aritmetika (teszt)

**2.1. C**
A, B, D, E $\to$ 1.3, 1.4.

**2.2. E**
A, B, C, D $\to$ 1.3, 1.4.

**2.3. B**
A, C, D, E $\to$ 1.5.

**2.4. A**
B, C, D, E $\to$ 1.7.

**2.5. A**
B $\to$ 1.7. C $\to$ 1.9. E $\to$ 1.9. D $\to$ 1.18, 1.9.

**2.6. C**
D $\to$ 1.31. A $\to$ 1.8, 1.31. B $\to$ 1.8. E $\to$ 1.8.

**2.7. C**
A, B, D, E $\to$ 1.11.

**2.8. D**
A, B, C, E $\to$ 1.16.

**2.9. B**

$$\frac{37}{60} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} =$$
$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\right).$$

A, C, D, E $\to$ 1.19.

**2.10. D** $110 + 111 + \ldots + 118 + 119 = (110 + 119) \cdot 5 = 1145$. $101 + 111 + \ldots + 181 + 191 = = (101 + 191) \cdot 5 = 1460$. $211 + 311 + \ldots + 811 + 911 = (211 + 911) \cdot 4 = 4488$. Figyelembe véve, hogy a 111-et kétszer számoltuk, a teljes összeg: $1145 + 1460 + 4488 - 111 = 6982$.
A, B, C, E → 1.23, K.I.6.1.

## 3. Arányosság

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

## 4. Arányosság (teszt)

**4.1. B** $X = 100, \qquad Y = 175 - 66.66\ldots = 108.33\ldots, \qquad Z = 108.$
A, C, D, E → 3.2, 3.3, 3.4.

**4.2. D** $\frac{5}{3+5} \cdot 100 = 62{,}5$.
A, B, C, E → 3.5, 3.6.

**4.3. D** Az apa korának 7/4-e 133 év, amiből az apa kora: $133 \cdot \frac{4}{7} = 76$ év.
A, B, C, E → 3.10.

**4.4. A** $\frac{16}{9+11+16} \cdot 10\,296\,000 = 4\,564\,000$.
B, C, D, E → 3.12, 3.13.

**4.5. B** $35\,000\,000 \frac{36}{100} = 12\,600\,000$.
A, C, D, E → 3.16, 3.15, 3.19.

**4.6. B** $321\,750 \frac{100}{45} = 715\,000$.
A, C, D, E → 3.15, 3.22, 3.23.

**4.7. A**
**I.** $350 \cdot \frac{4}{10} = x \cdot \frac{7}{10} \Rightarrow x = 350 \cdot \frac{4}{7} = 200$.
**II.** $45 \cdot \frac{80}{100} = 18 \cdot \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{45}{18} \cdot 80 = 200$.
**III.** $400 \cdot \frac{13}{100} = x \cdot \frac{26}{100} \Rightarrow x = 400 \cdot \frac{13}{26} = 200$.
B, C, D, E → 3.17, 3.19.

**4.8. D**
A, B, C, E → 3.36, 3.33, 3.32.

**4.9. A** $130\,016\,000 \cdot \frac{36.773}{100} \cdot \frac{100}{29.174} = 16\,405\,000$.
B, C, D, E → 3.38, 3.39, 3.40.

**4.10. B** $2 \cdot 1089 = 2178$ m kerítésre van szükség, minden oldalt kétszer akkorára kell venni, mint eredetileg volt.
A, C, D, E → 3.41, 3.47.

**4.11. C** Egy-egy egy óra alatt rendre a tartály $\frac{1}{1}$-ed, $\frac{1}{2}$-ed, $\frac{1}{3}$-ad részét tölti meg. A három csap együtt egy óra alatt a tartály $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$-od részét tölti meg. Így a három együtt $\frac{6}{11}$-ed óra (kb. 32 perc 44 másodperc) alatt tölti meg a kádat.
A, B, D, E → 3.57, 3.56.

**4.12. B** A gepárd antilophoz képesti relatív üldözési sebessége 6 km/óra. Ekkora sebességgel a 10 méteres, azaz 0,01 km-es szükséges távolságot, $\frac{0{,}01}{6}$ óra, azaz $\frac{0{,}01}{6} \cdot 60 = 0{,}1$ perc alatt küzdi le a gepárd.

A, C, D, E → 3.57, 3.56.

# 5. Szöveges feladatok

**5.45.**

Áremelés

| |
|---|
| Ki ('Hány százalékos legyen az áremelés?') |
| Be ($x$) |
| Ciklus $i := 1$-től $n$-ig |
|     Be ($V[i]$) |
|     $V[i] := V[i] * (100 + x)/100$ |
|     Ki ($V[i]$) |

**5.46.**

áfa

| |
|---|
| Ki ('Hány százalékos az áfa?') |
| Be ($x$) |
| Ciklus $i := 1$-től $n$-ig |
|     Be ($V[i]$) |
|     $A[i] := V[i] * x/100$ |
|     Ki ($A[i]$) |

**5.47.**

Bruttóvektor

| |
|---|
| Vektorbeolvasás ($n, V$) |
| Ki ('Hány százalékos áfával számoljak?') |
| Be ($x$) |
| Ciklus $i := 1 -$-től $n -$-ig |
|     $B[i] := V[i] + V[i] * x/100$ |
|     Ki ($B[i]$) |

**5.48. a)**

| Taxisok algoritmusa |
|---|
| Ki ('Mennyi a kilométerdíj ?') |
| Be ($dij$) |
| Ki ('Hány kilométert tett meg a taxi ?') |
| Be ($kmszam$) |
| $ar := 0$ |
| $ar := dij * kmszam$ |
| Ki ($ar$) |

**b)**

| Taxisok algoritmusa II. | |
|---|---|
| Ki ('Mennyi a kilométerdíj ?') | |
| Be ($dij$) | |
| Ki ('Hány kilométert tett meg a taxi ?') | |
| Be ($kmszam$) | |
| $ar := 0$ | |
| $ar := dij * kmszam$ | |
| $ar > 10000$ | |
| $ar := ar - ar/20$ | |
| Ki ($ar$) | |

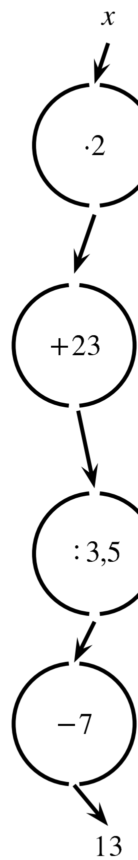
# 6. Betűkifejezések

**6.24. a)** Gondoltam egy számot: $x$;
Hozzáadtam még annyit (megkétszereztem): $2x$;
Még 23-at is hozzáadtam: $2x + 23$;
Az eredményt elosztottam 3,5-del: $\frac{2x+23}{3{,}5}$;
Még 7-et elvettem: $\frac{2x+23}{3{,}5} - 7$;
13 maradt: $\frac{2x+23}{3{,}5} - 7 = 13$.
**b)** Lásd a 6.1. ábrát!

# 7. Betűkifejezések (teszt)

**7.1. C**
A **II.)**, **III.)** képletek jók.
A, B, D, E → 6.6.

**7.2. C**
A, B, D, E → 6.6.




6.24M.1. ábra.

**7.3. D**
A, B, C, E → 6.10.

**7.4. D**
Az eredmények rendre 1,2; (−0,5); 1,3; 1,4; 1.
A, B, C, E → 6.16.

**7.5. C**
A, B, D, E → 6.17.

**7.6. B**
A, C, D, E → 6.12.

**7.7. C**
Összevonás után az alábbi kifejezéseket kapjuk:
**I.)** $10a - 0{,}5$, ami $a = 1.25$ esetén 12.
**II.)** $5b + 2$, ami $b = \frac{11}{5}$ esetén 13.
**III.)** $d$, ami itt $\frac{21}{7} = 3$.
Tehát a kérdezett összeg éppen 28.
A, B, D, E → 6.22.

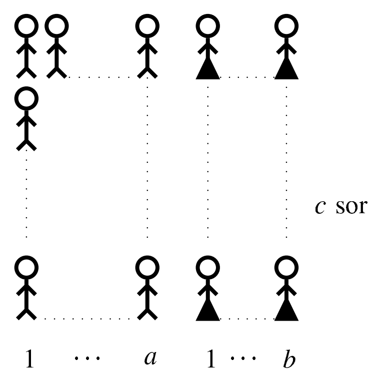
**7.8. A**
B, C, D, E → 6.24.

**7.9. B**
A, C, D, E → 6.30.

**7.10. C**
A, B, D, E → 6.27.

## 8. Műveleti azonosságok

**8.23. a)** Szemléltethetjük tornasorral (lásd a 8.1. ábrát).

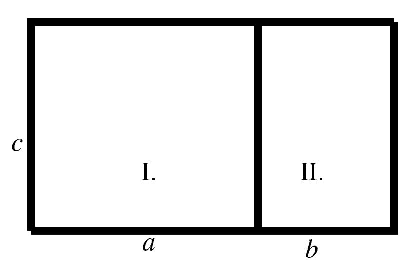



8.23M.1. ábra.

A tornasorban $c$ sorban állnak a gyerekek, és mindegyik sorban $a$ fiú és $b$ lány. Kétféleképpen számolhatjuk össze, hány gyerek van:
$c$ sor van, mindegyik sorban $a+b$ gyerek, vagyis összesen:

$$c \cdot (a+b).$$

De összeszámlálhatjuk a gyerekeket úgy is, hogy először megszámoljuk hány fiú van, aztán azt, hogy hány lány.
Írjuk le, hogy hány fiú van! Írjuk le, hogy hány lány van! Írjuk le, hogy hány gyerek van összesen!
Tetszőleges pozitív számokra szemléltethetjük ugyanezt az azonosságot téglalapok területével (lásd a 8.2. ábrát).




8.23M.2. ábra.

Mekkora a nagy téglalap területe? Mekkora az I. jelűé? Mekkora a II. jelűé?

## 9. Műveleti azonosságok (teszt)

**9.1. C**
A, B, D, E → 8.4.

**9.2. D**
A, B, C, E → 8.4.

**9.3. A**
B, C, D, E → 8.4.

**9.4. D**
A, B, C, E → 8.4.

**9.5. E**
A, B, C, D → 8.13.

**9.6. A**
B, C, D, E → 8.6.

**9.7. A**
B, C, D, E → 8.22, 8.29.

**9.8. B**
$X = Y = V = Z = 1989$, $U = 4$. Az $a = 1995$ rövidítő jelöléssel:

$$X = (a-2)(a+3) - a^2 = a - 6, \qquad Y = a(a+6) - (a+2)(a+3) = a - 6,$$
$$U = (a+2)^2 - a(a+4) = 4, \qquad V = (a-4)a - (a-3)(a-2) = a - 6,$$
$$Z = (a-5)(a-2) - (a-4)^2 = a - 6.$$

A, C, D, E → 8.24, 8.32.

**9.9. A**
B, C, D, E → 8.36, 8.37, 8.38.

**9.10. C**
A II.), III.) egyenlőségek azonosságok, III.) még akkor is az, ha a két oldal értelmezési tartománya nem azonos (a tört nem értelmezett $x = -5$ esetén).
A, B, D, E → 8.41, 8.38, 8.39.

**9.11. D**
$4(2n+5) - 2(7-2n) = 8n + 20 - 14 + 4n = 12n + 6 = 6 \cdot (2n+1)$ A kifejezés $n$ minden egész értéke esetén osztható 6-tal – és 6 minden poz. osztójával, 1-gyel, 2-vel és 3-mal –, de más $n$-től független osztója nincs.
A, B, C, E → 8.18.

**9.12. E**
A, B, C, D → 8.23.

## 10. Hatványozás

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

## 11. Hatványozás (teszt)

**11.1. E**
$L = 5^6 \cdot 10^9 = 15625 \cdot 10^9 = 1{,}5625 \cdot 10^{13}$.
A, B, C, D → 10.1.

**11.2. B**

A föld felszíne: $F \approx 5.1471854 \cdot 10^8 \text{km}^2 = 5.1471854 \cdot 10^{14} \text{m}^2$, így az egy főre jutó terület (lásd a 11.2. feladat megoldását) $\frac{5.1471854 \cdot 10^{14}}{1.5625 \cdot 10^{13}} \approx 32.942 \text{m}^2$.

A, C, D, E $\to$ 10.1, 10.31.

**11.3. A**

$10^9 = 1000^3 < 1024^3 = \left(2^{10}\right)^3 = 2^{30} = \left(2^3\right)^{10} = 8^{10} < 9^{10}$.

B, C, D, E $\to$ 10.17.

**11.4. E**

$42 \cdot 10^6 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^6 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 7$

A, B, C, D $\to$ 10.48.

**11.5. C**

$T = V = X$ és $U = Z$.

A, B, D, E $\to$ 10.9, 10.10, 10.15.

**11.6. D**

$(x; y)$ lehet $(5; 4)$, $(10; 8)$, $(15; 12)$.

A, B, C, E $\to$ 10.14.

**11.7. E**

$4^{x-y} = 4^2$, azaz $x - y = 2$, tehát $y = 1{,}2{,}3, \ldots 17$ esetén kapunk a megadott halmazban megoldást, ha $x = y + 2$.

A, B, C, D $\to$ 10.13.

**11.8. A**

$$\frac{1\text{sec}}{3 \cdot 10^5 \text{km}} = \frac{1\text{sec}}{3 \cdot 10^8 \text{m}} = \frac{1\text{sec}}{3 \cdot 10^{11} \text{mm}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-11} \text{sec}}{1\text{mm}} = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-12} \text{sec}}{1\text{mm}}$$

B, C, D, E $\to$ 10.39.

## 12. Egyenletek I.

**12.2.** Gondolkodjunk visszafelé!

**a)** $\Big((2x) \cdot 3 + 2\Big) \cdot 4 - 28 = 28$, $\quad \Big((2x) \cdot 3 + 2\Big) \cdot 4 = 56$, $\quad (2x) \cdot 3 + 2 = 14$, $\quad (2x) \cdot 3 = 12$, $2x = 4$, $\quad x = 2$.

Ellenőrzés:

$$\Big((6 \cdot 2 - 4 \cdot 2) \cdot 3 + 2\Big) \cdot 4 - 28 = \Big((12 - 8) \cdot 3 + 2\Big) \cdot 4 - 28 =$$

$$= (4 \cdot 3 + 2) \cdot 4 - 28 = 14 \cdot 4 - 28 = 56 - 28 = 28,$$

tehát a megoldás helyes.

**b)** $\frac{(6x) \cdot 5 - 6}{3} \cdot 2 = 28$, $\quad \frac{(6x) \cdot 5 - 6}{3} = 14$, $\quad (6x) \cdot 5 - 6 = 42$, $\quad (6x) \cdot 5 = 48$, $\quad 6x = 9{,}6$, $\quad x = 1{,}6$.

Ellenőrzés:

$$\frac{(5 \cdot 1{,}6 + 1{,}6) \cdot 5 - 6}{3} \cdot 2 = \frac{(8 + 1{,}6) \cdot 5 - 6}{3} \cdot 2 =$$

$$= \frac{9{,}6 \cdot 5 - 6}{3} \cdot 2 = \frac{48 - 6}{3} \cdot 2 = \frac{42}{3} \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 28,$$

tehát a megoldás helyes.

**12.3.** Az egyenleteket nem oldjuk meg, csak behelyettesítjük a megadott értékeket. $x = 1$ megoldása b)-nek e)-nek és f)-nek, míg $x = -2$ megoldása a)-nak, b)-nek, c)-nek és f)-nek.

**12.4. a)** $8 \cdot x - 3 = x + 11, \quad 8 \cdot x = x + 14, \quad 7 \cdot x = 14, \quad x = 2.$
Ellenőrzés: $8 \cdot 2 - 3 = 16 - 3 = 13$, míg $2 + 11 = 13$.

**b)** $3 - 5 \cdot x = x + 33, \quad -5 \cdot x = x + 30, \quad -6 \cdot x = 30, \quad x = -5.$
Ellenőrzés: $3 - 5 \cdot (-5) = 3 - (-25) = 3 + 25 = 28$, míg $(-5) + 33 = 28$.

**c)** $5 \cdot x - 7 = 3 \cdot x - 1, \quad 5 \cdot x = 3 \cdot x + 6, \quad 2 \cdot x = 6, \quad x = 3.$
Ellenőrzés:$5 \cdot 3 - 7 = 15 - 7 = 8$, míg $3 \cdot 3 - 1 = 9 - 1 = 8$.

**d)** $7 - 3 \cdot x = 3 - 7 \cdot x, \quad -3 \cdot x = -4 - 7 \cdot x, \quad 4 \cdot x = -4, \quad x = -1.$
Ellenőrzés: $7 - 3 \cdot (-1) = 7 - (-3) = 7 + 3 = 10$, míg $3 - 7 \cdot (-1) = 3 - (-7) = 3 + 7 = 10$.

**12.6. a)** $9x - 1 - 3x - 2 = 3x + 3, \quad 6x - 3 = 3x + 3, \quad 3x = 6, \quad x = 2.$
Ellenőrzés: $9 \cdot 2 - 1 - (3 \cdot 2 + 2) = 18 - 1 - 8 = 9$, míg $3 \cdot 2 + 3 = 9$.

**b)** $17x - 6 - 6x - 2 = 3x + 8, \quad 11x - 8 = 3x + 8, \quad 8x = 16, \quad x = 2.$
Ellenőrzés: $17 \cdot 2 - 6 - (6 \cdot 2 + 2) = 34 - 6 - 14 = 14$, míg $3 \cdot 2 + 8 = 14$.

**c)** $25x - 11 - 9x + 2 = 4x + 3, \quad 16x - 9 = 4x + 3, \quad 12x = 12, \quad x = 1.$
Ellenőrzés: $25 - 11 - (9 - 2) = 14 - 7 = 7$, míg $4 + 3 = 7$.

**d)** $8x - 2 = 11x + 121, \quad -3x = 123, \quad x = \frac{123}{-3} = -41.$
Ellenőrzés: $8 \cdot (-41) - 3 = -328 - 2 = -330$, míg $((-41) + 11) \cdot 11 = (-30) \cdot 11 = -330$.

**e)** $\frac{11 \cdot (8x-3)}{7} = \frac{(x+11) \cdot 11 \cdot 7}{7}, \quad 8x - 3 = (x + 11) \cdot 7, \quad 8x - 3 = 7x + 77, \quad x = 80.$
Ellenőrzés: $\frac{11 \cdot (8 \cdot 80 - 3)}{7} = \frac{11 \cdot (640-3)}{7} = \frac{11 \cdot 637}{7} = 11 \cdot 91 = 1001$, míg $(80+11) \cdot 11 = 91 \cdot 11 = 1001$.

**12.7.** Jelülje $k$ a középső szög nagyságát! A legnagyobb szög $(k+4^\circ)$, a legkisebb $(k-13^\circ$, így a háromszög szögeinek összege: $180^\circ = (k+4^\circ)+k+(k-13^\circ$, azaz $180^\circ = 3k-9^\circ, \quad 189^\circ = 3k$, $63^\circ = k$. A háromszög szögei: $67^\circ$, $63^\circ$, $50^\circ$.

Ellenőrzés: a három szög összege $67^\circ+63^\circ+50^\circ = 180^\circ$, tehát ilyen háromszög valóban létezik és megfelel a feladat követelményeinek.

**12.10. a)** $5x - x - 8 = 2x + 40, \quad 4x - 8 = 2x + 40, \quad 2x = 48, \quad x = 24.$
Ellenőrzés: $5 \cdot 24 - (24 + 8) = 120 - 32 = 88$, míg $2(24 + 20) = 2 \cdot 44 = 88$, tehát a megoldás helyes.

**b)** $30 - 2x + 5 + 3x - 24 = 0, \quad 11 + x = 0, \quad x = -11..$
Ellenőrzés: $30 - (2 \cdot (-11) - 5) + 3(-11 - 8) = 30 - (-27) + 3 \cdot (-19) = 57 - 57 = 0$, tehát a megoldás helyes.

**c)** $x - 3x + 6 = 100, \quad -2x = 94, \quad x = -47.$
Ellenőrzés: $-47 - 3\,(-47 - 2) = -47 - 3 \cdot (-49) = -47 + 147 = 100$, tehát a megoldás helyes.

**d)** $2x - 5x + 15 + 42 = 0, \quad -3x + 57 = 0, \quad 57 = 3x, \quad 19 = x.$
Ellenőrzés:$2 \cdot 19 - 5(19 - 3) + 42 = 38 - 5 \cdot 16 + 42 = 38 - 80 + 42 = 0$, tehát a megoldás helyes.

**e)** $12x + 24 = 14x + 7 - 3, \quad 12x + 24 = 14x + 4, \quad 20 = 2x, \quad 10 = x.$
Ellenőrzés:$12(10 + 2) = 12 \cdot 12 = 144$, míg $7(2 \cdot 10 + 1) - 3 = 7 \cdot 21 - 3 = 147 - 3 = 144$, tehát a megoldás helyes.

**f)** $30x - 210 - 280 + 56x = 26, \quad 86x - 490 = 26, \quad 86x = 516, \quad x = 6.$
Ellenőrzés:$30(6 - 7) - 56(5 - 6) = 30 \cdot (-1) - 56 \cdot (-1) = -30 + 56 = 26$, tehát a megoldás helyes.

**12.11.** Jelölje $f$ a fiú 10 évvel ezelőtti korát! Az apa 10 évvel ezelőtti kora $6f$. 10 év múlva az előbb említett időpontnál 20 évvel lesz később, tehát 10 év múlva a fiú kora $f+20$, az apáé $6f+20$. Az apa ekkor kétszer olyan idős, mint a fia, azaz $2(f+20) = 6f+20$. Ebből $2f+40 = 6f+20$, $20 = 4f$, azaz $f = 5$.

A fiú tíz évvel ezelőtt 5 éves volt, apja pedig 30. Most a fiú 15 éves apja pedig 40 éves.

Ellenőrzés: 10 év múlva a fiú 25 éves lesz, apja pedig 50, tehát az apa tényleg kétszer olyan idős lesz, mint a fia.

**12.12.** Ültessük át a verset a matematika nyelvére:

| magyar nyelven | az algebra nyelvén |
|---|---|
| Itt nyugszik Diophantosz. Mily csoda!<br>Sírköve is még nagy tudományával hírdeti élte korát: | $d$ |
| Egyhatodát gyermekkorának rendelte az isten. | $\frac{d}{6}$ |
| Orcájára pehelyt tett feleannyi után, | $\frac{d}{6}+\frac{d}{12}$ |
| Eltelt egyheted és fáklyát gyújtott lakodalmán, | $\frac{d}{6}+\frac{d}{12}+\frac{d}{7}$ |
| Múlik öt év, s fiúval áldja meg ekkor e nászt. | $\frac{d}{6}+\frac{d}{12}+\frac{d}{7}+5$ |
| Jaj, későn született, jaj, vézna fiú!<br>Fele annyit éltél, mint apád, s máris a máglya emészt. | $\frac{d}{6}+\frac{d}{12}+\frac{d}{7}+5+\frac{d}{2}$ |
| Négy évig gyászát tudománnyal csillapította. | $\frac{d}{6}+\frac{d}{12}+\frac{d}{7}+5+\frac{d}{2}+4$ |
| S élete hosszát ím: – látod a bölcs sorokon. | $\frac{d}{6}+\frac{d}{12}+\frac{d}{7}+5+\frac{d}{2}+4=d$ |

**12.13.**

**1. megoldás.** Jelölje az 50%-os alkoholból szükséges mennyiséget literben $x$! A (tiszta) alkohol mennyisége

– 10 liter 20%-os alkoholban: 2 liter;

– $x$ liter 50%-os alkoholban $0{,}5x$ liter;

– így a keverékben $2+0{,}5x$ liter.

Másrészt a keverék teljes mennyisége $(10+x)$ liter, ha ez 30%-os, akkor benne az alkohol mennyisége $0{,}3(10+x)$ liter. A kétféle számolás ugyanazt kell adja, azaz $2+0{,}5x = 0{,}3(10+x)$, $2+0{,}5x = 3+0{,}3x$, $\quad 0{,}2x = 1$, $\quad x = 5$. Tehát 5 liter 50%-os alkoholt öntsünk a 20%-os alkoholhoz.

Ellenőrzés: 10 liter 20%-os alkohol és 5 liter 50%-os alkohol folyadéktartalma összesen $10+$ $+5 = 15$ liter, alkoholtartalma pedig $0{,}2\cdot 10+0{,}5\cdot 5 = 2+2{,}5 = 4{,}5$ liter. $\frac{4{,}5}{15} = \frac{30}{100}$, így jó a megoldás.

**2. megoldás.** A 20%-hoz az előállítandó 30% kétszer olyan közel van, mint az 50%-hoz, így kétszer annyi 20%-os alkohol kell a keverékhez, mint 50%-os. Az 50%-os alkoholból tehát 2,5 literre van szükség.

A gondolatmenetet még jobban megérthetjük, ha visszafelé gondolkodunk. Képzeljük el, hogy 30%-os alkoholból 20%-os és 50%-os alkoholt készítünk. Két egységnyi 20%-os alkohol készítése közben tudnánk annyit spórolni alkoholból, hogy tudjunk egy egységnyi 50%-os alkoholt gyártani.

**12.14.** Legyen a fiúk és a lányok száma – a „kihívás" előtt – $3x$ illetve $4x$. Később a számuk $3x-3$ illetve $4x-5$ lett, tehát $\frac{3x-3}{4x-5} = \frac{4}{5}$. Ebből (közös nevezőre hozás majd) átszorzás után $5(3x-3) = 4(4x-5)$, $\quad 15x-15 = 16x-20$, $\quad x = 5$. Tehát 15 fiú és 20 lány jár az osztályba.

Ellenőrzés: kihívás után a fiúk száma 12, a lányoké 15, ezek aránya valóban 4 : 5.

**12.32.** Ha csak az egyik csap van nyitva, $x$ perc alatt lesz tele a medence, ha csak a másik, $y$ perc alatt.

| | | |
|---|---|---|
| A medence ekkora részét (hányadát) tölti meg az | az első csap: | $\frac{1}{x}$ |
| | a második csap: | $\frac{1}{y}$ |
| | a kettő együtt: | |
| 30 perc alatt ennyi töltenek meg együtt: | | |
| 40 perc alatt ennyi tölt meg a második: | | |

Ezután két egyenletet írható fel! Ezekből először $\frac{1}{x}$ és $\frac{1}{y}$ értékét érdemes meghatározni.

**12.42.**

**egyenlettel:**
$t = 1 + 0{,}5 \cdot t$
Vegyünk le a mérleg mindkét serpenyőjéről egy fél téglát!
$0{,}5t = 1 \Rightarrow t = 2$
A tégla tömege 2 kg.

**mérleggel:**
12.1. ábra
12.2. ábra

Ellenőrizzük,


12.42M.1. ábra.


12.42M.2. ábra.

jó-e a megoldás!

**12.45. a)** Írjuk fel a matematika nyelvén!

| | |
|---|---|
| A bal zsebemben levő pénz: | $b$ |
| A jobb zsebemben levő pénz: | $b + 39$ |
| A jobb zsebemben levő pénz fele: | $\frac{b+39}{2}$ |
| Az áttétel után ennyi van a bal zsebemben: | $b + \frac{b+39}{2}$ |
| ennyi a jobban: | $\frac{b+39}{2}$ |
| A bal zsebemben kétszer annyi van: | $b + \frac{b+39}{2} = 2 \cdot \frac{b+39}{2}$ |
| Az egyenletből: | $b = 39$. |

Tehát a bal zsebben 39, a jobban pedig 78 Ft volt eredetileg. Helyettesítsünk vissza a szövegbe!

| | bal zseb | jobb zseb |
|---|---|---|
| eredetileg: | 39 | 78 |
| áttétel után: | $39 + 39 = 78$ | 39 |

Most tényleg kétszer annyi van a bal zsebben, mint a jobban. Az eredmény helyes.

**b)** $b = 77$.

**c)** Dolgozhatunk egyenlettel, de megoldhatjuk a feladatot okoskodással is.

**d)** Az egyenlet most $b + \frac{b+39}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{b+39}{2}$. Ebből rendezéssel a $0 = 39$ egyenlethez, azaz ellentmondáshoz jutunk. A feladatnak nincs megoldása.

**12.47.** Mindkét esetben szt kell elérnünk, hogy kiessen az egyenletből az $x$ ismeretlen. Az eredeti egyenletben nem esik ki $x$, a bal oldalon $(3-2)=1$ együtthatóval szerepel, a jobb oldalon pedig 5 az együtthatója. Ahhoz, hogy a két oldalon egyenlő legyen az együttható a 3-ast vagy az 5-öst kell változtatnunk, az $(x-1)$ előtt álló 2-est hiába cseréljük másik pozitív számra. A 3-as helyébe 7-est kell írnunk, vagy az 5-ös helyébe 1-est. Az előbbi esetben a $7(x+2)-2(x-1)=5x+16$ egyenlethez jutunk, amely azonosság, az utóbbi esetben pedig a $3(x+2)-2(x-1)=x+16$ egyenletet kapjuk, amely ellentmondáshoz, a $8=16$ egyenlethez vezet.

**a)** Cseréljük az 5-öst 1-esre! **b)** Cseréljük a 3-ast 7-esre!

**12.60.** Gondolkozzunk visszafelé! Jelölje a végén kapott csupa egyenlő számot $s$. Az eredeti négy szám rendre így írható:

$s-4$; $s+4$; $\frac{s}{4}$; $4s$.

Összegüknek 100-nak kell lennie:

$$100=(s-4)+(s+4)+\frac{s}{4}+4s.$$

Ebből $100=6s+\frac{s}{4}$, $400=24s+s$, $400=25s$, $16=s$. A négy eredeti szám tehát

12; 20; 4; 64.

Ezekre valóban teljesül a feladat állítása.

**12.64.** A feladatban négy mozgási folyamatot különböztethetünk meg.

- A „bizonyos” $s$ kilométernyi távolság szokásos megtétele $v$ sebességgel $t=5$ óra alatt szokott megtörténni. $v=s/5$ km/óra.
- Az adott esetben az út $s_1=\frac{1}{3}s$ részét a szokásos $v_1=v$ sebességgel tette meg a kerékpáros, ez nyilván a máskor szokott 5 óra harmada, tehát $t_1=\frac{5}{3}$ óra alatt történt.
- Ezután a kerékpáros $t_2=\frac{2}{3}$ órán át állt ($s_2=0$, $v_2=0$).
- Végül a kerékpáros a magmaradt $s_3$ távot $t_3$ óra alatt, $v_3=v+4$ km/óra sebességgel ettte meg.

A kerékpáros a teljes távot megteszi, így $s_1+s_2+s_3=s$, azaz $s_3=s-s_1-s_2=s-\frac{1}{3}s-{}$ $-0=\frac{2}{3}s$. Behozza lemaradását, tehát $t=t_1+t_2+t_3$, azaz $t_3=t-t_1-t_2=5-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ óra. Ebből a kerékpáros sebessége az utolsó periódusban $v_3=\left(\frac{2}{3}s\right)/\frac{8}{3}=\frac{s}{4}$ km/óra. Másrészt $v_3=v+4$, azaz $\frac{s}{4}=\frac{s}{5}+4$. Innen $\frac{5s}{20}=\frac{4s}{20}+\frac{80}{20}$, azaz $5s=4s+80$, tehát $s=80$ km. Tehát a teljes megteendő út 80 km, az eredeti sebesség pedig $v=\frac{80}{5}=16$ km/óra. Ezek reális értékek.

**12.65.** Jelölje a $BC$ távolságot km-ben $s$, a motoros sebességét km/h-ban $v_m$.

| folyamat | idő (h) | sebesség (km/h) | út (km) |
|---|---|---|---|
| 10 óráig a motoros | 2 | $v_m$ | $2v_m$ |
| 10 óráig az autó | 3 | $v_m+10$ | $3(v_m+10)$ |
| 12 óráig a motoros | 4 | $v_m$ | $4v_m$ |
| 10 óráig az autó | 5 | $v_m+10$ | $5(v_m+10)$ |

A 10 óráig összesen megtett út:

$$2v_m+3(v_m+10)=0{,}5s. \qquad (1)$$

A 12 óráig összesen megtett út:

$$4v_m+5(v_m+10)=s-60. \qquad (2)$$

Az 1. egyenlet jobb oldalának duplája 60-nal tér el a 2. egyenlet jobb oldalának duplájától, tehát

$$2 \cdot (2v_m + 3(v_m + 10)) - 60 = 4v_m + 5(v_m + 10).$$

Ebből $2 \cdot (5v_m + 30) - 60 = 9v_m + 50$, azaz $10v_m = 9v_m + 50$, így $v_m = 50$, az autó sebessége 60 km/h és az 1. egyenletből $s = BC = 560$, tehát a két város távolsága 560 km.

Ellenőrzés: 10 óráig a motoros 100 km-t, az autós $3 \cdot 60 = 180$ km-t tesznek meg, távolságuk így $560 - 100 - 180 = 280$ km, ami a $BC$ távolság fele. 12 óráig a motoros 200 km-t, az autós 300 km-t tesz meg, valóban csak 60 km marad köztük a távolság.

**12.67.** Jelölje az autóbusz sebességét $v_A$, a kerékpárosét $v_K$. Az autóbuszból nézve a kerékpáros $v_A + v_K$ sebességgel közelít és a 9 km-es távolságot, 10 perc, azaz $\frac{1}{6}$ óra alatt teszi meg. Tehát $v_A + v_K = 9/\frac{1}{6} = 54$ km/óra.

20 perc, azaz $\frac{1}{3}$ óra alatt az autóbusz épp annyival tesz meg többet az $AB$ távolságnál, amennyit a kerékpáros összesen megtesz, azaz megtett útjuk különbsége 9 km: $\frac{1}{3}v_A - \frac{1}{3}v_K = 9$, $v_A - v_K = 27$, $v_A - (54 - v_A) = 27$, $v_A - 54 + v_A = 27$, $2v_A = 81$, $v_A = 40{,}5$ km/óra. Ebből a biciklis sebessége $v_K = 54 - v_A = 13{,}5$ km/óra. Mindkét eredmény reális.

**12.93. a)** $\frac{12x}{3} - \frac{2x+7}{3} = \frac{300}{3}$, $\frac{12x-2x-7}{3} = \frac{300}{3}$, $\frac{10x-7}{3} = \frac{300}{3}$, $10x - 7 = 300$, $x = 30{,}7$.

Ellenőrzés: $4 \cdot 30{,}7 - \frac{2\cdot 30{,}7+7}{3} = 122{,}8 - \frac{68{,}4}{3} = 122{,}8 - 22{,}8 = 100$.

**b)** $\frac{5x}{10} - \frac{2(3x-1)}{10} = \frac{40}{10}$, $\frac{5x}{10} - \frac{6x-2}{10} = \frac{40}{10}$, $\frac{5x-6x+2}{10} = \frac{40}{10}$, $-x + 2 = 40$, $-x = 38$, $x = -38$.

Ellenőrzés: $\frac{-38}{2} - \frac{3\cdot(-38)-1}{5} = -19 - \frac{-114-1}{5} = -19 - \frac{-115}{5} = -19 - (-23) = -19 + 23 = 4$.

**12.103.**

Egyenletnek van-e megoldása

<table>
<tr><td colspan="2">Ki ('Add meg az $ax + b = 0$ alakú egyenletben $a$ értékét')</td></tr>
<tr><td colspan="2">Be ($a$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ki ('Add meg az $ax + b = 0$ alakú egyenletben $b$ értékét')</td></tr>
<tr><td colspan="2">Be ($b$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a = 0$ és $b <> 0$</td></tr>
<tr><td>Ki ('Nincs megoldás')</td><td>Ki ('Van megoldás')</td></tr>
</table>

**12.104.**

Lin. egyenlet megoldása

<table>
<tr><td colspan="3">Ki ('Add meg az $ax + b = 0$ alakú egyenletben $a$ értékét')</td></tr>
<tr><td colspan="3">Be ($a$)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ki ('Add meg az $ax + b = 0$ alakú egyenletben $b$ értékét')</td></tr>
<tr><td colspan="3">Be ($b$)</td></tr>
<tr><td colspan="3">$a = 0$ és $b <> 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ki ('Nincs megoldás')</td><td colspan="2">$a \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$x := -b/a$</td><td rowspan="2">Ki ('Minden szám megoldás')</td></tr>
<tr><td>Ki ('A megoldás', $x$)</td></tr>
</table>

# 13. Egyenletek I. (teszt)

**13.1. C**

A, B, D, E → 12.5.

**13.2. C**

$x = 398$ $y = 397$ $z = 399$ $u = 396$ $v = 395$

A, B, D, E → 12.1, 8.2, 8.6.

**13.3. D**

A, B, C, E → 12.10, 8.7.

**13.4. B**

$x = -2$.

A, C, D, E → 12.10, 8.7.

**13.5. B**

A bal zsebemben az átrakás előtt a pénz mennyisége forintban $0{,}5j$, az átrakás után pedig $0{,}5j + 16$. A jobb zsebemben a két megfelelő érték $j$, ill. $j - 16$.

A, C, D, E → 12.43, 12.45.

**13.6. D**

$x$-nek kidobni a harmadrészét, ugyanazt jelenti, mint a kétharmad részét képezni. A kétharmad részből az egész részt $\frac{3}{2}$-del való szorzással kapjuk.

A, B, C, E → 12.2, 12.60.

**13.7. A**

**I.** Az $a$ alapra $a + (a + 8) + (a + 8) = 31$, azaz $3a + 16 = 31$, $a = 5$.

**II.** Ha a gyerek éveinek száma, $g$, akkor anyjáé $g + 26$, apjáé $g + 36$, így összesen $3g + 62 = 77$ évesek. Ebből $g = 5$.

**III.** Ha az első szög $\alpha$, akkor a második $\alpha + 19°$, a harmadik $\alpha - 70°$. A háromszög szögeinek összege: $180° = 3\alpha - 51°$, amiből $\alpha = 77°$, így a háromszög legkisebb szöge $7°$.

B, C, D, E → 12.7.

**13.8. C**

Legyen jelenlegi korom $k$. Három év múlva $k + 3$ éves leszek, tehát Péter mostani kora $2(k + 3)$. Hat évvel ezelőtt $k - 6$ éves voltam, amiből Péter jelenlegi kora $3(k - 6)$. Péter korát kétféleképpen is felírtuk:

$$2(k + 3) = 3(k - 6) \Rightarrow 2k + 6 = 3k - 18 \Rightarrow 24 = k.$$

Tehát 24 éves az, akitől idézett a feladat. Péter 54 éves, három év múlva valóban feleannyi idős lesz (27), hat éve pedig harmadannyi (18) volt a szóbanforgó személy.

A, B, D, E → 12.19, 12.20.

**13.9. B**

Gondolkozzunk visszafelé! Jelölje a végén kapott csupa egyenlő számot $s$ (ezt keressük)! Az eredeti négy szám rendre így írható:

$\frac{s}{3}$; $2s$; $s + 6$; $s - 10$.

Összegük: $100 = \frac{s}{3} + 2s + (s + 6) + (s - 10)$, azaz $100 = 4s + \frac{s}{3} - 4$, $104 = 4s + \frac{s}{3}$, $312 = 12s + s$, $312 = 13s$, $24 = s$. A végén kapott szám tehát 24.

Ellenőrzés: a négy eredeti szám

8; 48; 30; 14,

ezek összege valóban 100 és teljesül rájuk a feladatban megfogalmazott feltétel.

A, C, D, E $\to$ 12.60.

**13.10. C**

Jelölje a 60%-os alkoholból szükséges mennyiséget literben $x$. Mivel a teljes mennyiség 10 liter, így a 80%-os alkohol mennyisége $(10 - x)$ liter. Vessük össze a tiszta alkohol mennyiségét:

$$0{,}6x + 0{,}8(10 - x) = 7{,}5.$$

Ebből $-0{,}2x + 8 = 7{,}5$, azaz $0{,}5 = 0{,}2x$, tehát $2{,}5 = x$. Tehát a 60%-os alkoholból 2,5 litert, a 80%-os alkoholból 7,5 litert kell ahhoz venni, hogy keverékük 75%-os alkohol legyen.

Erre az eredményre másképp is rájöhetünk. A 75% háromszor olyan közel van a 80%-hoz, mint a 60%-hoz, ezért a 80%-os alkoholból háromszor annyi kell, mint a 60%-osból.

A kérdezett különbség tehát 5 liter.

A, B, D, E $\to$ 12.13, 12.36.

**13.11. C**

A vizsgált szám a 45.

A, B, D, E $\to$ 12.22, 12.23.

**13.12. B**

Jelölje $t$ a keresett időpontot (órában). Péter $(t - 8)$, Pál $(t - 10)$ órán át ment, a Péter által megtett út $20 \cdot (t - 8)$ km, míg Pál útja $55 \cdot (t - 10)$ km. Pál kétszer akkora utat tett meg, mint Péter, azaz

$$2 \cdot (20 \cdot (t - 8)) = 55 \cdot (t - 10).$$

Ebből $40t - 320 = 55t - 550$, azaz $230 = 15t$, $t = \frac{230}{15} = \frac{46}{3} = 15 + \frac{1}{3}$ óra. Tehát 15 óra 20 perckor lesz Pál kétszer olyan messze $A$-tól, mint Péter.

A, C, D, E $\to$ 12.64, 12.65.

**13.13. B**

Jelölje az $A$-ból ill. a $B$-ből induló futó sebességét méter/másodpercben (m/s) $v_A$ ill.$v_B$. Feltételezzük, hogy mikor egy irányban haladnak, akkor az $A$-ból induló $B$-felé fut, tehát most $v_B < v_A$.

Mikor egymás felé mennek, akkor $B$-ből induló futó nézőpontjából az $A$-ból induló futó $v_A + v_B$ sebességgel halad és a 200 m-es távot 20 s alatt győzi le, tehát $v_A + v_B = 10$ m/s. Mikor azonos irányban mennek,akkor a $B$-ből induló futó nézőpontjából az $A$-ból induló futó $v_A - v_B$ sebességgel közelít felé és a 200 m-es távot 80 s alatt győzi le, tehát $v_A - v_B = 2{,}5$ m/s. Ebből $v_A - (10 - v_A) = 2{,}5$, $v_A - 10 + v_A = 2{,}5$, $2v_A = 12{,}5$, $v_A = 6{,}25$ m/s, $v_B = 3{,}75$ m/s.

A, C, D, E $\to$ 12.25, 12.67.

**13.14. E**

Helyettesítsünk az egyenlet mindkét oldalán $x$ helyére 1-et! A bal oldalon $2(6 - 3) + 5(4 - 1) = 21$-et, a jobbon $11 + 7 = 18$-at kapunk. Teljesülni fog az egyenlőség, ha a 2-est 1-esre vagy az 5-öst 4-esre vagy a 11-est 14-re vagy a 7-est 10-re cseréljük.

A, B, C, D $\to$ 12.3, 12.47.

**13.15. A**

Ha a 2-est 3-asra cseréljük, akkor a $3(6 - 3x) + 5(4x - 1) = 11x + 7$ egyenlethez jutunk, amelyből a zárójelek felbontása után kiesik az $x$ és a $3 \cdot 6 + 5 \cdot (-1) = 7$ egyenlethez, azaz a $13 = 7$ ellentmondáshoz jutunk.

B, C, D, E $\to$ 12.47.

**13.16. A**

Ha a 11-est 14-asra cseréljük, akkor a $2(6-3x)+5(4x-1)=14x+7$ egyenlethez jutunk, amelyből a zárójelek felbontása után kiesik az $x$ és a $2\cdot 6+5\cdot(-1)=7$ egyenlethez, azaz a $7=7$ azonossághoz jutunk.

B, C, D, E $\to$ 12.47.

**13.17. A**

$\frac{2x}{6}-\frac{3(5x-2)}{6}=\frac{6(20+x)}{6}$, $\quad \frac{2x}{6}-\frac{15x-6}{6}=\frac{120+6x}{6}$, $\quad \frac{2x-15x+6}{6}=\frac{120+6x}{6}$, $\quad 2x-15x+6=$
$=120+6x$,

$-13x+6=120+6x$, $\quad -19x=114$, $\quad x=-6$.

B, C, D, E $\to$ 12.93.

## 14. Egyenlőtlenségek

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

## 15. Nevezetes azonosságok

**15.10.** Az 5 négyzetéhez hozzáadjuk a második jegyet, s a kapott szám után írjuk a második jegy négyzetét (ha a második jegy négyzete egyjegyű szám, akkor ez elé még egy 0-t írunk!). Például:

$$57^2=3249, \qquad 51^2=2601$$

## 16. Nevezetes azonosságok (teszt)

**16.1. D**

$\frac{4x-6y}{6x-9y}\equiv\frac{2(2x-3y)}{3(2x-3y)}\equiv\frac{2}{3}$;

$\frac{k^2+1}{(k+1)^2}$ nem állandó, pl. $k=0$-ra értéke 1, míg $k=1$-re $\frac{1}{2}$.

$\frac{a^2-25}{a+5}-a\equiv\frac{(a-5)(a+5)}{a+5}-a\equiv a-5-a\equiv -5$;

$(3x^2-4)^2+24x^2-9x^4\equiv(9x^4-24x^2+16)+24x^2-9x^4\equiv 16.$;

**16.2. B**

Az utolsó előtti egyenlet „$-2x-5$”-tel, az összes többi „$2x-5$”-tel lesz azonosság.

**16.3. C**

Ha $a=20072007$, akkor a vizsgált kifejezés: $(a-2)(a+4)-a^2=a^2+2a-8-a^2=2a-8$.

A, B, D, E $\to$ 15.20.

**16.4. A**

$(x-y)^2=(y-x)^2=x^2-2xy+y^2=(x+y)^2-4xy=-(x-y)(y-x)=\frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x-y}$.

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2=\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=(-x-y)(y-x)$.

**16.5. C**

$\left(5+\frac{1}{5}\right)^2=5^2+2\cdot 5\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2=25+2+\frac{1}{25}=27\frac{1}{25}$.

A, B, D, E $\to$ 15.24.

**16.6. E**
$99\,997^2 = (100\,000 - 3)^2 = 10\,000\,000\,000 - 2 \cdot 3 \cdot 100\,000 + 9 = 9\,999\,400\,009$
A, B, C, D → 15.24.

**16.7. D**
$2008^2 - 2007^2 = (2008 - 2007)(2008 + 2007) = 1 \cdot 4015 = 4015.$
A, B, C, E → 15.34.

**16.8. D**
$510^2 - 503^2 = (510 - 503) \cdot (510 + 503) = 7 \cdot 1013$ Az 1013 szám osztó, és a legnagyobb, mert nagyobb osztó osztópárjai csak a 2, 3, 4, 5, 6 számok közül kerülhetnének ki, de azok nem osztók, mert mindegyikük osztja $510^2$-t, de $503^2$-t nem.
A, B, C, E → 15.31, 15.25.

**16.9. D**
$(p - 2q)^2 = p^2 - 4pq + 4q^2$; $9a^2 - 4b^2 = (3a - 2b)(3a + 2b)$; $(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + {}$ ${}+ 2xy - 2yz - 2zx$.

**16.10. D**
Három lehetőség van: a 2-est és a 4-est változtatjuk és mást nem vagy a két 1-est változtatjuk és mást nem vagy csak a 12-est változtatjuk. Mindegyikre egy-egy lehetőség van:

$$(6a + 1)^2 = 36a^2 + 4a + 1; \qquad (2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9; \qquad (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1.$$

Ha negatív számra is cserélhetünk, akkor jó még a $(-2a + 1)^2 = 4a^2 + (-4)a + 1$ azonosság is.
A, B, C, E → 15.16.

# 17. Egyenletek II.

**17.2.** Lehet-e a betűk helyére számokat írni úgy, hogy a megadott két állítás közül pontosan egy legyen igaz?
**a)** Igen, pl. $x = 0$, $y = 10$ esetén csak az elő egyenlet teljesül, míg $x = 1$, $y = 2$ esetén csak a második.
**b)** Igen, pl. $x = y = 1$ esetén csak az első egyenlet teljesül, míg $x = y = 4$ esetén csak a második.
**c)** Igen, pl. $x = 1$, $y = 2$ esetén csak az első egyenlet teljesül, míg $x = 2$, $y = \sqrt{5}$ esetén csak a második.
**d)** Igen, $x + y = 0$ esetén csak a második egyenlet teljesül, az első nem. A fordított esetre most nincs példa, ha az első egyenlet teljesül, akkor a második is. Valóban, az első egyenletet $(x + y)$-nal szorozzuk, akkor a másodikat kapjuk.
**e)** Igen, ha $x + 1 = -y \neq y$, akkor az első egyenlet teljesül, a második nem.
A második egyenlet rendezve: $y = x + 1$. Négyzetre emelés után az első egyenlethez jutunk. Tehát ha teljesül a második egyenlet, akkor az első is. De, ha a második egyenlet helyett a $-y = x + 1$ egyenlet teljesül, abból is következik az első egyenlet (emeljünk négyzetre).

# 18. Egyenletek II. (teszt)

**18.1. C**
**a)** Nincs: mindkét egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $x = y$. A második egyenlet ugyanis így írható: $(x - y)^2 = 0$.
**b)** Van: ha $a + b = -2$, akkor $4 = (-2)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

**c)** Nincs: ha az első egyenletet $\frac{5}{2}$-del szorozzuk és rendezünk, akkor a második egyenletet kapjuk.
**d)** Van: pl. $u = 0$, $v = 1$.
A, B, D, E $\to$ 17.2.

**18.2. C**

**18.3. D**
Vegyük észre, hogy az $(x-2)$ szorzótényező mindkét oldalon szerepel. Ha $x = 2$, akkor mind a két oldal értéke 0, teljesül az egyenlőség. Ha $x \neq 2$, akkor leoszthatunk a $0 \neq (x-2)$ tényezővel és a $3x + 1 = x - 1$ egyenlethez jutunk. Ebből $x = -1$ adódik, ami szintén megoldás.
A, B, C, E $\to$ 17.9.

**18.4. B**
A, C, D, E $\to$ 17.13.

**18.5. A**
B, C, D, E $\to$ 17.16, 17.38.

**18.6. B**
A, C, D, E $\to$ 17.24.

**18.7. D**
Egy szorzat értéke pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Az utolsó tényező nem lehet 0, a többi rendre $x = 0$, $x = 1$ és $x = -1$ esetén zérus.

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2.$$

Ez a tényező pontosan akkor nulla, ha $x = 0$ vagy $x = 3$.
Az eredeti egyenlet gyökei: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ és $x = 3$.
A, B, C, E $\to$ 17.27.

**18.8. B**
Helyettesítsünk $x$ helyébe 2-t! $q$ értéke egyértelműen adódik.
A, C, D, E $\to$ 17.29.

**18.9. B**

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 5n, \qquad n \cdot (n-3) = 10n.$$

$n = 0$ nem értelmes a feladatban, így leoszthatunk $n$-nel: $n - 3 = 10$, azaz $n = 13$. Egy szab. tizenháromszögnek 65 átlója van és 13 oldala, tehát ez valóban megoldás.
A, C, D, E $\to$ 17.30.

**18.10. C**

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 2{,}5n + 90, \qquad n^2 - 3n = 5n + 180, \qquad n^2 - 8n = 180,$$
$$n^2 - 8n + 16 = 196, \qquad (n-4)^2 = 14^2, \qquad n - 4 = \pm 14 \qquad n = 18, \text{ vagy } n = -10.$$

Az egyetlen értelmes megoldás az $n = 18$. A szabályos 18-szögnek 135 átlója és 18 oldala van, így teljesül rá a feladat feltétele: $2{,}5 \cdot 18 + 90 = 45 + 90 = 135$.
A, B, D, E $\to$ 17.30, 17.21.

## 19. Egyenletrendszerek

**19.9.**

**1. megoldás.** Tekintsük az $m = 0$ és $m = 1$ eseteket!

$$y = 1, \qquad y = x - 1.$$

A két eset egyszerre csak az $x = 2$, $y = 1$ számpárra teljesül. Próbáljuk ki ezt a számpárt az általános esetben, helyettesítsünk be az eredeti paraméteres egyenletbe!

$$1 = m \cdot 2 - 2m + 1.$$

Azonosságot kaptunk, tehát a $(2; 1)$ számpár megfelel és más számpár nem.

**2. megoldás.** Az egyenlet így is írható:

$$y = m(x - 2) + 1.$$

Olyan értéket kell $x$ helyébe írnunk, hogy $y$-ra állandó – tehát $m$-től független – értéket kapjunk. Ez pontosan akkor következik be, ha $m$ szorzója zérus, azaz $x = 2$. Ekkor $y = 1$.

**19.19.**

**1. megoldás.** Először megszabadulunk a zárójelektől, és rendezzük az egyenleteket!

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3y &= 2 - y \\ 2x - 2y &= 7 + y \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Innen több úton is haladhatunk.

Beszorzással elérjük, hogy az egyik ismeretlen együtthatója a két egyenletben megegyezzen. Az első egyenlet mindkét oldalát 2-vel, a második egyenlet mindkét oldalát 3-mal szorozzuk:

$$\left.\begin{aligned} 6x + 8y &= 4 \\ 6x - 9y &= 21 \end{aligned}\right\}$$

A második egyenletet kivonjuk az elsőből, ekkor az $x$-es tagok kiesnek: $17y = -17$, innen $y = -1$.

Ezután már $x$-et könnyen meghatározhatjuk. $2x - 3y = 7$-be helyettesítjük $y = -1$-et: $2x + 3 = 7$, innen $x = 2$.

**2. megoldás.** Elindulhatunk úgy is, hogy ne az $x$, hanem az $y$ essen ki. Próbáljuk így is megoldani a feladatot!

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Fejezzük ki akármelyik ismeretlent akármelyik egyenletből, és írjuk be a másik egyenletbe. Itt célszerű $x$-et a második egyenletből kifejezni, mert itt van a legkisebb együttható:

$2x = 7 + 3y$, innen $x = \frac{7+3y}{2}$, ezt az első egyenletbe helyettesítve: $3 \cdot \frac{7+3y}{2} + 4y = 2$, innen $x = 2$, $y = -1$.

**3. megoldás.** $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\}$

Fejezzük ki az egyik változót az egyik egyenletből, és helyettesítsünk a másikba!

az elsőből: $y = \frac{2-3x}{4}$.

Így a másodikban: $2x - 3\frac{2-3x}{4} = 7$. Szorozzunk 4-gyel:

$8x - 3 \cdot (2 - 3x) = 28 \qquad \Rightarrow \qquad 8x - 6 + 9x = 28$,

amiből $x = 2$, és a korábban $y$-ra felírt formulából $y = \frac{2-3\cdot 2}{4} = -1$.

**4. megoldás.** $\left.\begin{aligned} 3x+4y &= 2 \\ 2x-3y &= 7 \end{aligned}\right\}$

Fejezzük ki valamelyik ismeretlent mindkét egyenletből, és írjuk fel, hogy ez a két kifejezés egyenlő:

az elsőből: $y = \frac{2-3x}{4}$
a másodikból: $y = \frac{2x-7}{3}$
$\frac{2-3x}{4} = \frac{2x-7}{3}$, 12-vel szorozva:
$3 \cdot (2-3x) = 4 \cdot (2x-7)$, innen $x = 2$, $y = -1$.

## 20. Egyenletrendszerek (teszt)

**20.1. C**
A, B, D, E → 19.3.

**20.2. B**
$x = 3$, $y = 0{,}5$.
A, C, D, E → 19.11.

**20.3. A**
B, C, D, E → 19.11.

**20.4. C**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{5} - \frac{3-5y}{4} &= 3 \\ \frac{2x+1}{2} - \frac{y+3}{4} &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} (4x-8)-(15-25y) &= 60 \\ \frac{4x+2}{2} - (y+3) &= 4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 4x+25y &= 83 \\ 4x-y &= 5 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 4x+25(4x-5) &= 83 \\ 4x-5 &= y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2, \\ y &= 3. \end{aligned}\right\}$$

A, B, D, E → 19.20.

**20.5. A** $x = 7$, $y = 0$, $z = 3$.
B, C, D, E → 19.16.

**20.6. B**

$$\left.\begin{aligned} x^2+2x+1-\frac{21}{y} &= 1 \\ x^2+2x+1+\frac{15}{y} &= 10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} (x+1)^2-\frac{21}{y} &= 1 \\ (x+1)^2+\frac{15}{y} &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

Az $(x+1)^2 = u$, $\frac{3}{y} = v$ helyettesítéssel

$$\left.\begin{aligned} u-7v &= 1 \\ u+5v &= 10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} v &= \tfrac{3}{4} \\ u &= \tfrac{25}{4} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= 4 \\ |x+1| &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y &= 4 \\ x &= \pm\tfrac{5}{2}-1 \end{aligned}\right\}.$$

Tehát $x+y$ minimuma $4 - \frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.
A, C, D, E → 19.17.

**20.7. D**

Ha a hajó sebessége állóvízben $v_h$, akkor a folyásirányban $v_h+v_f$, folyással ellenkező irányban $v_h - v_f$ sebességgel halad. A $B$-ből $C$-be és $C$-ből $B$-be egyaránt 30 km-t tesz meg, tehát az oda-vissza út menetideje órában összesen:

$$\frac{30}{v_h+v_f}+\frac{30}{v_h-v_f}=3.$$

A $B$-ből $A$-ba, majd onnan $C$-be menő út menetideje órában:

$$\frac{25}{v_h-v_f}+\frac{55}{v_h+v_f}=3{,}5.$$

Az $\frac{5}{v_h+v_f}=a$, $\frac{5}{v_h-v_f}=B$ segédváltozókkal egyenletrendszerünk:

$$6a+6b=3, \quad 11a+5b=3{,}5.$$

Ebből $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}$, azaz $v_h+v_f=30$, $v_h-v_f=15$, amiből $v_h=22{,}5$, $v_f=7{,}5$.

A, B, C, E → 19.39, 19.40.

**20.8. C** Egy óra alatt két két csap a medencének rendre $\frac{1}{4}$-ed, $\frac{1}{5}$-öd, $\frac{1}{6}$-od részét tölti fel. Ha mindegyik csapból kettő lenne, akkor egy óra alatt a medence ekkora része lenne megtöltve:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{15+12+10}{60}=\frac{37}{60}.$$

A három csap egy óra alatt a medence $\frac{37}{120}$-ad részét tölti meg, a teljes medencét tehát $\frac{120}{37}$ óra azaz $\frac{120\cdot 60}{37}\approx 194{,}59$ perc alatt töltik meg együtt.

A, B, D, E → 19.45.

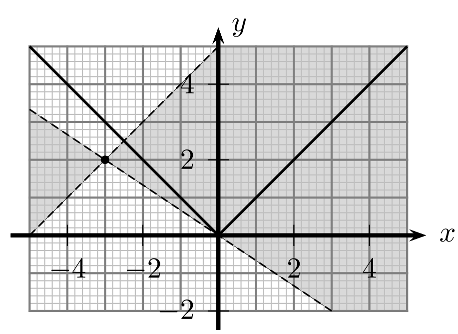
**20.9. D**

A, B, C, E → 19.9.

**20.10. B**

Két ilyen érték van: $-\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}$.

A 20.1. ábráról leolvasható a feladat megoldása. Az $y=mx+3m-2$ egyenlet a $(-3;2)$ ponton átmenő (nem függőleges) egyenes egyenlete. Ennek a szürke tartományba kell esnie, hogy két helyen messe az abszolútérték függvény grafikonját. Tehát pontosan akkor van két megoldás, ha $\frac{-2}{3}<m<1$.




20.10M.1. ábra.

A, C, D, E → 19.8.

## 21. Négyzetgyök

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

## 22. Négyzetgyök (teszt)

**22.1. E**
Mind az öt érték egyenlő.
A, B, C, D → 21.4, 21.15.

**22.2. E**
A, B, C, D → 21.15.

**22.3. C**
A, B, D, E → 21.4, 21.15.

**22.4. D**
$V = X = Y = Z = 40 \neq U$.
A, B, C, E → 21.16.

## 23. Vegyes feladatok

**23.17.** Meg lehet adni, pl. ha az egyik átló mindhárom mezőjébe 1-est írunk, akkor a 23.1. ábra két befejezést is mutat.

**a)**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**b)**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 1 |

23.17M.1. ábra.

**23.22. a)** A kilenc szám összege 45. Az egyes oldalakon a számok összege 20. Ha összeadjuk a három „oldalösszeget", akkor 60-at kapunk. A 45 és 60 közötti differenciát a három csúcson található szám okozza, hiszen azokat a 45-ben egyszer-egyszer, a 60-ban kétszer-kétszer számoltuk. Tehát a csúcsokon található három szám összege 15. Ezt felismerve sok megoldást találhatunk. Egy példa (az egyes oldalakra kerülő számok):

$$(4; 2; 9; 5), \qquad (5; 1; 8; 6), \qquad (6; 7; 3; 4).$$

**b)** Az a) feladatrész megoldásában láttuk, hogy a három „oldalösszeg" összege a csúcsokon található három szám összegével nagyobb 45-nél. A három csúcson található három szám összege, akkor a legnagyobb, ha a csúcsokra a 9, 8, 7 számokat írjuk. Ilyenkor egy oldalösszeg: $\frac{45+9+8+7}{3} =$ $= 23$. Ez az oldalösszeg el is érhető, egy példa (az egyes oldalakra kerülő számok):

$$(7; 6; 2; 8), (8; 1; 5; 9), (9; 3; 4; 7).$$

# Alkalmazott rövidítések

## Könyvek neveinek rövidítései

| | |
|---|---|
| A.I | Algebra, 7–8. évfolyam |
| A.II | Algebra, 9–10. évfolyam |
| A.III | Algebra, 11–12. évfolyam |
| ALG.II | Algoritmusok, 9–10. évfolyam |
| ANAL.III | Analízis, 11–12. évfolyam |
| F.I | Függvények, 7–8. évfolyam |
| F.III | Függvények, 11–12. évfolyam |
| G.I | Geometria, 7–8. évfolyam |
| G.II | Geometria, 9–10. évfolyam |
| G.III | Geometria, 11–12. évfolyam |
| GR.II | Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam |
| K.I | Kombinatorika, 7–8. évfolyam |
| K.II | Kombinatorika, 9–10. évfolyam |
| K.III | Kombinatorika, 11–12. évfolyam |
| SZ.I | Számelmélet, 7–8. évfolyam |
| SZ.II | Számelmélet, 9–10. évfolyam |
| V.II | Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam |
| VV.III | Városok viadala, 11–12. évfolyam |
| ZARUB | Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam |

## Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

## Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

# Irodalomjegyzék


[1] Gábos Adél: *Halmazok, sorozatok és sorok.* Budapest, 1982, OPI sokszorosító.

[2] Csúri József Duró Lajosné Gyapjas Ferencné Kántor Sándorné és Pintér Lajosné Bartha Gábor, Bogdán Zoltán: *Matematika feladatgyűjtemény I.* 12. kiad. Budapest, 1998, Nemzeti Tankönyvkiadó. ISBN 963 18 8911 4. A „Sárga könyv".

[3] Pogáts Ferenc: *Varga Tamás matematika versenyek II.* Budapest, 1997, Typotex. ISBN 963 7546 84 7.

[4] Paróczay József Szászné Simon Judit Gerőcs László, Orosz Gyula: *Matematika, Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény.* I. köt. 1. kiad. Budapest, 2005, Nemzeti Tankönyvkiadó. ISBN 963 19 4213 9.

[5] Grätzer György: *Elmesport egy esztendőre.* Budapest, 1959, Gondolat Kiadó.

[6] Urbán János Imrecze Zoltánné, Reiman István: *Fejtörő feladatok felsősöknek.* 3. átdolgozott. kiad. H-5310, Kisújszállás, Mikes utca 14., 1999, Szalay Könyvkiadó.

[7] Kalmár László Matematikaverseny. a Kis Matematikus Baráti Körök versenye. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Kalmar_Laszlo_verseny.html`.

[8] B. A. Korgyemszkij: *Matematika fejtörők.* Budapest, 1972, Gondolat Könyvkiadó.

[9] Kozmáné Jakab Ágnes Dr Szederkényi Antalné Vincze István Kosztolányi József, Mike János: *Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek.* 10. kiad. Szeged, 2004, Mozaik Oktatási Stúdió. ISBN 963 697 100 5.

[10] Johannes Lehmann: *Furfangos matematika.* Budapest, 1976, Gondolat Könyvkiadó.

[11] Ja. I. Perelman: *Szórakoztató algebra.* Iii. átdolgozott, bővített. kiad. Budapest, 1975, Gondolat. ISBN 963 280 214 4.

[12] Ja. I. Perelman: *Matematikai történetek és rejtvények.* Budapest, 1979, Gondolat. ISBN 963 280 825 8.

[13] Pólya György.

[14] Rubóczky György közlése.

[15] Pálfy Sándor: *Törheted a fejed!* Budapest, 1974, TIT. Matematikai versenyfeladatok és fejtörők a Kis Matematikusok Baráti Körök részére.

[16] Varga Tamás Matematikai Verseny. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Varga_Tamas_verseny.html`.

[17] Harsányi Zsuzsa: *A pénz körül forog a világ.* Budapest, 1993, Typotex. ISBN 963 7546 30 8.

[18] Gombos Éva és Somogyi László: *Matematika határok nélkül.* Budapest, 1997, Scolar Kiadó. ISBN 963 85341 7 6.

[19] Pogáts Ferenc és Fazakas Tünde: *Varga Tamás matematika versenyek III.* Budapest, 2003, Typotex. ISBN 963 9326 80 1.

[20] Gábos Adél és Halmos Mária: *Algebra 1.* Budapest, 2000, Műszaki Könyvkiadó. ISBN 963 16 2612 8. Matematika-módszertani kutatócsoport, Pósa Lajos Algebra kéziratának és tanári véleményének felhasználásával.

[21] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár.* Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 31 4.

[22] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár 2.* Budapest, 2001, Typotex. ISBN 963 9326 10 0.

[23] Gyapjas Ferenc és Reiman István: *Elemi matematikai feladatgyűjtemény.* ELTE egyetemi jegyzet sorozat, I. köt. Budapest, 1965??, Tankönyvkiadó.