Algebra

11–12. évfolyam

Szerkesztette:
Hraskó András, Kiss Géza,
Pataki János, Szoldatics József

2018. május 20.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2017

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Komplex számok

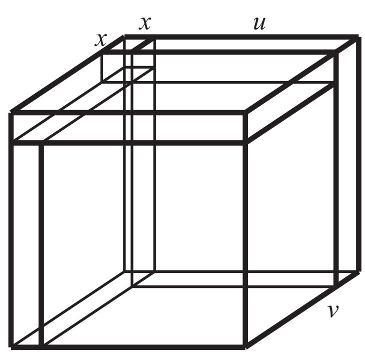
A matematika történetében a komplex számok felfedezését megelőzte a harmadfokú egyenlet megoldóképletének megtalálása. Az olyan harmadfokú egyenletek esetében, amelyeknek egy valós gyöke van, a Cardano-képletben pozitív számból kell gyököt vonni, és ez elvezet az egyenlet egyetlen valós megoldásához. Az olyan harmadfokú egyenletek esetében azonban, amelyeknek három valós gyöke is van, ugyanott egy negatív számból kellene gyököt vonni. Ez az eset – a „casus irreducibilis” – jelentette a kiindulópontot a komplex számok felfedezéséhez. Az 1.1-1.4 feladatokban Tartaglia eredeti gondolatmenetéhez némileg hasonló eljárással állítjuk elő bizonyos harmadfokú egyenletek egy-egy valós gyökét. Az 1.5 feladat felvillant egy lehetőséget a casus irreducibilis feloldására a komplex számok bevezetése nélkül.

A [3], [2], [5] műveket ajánljuk a történet iránt mélyebben érdeklődőknek.

Ajánlott versenyfeladatok: Zarub.8.10, Zarub.8.11, Zarub.8.13, Zarub.9.1, Zarub.9.2, Zarub.10.10.

1.1. A harmadfokú egyenlet megoldása Tartaglia szerint

1.1. A mellékelt ábrán egy $v \times v \times v$ méretű kockát látunk, amelynek bal felső hátsó sarkában egy $x \times x \times x$ méretű kis kocka van. A 1.1.1. ábrán látható további vágások 4 további részre vágják a nagy kockát, amelyek egyike szintén kocka. Határozzuk meg a négy rész éleit és térfogatát!



1.1.1. ábra.

b) A 1.1.1. ábra és Tartaglia alábbi verse (fordította Pataki János) segítségével adjuk meg a b1), b2) egyenletek egy-egy valós megoldását!

Ha majd a kockát és az egytagot
Látod a puszta számmal egybetenni,
Két új számod kivonva légyen ennyi.
Ez így kevés. Kell még egyharmadot
Egytag számrészéből kockára venni:
Jó, ha számaid szorozva ezt kapod.
Két számodat már ha veszed kockául,
S egynek oldalát máséval csorbítod,
Mi rejtve volt eddig, elédbe tárul.

b1) $x^3 + 12x = 63$ **b2)** $x^3 + 18x = 19$.

1.2. (M) Az 1.1. feladat alapján készítsünk megoldóképletet az $x^3 + px + q = 0$ alakú egyenletekhez! Igazoljuk, hogy a képlet tetszőleges előjelű p, q valós számok esetén megadja a harmadfokú egyenlet egy valós megoldását, ha $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$

1.3. (MS) Vezessük vissza az $y^3 + 3y^2 - 3y - 14 = 0$ egyenletet az 1.2. feladatban látott típusra és keressük meg egy valós megoldását!

1.4. (M) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az 1.1-1.2. feladatokban látott módszerrel! Ábrázoljuk a bal oldalon található harmadfokú függvények grafikonját a Geogebra programmal és olvassuk le a közelítő megoldást. Vessük össze az eredményeket! Megtaláltuk-e az összes valós gyököt?

a) $x^3 + 3x - 4 = 0$ **b)** $x^3 - 12x + 16 = 0$ **c)** $x^3 - 19x + 30 = 0$.

1.5. (M) **a)** Írjuk fel az addíciós tétel alkalmazásával a $\cos 3x$ kifejezést $\cos x$ polinomjaként!

b) Az a)-ban nyert képlet alkalmazásával oldjuk meg az alábbi harmadfokú egyenleteket!

b1) $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ **b2)** $32y^3 - 6y = -1$ **b3*)** $x^3 - 19x + 30 = 0$.

1.2. A komplex számok aritmetikája

A képzetes egység

Jelöljön i olyan számot(!?), amelyre $i^2 = -1$.

1.1. (M) Tekintsük az $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú számok halmazát! Írjuk fel ilyen alakban az alábbi számokat!

a) $i \cdot (2 + i)$ **b)** $(1 + i) \cdot (2 + i)$ **c)** $(1 + i)^2$ **d)** $\frac{2+i}{i}$

e) $\frac{4+3i}{1+2i}$ **f)** $\frac{5-2i}{1-2i}$ **g)** $(1 + i)^3$ **h)** $(1 - i)^4$.

1.2. Végezzük el az alábbi alapműveleteket:

a) $(a + bi) \cdot (c + di)$ **b)** $\frac{a+bi}{c+di}$ **c)** $(a + bi)^2$ **d)** $(a + bi)^3$

e) $(a + bi)^4$.

1.3. Mutassuk meg, hogy ha a_1, b_1, a_2, b_2 valós számok és $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$, akkor $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

1.4. Keressük meg az összes olyan $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alakú számot, amelyre

a) $z^2 = i$ **b)** $z^2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **c)** $z^3 = 1$.

Abszolútérték és argumentum

A $z = a + bi$ komplex szám $(a, b \in \mathbb{R})$ *abszolútértéke* az $\sqrt{a^2 + b^2}$ valós szám, azaz a 0-tól való távolsága. A komplex szám argumentuma az az irányított szög, amellyel a pozitív valós félegyenest el kell forgatni, hogy a 0 végponttú a komplex számot tartalmazó félegyenest kapjuk. A fenti z komplex szám argumentuma az a ϕ szög, amelyre

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \tan\phi = \frac{b}{a}.$$

1.5. Adottak a következő komplex számok!

$-i$ $\quad 1+i \quad \sqrt{2}+\sqrt{6}i \quad 1+\sqrt{3}i \quad -1-3i.$

a) Határozzuk meg a számok abszolút értékét és argumentumát!

b) Számítsuk ki az a) feladatrészben adott számok négyzetét és azok abszolút értékét valamint argumentumát!

c) Számítsuk ki az a) feladatrészben adott számok reciprokát, azok abszolút értékét valamint argumentumát!

d) Alább megadtuk egy-egy komplex szám abszolútértékét (r_k) és argumentumát (ϕ_k). Írjuk fel a számot!

$r_1 = 3,\ \phi_1 = 225°$ $\quad r_2 = 1,\ \phi_2 = 22{,}5°$ $\quad r_3 = \sqrt{2},\ \phi_3 = -60°.$

1.6. Írjuk fel az r_1 abszolútértékű, ϕ_1 argumentumú, és az r_2 abszolútértékű, ϕ_1 argumentumú komplex számot! Számítsuk ki a két szám szorzatát, annak abszolútértékét és argumentumát! Fogalmazzunk meg matematikai összefüggést!

1.7. Határozzuk meg az alábbi komplex számokat kétféleképpen, algebrai átalakítással és geometriai elven, a kifejezésben szereplő komplex számok argumentumának és abszolút értékének figyelembevételével!

$(1+\sqrt{3}i)^3 \quad \frac{1}{1+\sqrt{3}i} \quad \frac{1+i}{1-i} \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}.$

1.8. a) Végezzük el az alábbi hatványozást!

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5$$

b) Írjuk fel $\cos 5x$-et $\cos x$ és $\sin x$ polinomjaként!

c) Mutassuk meg, hogy bármely n természetes szám esetén $\cos(nx)$ felírható $\cos x$ egészegyütthatós polinomjaként!

1.9. Írjuk fel az alábbi komplex számokat $a+bi$ alakban ($a, b \in \mathbb{R}$).

$(2+3i)(4-2i) \quad \frac{2+3i}{4-2i} \quad \sqrt{-81i} \quad \sqrt[4]{\frac{-32i}{\sqrt{3}+i}}$

1.10. [1] Két komplex szám összege és szorzata is valós. Mit mondhatunk a két komplex számról?

1.11. A $z = a+bi$ komplex szám konjugáltja ($a, b \in \mathbb{R}$) a $\overline{z} = a - bi$ komplex szám. Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek teljesülnek minden z_1, z_2 komplex szám esetén!

a) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$ **b)** $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ **c)** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ **d)** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

1.12. Adjuk meg a $\overline{z} = z^2$ egyenlet összes megoldását!

1.13. Határozzuk meg a komplex számsíkon az $\overline{z} = \frac{1}{z}$ egyenlet megoldáshalmazát!

1.14. Ábrázoljuk a komplex számsíkon azon z számok halmazát, amelyekre

a) $z + \overline{z} = 3$ **b)** $z - \overline{z} = 5i$ **c)** $z - \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$

1.15. [1] Keressük meg a komplex számsíkon az alábbi relációk megoldáshalmazát!

a) $1 < |z| < 2$ **b)** $1 < \left|\frac{z-3}{z-1}\right|$ **c)** $1 = |z| + |z+i|$.

1.16. [1] Adjuk meg a $\overline{z} = z^n$ egyenlet összes megoldását ($n \in \mathbb{N}$)!

1.17. Adott a komplex számsíkon egy körcikk-tartomány, melynek középpontja a 0, sugara 2, ívének végpontjai $2i$ és $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$. Határozzuk meg e tartomány képét és ősét a komplex számsík
a) $z \longrightarrow \frac{1}{z}$ **b)** $z \longrightarrow z^2$
leképezéseinél.

1.3. A harmadfokú egyenlet geometriája

1.1. Legyen $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Végezzük el a beszorzást és egyszerűsítsük az alábbi kifejezéseket!
a) $(a + b\omega + c\omega^2) \cdot (a + b\omega^2 + c\omega)$;
b) $(a + b) \cdot (a + b\omega) \cdot (a + b\omega^2)$;
c) $(a\omega^2 + b\omega) \cdot (b\omega^2 + a\omega)$.

1.2. Legyen $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Számítsuk ki az $\omega^n + \omega^{2n}$ hatványösszeget!

1.3. Határozzuk meg az összes olyan z komplex számot, amelynek köbe
a) 1 **b)** (-1) **c)** i **d)** (-i).

1.4. Adjuk meg az
a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8(1 - i) = 0$ **b)** $x^3 - 3x^2 + 3x + i - 1 = 0$
harmadfokú egyenlet összes megoldását!

1.5. Tudjuk, hogy a z szám egyik köbgyöke $1 + i$. Határozzuk meg a többi köbgyökét!

1.6. A z komplex szám köbgyökei: z_1, z_2 és z_3. Határozzuk meg a

$$\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_3}, \frac{z_3}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_2}, \frac{z_1}{z_3}$$

törtek összes lehetséges értékét!

1.7. [7] Oldjuk meg az alábbi harmadfokú egyenleteket (ne válasszuk le a megtalált egész vagy racionális gyököket, hanem alkalmazzuk a Cardano képletet, illetve az ahhoz vezető eljárást)!
a) $x^3 - 6x + 9 = 0$ **b)** $x^3 - 6x + 4 = 0$ **c)** $x^3 + 12x + 63 = 0$
d) $x^3 + 6x + 2 = 0$ **e)** $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ **f)** $x^3 + 18x + 15 = 0$
g) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$ **h)** $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$.

1.8. Jelölje az $x^3 + px + q = 0$ egyenlet gyökeit x_1, x_2 és x_3. Írjunk fel olyan harmadfokú egyenletet, amelynek gyökei
a) x_1^2, x_2^2, x_3^2, **b)** x_1^3, x_2^3, x_3^3, **c)** x_1^5, x_2^5, x_3^5.

1.9. Legyenek az $f(x) = x^3 - 3x - 1$ polinom gyökei nagyság szerinti sorrendben $x_1 < x_2 < x_3$. Igazoljuk, hogy $x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1$.

1.10. [4] *Marden tétele*
Mutassuk meg, hogy ha az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom gyökei az A, B, C komplex számok és az $f'(x)$ polinom gyökei az F_1, F_2 komplex számok, akkor F_1 és F_2 az ABC háromszög Steiner-ellipszisének fókuszpontjai. A Steiner ellipszis az a másodrendű görbe, amely átmegy az ABC háromszög felezőpontjain és ott érinti az oldalegyeneseket.

1.4. Egységgyökök

1.1. Határozzuk meg a hatodik egységgyökök
a) összegét, **b)** négyzetösszegét!
Oldjuk meg a feladatot a hetedik egységgyökökkel kapcsolatban is!

1.2. Adjuk meg az alábbi összeg pontos értékét!

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 120^\circ + \cos 160^\circ + \cos 200^\circ + \cos 240^\circ + \cos 320^\circ + \cos 360^\circ.$$

1.3. Ismeretes, hogy $0 < n$ esetén

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}.$$

Ennek egy lehetséges bizonyítását kapjuk, ha az alábbi két sort összeadjuk.

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{2}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \binom{n}{3}1^{n-3}1^3 + \binom{n}{4}1^{n-4}1^4 + \ldots$$

$$0^n = (1-1)^n = \binom{n}{0}1^n - \binom{n}{2}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 - \binom{n}{3}1^{n-3}1^3 + \binom{n}{4}1^{n-4}1^4 + \ldots$$

Határozzuk meg

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots$$

(n-től függő) értékét!

1.4. Mutassuk meg, hogy $(1+i)^{2007} + (1-i)^{2007}$ egész szám és határozzuk meg az utolsó (1-es helyiértékű) jegyét!

1.5. Határozzuk meg az alábbi összeg értékét!

$$\binom{2007}{0} - \binom{2007}{2} + \binom{2007}{4} - \binom{2007}{6} + \binom{2007}{8} - \ldots \pm \binom{2007}{2006}.$$

1.6. Írjuk fel az alábbi polinomok gyöktényezős alakját $\mathbb{C}[x]$-ben, illetve $\mathbb{R}[x]$-ben!
a) $x^3 - 1$, $x^4 - 1$, $x^6 - 1$.
b)* $x^5 - 1$, $x^7 - 1$, $x^9 - 1$.

1.7. Írjuk fel az
$x^3 - 1$ $\quad$ $x^4 - 1$ $\quad$ $x^5 - 1$ $\quad$ $x^6 - 1$ $\quad$ $x^{12} - 1$
polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilis tényezők szorzataként!
Határozzuk meg mindegyik egységgyökről, hogy melyik irreducibilis tényező gyöke!

1.8. [1] Mutassuk meg, hogy a $z^n - 2$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[z]$-ben!

1.9. [7] Jelöljön ϵ n-edik egységgyököt! Határozzuk meg az alábbi kifejezés értékét!

$$1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \ldots + n\epsilon^{n-1}.$$

1.10. [7] **a)** Mutassuk meg, hogy ha a z komplex számra $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, akkor $z^m + \frac{1}{z^m} =$ $= 2\cos m\theta$.

b) Keressünk hasonló összefüggést $\left|z + \frac{1}{z}\right| < 2$ esetén!

1.5. Magasabbfokú polinomok geometriája

1.1. [6] Tegyük fel, hogy

$$p_0 > p_1 > p_2 > \ldots > p_n > 0.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor a

$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n$$

polinomnak nincs zérushelye az $|z| \leq 1$ egységkörlapon!

1.2. [6] Tegyük fel, hogy a

$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n$$

polinom együtthatói, $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ pozitívak. Mutassuk meg, hogy ekkor ennek a polinomnak minden zérushelye az $\alpha \leq |z| \leq \beta$ körgyűrűben van, ahol α a legkisebb, β pedig a legnagyobb a

$$\frac{p_1}{p_0}, \quad \frac{p_2}{p_1}, \quad \frac{p_3}{p_2}, \quad \ldots \quad \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

számok között.

2. FEJEZET
Lianeáris algebra

2.1. (MS) Számítsuk ki az alábbi determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.2. (MS) Igazoljuk a determináns kiszámítása nélkül, hogy az alábbi két determináns nem 0.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 14 \\ 20 & 13 & -10 \\ 22 & 24 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 14 \\ 19 & 12 & -12 \\ 24 & 22 & 3 \end{vmatrix}$

3. FEJEZET
Vegyes feladatok

3.1. (MS) Jelölje P_4 a negyedfokú 1 főegyütthatós polinomok halmazát és tekintsük a

$$\phi : P_4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi(p) = \left|p(1) - p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| + \left|p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - p(0)\right| + \left|p(0) - p\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right| + \left|p\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) - p(-1)\right|$$

leképezést ($p \in P_4$). Határozzuk meg a ϕ leképezés minimumát. Mely p polinomon veszi fel ϕ a minimális értéket?

Segítség, útmutatás

1. Komplex számok

1.3. Végezzük el az $y = x - 1$ helyettesítést!

2. Lianeáris algebra

2.1. Fejtsük ki a determinánsokat valamelyik sora vagy oszlopa szerint, vagy pedig (akár előtte vagy helyette) alakítsuk át a determinánst.

2.2. Vizsgáljuk a determinánsokat paritás szerint!

3. Vegyes feladatok

3.1. Becsüljük meg $\phi(p)$-t, használjuk a $|a| + |b| \geq |a + b|$ egyenlőtlenséget!

Megoldások

1. Komplex számok

1.2. $x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

1.3. Az $y = x - 1$ helyettesítést elvégezve kapjuk a $x^3 - 6x - 9 = 0$ egyenletet. Ennek megoldása az $x = 3$, innen $y = 2$.
Az eredeti egyenlet ezek szerint $y^3 + 3y^2 - 3y - 14 = (y - 2)\left(y^2 + 5y + 7\right)$

1.4. a) $x = 1$ megoldás, tehát $x^3 + 3x - 4 = (x - 1)\left(x^2 + x + 4\right) == (x - 1)\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right]$
b) $x = 2$ megoldás, tehát $x^3 - 12x + 16 = (x - 2)\left(x^2 + 2x - 8\right)$
c) $x = 2$ megoldás, tehát $x^3 - 19x + 30 = (x - 2)\left(x^2 + 2x - 16\right)$

1.5. $cos3\alpha = 4 \cdot cos^3\alpha - 3 \cdot cos\alpha$

1.1. **a)** $i \cdot (2 + i) = 2i + i^2 = -1 + 2i$
b) $(1 + i) \cdot (2 + i) = 2 + 3i + i^2 = 1 + 3i$
c) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 0 + 2i = 2i$
d) $\frac{2+i}{i} = \frac{2+i}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{2i+i^2}{i^2} = \frac{2i-1}{-1} = 1 - 2i$
e) $\frac{4+3i}{1+2i} = \frac{4+3i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{10-5i}{5} = 2 - i$
f) $\frac{5-2i}{1-2i} = \frac{5-2i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{9-8i}{5} = \frac{9}{5} - \frac{8}{5}i$
g) $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
h) $(1 - i)^4 = 1 - 4i + 6i^2 - 4i^3 + i^4$=-4

2. Lianeáris algebra

2.1. A kapott értékek:
a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

2.2. Vizsgáljuk a determinánsokat paritás szerint, azaz nézzük az összes kiválasztható - különböző sorokban és oszlopokban levő - számhármasok szorzatának összegét. Minden ilyen szorzat páros egy kivételével, így a determináns értéke csak páratlan lehet, azaz 0 nem lehet.
A determinánsok értékei (kiszámítás után):
a) 2993 b) 1295

3. Vegyes feladatok

3.1. Legyen $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ekkor
$p(1) = 1 + a + b + c + d$
$p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + a \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + d$
$p(0) = d$
$p\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - a \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + b \cdot \frac{1}{2} - c \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + d$

$p\left(-1\right)=1-a+b-c+d$
Most megbecsülve $\phi\left(p\right)$ értékét

$$\phi(p)=\left|p(1)-p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|+\left|p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-p(0)\right|+\left|p(0)-p\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right|+\left|p\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)-p(-1)\right|=$$

$$\left|p(1)-p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|+\left|p(0)-p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|+\left|p(0)-p\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right|+\left|p(-1)-p\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right|\geq$$

$$\left|p(1)+2p(0)+p(-1)-2p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2p\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right|=|1|=1$$

azaz

$$\phi(p)\geq 1$$

Ezt fel is veszi a

$$p(x)=x^4-\frac{3}{2}x^2+d=\left(x^2-1\right)\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+d'$$

függvények esetében, ahol d tetszőleges szám.
További jó függvények

$$p(x)=x^4-\frac{1}{2}x^2+d=x^2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+d \qquad \textbf{vagy} \qquad p(x)=x^4-x^2+d=x^2\left(x^2-1\right)+d$$

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Sárközy András: *Komplex számok példatár.* Bolyai sorozat sorozat. Budapest, 1973, Műszaki Könyvkiadó.

[2] Szemjon Grigorjevics Gyingyikin: *Történetek fizikusokról és matematikusokról.* Budapest, 2003, Typotex. ISBN 963 9548 43 X.

[3] Pataki János: Az algebra és a geometria házassága. 2003/dec/12. LVIII/50. sz., *Élet és Tudomány.* A Diákoldal melléklet XLIV-XLVII oldalain, XIII. évf. 6. szám.

[4] Dan Kalman: An Elementary Proof of Marden's Theorem. 2008. 115. sz., *American Mathematical Monthly*, 330–338. p.

[5] Richard Mankiewicz: *A matematika históriája.* Budapest, 2003, HVG kiadó Zrt. ISBN 9637525300.

[6] Szegő Gábor Pólya György: *Feladatok és tételek az analízis köréből I.* Budapest, 1980, Tankönyvkiadó.

[7] D. K. Fagyejev I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai példatár.* Felsőfokú példatárak sorozat. 3. kiad. Budapest, 2006, Typotex.