# Kombinatorika

7–8. évfolyam

Szerkesztette:
Blénessy Gabriella, Dobos Sándor, Fazakas Tünde,
Hraskó András, Rubóczky György

2018. július 15.

**Technikai munkák**

*(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)*

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2017

# Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

# Bemelegítő feladatok

**1.1.** Egy sportboltban négyfajta színű futballmez, háromfajta színű nadrág és kétfajta lábszárvédő kapható. Hányféle szerelést lehet ebből összeállítani?

**1.2.** (M) Hányféleképpen juthatunk $A$-ból $B$-be (lásd az 1.0.1. ábrát!), ha mindig közelítünk $B$-hez?


1.2.1. ábra.

**1.3.** Egy dobozban négy számkártya van, rajtuk egy-egy szám, nevezetesen az 1, a 2, a 3 és a 4. Kihúzunk egy kártyát és felírjuk a rajta látható számot. Ezután

**a)** visszatesszük **b)** nem tesszük vissza

a kihúzott kártyát a többi közé és újra húzunk. Az ezen látható számot az elős mellé jobbra írjuk. Hányféle kétjegyű számot kaphatunk így?

**1.4.** Aladár, Béla, Csaba és Dávid futóversenyen mérte össze gyorsaságát. Versenyüknek hányféle végeredménye (a négy versenyzőnek hányféle sorrendje) lehetséges, ha

**a)** nincs holtverseny?
**b)** Aladár és Béla holtversenyben végzett, de más holtverseny nem volt?
**c)** ketten holtversenyben végeztek, de más holtverseny nem volt?
**d)** Aladár lett a harmadik (itt és a továbbiakban feltesszük, hogy holtverseny nem volt)?
**e)** Aladár gyorsabb volt, mint Béla?
**f)** Aladár közvetlenül Béla előtt ért célba?
**g)** Aladár megelőzte Bélát, Csaba pedig Dávidot?

**1.5.** Egy hattagú társaságban az ismerősök kezet fogtak egymással.

**a)** Legfeljebb hány kézfogás történt?
**b)** Legfeljebb hány kézfogás történt, ha mindenki páros sok emberrel fogott kezet?

**1.6.** Egy virágboltban szegfűt, rózsát és gerberát árulnak. Négy szál virágból álló csokrot akarunk vásárolni. Két csokrot akkor tekintünk egyformának, ha mindháromféle virágból ugyanannyi szál van benne.

Hány különböző csokroz lehet köttetni? (Nem kell midhárom fajta virágnak benne lennie a csokorban.)

**1.7.** Leírtuk a pozitív egész számokat 1-től 122-ig. Hány számjegyet írtunk le? Melyik számjegyet írtuk le a legtöbbször, melyiket a legkevesebbszer?

**1.8.** Egy pozitív egész azámról tudjuk, hogy

- osztható 8-cal;
- számjegyeinek összege 7;
- számjegyeinek szorzata 6.

Mi lehet ez a szám? Hány lehetőség van?

**1.9.** Egy társaságban volt 5 férfi és 6 nő. A férfiak egymással kezet fogtak, a hölgyek egymásnak „Szervusz drágám”-ot köszöntek. A férfiak a hölgyeknek kezet csókoltak. Hány kézfogás, kézcsók és „Szervusz drágám” köszöntés volt?

**1.10.** **a)** Hány természetes szám van 155 és 2005 között (a határokat nem beleértve)?
Ezek között hány
**b)** páratlan szám van? **c)** hárommal osztható szám van?

**1.11.** **a)** Hány pontosan négyjegyű természetes szám van?
**b)** Ezek közül hány osztható 7-tel?

**1.12.** Határozzuk meg a
**a)** négyjegyű **b)** legfeljebb négyjegyű
páros természetes számok számát!

**1.13.** Hány olyan
**a)** négyjegyű **b)** legfeljebb négyjegyű
természetes szám van, amelyben nincs 9-es számjegy?

**1.14.** Hány olyan
**a)** négyjegyű **b)** legfeljebb négyjegyű
természetes szám van, amelyben van 9-es számjegy?

**1.15.** András és Andrea, illetve Béla és Bella házastársak. Hányféle sorrendben ülhetnek egy padon, ha
**a)** bárki bárki mellett ülhet?
**b)** felváltva ülhetnek férfiak és nők?
**c)** a házastársak egymás mellett ülnek?
**d)** a házastársak nem ülhetnek egymás mellett?

**1.16.** Egy dobozba beteszünk két piros és két kék golyót, majd sorban kihúzzuk mind a négyet. A kihúzásnál hányféle színsorozat lehetséges?

**1.17.** [17] Egy $3\times3$-as táblázat minden négyzetét pirosra, kékre vagy zöldre színezzük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha azt akarjuk, hogy minden sorban és minden oszlopban mindhárom szín előforduljon!

**1.18.** Egy könyv első számozott oldala a 3. oldal, utána már minden oldal számozva van. Mi az utolsó oldalon látható szám, ha összesen 539 számjegyet használtak fel az oldalak sorszámozására?

**1.19.** [14] Egy iskolai összejövetelen megkérdeztük a gyerekeket, kinek hány osztálytársa van ott. A résztvevők mindegyike válaszolt. Öten mondták azt, hogy 4 osztálytársuk van ott, nyolcan, hogy 3, hárman, hogy 2, négyen, hogy 1. Minden egyereknek ott volt az osztályfőnöke, más tanár viszont nem volt jelen. Hány gyerek és hány tanár vett részt az összejövetelen?

**1.20.** [17] Egy szigeten jártunk, ahol lovagok és lókötők élnek. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak.

Egy fa árnyékában két bennszülött pihent. Megkérdeztük az egyiket:
- Ön lovag vagy lókötő?
$A$: - ... Válaszát sajnos nem értettük, így megkérdeztük a másikat, hogy mit mondhatott a társa.

*B*: - A azt mondta, hogy ő lókötő.
Mi lehet A illetve B?

**1.21.** [17] Lovagok és lókötők szigete. (Lásd az 1.20. feladatot!) A szigetnek 100 lakosa és három felekezete van: a *Napimádók*, a *Holdimádók* és a *Földimádók*. Minden lakos pontosan egy felekezethez tartozik. Egy felmérés alkalmával minden lakosnak meg kellett válaszolnia a következő három kérdés mindegyikét: „Te Napimádó vagy?”, „Te Holdimádó vagy?”, „Te Földimádó vagy?”. Az első kérdésre 60, a másodikra 40, a harmadikra 30 „igen” válasz érkezett. Hány lovag és hány lókötő él a szigeten?

**1.22.** (M) [17] Lovagok és lókötők szigete Most tizenhárom szigetlakóval találkoztunk és megkérdeztük tőlük, hogy hány lovag van köztük. Egyikük, *A*, egy kicsit hadart, így válaszát nem értettük, a többi választ viszont lejegyeztük: 3, 2, 4, 2, 5, 5, 8, 2, 3, 7, 4, 5.
Megállapítható-e ebből, hogy *A* lovag vagy lókötő?

**1.23.** A bergengóc focibajnokságban, a BL-ben 8 csapat vesz részt. A hétvégi fordulóban négy mérkőzésre kerül sor. A TOTÓ-n ennek a négy mérkőzésnek az eredményére lehet tippelni. Alább látható a következő heti szelvény.

| | |
|---|---|
| Sörszagú sárkányok – Nokedli FC | |
| Hasas – Bergigász | |
| Pancser TK – Gólgyár FC | |
| Bumberg – Cselezi | |

**a)** Hányféleképpen tölthető ki a szelvény (az üres oszlop), ha minden mérkőzésre 1-essel (az első csapat nyer) vagy 2-essel (a második nyer) vagy X-szel (döntetlen) tippelhetünk?
**b)** Hány olyan kitöltés lehetséges, amelyben nincs X-es tipp?

**1.24.** Adott öt pont a síkon. Ha mindegyiket mindegyikkel összekötjük, akkor
**a)** legfeljebb hány egyenest kaphatunk?
**b)** kaphatunk-e éppen 8 különböző egyenest?
**c)** kaphatunk-e éppen 9 különböző egyenest?

**1.25.** Adott öt különböző egyenes a síkon.
**a)** Legfeljebb hány metszéspontjuk lehet?
**b)** Lehet-e épp 8 metszéspontjuk?
**c)** Lehet-e épp 9 metszéspontjuk?

**1.26.** **a)** Hány átlója van egy szabályos nyolcszögnek?
**b)** És egy nem szabályosnak?

**1.27.** Egy osztály öt tanulója – Aladár, Béla, Cili, Dóra és Erika – adott be pályamunkát a „Ki tud többet Bergengóciáról?” vetélkedőn. A bíráló bizottság
**a)** egy I. és egy II. díjat, a többieknek pedig egy-egy oklevelet ítélt meg.
**b)** két I. díjat, a többieknek pedig egy-egy oklevelet ítélt meg.
Hányféleképpen kaphatták a diákok az elismeréseket?

**1.28.** Három 1-esből és két 2-esből hány ötjegyű szám képezhető?

**1.29.** A könyvtárban az alábbi öt könyv tetszett meg nekem: „Grant kapitány gyermekei”, „Számokról és alakzatokról”, „Ugu”, „2000 feladat az elemi matematika köréből”, „Kiberiáda”. A könyvtárból egyszerre

**a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

könyvet lehet kivenni. Hányféleképpen választhatom ki a kikölcsönzendő könyveket a fenti ötből?

**1.30.** Hány olyan 10 ezernél nagyobb, de 12 ezernél kisebb természetes szám van, amelynek számjegyeit sorban olvasva ugyanazt kapjuk, akár a legnagyobb helyiértéknél kezdjük, akár a legkisebbnél?

**1.31.** (M) Egy füzet oldalainak megszámozásához 55 számjegyre van szükség. Hány lapja van a füzetnek, ha a számozás az első oldalon kezdődik?

**1.32.** Néhány labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést vívott egymással. Hány csapat játszott, ha összesen 28 mérkőzésre került sor?

**1.33.** (M) Egy sportboltban négyféle színű (piros, kék, zöld, fehér) futballmez, háromféle (zöld, lila, kék) nadrág és kétféle (fekete, fehér) lábszárvédő kapható. Készítsünk algoritmust, ami

**a)** megad egy véletlenszerűen összeállított felszerelést;

**b)** kilistázza az összes lehetséges felszerelés kombinációt!

**1.34.** (M) Készítsünk algoritmust, ami előállítja $n!$ értékét!

2. FEJEZET

# Leszámlálási feladatok

**2.1.** (M) Aladár, Béla, Dezső és Rezső moziba mennek. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé?

**2.2.** (M) Az 1, 2, 3 számokból hány 3 jegyű szám készíthető, amelynek jegyei különbözőek?

**2.3.** (M) Hányféle lehet annak a futóversenynek a befutási sorrendje, amelynek résztvevői Szellőlábú Szilárd, Gyors Ottó, Poroszka Pista és Fürge Ubul?

**2.4.** (M) Hányféle lehet a futóversenynek a befutási sorrendje, amelynek résztvevői Szellőlábú Szilárd, Gyors Ottó, Poroszka Pista és Fürge Ubul, ha tudjuk, hogy Ubul lett az első?

**2.5.** (M) Hányféleképpen ülhet fel egy négy székes körhintára Tercsi, Fercsi, Kata és Klára?

**2.6.** (M) A 4, 4, 5, 5, 6 számjegyekből hány 45-tel kezdődő 5 jegyű szám készíthető?

**2.7.** (M) A fagyisnál csoki, citrom, vanília és eper fagyi kapható. Hányféleképpen tehetünk egy tölcsérbe sorban egymás után 3 különböző gombócot? És négyet?

**2.8.** (M) Hatféle színű ceruzánk van. Egy dobókocka lapjain a pöttyöket szeretnénk velük kiszínezni. Ha egy lapon belül több pötty van, azok ugyanolyan színűek. Hányféle lehet a színezés, ha

**a)** mind a hat színt felhasználjuk?
**b)** nem feltétlenül használjuk mindegyik színt?

**2.9.** (M) Három színes selyemcsík összevarrásával zászlót készítünk. Ezek mind ugyanolyan alakúak. Hányféle lehet a zászlónk, ha 3 fajta színünk van és

**a)** mindegyikből egyet-egyet használunk?
**b)** mindegyikből tetszőleges számút használhatunk úgy, hogy a szomszédos csíkok különböző színűek legyenek?

**2.10.** (M) Három színes selyemcsík összevarrásával zászlót készítünk. Ezek mind ugyanolyan alakúak. Hányféle lehet a zászlónk, ha 4 fajta színünk van és

**a)** mindegyikből egyet-egyet használunk?
**b)** mindegyikből tetszőleges számút használhatunk úgy, hogy a szomszédos csíkok különböző színűek legyenek?

**2.11.** (M) Hányféle 4 betűs „szó” készíthető a következő szavak betűiből:
**a)** DIÁK; **b)** ÖRÖM; v**c)** SÜSÜ?

(A négybetűs karaktersor nem kell, hogy valóban értelmes szó legyen.)

**2.12.** (M) **a)** Van két $B$ betűnk, egyik piros, másik zöld. Van két $A$ betűnk, egyik piros, másik zöld. Hányféleképpen írhatjuk le velük a $BABA$ szót?
**b)** Szilárd szegény színvak. Az a) feladatrészre ő hány megoldást talál?

**2.13.** 7 betűkártyánk van. Haton az $A$, $A$, $A$, $B$, $B$, $C$ betűk szerepelnek. Milyen betű lehet a hetedik kártyán, ha a 7 betűkártyával összesen 140 hétbetűs „szó” rakható ki?

**2.14.** (M) Hányféleképpen ülhet le egy padra egymás mellé Aladár, Bea, Cili, Dezső és Rezső, ha Bea szeretne Rezső mellé ülni?

**2.15.** (M) Egy klubdélutánon 6 fiú és 6 lány van. Hányféleképpen alkothatnak párokat a táncoláshoz?

**2.16.** (M) Hányféle betűsorozat készíthető az DALMA szó betűiből? Adj meg olyan szót, amelynek betűiből 20 különböző betűsorozat készíthető.

**2.17.** (M) Hányféleképpen ülhet le egy padra egymás mellé Aladár, Bea, Cili, Dezső és Rezső, ha fiúk nem ülhetnek egymás mellé?

**2.18.** (M) Hányféleképpen ülhet le egy padra egymás mellé Aladár, Bea, Cili, Dezső és Rezső, ha lányok nem ülhetnek egymás mellé.

**2.19.** András és Andrea, Béla és Bella házastársak. Csatlakozott hozzájuk Csaba. Hányféle sorrendben ülhetnek egy padon, ha
**a)** bárki bárki mellett ülhet?
**b)** felváltva ülhetnek férfiak és nők?
**c)** a házastársak egymás mellett ülnek?
**d)** a házastársak nem ülhetnek egymás mellett?

**2.20.** András és Andrea, Béla és Bella, illetve Csaba és Csilla házastársak. Hányféle sorrendben ülhetnek egy padon, ha
**a)** bárki bárki mellett ülhet?
**b)** felváltva ülhetnek férfiak és nők?
**c)** a házastársak egymás mellett ülnek?
**d)** a házastársak nem ülhetnek egymás mellett?

**2.21.** (M) 5 ember hányféleképpen ülhet be egy 5 személyes autóba?

**2.22.** (M) Melyik szó betűiből rakható ki többféle szó, ha szavaink: PINTY és NÜNÜKE? (A szavak lehetnek értelmetlenek, és minden betűt fel kell használnunk.)

**2.23.** (M) Hányféleképpen írhatjuk egy hatszög csúcsaihoz az 1, 2, 2, 3, 3, 3 számokat, ha
**a)** a hatszög oldalai közt nincs két egyforma?
**b)** a hatszög szabályos és az egymásba forgatható elrendezéseket nem különböztetjük meg?

**2.24.** (M) Egy 6 tagú társaság-melynek tagja a háziasszony is-le akar ülni egy kerek asztalhoz. Hányféle sorrendben foglalhatnak helyet, ha
a., a háziasszony egy meghatározott helyre szeretne ülni
b., az ülésrend tetszőleges.
( Két ülésrend akkor különböző, ha van legalább egy olyan személy, akinek megváltozott a szomszédja )

**2.25.** (M) Hány olyan különböző jegyekből álló nyolcjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 jegyekből, amelyben nincs egymás mellett két páros jegy?

**2.26.** Hány olyan különböző jegyekből álló nyolcjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 jegyekből, amely osztható
**a)** 3-mal? **b)** 5-tel? **c)** 4-gyel?

**2.27.** (M) Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket egyszer felhasználva felírjuk az összes ötjegyű számot.
**a)** Növekvő sorrendbe állítva őket melyik szám lesz a százegyedik?
**b)** Hányadik helyen áll a 42531?
**c)** Határozzuk meg ezeknek a számoknak az összegét!

**2.28.** Felírjuk az összes olyan ötjegyű számot, amelyben csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek szerepelnek (nem kell mindegyiknek szerepelnie).
**a)** Növekvő sorrendbe állítva őket melyik szám lesz a százegyedik?
**b)** Hányadik helyen áll a 42531?
**c)** Határozzuk meg ezeknek a számoknak az összegét!

**2.29.** (M) Egy kocka lapjait kétféle színnel színezzük. Hány különböző kocka készíthető?

**2.30.** (M) Hány 5 hosszú morse jelsorozat készíthető? Pl. tá-tá-ti-ti-tá.

**2.31.** (M) Hány darab háromjegyű szám van? Hány darab háromjegyű szám van, amelynek minden jegye különböző?

**2.32.** (M) Hány darab négyjegyű szám van, aminek minden jegye páratlan?

**2.33.** (M) Egy futóversenyen 15-en vettek részt. Hányféleképpen oszthatták ki az arany-, ezüst- és bronzérmet?

**2.34.** (M) Egy teremben 5 lámpa van. Mindegyiket önállóan lehet meggyújtani. Hányféleképpen éghetnek a lámpák, ha legalább egynek égnie kell?

**2.35.** (M) **a)** Hány háromjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 jegyek segítségével?
Mennyi ezeknek az összege, ha
**b)** lehetnek **c)** nem lehetnek
azonos jegyek.

**2.36.** (M) Hány háromgombócos rendelés adható le, ha a fagyizóban 5 féle fagyi van és a gombócokat a tölcsérben egymás fölé helyezik?

**2.37.** (M) Mi az esélyesebb: dobókockával hatost dobni, vagy egymás után kétszer ugyanazt dobni?

**2.38.** Egy társaságban volt $f$ férfi és $n$ nő. A férfiak egymással kezet fogtak, a hölgyek egymásnak „Szervusz drágám”-ot köszöntek. A férfiak a hölgyeknek kezet csókoltak. Hány kézfogás, kézcsók és „Szervusz drágám” köszöntés volt?

**2.39.** (M) **a)** Hány rendszámtábla készíthető 26 betű és 10 számjegy felhasználásával? (A táblán előbb három betű, majd 3 számjegy áll.)
**b)** Melyikből van több, amelyikben vannak azonos karakterek vagy amelyikben nincsenek?

**2.40.** (M) Hányféle lyukasztott buszjegy van?

**2.41.** (M) Tíz tanuló közt hányféleképpen sorsolhatunk ki 4 különböző tárgyat, ha egy tanuló legfeljebb egy tárgyat kaphat?

**2.42.** (M) Dobókockával négyszer gurítva kapjuk meg sorban egy négyjegyű szám jegyeit. Hányféle lehet az eredmény?

**2.43.** (M) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben szerepel a 0 számjegy?

**2.44.** (M) A sutabástya úgy léphet a sakktáblán, mint a bástya, de egyszerre csak egy mezőt. Hányféleképpen juthat el egy sutabástya a sakktábla a1-es mezőjéről az a8-ból induló átló valamelyik mezőjére 7 lépéssel?

**2.45.** (M) Hányféleképpen húzhatunk ki egyesével egy 32 lapos magyar kártya csomagból két húzással éppen két ászt? (Gondoljuk meg, mi számít különböző esetnek!)

**2.46.** (M) Tekintsük azon négyjegyű számokat, melyek minden jegye különböző.
**a)** Hány ilyen van?
**b)** Mennyi ezeknek a számoknak az összege?
**c)** Növekvő sorrendbe állítva őket melyik lesz a kétszázadik?
**d)** Hányadik lesz az 1956?

**2.47.** (M) Hányféle különböző totószelvény van? (13 mérkőzésre lehet tippelni)

**2.48.** (M) Hányféle pontosan 12 találatos totószelvény van? És 11 találatos?

**2.49.** (M) Gondoltam egy $x$ egész számra, $0 < x < 17$. Hány barkochba kérdéssel tudod kitalálni, mire gondoltam?

**2.50.** **a)** Van két $A$ betűnk, egyik piros, másik zöld. Van három $B$ betűnk, egyik piros, másik zöld, harmadik fehér. Hányféleképpen írhatjuk le velük a $BABBA$ szót?
**b)** Szilárd szegény színvak. Az a) feladatrészre ő hány megoldást talál?

**2.51.** A Bergengóc Rallin hat autós vesz részt: Atom Aladár, Bomba Boldizsár, Csíkhúzó Csaba, Dugattyú Dénes, Eszeveszett Elemér és Féknélküli Frici. Másnap az OPTIMA sportlap közölni fogja az első három helyezett nevét helyezési sorrendben, míg a PESSZIMA-ban a három kieső neve jelenik meg ABC sorrendben.
Hányféle lista jelenhet meg az OPTIMA-ban illetve a PESSZIMA-ban?

**2.52.** Soroljuk fel az $A, B, C, D, E$ halmaz
**a)** egyelemű **b)** kételemű **c)** háromelemű **d)** négyelemű **e)** ötelemű
részhalmazait!

**2.53.** (M) Hány háromelemű részhalmaza van egy 6 elemű halmaznak?

**2.54.** (M) Egy 14 fős brigád 3 tagú vezetőséget választ. Hányféle lehet a vezetőség?

**2.55.** (M) Hányféle számot kaphatunk, ha az 1234567 szám jegyeiből letörlünk 4-et?

**2.56.** (M) Hányféleképpen írhatjuk be az 1, 2, ..., 8 számokat a relációs jelek közé a vonalakra:
$\_<\_<\_<\_>\_>\_>\_>\_$?

**2.57.** (M) Hányféleképpen olvasható ki a Budapest szó az alábbi táblázatból, ha a bal felső betűből indulunk és a következő betűt jobbra vagy lefele lépve érjük el?

$$\begin{matrix} B & U & D & A & P \\ U & D & A & P & E \\ D & A & P & E & S \\ A & P & E & S & T \end{matrix}$$

**2.58.** (M) Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög csúcsaiból kiválasztottunk hármat. Hányféleképpen választhattunk?

**2.59.** (M) Gondoltam két egész számra 1 és 10 között. Hány barkochba kérdéssel tudod kitalálni, mire gondoltam?

**2.60.** (M) Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény?

**2.61.** (M) Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek jegyei szigorúan monoton csökkennek?

**2.62.** (M) Hány egyenest határoznak meg egy szabályos
**a)** hatszög **b)** oktaéder
csúcsai?

**2.63.** (M) Legfeljebb hány síkot határozhat meg a térben 7 pont?

**2.64.** (M) Egy 8×8-as táblázatban hány téglalap található?

**2.65.** (M) A könyvespolcon 10 könyv áll. Hányféleképpen választhatunk ki 3-at, amelyek között nincs szomszédos?

**2.66.** (M) **a)** A sutabástya úgy léphet a sakktáblán, mint a bástya, de egyszerre csak egy mezőt.
A sutabástya az $a1$ mezőről hányféleképpen juthat el 7 lépésben az $e4$ mezőre?
**b)** Most csak jobbra és fölfelé bír egyet-egyet lépni a sutabástya. Keressünk meg minden olyan mezőt, amelybe a bal alsó sarokból indulva legfeljebb 7 lépéssel eljuthat és írjuk rá mindegyikre, hogy hányféleképpen juthat oda!

**2.67.** (M) Hány olyan háromjegyű szám van, melyben a középső jegy nagyobb, mint az első és az utolsó?

**2.68.** (M) Hány olyan háromjegyű $\overline{abc}$ szám van, melyben $b < a + c$, $a < b + c$, $c < a + b$?

**2.69.** (M) Hányféleképpen mehetünk fel egy 8 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egyszerre egy, vagy két lépcsőt lépünk?

**2.70.** (M) Hányféleképpen fedhető egy 2×8-as tábla 2×1-es dominókkal?

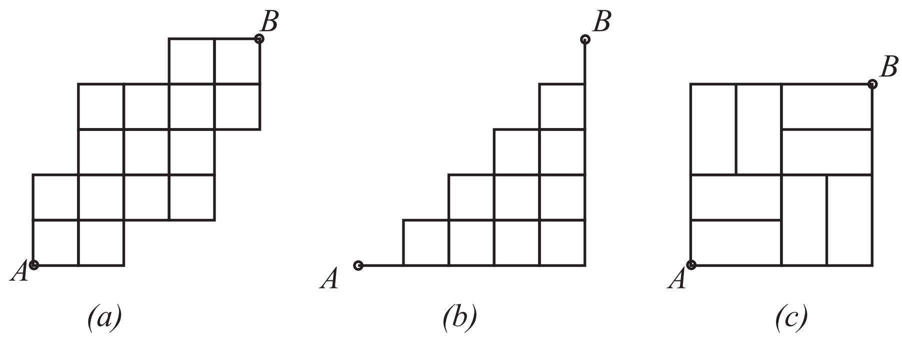
**2.71.** (M) Hány olyan ötjegyű szám van, melynek szomszédos jegyei mindig szomszédos számok?

**2.72.** (M) Hányféleképpen írható fel a 8 pozitív egészek összegeként, ha a tagok sorrendje
**a)** számít **b)** nem számít?

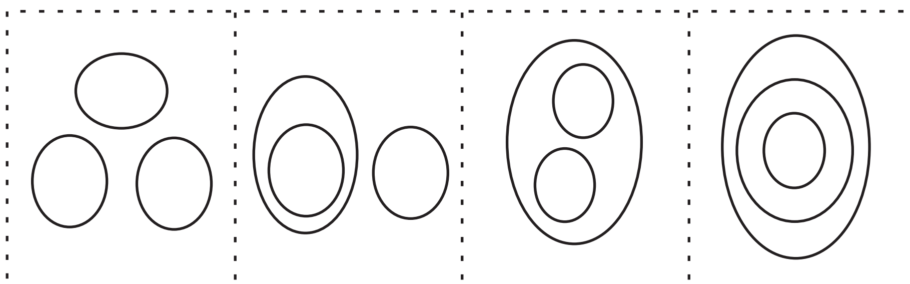
**2.73.** (M) Mindig a lehető legkisebb összeadandót véve rendezzük az eseteket, a számok közé most nem írjuk le a + jeleket: 11111111, 1111112, 111113, 111122, 11114, 11123, 1115, 1124, 1133, 116, 125, 134, 17, 2222, 224, 233, 35, 44, 8, Hány olyan 3 jegyű szám van, melyben a jegyek összege 6?

**2.74.** (M) Hányféleképpen juthatunk el a 2.0.1. ábrán $A$-ból $B$-be a vonalak mentén, ha csak jobbra és felfelé szabad lépni?

**2.75.** (M) Hányféleképpen helyezkedhet el öt buborék, amelyek a levegőben lebegnek? Egyik buborék tartalmazhat több más buborékot is. A buborékok megkülönböztethetetlenek, változtathatják méretüket és alakjukat, de a tartalmazási viszony köztük állandó. Segítségként megjegyezzük, hogy három buborék esetén 4 elrendezés lehetséges (lásd a 2.0.1. ábrát!).




2.74.1. ábra.



2.75.1. ábra.

**2.76.** (M) Az (1, 4) számpárból indulunk. Egy lépésben legalább az egyik számot meg kell növelnünk legalább eggyel. Néhány lépésben eljutottunk a (5, 6) számpárhoz. Hányféle lehetett a növelő lépések rendszere?

**2.77.** (M) Készítsünk algoritmust, ami előállítja $\binom{n}{k}$ értékét!

**2.78.** (M) Azokat a négyjegyű pozitív egész számokat szeretjük, amelyben szerepel a 0 számjegy. Készítsünk algoritmust, ami

**a)** véletlenszerűen előállít egy ilyen számot;

**b)** előállítja az összes ilyen számot úgy, hogy mindegyik maximum egyszer szerepel!

**2.79.** (M) Egy teremben öt lámpa van. Mindegyiket önállóan lehet meggyújtani. Készítsünk algoritmust, ami

**a)** véletlenszerűen megad egy lehetséges „égési állapotot”;

**b)** előállítja az összes lehetséges állapotot!

**2.80.** (M) Készítsünk algoritmust, ami megszámolja, hogy hány olyan szám van az első 1000 pozitív egész szám között, amely a 2, 3 és 5 számok közül

**a)** legalább az egyikkel **b)** pontosan eggyel **c)** pontosan kettővel

osztható!

**2.81.** (M) Készítsünk algoritmust, ami eldönti, hogy az 1-től 10000-ig terjedő egész számok közül abból van-e több, amelyikben előfordul az 1 es vagy 0 számjegyek legalább egyike, vagy abból, amelyekben egyik sem!

**2.82.** (M) Készítsünk algoritmust, ami előállítja az $n$. Fibonacci számot!

**2.83.** (M) Készítsünk algoritmust, ami előállítja az első $n$ Fibonacci számot!

**2.84.** (M) Készítsünk algoritmust, ami véletlenszerűen megkeveri az $n$ elemű $v$ vektor elemeit!

**2.85.** (M) Készítsünk algoritmust, ami véletlenszerűen kiválaszt az $n$ elemű $v$ vektorból $k$ darab elemet!

3. FEJEZET

# Leszámlálási feladatok (teszt)

A 3.1-3.10. feladatok a „közép” szintnek, a 3.11-3.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**3.1.** (M) Hányféleképpen ülhet le egymás mellé öt ember?
**A)** 5 **B)** 25 **C)** 120 **D)** 24 **E)** 100

**3.2.** (M) Az ELME szó betűinek összekeverésével hány különböző négybetűs (akár értelmetlen) szó készíthető?
**A)** 24 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 12 **E)** 8

**3.3.** (M) A 2,2,6,8,8 számjegyekből hány 68-cal kezdődő 5 jegyű szám készíthető?
**A)** 3 **B)** 120 **C)** 6 **D)** 68 **E)** 30

**3.4.** (M) Egy klubdélutánon 5 fiú és 5 lány van. Hányféleképpen alkothatnak párokat a táncoláshoz?
**A)** 625 **B)** 5 **C)** 125 **D)** 25 **E)** 120

**3.5.** (M) Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden jegye páratlan?
**A)** 15 **B)** 100 **C)** 900 **D)** 3 **E)** 125

**3.6.** (M) Hány négybetűs szó van Bergengóciában, ha a bergóc abc-ben csak három betű van?
**A)** 24 **B)** 81 **C)** 16 **D)** 12 **E)** 120

**3.7.** (M) Hány háromelemű részhalmaza van egy 5 elemű halmaznak?
**A)** 10 **B)** 5 **C)** 3 **D)** 15 **E)** 125

**3.8.** (M) Egy 10 fős brigád 3 tagú vezetőséget választ. Hányféle lehet a vezetőség?
**A)** 30 **B)** 1000 **C)** 72 **D)** 720 **E)** 120

**3.9.** (M) A HARCOS szó betűiből letörlünk hármat, hányféle lehet a megmaradt hárombetűs szó?
**A)** 3 **B)** 6 **C)** 27 **D)** 120 **E)** 20

**3.10.** (M) Egy autó rendszámának első három betűje különböző és minden betű megtalálható a BUDAPEST szóban. Hányféle lehet az autó rendszámán szereplő hárombetűs jel?
**A)** 1000 **B)** 336 **C)** 56 **D)** 64 **E)** 720

**3.11.** (M) Hányféleképpen ülhet fel egy négy székes körhintára Tercsi, Fercsi, Kata, Klára és Sára?
**A)** 24 **B)** 120 **C)** 64 **D)** 125 **E)**

**3.12.** (M) Hányféleképpen ülhet le egy padra egymás mellé Aladár, Bea, Cili, Dezső és Rezső, ha Cili nem szeretne Bea mellé ülni?
**A)** 120 **B)** 72 **C)** 24 **D)** 10 **E)** 60

**3.13.** (M) 6 betűkártyánk van. Négyen az A, A, B, C, betűk szerepelnek. Milyen betű lehet a maradék két kártyán, ha a 6 betűkártyával összesen 15 hatbetűs „szó" rakható ki?
**A)** A és B **B)** A és C **C)** A és A **D)** B és C **E)** C és C

**3.14.** (M) Hány hétjegyű szám van, amelynek jegyei szigorúan monoton csökkennek?
**A)** 7 **B)** 720 **C)** 100 **D)** 120 **E)** 21

**3.15.** (M) Egy virágüzletben van szegfű, rózsa, tulipán és liliom. Hányféle csokrot állíthatunk össze 3 szál virágból?
**A)** 64 **B)** 256 **C)** 24 **D)** 12 **E)** 20

**3.16.** (M) Hányféle legalább 4 találatos szelvény van a Bergengóc totóban, ha 6 mérkőzésre lehet tippelni?
**A)** 243 **B)** 81 **C)** 24 **D)** 124 **E)** 73

**3.17.** (M) Hányféleképpen írhatjuk be az 1, 2, ..., 7 számokat a relációs jelek közé a vonalakra: $\_ > \_ > \_ > \_ > \_ < \_ < \_$?
**A)** 7 **B)** 120 **C)** 24 **D)** 15 **E)** 21

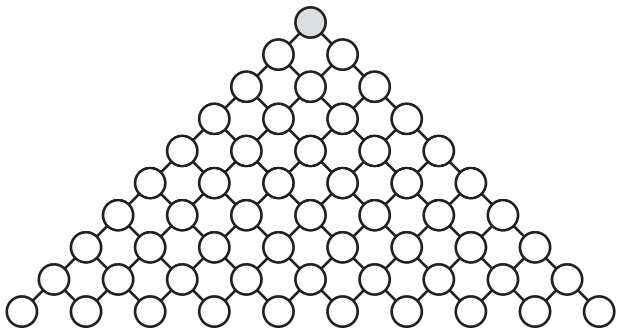
**3.18.** (M) Hányféle legalább két találatos lottószelvény van Bergengóciában, ha 10 számból négyet kell kijelölni?
**A)** 210 **B)** 90 **C)** 115 **D)** 35 **E)** 76

**3.19.** (M) Egy $6 \times 7$-es táblázatban hány téglalap található?
**A)** 42 **B)** 588 **C)** 315 **D)** 720 **E)** 654

**3.20.** (M) A könyvespolcon 8 könyv áll. Hányféleképpen választhatunk ki 3-at, amelyek között nincs szomszédos?
**A)** 20 **B)** 24 **C)** 120 **D)** 83 **E)** 80

# 4. FEJEZET
# A Pascal-háromszög

**4.1.** Hányféleképpen juthatunk el a 4.0.1. ábrán látható háromszög felső csúcsából az egyes pontokba, ha csak ferdén lefelé (jobbra vagy balra lefelé) léphetünk? Írjuk rá minden egyes csomópontra a lehetőségek számát!



4.1.1. ábra.

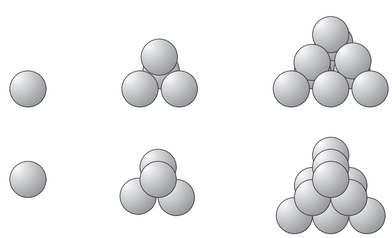
**4.2.** [9] Bizonyítsuk be, hogy a Pascal–háromszög szimmetrikus a csúcsán át húzott függőleges egyenesre!

**4.3.** Adjuk össze a Pascal–háromszög
**a)** negyedik **b)** ötödik **c)** hatodik **d)** tizedik **e)** $n$-edik
sorában álló számokat!
(A Pascal háromszög kezdő sora, amelyben egy darab 1-es áll, szokás szerint, a 0. sor.)

**4.4.** Adjuk össze a Pascal–háromszög
**a)** negyedik **b)** ötödik **c)** hatodik **d)** tizedik **e)** $n$-edik
sorában álló számokat váltakozó előjellel!

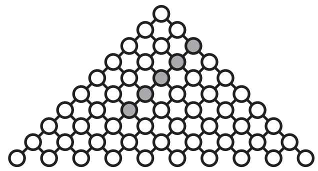
**4.5.** Keressük meg a háromszögszámokat (lásd a A.I.23.8. feladatot) a Pascal–háromszögben!

**4.6.** Határozzuk meg a 100. tetraéderszámot! (Hány golyó van a 4.0.1. ábrán a 100. kupacban? A kupacsorozat oldal- és fölülnézetben is látható az ábrán.)



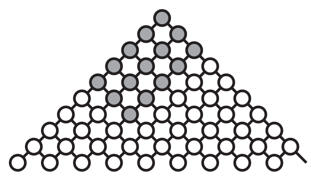
4.6.1. ábra.

**4.7.** (MS) Adjuk össze a Pascal–háromszögben vastagon szedett számokat! Végezzük el az összegzést hasonló állású egyenesek mentén (lásd a 4.0.1. ábrát)! Miért érdekes az eredmény?



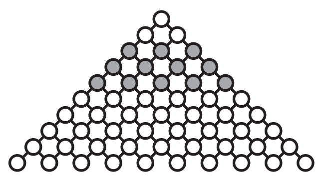
4.7.1. ábra.

**4.8.** (S) Adjuk össze a Pascal–háromszögben vastagon szedett számokat! Végezzük el az összegzést hasonló helyzetű paralelogrammákban (lásd a 4.0.1. ábrát)! Miért érdekes az eredmény?



4.8.1. ábra.

**4.9.** (S) Adjuk össze a Pascal–háromszögben vastagon szedett számokat! Végezzük el az összegzést hasonló helyzetű trapézokban (lásd a 4.0.1. ábrát)! Miért érdekes az eredmény?



4.9.1. ábra.

**4.10.** **a)** Színezzük ki a Pascal–háromszög első 20 sorában a számok helyét paritásuk szerint. A 4.10. ábrán el is kezdtük a színezést. Mit figyelhetünk meg?

**b)** A Pascal–háromszög mely soraiban áll mindenütt páratlan szám?

**c)** A Pascal–háromszög mely soraiban áll (a szélétől eltekintve) mindenütt páros szám?

**4.11.** Keressük meg a Pascal–háromszög azon sorait, amelyekben a két szélső 1-estől eltekintve csupa

**a)** hárommal **b)** öttel

osztható szám áll!

**4.12.** **a)** Számítsuk ki $\binom{3001}{3}$ értékét!

**b)** Mutassuk meg, hogy $\binom{3001}{15}$ osztható 3001-gyel! (Felhasználhatjuk, hogy 3001 prímszám.)

**4.13.** Ismeretes, hogy $2009 = 7^2 \cdot 41$. Adjunk meg olyan $0 < k < 2009$ pozitív egészt, amelyre $\binom{2009}{k}$ nem osztható 2009-cel!

**4.14.** Gyűjtsünk olyan számokat, amelyek csak egyszer fordulnak elő a Pascal–háromszögben!

**4.15.** Az $(a+b)$ kéttagú összeg hatványaival már találkoztunk a A.I.15.15. feladatban. Próbáljuk felírni $(a+b)^{10}$-t hasonló alakban! Keressük meg az együtthatókat a Pascal–háromszögben!

**4.16.** A Pascal–háromszög egyik sorának négy szomszédos eleme a következő:

$$x, \qquad 969, \qquad 3876, \qquad 11628.$$

Mennyi az $x$?

**4.17.** A Pascal–háromszög egyik sorának három szomszédos eleme a következő: 15504, 38760, 77520. Hanyadik ez a sor?

**4.18.** Bergengóciában a Pascal–háromszög helyett a Mascal–háromszöggel számolnak. Ennek 0. sorában három elem áll:

$$2 \qquad -5 \qquad 4$$

A Mascal-háromszög képzési szabálya a Pascal–háromszögével azonos. Határozzuk meg a Mascal–háromszög $n$-edik sorában az elemek

**a)** összegét **b)** előjeles összegét!

**4.19.** [12] Dr. Kekec a Piscal–háromszögre esküszik. Ennek 0-adik sorában egyetlen 1-es áll, az alatta levő sorokban minden szám a fölötte lévő három szám összegével egyenlő (az üres helyek 0-nak tekintendők).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \text{0. sor} \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \text{1. sor} \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \text{2. sor} \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & & \text{3. sor} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & &
\end{array}$$

Mutassuk meg, hogy a Piscal–háromszögben a 2. sortól kezdve mindegyik sorban van páros szám.

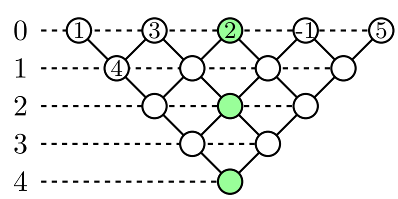
**4.20.** Határozzuk meg a Piscal-háromszög (lásd a 4.19. feladatot) $n$-edik sorában található számok

**a)** összegét; **b)** váltakozó előjelű összegét!

**4.21.** [1] Bontsuk fel a zárójelet!

**a)** $(1 + x + x^2)^2$; **b)** $(1 + x + x^2)^3$; **c)** $(1 + x + x^2)^4$.

**4.22.** A 4.0.1. ábrán úgy írtunk a karikákba számokat, hogy mindegyik szám a fölötte levő két szám összege legyen!




4.22.1. ábra.

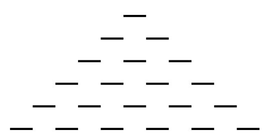
**a)** Milyen szám kerül a legalsó karikába?

**b)** Hogyan változik a legalsó szám értéke, ha a 0. sorban szereplő 3-ast 2-vel növeljük? És ha a 2-est 1-gyel csökkentjük?

**c)** Egy hasonlóan képzett számtáblázatban ismerjük a legalsó számot. Meghatározható-e ebből az egyetlen adatból a felső sorban található öt szám összege?

**d)** Egy hasonlóan képzett számtáblázatban ismerjük a szimmetriatengelyben szereplő három számot (a színezett karikákban lévőket). Meghatározható-e ebből az egyetlen adatból a felső sorban található öt szám összege? Adjuk meg a kérdéses összeget, ha a tengelyben álló három szám felülről lefelé olvasva: 1, 1, 10.

**4.23.** A 4.0.1. ábrán látható számháromszög alsó sorába az 1, 2, 3, 4, 5 számokat írjuk valamilyen sorrendben és minden további szám az alatta levő kettő összege lesz. Az alsó számok hányféle sorrendje esetén lesz a legfölülre kerülő szám öttel osztható?



4.23.1. ábra.

**4.24.** [16] Képezzük a következő számháromszöget:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & \ldots\ldots\ldots & 2008 & & 2009 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & \ldots\ldots & & 4017 & \\ & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Itt az első sorban a 0 és 2009 közötti egész számok állnak növekvő sorrendben. A táblázat további elemeit az ezek fölött (balra, illetve jobbra) álló két szám összeadásával kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy a táblázat legutolsó sorában álló (egyetlen) elem osztható 2009-cel!

**4.25.** Mutassuk meg a kifejezések algebrai alakját használva, hogy

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}.$$

**4.26.** A Pascal háromszög egyik sorában felírtunk néhány egymás melletti elemet. Az egyik számot azonban elírtuk. Melyiket?

**a)** 92 561 040, 193 536 720, 154 817 320, 573 166 440, 818 809 200.

**b)** 7 726 160, 9 657 700, 9 657 700, 9 657 700, 7 726 160.

**4.27.** (M) Készítsünk algoritmust, ami előállítja a Pascal háromszög $n$. sorát!

**4.28.** (M) Készítsünk algoritmust, ami az $n$. soráig kiírja a Pascal-háromszöget!

## 5. FEJEZET

# A Pascal-háromszög (teszt)

Az 5.1-5.10. feladatok a „közép” szintnek, az 5.11-5.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**5.1.** (M) Mennyivel egyenlő $\binom{5}{3}$?

**A)** 5 **B)** 10 **C)** 3 **D)** 15 **E)** 60

**5.2.** (M) Melyik szám szerepel a legkevesebb alkalommal a Pascal háromszögben?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**5.3.** (M) A Pascal háromszög egyik sorának első eleme az 1, második eleme a 9. Mi a harmadik elem?

**A)** 19 **B)** 90 **C)** 36 **D)** 27 **E)** 81

**5.4.** (M) A Pascal háromszög egyik sorában az elemek összege 32. Hány szám áll ebben a sorban a Pascal háromszögben?

**A)** 8 **B)** 32 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 7

**5.5.** (M) Mi a nagyság szerinti sorrendje az $x = \binom{100}{17}$, $y = \binom{100}{71}$, $z = \binom{100}{99}$?

**A)** $z < x < y$ **B)** $x < y < z$ **C)** $z < y < x$ **D)** $y < x < z$ **E)** $x < z < y$

**5.6.** (M) Egy osztályban van 11 fiú és 16 lány. Hányféleképpen választhatunk ki közülük 5 diákot?

**A)** $\binom{27}{5}$ **B)** $\binom{11}{2} \cdot \binom{16}{3}$ **C)** $\binom{11\cdot 16}{5}$ **D)** $\binom{11}{5}+\binom{16}{5}$ **E)** $\binom{37}{5}$

**5.7.** (M) A Pascal háromszögben hányszor fordul elő a 6?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 3

**5.8.** (M) Az alábbiak közül melyik egyenlő $\binom{43}{12}$-vel?

**A)** $\binom{12}{43}$ **B)** $\binom{34}{21}$ **C)** $\binom{43}{21}$ **D)** $\binom{42}{31}$ **E)** $\binom{43}{31}$

**5.9.** (M) Az 1-nél nagyobb négyzetszámok közül melyik a legkisebb, amely a Pascal háromszög valamely sorának harmadik eleme?

**A)** 4 **B)** 3 **C)** 9 **D)** 36 **E)** 25

**5.10.** (M) Az alábbiak közül melyikkel egyenlő a $\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$?

**A)** $\binom{12}{9}$ **B)** $\binom{9}{4}$ **C)** $\binom{8}{4}$ **D)** $\binom{12}{8}$ **E)** $8! \cdot \binom{12}{4}$

**5.11.** (M) Mennyivel egyenlő $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$?

**A)** $\binom{8}{3}$ **B)** $\binom{7}{4}$ **C)** $\binom{8}{4}$ **D)** $\binom{7}{5}$ **E)** $\binom{8}{5}$

**5.12.** (M) A Pascal háromszög egyik sorának első 6 elemének összege 1024. Mi ebben a sorban a második elem?

**A)** 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 6 **E)** 7

**5.13.** (M) A Pascal háromszögben hányszor fordul elő a 23?

**A)** 2 **B)** 23 **C)** 1 **D)** 3 **E)** 0

**5.14.** (M) Az alábbi számok közül melyik a legnagyobb prímosztója a $\binom{34}{29}$-nek?

**A)** 61 **B)** 29 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 31

**5.15.** (M) Mennyivel egyenlő $\binom{23}{0}-\binom{23}{1}+\binom{23}{2}-\binom{23}{3}+\binom{23}{4}-\binom{23}{5}+\binom{23}{6}-\binom{23}{7}+\binom{23}{8}$?

**A)** $\binom{22}{8}$ **B)** $\binom{24}{8}$ **C)** $\binom{24}{7}$ **D)** $\binom{22}{7}$ **E)** $\binom{23}{9}$

**5.16.** (M) Mennyivel egyenlő $\binom{77}{54}+2\cdot\binom{77}{55}+\binom{77}{56}$?

**A)** $2\cdot\binom{78}{55}$ **B)** $\binom{79}{56}$ **C)** $\binom{78}{57}$ **D)** $\binom{78}{22}$ **E)** $\binom{79}{55}$

**5.17.** (M) A Pascal háromszögben melyik a legkisebb szám, amelyik osztható $2^9$-nel az alábbiak közül? (D)

A: 1024; B: $\binom{29}{15}$; C: $\binom{100}{3}$; D: $\binom{2^9}{1}$; E: $\binom{1024}{2}$;

**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**5.18.** (M) Mennyivel egyenlő $\binom{31}{0}+\binom{32}{1}+\binom{33}{2}+\binom{34}{3}+\binom{35}{4}+\binom{36}{5}+\binom{37}{6}$?

**A)** $\binom{38}{7}$ **B)** $\binom{38}{6}$ **C)** $\binom{38}{30}$ **D)** $\binom{37}{7}$ **E)** $\binom{39}{6}$

**5.19.** (M) Mi a nagyság szerinti sorrendje az $x=\binom{1000}{171}$, $y=\binom{1000}{717}$, $z=\binom{1000}{971}$?

**A)** $z<x<y$ **B)** $x<y<z$ **C)** $z<y<x$ **D)** $y<x<z$

**E)** $x<z<y$

**5.20.** (M) Mennyivel egyenlő $(a+b)^{20}$ kifejtett alakjában az $a^7b^{13}$ együtthatója?

**A)** $\binom{13}{7}$ **B)** $\binom{20}{6}$ **C)** 20 **D)** $7\cdot 13$ **E)** $\binom{20}{13}$

# 6. FEJEZET
# A szita-módszer

**6.1.** (M) [16] **a)** Egy intézetben 67 ember dolgozik. Németül 35-en, angolul 47-en, az utóbbiak közül németül 23-an beszélnek. Hány olyan dolgozója van az intézetnek, aki sem angolul, sem németül nem beszél?

**b)** Nehezítsük az a) feladatot, tegyük fel, hogy franciául 20-an, angolul és franciául 12-en, németül és franciául 11-en, mindhárom nyelven 5-en beszélnek. Így hány olyan dolgozó van, aki egyik idegen nyelvet sem beszéli?

**6.2.** A Banán sziget parlamentjében két párt van. A Mandarin Párt képviselői mind szeretik a mandarint. Az ellenpárt 90%-a nem szereti a mandarint. Hány százalékos a Mandarin Párt aránya a parlamentben, ha az összes képviselő 46%-a szereti a mandarint?

**6.3.** (M) Az osztályban 12 tanulónak volt ötöse matematikából, 16 tanulónak magyarból. 8 tanulónak egyik tárgyból sem sikerült ötöst szerezni. Hányan járnak az osztályba, ha 6 tanulónak matematikából és magyarból is ötöse volt?

**6.4.** (M) Egy zenei osztályban kétszer annyi diák tanul hegedülni, mint ahány zongorázni. Öten mindkét hangszeren tanulnak játszani. Az osztálylétszám 22 és mindenki tanul valamelyik hangszeren. Hányan tanulnak zongorázni és hányan tanulnak hegedülni?

**6.5.** (M) Egy osztályba 38 tanuló jár. Mindenki űzi az alábbi sportok valamelyikét: atlétika, röplabda, úszás. Atlétikával 19-en foglalkoznak, 21-en röplabdáznak, 12-en úsznak. 7 tanuló atlétizál és úszik, 6tanuló atlétizál és röplabdázik, 3 tanuló röplabdázik és úszik. Hány tanuló űzi mindhárom sportot?

**6.6.** (M) Egy baráti társaság 3 kirándulást szervezett. Mindegyik kiránduláson 15 gyerek vett részt. Az első kirándulás résztvevői közül heten voltak jelen a másodikon és nyolcan a harmadikon. A második kirándulás öt résztvevője ment el a harmadik kirándulásra. Négy olyan gyerek volt, aki háromszor kirándult. Hány gyerek volt jelen legalább az egyik kiránduláson?

**6.7.** (M) Egy iskolában három kirándulást szerveztek. Az elsőre 320, a másodikra 280, a harmadikra 350 tanuló ment el. 60 tanuló mind a három, 130 tanuló legalább két kiránduláson részt vett. Hány tanuló vett részt legalább egy kiránduláson?

**6.8.** (M) Egy matekversenyen 30 tanuló indult. A versenyzőknek 3 feladatot kellett megoldani. Az első feladatot 19-en, a másodikat 15-en, a harmadikat 18-an oldották meg. Az első és második feladatra 7-en, az első és harmadik feladatra 9-en, a második és harmadik feladatra 10-en adtak helyes megoldást. Mindhárom feladatot 3 tanulónak sikerült megoldani. Hány tanulónak nem sikerült megoldani egy feladatot sem?

**6.9.** A 32-fős 12.c osztály osztályfőnökének az osztály nyelvtanulásával kapcsolatos statisztikát kell készítenie. A statisztikai kérdőív a következő kérdésekből állt:

**1.** Hányan járnak az osztályba?
**2.** Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája angol nyelvből?
**3.** Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája francia nyelvből?
**4.** Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája német nyelvből?

**5.** Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv mindegyikéből?
**6.** Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv közül pontosan kettőből?
**7.** Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv közül pontosan egyből?
**8.** Hány tanulónak nincs középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv egyikéből sem?

Az utolsó két kérdés az osztályfőnök szerint felesleges.

**a)** Határozzuk meg a rájuk adandó választ, ha az első hat kérdésre adott válasz rendre 32, 20, 15, 6, 2, 9!

**b)** Jelölje az $i$-edik kérdésre adott választ $x_i$. Fejezzük ki $x_7$ és $x_8$ értékét $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, és $x_6$ segítségével!

**6.10.** Hány olyan pozitív egész szám van 1200-ig, amely

**a)** nem osztható 2-vel **b)** nem osztható 3-mal

**c)** 2-vel és 3-mal sem osztható?

**6.11.** (M) Hány olyan van az első 1000 természetes szám között, mely a 2, 3, 5 számok közül

**a)** legalább az egyikkel **b)** pontosan eggyel **c)** legfeljebb kettővel

**d)** pontosan kettővel

osztható?

**6.12.** (M) Hány olyan szám van 1200-ig, amely relatív prím 1200-hoz?

**6.13.** (M) Hány olyan

**a)** háromjegyű **b)** négyjegyű **c)** $n$-jegyű

szám van, mely csupán az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

**6.14.** (M) Hány olyan 4-jegyű szám van, melynek jegyei között az 1 és 2 számjegyek közül legalább az egyik szerepel?

**6.15.** (M) Az 1-től 10000-ig terjedő egész számokat írjuk fel egy papírra, majd húzzuk ki közülük azokat, amelyekben a 0 vagy az 1 előfordul. Több vagy kevesebb szám marad fenn, mint a felírt számok fele?

**6.16.** Az 1 m sugarú körlapon egy-egy 40 cm oldalú piros és kék négyzetlap helyezkedik el. A négyzetek nem lógnak le a körlapról. A piros négyzet csúcsa a kék négyzet középpontjára esik.

**a)** Határozzuk meg a körlap négyzetek által nem takart részének területét, feltéve, hogy a két négyzet oldalai egymással párhuzamosan helyezkednek el!

**b)** Milyen határok között változhat a körlap négyzetek által nem takart részének területe?

**6.17.** **a)** Két 5 cm sugarú kör kölcsönösen átmegy egymás középpontján. Határozzuk meg a két körlap közös részének területét!

**b)** három 5 cm sugarú kör közül mindegyik átmegy a másik kettő középpontján. Határozzuk meg a három körlap közös részének területét!

**6.18.** (M) Pistike nem vigyáz a köpenyére. Az összesen csak 1 m$^2$-nyi anyagra anyukája már öt ízben varrt 30 dm$^2$-es foltot, hatszor pedig 20 dm$^2$-eset. Biztosan igaz-e, hogy van két olyan folt, amelyek legalább 3 dm$^2$-en fedik egymást?

**6.19.** (M) A Bergengóc Közigazgatási Minisztérium megbízásából a Geográfiai Társaság az alábbi jelentést készítette az ország térképezettségéről.

*Bergengócia felfedezése óta öt térkép készült az országról, illetve annak egyes részeiről.*

*Sorra vettük az egyes térképeket, és meghatároztuk, hogy mekkora területet ábrázoltak rajtuk. Az így kapott öt érték összege* 207 *ezer km*$^2$*.*

*Ezután sorra vettük a térképpárokat. Felmértük, hogy mekkora annak a résznek a területe, amelyik az első és a második térképen is rajta van, majd annak, ami az első és a harmadik térképen is rajta van … végül annak, ami a negyedik és az ötödik térképen is rajta van. Az így kapott értékek összege is* 207 *ezer* $km^2$.

*Ezután a térképhármasok következtek. Felmértük, hogy mekkora annak a résznek a területe, amelyik az első, a második és a harmadik térképen is rajta van, majd annak, ami az első, a második és a negyedik térképen is rajta van … végül annak, ami a harmadik, negyedik és az ötödik térképen is rajta van. Az így kapott értékek összege* 105 *ezer* $km^2$.

*A térképnégyesekre hasonlóan képzett összeg* 25 *ezer* $km^2$.

*Mind az öt térképen ábrázolt terület csak* 2 *ezer* $km^2$.

Határozzuk meg a jelentés alapján Bergengócia még feltérképezetlen részének területét, ha tudjuk, hogy az ország teljes területe 90 ezer $\mathrm{km}^2$!

**6.20.** (M) Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet a megcímzett borítékokba úgy, hogy semelyik levél se a jó címzéshez kerüljön?

**6.21.** (M) Egy kerek asztal köré leül 5 házaspár. Hányféleképpen lehet, hogy semely hölgy sem ül a férje mellett?

**6.22.** (M) A sivatagban vonul a tevekaraván 7 tevével, melyek nap közben libasorban haladnak. A beduin kereskedő szeretné a monoton vonulást a tevék számára elviselhetőbbé tenni, ezért minden nap úgy sorakoztatja fel őket, hogy senki ne lássa maga előtt ugyanazt a tevét, mint előző nap. A legelső teve lehet ugyanaz. Hányféle sorrend közül választhat reggelente a karaván vezetője?

**6.23.** (M) Készítsünk algoritmust, ami megszámolja, hogy hány olyan szám van 1-től 1200-ig, amely relatív prím 1200-hoz.

7. FEJEZET

# A szita-módszer (teszt)

A 7.1-7.10. feladatok a „közép” szintnek, a 7.11-7.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**7.1.** (M) Egy intézetben 20 ember dolgozik. Németül 10-en, angolul 12-en, az utóbbiak közül németül 5-an beszélnek. Hány olyan dolgozója van az intézetnek, aki sem angolul, sem németül nem beszél?

**A)** 20 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 5

**7.2.** (M) Egy zenei osztályban kétszer annyi diák tanul hegedülni, mint ahány zongorázni. Öten mindkét hangszeren tanulnak játszani. Az osztálylétszám 10 és mindenki tanul valamelyik hangszeren. Hányan tanulnak zongorázni?

**A)** 5 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 0 **E)** 6

**7.3.** (M) Egy baráti társaság 3 kirándulást szervezett. Mindegyik kiránduláson 15 gyerek vett részt. Az első kirándulás résztvevői közül hatan voltak jelen a másodikon és heten a harmadikon. A második kirándulás nyolc résztvevője ment el a harmadik kirándulásra. öt olyan gyerek volt, aki háromszor kirándult. Hány gyerek volt jelen legalább az egyik kiránduláson?

**A)** 15 **B)** 34 **C)** 25 **D)** 41 **E)** 29

**7.4.** (M) Hány olyan pozitív egész szám van 120-ig, amely 2-vel, vagy 3-mal osztható?

**A)** 80 **B)** 100 **C)** 40 **D)** 6 **E)** 120

**7.5.** (M) Hány olyan pozitív egész szám van 100-ig, amelyet a 2 és 5 számok közül pontosan egy oszt?

**A)** 70 **B)** 60 **C)** 50 **D)** 40 **E)** 7

**7.6.** (M) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben a második jegy 2, vagy a harmadik jegy 3?

**A)** 729 **B)** 353 **C)** 200 **D)** 171 **E)** 121

**7.7.** (M) Hány olyan háromjegyű pozitív egész van, amelyekre a következő három tulajdonság egyike sem teljesül: a második jegye páros; a harmadik jegye 2; a második és harmadik jegyének összege páros?

**A)** 168 **B)** 180 **C)** 196 **D)** 211 **E)** 225

**7.8.** (M) Egy külkereskedelmi vállalatnál minden dolgozó beszél az angol, német, francia nyelvek közül legalább egyet. Angolul 20-an tudnak, németül 15-en, franciául 10-en. Mindhárom nyelvet 5 dolgozó beszéli. Legfeljebb hány dolgozója lehet a vállalatnak, ha angolul és németül hárommal többen beszélnek, mint németül és franciául?

**A)** 32 **B)** 45 **C)** 40 **D)** 37 **E)** 2
7

**7.9.** (M) Hány olyan négyjegyű pozitív egész van, amelyben szerepel a 2, 3, 4 mindegyike?

**A)** 1526 **B)** 512 **C)** 198 **D)** 178 **E)** 514

**7.10.** (M) Bergengócia lakosságának 60%-a fogyaszt rendszeresen gyümölcsöt és a lakosság 70%-a tud úszni. Az úszni tudók 80%-a fogyaszt rendszeresen gyümölcsöt. A lakosság hány százalékára igaz, hogy nem tud úszni és nem fogyaszt rendszeresen gyümölcsöt?
**A)** 50% **B)** 56% **C)** 44% **D)** 34% **E)** 26%

**7.11.** (M) Hány olyan ötjegyű pozitív egész van az ötös számrendszerben, amelyben szerepel a 2, 3, 4 mindegyike?
**A)** 2212 **B)** 2122 **C)** 2202 **D)** 2022 **E)** 2220

**7.12.** (M) Hány olyan pozitív egész szám van 1000-ig, amelyet a 7 és 11 számok közül pontosan egy oszt?
**A)** 220 **B)** 232 **C)** 244 **D)** 208 **E)** 241

**7.13.** (M) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben a második jegy páros, vagy minden jegy 5-nél kisebb?
**A)** 490 **B)** 629 **C)** 825 **D)** 375 **E)** 605

**7.14.** (M) Hányféleképpen helyezhetünk el 4 levelet a megcímzett borítékokba úgy, hogy semelyik levél se a jó címzéshez kerüljön?
**A)** 11 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 7 **E)** 5

**7.15.** (M) Három civakodó házaspár hányféleképpen ülhet le a moziban lefoglalt egymás melletti hat székre úgy, hogy senki nem ül a párja mellett?
**A)** 256 **B)** 244 **C)** 226 **D)** 240 **E)** 321

**7.16.** (M) Bergengócia lakosságának legalább 60%-a fogyaszt rendszeresen gyümölcsöt, továbbá a lakosság legfeljebb 70%-a tud úszni. Az úszni tudók legalább 80%-a fogyaszt rendszeresen gyümölcsöt. A lakosság legfeljebb hány százalékára igaz, hogy nem tud úszni és nem fogyaszt rendszeresen gyümölcsöt?
**A)** 50% **B)** 70% **C)** 30% **D)** 56% **E)** 40%

**7.17.** (M) Egy 1 m oldalú zöld négyzeten egy-egy 40 cm oldalú piros és kék négyzetlap helyezkedik el. A piros és kék négyzetek nem lógnak le a zöld négyzetről. A piros négyzet csúcsa a kék négyzet középpontjára esik. Mekkora a nem takart zöld rész területe?
**A)** nem határozható meg **B)** 8000cm$^2$ **C)** 68000cm$^2$
**D)** 8400cm$^2$ **E)** 80000cm$^2$

**7.18.** (M) Hány olyan háromjegyű pozitív egész van, amelyekre a következő három tulajdonság egyike sem teljesül: az első két jegy összege páros; az első és a harmadik jegyének összege páratlan; a második és harmadik jegyének összege páros?
**A)** 168 **B)** 180 **C)** 196 **D)** 211 **E)** 225

**7.19.** (M) Hány olyan szám van 1500-ig, amely relatív prím 1200-hoz?
**A)** 320 **B)** 480 **C)** 420 **D)** 450 **E)** 400

**7.20.** (M) Hány részhalmaza van az 1,2,3,4,5 halmaznak amelyre a következő tulajdonságok közül pontosan egy teljesül: az 1 eleme a részhalmaznak; a 2 eleme a részhalmaznak; a részhalmaz 3 elemű?
**A)** 5 **B)** 13 **C)** 11 **D)** 16 **E)** 12

8. FEJEZET

# A skatulyaelv

További feladatok találhatók Róka Sándor könyvének [13] megfelelő fejezetében.

**8.1.** (M) Van 70 golyónk, közülük 20 piros,20 zöld, 20 sárga és a maradék 10 közül néhány fekete, a többi fehér. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte 10 azonos színű golyó?

**8.2.** (M) Van 80 golyónk, közülük 35 piros, 25 zöld, 15 sárga, 5 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte

**a)** piros;

**b)** piros vagy fekete;

**c)** piros és fekete;

**d)** két különböző színű;

**e)** valamelyik színből legalább három?

**8.3.** (M) Van $G$ darab golyónk, közülük $P$ piros, $Z$ zöld, $S$ sárga és $F$ fekete.

**a)** Tudjuk, hogy legkevesebb 5 darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte piros. Határozzuk meg $F$ és $G$ értékét, ha ismert, hogy $Z = 1$, $S = 2$, $P = 3$.

**b)** Tudjuk, hogy legkevesebb 10 darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte piros és fekete. Határozzuk meg $S$ és $G$ értékét, ha ismert, hogy $P = 2$, $F = 3$, $Z = 4$!

**8.4.** (M) Egy ládában 4 fajta alma van, minden fajtából egyenlő mennyiség, összesen 100 darab. Hány almát kell kivenni véletlenszerűen, hogy a kivettek között biztosan legyen valamelyik fajtából 10 alma?

**8.5.** (M) Egy dobozban azonos méretű zoknik vannak: összesen 5 párra való fehér, 10 párra való fekete és 15 párra való barna zokni. Hány darabot kell ezekből látatlanban kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük egy pár? (A jobb- és a ballábas zokni egyforma.)

**8.6.** (M) Igaz-e, hogy egy 37-es létszámú osztályban biztosan van 4 diák, akik ugyanabban a hónapban ünneplik a születésnapjukat?

**8.7.** (M) Legalább hány lakosa van annak az országnak, ahol biztosan van két olyan lakos, akiknek ugyanolyan a fogazata? ( ugyanazon a helyen van ill. hiányzik foga)

**8.8.** 50 különböző pozitív egész szám összege 2496. Bizonyítsd be, hogy közülük legalább 2 páros.

**8.9.** (M) Bizonyítsuk be, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, amelyek különbsége osztható 10-zel!

**8.10.** Hány pozitív egész szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő összege és semelyik kettő különbsége se legyen osztható 7-tel?

**8.11.** (M) Legfeljebb hány különböző pozitív prímszámot lehet megadni úgy, hogy közülük bármely három összege prímszám legyen?

**8.12.** (M) Kitölthető-e egy 5×5-ös táblázat 1 és -1 számokkal úgy, hogy az egyes sorokban illetve oszlopokban álló számok összege mind különböző legyen?

**8.13.** (M) Tegyük fel, hogy bizonyos tárgyak között van két különböző színű, továbbá van két különböző alakú. Bebizonyítandó, hogy akkor van a tárgya közt két olyan, melyek színben is, alakban is különböznek. (Kürschák verseny, 1940. [4])

**8.14.** (M) Mutassuk meg, hogy
**a)** bármely 3 szám közül kiválasztható 2, melyek összege osztható 2-vel;
**b)** bármely 5 szám közül kiválasztható 3, melyek összege osztható 3-mal;
**c)** bármely 7 szám közül kiválasztható 4, melyek összege osztható 4-gyel!

**8.15.** (M) Kockás lapon 40 kis négyzetet kiszíneztünk. Igaz-e, hogy ekkor biztosan kiválasztható közülük 10, amelyeknek nincs közös pontja? (Még közös csúcs se lehet!)

**8.16.** Hány négyzetszám között van biztosan kettő, amelyek különbsége osztható
**a)** 3-mal **b)** 4-gyel **c)** 8-cal?

**8.17.** (M) Mutassuk meg, hogy $\pi$ tizedesjegyei között van három egymást követő számjegy, melyek így együtt végtelen sokszor előfordulnak!

**8.18.** (M) Adott 21 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik közt van négy egyenlő. (Arany Dániel-verseny, 1984H)

**8.19.** (M) Adott hét különböző természetes szám, melyek összege 100. Igazoljuk, hogy van köztük 3, amelyek összege legalább 50.

**8.20.** (M) [6] Adott 20 különbözö pozitív egész szám, amelyek nem nagyobbak 70-nél. Bizonyítsuk be, hogy a számok páronként vett különbségei között van négy egyenlö!

**8.21.** (M) Pistikének 100 korongja volt, rajtuk a számok 1-100-ig, mindegyiken 1-1. Ki szeretne tenni 4-et úgy, hogy az első kettő összege megegyezzen a másik kettőével. Például így:

$$(1) + (5) = (4) + (2).$$

Sajnos 75 korongot elvesztett. Megoldható-e a feladat a maradék 25 koronggal?

**8.22.** (M) A sík minden pontját kékre vagy pirosra színeztük. Bizonyítsuk be, hogy van két azonos színű pont, amelyek távolsága 1 egység!

**8.23.** (M) A sík pontjait kiszíneztük három színnel. Igazoljuk, hogy valamelyik színű pontból végtelen sok lesz.

**8.24.** (M) Kiszíneztük két színnel a sík pontjait. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n esetén van egyszínű n csúcsú konvex sokszög.

**8.25.** (M) **a)** A sík pontjait kiszíneztük két színnel. Igazoljuk, hogy lesz olyan téglalap, amelynek csúcsai azonos színűek.
**b)** Oldjuk meg a feladatot, ha n színnel színezünk!
**c)** Az a) és b) feladatrészben is elegendő, ha $k$ (azaz előre rögzített véges sok) pontot színezünk ki. Adjunk meg megfelelő $k$ számot az egyik és a másik esetben is!

**8.26.** (M) Igazoljuk, hogy végtelen sok pont páronkénti távolságai között végtelen sokféle érték van.

**8.27.** Legfeljebb hány pont adható meg a

**a)** síkbeli **b)** térbeli

koordinátarendszerben úgy, hogy semelyik kettőt összekötő szakasz felezőpontja se legyen rácspont?

**8.28.** Egy 300 egység oldalú négyzetben adott 10 pont. Mutassuk meg, hogy van köztük két olyan, amelyek távolsága kisebb 142 egységnél.

**8.29.** (M) Egy 70 cm oldalú négyzet alakú céltáblára leadunk 50 lövést: „elég jól” lövünk, mert minden lövésünk eltalálja a céltáblát. Bizonyítsuk be, hogy van két lövés, mely egymáshoz 15cm-nél közelebb csapódott be!

**8.30.** (M) [18] Bergengóciában a BLB mérkőzéseire engedélyezett pályák szélessége 39m hosszúsága 91m. Igaz-e, hogy a mérkőzés folyamán mindig található a pályán két olyan játékos, akik között

**a)** 15 méternél **a)** 19 méternél

kisebb a távolság? (Feltételezzük, hogy mind a 22 játékos a pályán van.)

**8.31.** (M) Egység sugarú körlapon 7 pontot helyeztünk el. Igazoljuk, hogy van közöttük kettő, amelyek távolsága 1-nél nem nagyobb!

**8.32.** (M) Egység négyzetben adott 51 pont. Igazoljuk, hogy van köztük 3 olyan, amelyek egy $\frac{1}{7}$ egység sugarú körben vannak!

**8.33.** (M) Készítsünk algoritmust, ami megjeleníti az 50 darab célba lövésünket, amit a, $70 \times 70$ pixeles céltáblára tettünk (mondjuk, hogy nagyon amatőrök vagyunk, a lövések véletlenszerűek, de azért eltalálják a céltáblát)!

9. FEJEZET

# A skatulyaelv (teszt)

A 9.2-9.11. feladatok a „közép” szintnek, a 9.12-9.21. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**9.1.** (M) Legfeljebb hány bástya helyezhető el egy $6 \times 6$-os sakktáblán úgy, hogy páronként ne üssék egymást?

**A)** 8 **B)** 6 **C)** 1 **D)** 12 **E)** 11

**9.2.** (M) 30 ember közt biztosan van $x$, akik ugyanabban a hónapban születtek. Mekkora az $x$ szám legnagyobb értéke?

**A)** 1 **B)** 12 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 6

**9.3.** (M) Van 50 golyónk, közülük 20 piros, 20 zöld és a maradék 10 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte 10 azonos színű golyó?

**A)** 31 **B)** 48 **C)** 11 **D)** 28 **E)** 13

**9.4.** (M) Egy ládában 3 fajta alma van, minden fajtából egyenlő mennyiség, összesen 90 darab. Hány almát kell kivenni véletlenszerűen, hogy a kivettek között biztosan legyen valamelyik fajtából 9 alma?

**A)** 10 **B)** 32 **C)** 25 **D)** 27 **E)** 28

**9.5.** (M) Legfeljebb hány egész szám adható meg úgy, hogy a négyzetük utolsó jegye páronként különböző legyen?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 11 **D)** 9 **E)** 10

**9.6.** (M) Ha a Bergengóc kormány tagjai mind gondolnak egy-egy egész számra, akkor biztosan lesz két olyan szám, amelyek különbsége osztható 8-cal. Legalább hány főből áll a kormány?

**A)** 17 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 16

**9.7.** (M) Van 60 golyónk, közülük 10 piros, 25 zöld, 20 sárga, 5 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte zöld vagy fekete?

**A)** 21 **B)** 16 **C)** 36 **D)** 26 **E)** 31

**9.8.** (M) Van 40 golyónk, közülük 10 piros, 6 zöld, 20 sárga, 4 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte három azonos színű?

**A)** 37 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 21 **E)** 13

**9.9.** (M) Van 70 golyónk, közülük 10 piros, 15 zöld, 20 sárga, 25 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte három különböző színű?

**A)** 46 **B)** 5 **C)** 26 **D)** 67 **E)** 9

**9.10.** (M) Melyik az a legkisebb n szám, amire biztosan igaz: n egész szám közt mindig található kettő, melyek különbsége osztható 77-tel.

**A)** 78 **B)** 7 **C)** 11 **D)** 18 **E)** 77

**9.11.** (M) Három falu tehenei ugyanazon a réten legelnek. Összesen 91 állat van. Melyik a legnagyobb n, amire biztosan igaz: van olyan állat, amelynek falujából még n állat legel a réten.
**A)** 3 **B)** 90 **C)** 33 **D)** 31 **E)** 30

**9.12.** (M) Egy teremben emberek vannak, senkinek sem tudjuk a szülinapját. Legalább hányan vannak, ha ennek ellenére biztosak vagyunk benne: van 7 olyan, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapjuk?
**A)** 8 **B)** 84 **C)** 85 **D)** 73 **E)** 42

**9.13.** (M) Van 60 golyónk, közülük 5 piros, 10 zöld, 20 sárga, 25 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte 12 azonos színű?
**A)** 45 **B)** 38 **C)** 40 **D)** 39 **E)** 25

**9.14.** (M) Ha a Bergengóc kormány tagjai mind gondolnak egy-egy négyzetszámra, akkor biztosan lesz két olyan szám, amelyek különbsége osztható 8-cal. Mekkora a kormány létszámának legkisebb értéke?
**A)** 8 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 3 **E)** 65

**9.15.** (M) Egy $11\times11$-es négyzet alakú asztalon van 6 darab $3\times8$-as, és 5 darab $4\times6$-os téglalap alakú szalvéta. Egyik szalvéta se lóg le az asztalról. Ekkor legalább hány szalvétát tudunk egy gombostűvel az asztal lapjára merőlegesen átszúrni?
**A)** 5 **B)** 2 **C)** 11 **D)** 6 **E)** 3

**9.16.** (M) Van $n$ darab golyónk, közülük $x$ piros, $y$ zöld, $z$ sárga és $v$ fekete. Tudjuk, hogy legkevesebb 7 darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte zöld. Határozzuk meg $v$ értékét, ha ismert, hogy $y=1$, $z=2$, $x=3$.
**A)** 2 **B)** 1 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 6

**9.17.** (M) Piros, fehér és zöld színű négyzeteink és háromszögeink vannak egy dobozban. Összesen 91 síkidomunk van. Melyik a legnagyobb n, amire biztosan igaz: van olyan idom, amelyhez még n ugyanolyan színű és ugyanannyi szögű alakzatunk van a dobozban.
**A)** 15 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 31 **E)** 9

**9.18.** (M) Mely $(x;y)$ számpárra igaz a következő: Ha $x$ darab szomszédos egész szám közül kiválasztunk $y$ darabot, akkor a kiválasztottak közt biztosan lesz kettő, melyek különbsége 5-tel osztható.
**A)** $13;3)$ **B)** $(27;7)$ **C)** $(35;5)$ **D)** $(24;4)$ **E)** $(12;4)$

**9.19.** (M) Van $x$ darab ceruzánk, közülük $K$ kék, $B$ barna, $S$ sárga és $F$ fekete. Tudjuk, hogy legkevesebb 15 darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közte kék és barna. Határozzuk meg $S$ értékét, ha ismert, hogy $K=3$, $B=5$, $F=4$!
**A)** 16 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 7

**9.20.** (M) Adott $n$ darab olyan egész, amelyek prímtényezős felbontásában csak a 2, 3 és 5 fordul elő. Határozzuk meg $n$ legkisebb értékét, ha biztosan ki szeretnénk tudni választani két számot, amelyek szorzata négyzetszám.
**A)** $n=3$ **B)** $n=5$ **C)** $n=7$ **D)** $n=9$ **E)** $n=11$

**9.21.** (M) Mely $(x; y)$ számpárra igaz a következő: Ha $x$ darab szomszédos egész szám közül kiválasztunk $y$ darabot, akkor a kiválasztottak közt biztosan lesz kettő, melyek különbsége 5-nél kisebb.

**A)** $(122; 23)$ **B)** $(123; 22)$ **C)** $(126; 27)$ **D)** $(127; 26)$ **E)** $(221; 45)$

10. FEJEZET

# Feladatok a sakktáblán

**10.1.** (M) Hányféleképpen helyezhető el a sakktáblán egyetlen figura?

**10.2.** (M) Hányféleképpen helyezhető el a sakktáblán két bástya úgy, hogy ne üssék egymást?

**10.3.** (M) Legfeljebb hány bástya helyezhető el a sakktáblán úgy, hogy páronként ne üssék egymást?

**10.4.** (M) 8 bástya hányféleképpen helyezhető el a sakktáblán, ha páronként nem ütik egymást?

**10.5.** (M) Legfeljebb hány

**a)** huszár **b)** futó **c)** vezér

helyezhető el a sakktáblán úgy, hogy páronként ne üssék egymást?

**10.6.** (M) Helyezzünk el a sakktáblára minél kevesebb

**a)** királyt **b)** vezért

úgy, hogy ha még egy további ugyanilyen figurát felteszünk a tábla valamely mezőjére, akkor biztosan legyen kettő közöttük, melyek ütik egymást!

**10.7.** (M) A sakktábla a1, b2, c3, d4 mezőin áll egy-egy figura. Vágjuk szét a táblát négy egybevágó részre úgy, hogy minden részen legyen egy figura.

**10.8.** (M) **a)** Egy bogarat teszünk a sakktábla valamelyik mezőjére. Körbejárhat-e a mezőkön úgy, hogy mindig olyan mezőre lép, amely élben szomszédos az aktuálisan elfoglalt helyével, minden mezőre egyszer lép rá és végül visszalép a kiindulási mezőre?

**b)** Gondoljuk meg az a) feladatot $k \times n$-es sakktáblán!

**c)** Gondoljuk meg az a) feladatot térben, ahol egybevágó kockákból felépített téglatest kockáin vándorol végig bogarunk!

**10.9.** (M) Egy ló indul a tábla b2 mezőjéről. Legalább hány lépés alatt érheti el az e8 mezőt?

**10.10.** (M) Egy ló indul a tábla b2 mezőjéről. Minden mezőre egyszer lépve eljuthat-e végül az e7 mezőre?

**10.11.** (M) [3] Bejárhatja-e a ló a sakktábla mezőit úgy, hogy minden mezőre egyszer lép és végül visszalép a kiindulási mezőre? Gondoljuk meg ezt a kérdést más méretű sakktáblán is pl $4\times4$, $5\times5$, $8\times8$.

**10.12.** (M) Egy $5\times5$-ös sakktábla minden mezőjén van egy bogár. Sípszóra mindegyik átmegy egy élben szomszédos mezőre. Lehetséges-e, hogy ezek után is minden mezőn egy bogár lesz?

**10.13.** (M) Egy sakktábla két átellenes sarkán áll egy-egy figura. A tábla többi mezője lefedhető-e $2\times1$-es dominókkal?

**10.14.** (M) Egy sakktábla két átellenes sarkán áll egy-egy figura. A tábla többi mezője lefedhető-e $3\times1$-es dominókkal?

**10.15.** (M) Egy sakktábla egyik sarkán áll egy figura. A tábla többi mezője lefedhető-e 3×1-es dominókkal?

**10.16.** (M) Letehető-e a sakktáblára egyetlen figura úgy, hogy tábla többi mezője lefedhető legyen 3×1-es dominókkal?

**10.17.** (M) Lefedhető-e egy 10×10-es tábla 4×1-es dominókkal?

**10.18.** (M) Hány különböző alakú 4 egység területű poliminó van.

**10.19.** (M) A 4 egység területű poliminókból minden fajtából egyet használva kirakható-e egy téglalap?

**10.20.** (M) Hány különböző alakú 5 egység területű poliminó van.

**10.21.** (M) Az 5 egység területű poliminókból minden fajtából egyet használva kirakható egy téglalap. Készítsük el a téglalapot. Mi lehet a téglalap oldalhosszúsága?

11. FEJEZET

# Feladatok a sakktáblán (teszt)

A 11.1-11.10. feladatok a „közép” szintnek, a 11.11-11.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**11.1.** (M) Legfeljebb hány bástya helyezhető el egy $6 \times 6$-os sakktáblán úgy, hogy páronként ne üssék egymást?

**A)** 8 **B)** 6 **C)** 1 **D)** 12 **E)** 11

**11.2.** (M) 7 bástya hányféleképpen helyezhető el a sakktáblán, ha páronként nem ütik egymást?

**A)** $7!$ **B)** $8!$ **C)** $8 \cdot 8!$ **D)** $9!$ **E)** $7 \cdot 7!$

**11.3.** (M) Legfeljebb hány huszár helyezhető el egy $6 \times 10$-es sakktáblán úgy, hogy páronként ne üssék egymást?

**A)** 30 **B)** 15 **C)** 10 **D)** 20 **E)** 32

**11.4.** (M) Milyen méretű sakktábla fedhető le átfedések és hézag nélkül $3\times1$-es dominókkal?

**A)** $5 \times 5$ **B)** $7 \times 7$ **C)** $5 \times 7$

**D)** $57 \times 75$ **E)** az előzőek egyike sem

**11.5.** (M) Hány különböző alakú 3 egység területű poliminó van?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 1 **E)** 2

**11.6.** (M) Legfeljebb hány király helyezhető el a sakktáblán úgy, hogy páronként ne üssék egymást?

**A)** 16 **B)** 32 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 25

**11.7.** (M) A sakktáblát szeretnénk lefedni hézag és átfedés nélkül egybevágó poliminókkal. Az alábbiak közül mely típussal végezhetjük el ezt?

**A)** $3 \times 1$-es **B)** $2 \times 3$-as **C)** $1 \times 6$-os **D)** $4 \times 3$-as **E)** $2 \times 4$-es

**11.8.** (M) Egy bogarat teszünk a sakktábla valamelyik mezőjére. Az alábbi táblaméretek közül mikor járhat körbe a mezőkön úgy, hogy mindig olyan mezőre lép, amely élben szomszédos az aktuálisan elfoglalt helyével, minden mezőre egyszer lép rá és végül visszalép a kiindulási mezőre?

**A)** $32 \times 1$-es **B)** $35 \times 53$-as **C)** $32 \times 23$-as **D)** $3 \times 3$-as

**E)** $35 \times 23$-as

**11.9.** (M) Egy bástya indul a tábla b3 mezőjéről. Legalább hány lépés alatt érheti el az e8 mezőt?

**A)** 3 **B)** 2 **C)** 1 **D)** 8 **E)** 7

**11.10.** (M) Egy vezér áll a sakktábla valamelyik mezőjén. A többi közül legfeljeb hány mezőt támadhat?

**A)** 27 **B)** 8 **C)** 14 **D)** 28 **E)** 21

**11.11.** (M) 6 bástya hányféleképpen helyezhető el a sakktáblán, ha páronként nem ütik egymást?

**A)** $6 \cdot 7!$ **B)** $28 \cdot 8!$ **C)** $14 \cdot 8!$ **D)** $9!$ **E)** $7 \cdot 7!$

**11.12.** (M) Legalább hány bástyát kell a sakktáblára helyezni ahhoz, hogy ha még egy további bástyát felteszünk a tábla tetszőleges mezőjére, akkor biztosan legyen kettő közöttük, melyek ütik egymást?

**A)** 8 **B)** 15 **C)** 7 **D)** 2 **E)** 16

**11.13.** (M) Hányféleképpen helyezhető el a sakktáblán két egyforma bástya úgy, hogy üssék egymást? (A tábla mezői jelöltek, az a1-a2 elrendezést és a h7-h8 elrendezést különbözőnek számoljuk.)

**A)** $8 \cdot 8$ **B)** $64 \cdot 14$ **C)** $16 \cdot 28$ **D)** $\binom{64}{2}$ **E)** $64 \cdot 63$

**11.14.** (M) Legfeljebb hány király helyezhető el egy $10 \times 12$-es sakktáblán úgy, hogy páronként ne üssék egymást?

**A)** 30 **B)** 60 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 36

**11.15.** (M) Egy ló indul a tábla b4 mezőjéről. Minden mezőre egyszer lépve végül mely mezőre érkezhet meg?

**A)** e5 **B)** d4 **C)** c2 **D)** b3 **E)** a1

**11.16.** (M) Milyen táblaméret esetén járhatja be egy ló a sakktábla mezőit úgy, hogy minden mezőre egyszer lép és végül visszalép a kiindulási mezőre?

**A)** $5 \times 5$-ös **B)** $6 \times 6$-os

**C)** $7 \times 7$-es **D)** $3 \times 4$-es

**E)** az előző négy eset egyikében sem

**11.17.** (M) Egy sakktábla két átellenes sarkán áll egy-egy figura. Mely táblaméret esetén fedhető a tábla többi mezője $2\times1$-es dominókkal?

**A)** $15 \times 13$-as **B)** $15 \times 14$-es **C)** $14 \times 18$-es **D)** $31 \times 51$-es

**E)** $41 \times 51$-es

**11.18.** (M) Legfeljebb hány bástya helyezhető el a sakktáblán úgy, hogy mindegyiket legfeljebb egy másik üsse?

**A)** 8 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 16

**11.19.** (M) Egy $10 \times 10$-es sakktáblát szeretnénk lefedni hézag és átfedés nélkül egybevágó poliminókkal. Az alábbiak közül mely típussal végezhetjük el ezt?

**A)** $3 \times 1$-es **B)** $2 \times 3$-as **C)** $1 \times 6$-os **D)** $5 \times 4$-es **E)** $2 \times 5$-ös

**11.20.** (M) Legalább hány fekete bástyát kell a sakktáblára helyezni ahhoz, hogy ha egy további fehér bástyát felteszünk a tábla tetszőleges mezőjére, akkor biztosan legyen olyan fekete bástya, amelyik üti a fehéret?

**A)** 8 **B)** 15 **C)** 7 **D)** 4 **E)** 16

12. FEJEZET
# Kombinatorikus geometria

**12.1.** (M) Legfeljebb hány egyenest határoz meg

**a)** 5 **b)** 6 **c)** 10 **d)** $n$

pont a síkon?

**12.2.** (M) Hogy helyezkedhet el 7 különböző pont a síkon, ha 9 egyenest határoznak meg?

**12.3.** [13] Vegyünk fel 7 különböző pontot a síkon úgy, hogy ha azokat páronként összekötjük, akkor összesen 14 különböző egyenest kapjunk!

**12.4.** Legfeljebb hány metszéspontja lehet 4 körnek és 3 egyenesnek?

**12.5.** Adott néhány pont. Mindegyik kettőt keresztül egyenest húzunk. Legalább hány pont lehetett, ha így 153 egyenest kaptunk?

**12.6.** (M) Hány átlója van egy konvex $n$-szögnek?

**12.7.** Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek 189 átlója van?

**12.8.** Adott a síkon 5 pont. Mindegyik három ponton át kört rajzolunk. Így hány különböző kört kaphatunk? Adjuk meg az összes lehetőséget!

**12.9.** (M) Helyezzünk el minél több pontot a síkon úgy, hogy közülük bármelyik három egyenlő szárú háromszöget alkosson.

**12.10.** (M) Legfeljebb hány közös pontja lehet két hatszög kerületének?

**12.11.** (M) Legfeljebb hány közös pontja lehet egy hatszög és egy hétszög kerületének?

**12.12.** (M) Két darab $n$ oldalú sokszög 80 pontban metszi egymást. Legalább mekkora $n$ értéke?

**12.13.** (M) Hány közös pontja lehet egy $n$-szögnek és egy körnek?

**12.14.** (M) Rajzoljunk önmagát metsző zárt töröttvonalat, melynek minden szakaszát pontosan egy másik szakasz metszi. Legalább hány szakaszból áll a töröttvonal? Lehet-e a szakaszok száma 7?

**12.15.** (M) Adott $n$ általános helyzetű pont a síkon. Igazoljuk, hogy

**a)** van olyan egyenes, amely pontosan $k$-t választ el a többitől.

**b)** van olyan kör, amely belsejében pontosan $k$ pont van. ($k \leq n$)

**12.16.** (M) Adott $n$ általános helyzetű pont a síkon. Igazoljuk, hogy van olyan kör, amely legalább három ponton áthalad, de belsejében egy sincs az adott pontok közül.

**12.17.** (M) Adott 5 általános helyzetű pont a síkon, nincsenek mind egy körön. Igazoljuk, hogy kiválasztható közülük 2 úgy, hogy a másik három köré írt körnek az egyik belső, a másik külső pontja.

**12.18.** (M) Adott 6 általános helyzetű pont a síkon. Meghúztuk az összes olyan szakaszt, amelyik két pontot köt össze. Kiszínezhetők-e ezek a szakaszok 5 színnel úgy, hogy minden pontból csupa különböző színű szakasz induljon?

**12.19.** (M) Adott $n$ általános helyzetű pont a síkon. Igazoljuk, hogy kiszínezhetők $k$ színnel úgy, hogy ha az azonos színű pontok között ugyanezzel a színnel meghúzzuk az összekötő szakaszokat, akkor a különböző színű szakaszok ne messék egymást.

**12.20.** (M) $n$ általános helyzetű egyenes metszéspontjai legfeljebb hány egyenest határozhatnak meg.

**12.21.** (M) Adott hat pont. Az általuk meghatározott szakaszok felezőmerőlegeseinek legfeljebb hány metszéspontja lehet?

**12.22.** (M) Adott 5 egyenes. Tekintsük bármely két egyenes szögfelezőit. A szögfelezőknek hány metszéspontja lehet?

**12.23.** (M) Vegyünk egy konvex $n$-szöget, és tegyük fel, hogy semelyik átlója nem megy át egy ponton. Hány metszéspontja van az átlóinak?

**12.24.** (M) Rajzoljunk a síkra $n$ kört. A kapott síkrészeket színezzük ki 2 színnel úgy, hogy két síkrészt különböző színűre festünk, ha van közös határívük. (közös határpont esetén nem.) Bizonyítsuk be, hogy ilyen színezés mindig elvégezhető!

**12.25.** Nagymama almáspitét süt egy téglalap alakú tepsibe. Egyik irányban 5, a másik irányban 8 téglalap alakú részre vágja.

Pistike a konyhakéssel egy egyenes mentén végigvághatja a süteményt és azokat a szeleteket, amelyikbe belevág, megeheti. Legfeljebb hány rész juthat így Pistikének?

**12.26.** (M) Hány részre osztja a síkot $n$ általános helyzetű egyenes?

13. FEJEZET

# Kombinatorikus geometria (teszt)

A 13.1-13.10. feladatok a „közép” szintnek, a 13.11-13.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**13.1.** (M) Legfeljebb hány metszéspontja lehet 5 egyenesnek a síkon?
**A)** 10 **B)** 5 **C)** 25 **D)** 20 **E)** 12

**13.2.** (M) Legfeljebb hány metszéspontja lehet 2 körnek és 3 egyenesnek?
**A)** 24 **B)** 30 **C)** 17 **D)** 11 **E)** 32

**13.3.** (M) Adott néhány pont. Mindegyik kettőn keresztül egyenest húzunk. Legalább hány pont lehetett, ha így 21 egyenest kaptunk?
**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 11

**13.4.** (M) Legfeljebb hány közös pontja lehet két négyszög kerületének?
**A)** 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

**13.5.** (M) Legfeljebb hány részre osztja a síkot 3 kör?
**A)** 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

**13.6.** (M) Hány közös pontja lehet egy 7-szögnek és egy körnek?
**A)** 7 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 28 **E)** 6

**13.7.** (M) Adott 4 pont. Az általuk meghatározott szakaszok felezőmerőlegeseinek legfeljebb hány metszéspontja lehet?
**A)** 7 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 5 **E)** 6

**13.8.** (M) Adott 5 piros és két kék pont a síkon, semely három nincs egy egyenesen. Jelölje a három piros pont által meghatározott háromszögek számát $x$, a két piros és egy kék csúcsúak számát $y$, az egy piros és két kék csúcsúak számát $z$. Mi az $x$, $y$, $z$ nagyság szerinti sorrendje?
**A)** $x < y < z$ **B)** $z < y < x$ **C)** $x < z < y$ **D)** $z < x < y$
**E)** $y < z < x$

**13.9.** (M) Két darab $n$ oldalú sokszög 7 pontban metszi egymást. Legalább mekkora $n$ értéke?
**A)** 7 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**13.10.** (M) Hány testátlója van egy szabályos ötszög alapú hasábnak? (A testátló két csúcsot köt össze és a test belsejében fut.)
**A)** 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 35 **E)** 30

**13.11.** (M) Legfeljebb hány metszéspontja lehet 3 körnek és 4 egyenesnek?
**A)** 12 **B)** 43 **C)** 34 **D)** 21 **E)** 36

**13.12.** (M) Legfeljebb hány közös pontja lehet egy hatszög és egy ötszög kerületének, ha a közös pontok száma nem végtelen?

**A)** 30 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 56 **E)** 24

**13.13.** (M) Legfeljebb hány részre osztja a síkot 4 kör?

**A)** 14 **B)** 16 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 8

**13.14.** (M) Hány testátlója van egy szabályos dodekaédernek? (A testátló két csúcsot köt össze és a test belsejében fut.)

**A)** 100 **B)** 400 **C)** 170 **D)** 160 **E)** 144

**13.15.** (M) Adott öt pont. Az általuk meghatározott szakaszok felezőmerőlegeseinek legfeljebb hány metszéspontja lehet?

**A)** 25 **B)** 16 **C)** 20 **D)** 10 **E)** 45

**13.16.** (M) Egy önmagát nem metsző konkáv hatszögnek legkevesebb hány átlója lehet, amely teljesen a hatszög belsejében van?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**13.17.** (M) Két darab $n$ oldalú sokszög 25 pontban metszi egymást. Legalább mekkora $n$ értéke?

**A)** 10 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 5 **E)** 6

**13.18.** (M) Egy kocka csúcsai hány egyenlőszárú háromszöget határoznak meg?

**A)** 12 **B)** 32 **C)** 22 **D)** 16 **E)** 26

**13.19.** (M) Hány kitérő élpárja van egy szabályos oktaédernek?

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 8 **E)** 4

**13.20.** (M) Adott öt pont a síkon, semely három nincs egy egyenesen, a köztük futó 10 szakasz közül 3 piros, a többi kék. Legfeljebb hányféleképpen választhatunk az öt pont közül hármat úgy, hogy a köztük futó szakaszok közt mindkét szín előforduljon?

**A)** 8 **B)** 10 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

## 14. FEJEZET
# Játékok

**14.1.** (M) Bekeretezünk a négyzetrácsos füzetben egy

**a)** $1 \times 9$-es **b)** $1 \times 10$-es **c)** $5 \times 5$-ös

téglalapot. Két játékos felváltva foglalhat le egy mezőt, vagy két szomszédosat. Az nyer, aki az utolsó mezőt lefoglalja. Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek vagy a másodszorra lépő játékosnak? Hogyan érdemes játszani?

**14.2.** (M) A sakktáblára teszünk egy királyt. Ezzel a két játékos felváltva léphet de csak balra, vagy lefele, vagy átlósan balra-le. Az nyer, aki a bal alsó sarokba tudja húzni a királyt.

Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek vagy a másodszorra lépő játékosnak? Hogyan érdemes játszani?

**14.3.** (M) Kezdő kimondja az egyet, Második a kettőt, ezek után felváltva mondanak egy számot, mely az előzőleg mondott számnál legalább eggyel nagyobb, de legfeljebb a kétszerese. Az nyer, aki kimondja a 100-at.

**14.4.** (M) Van három kupac kavicsunk, ezekben 1, 2, 3 kavics. A két játékos felváltva vehet el néhány kavicsot, de egyszerre csak az egyik kupacból szabad elvenni. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

**14.5.** (M) Tíz darab tízforintost kör alakban, „fej"-jel fölfelé helyeztünk el. Két játékos felváltva forgatja az érméket, csak „fej"-ről „írás"-ra lehet forgatni. Egy lépésben egy vagy pedig két szomszédos érmét fordíthatnak meg. Az nyer, aki utolsóként tud fordítani.

Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek vagy a másodszorra lépő játékosnak? Hogyan érdemes játszani?

**14.6.** Egy $5 \times 7$-es „sakktáblára" teszünk egy bástyát. Ezzel a két játékos felváltva léphet de csak balra, vagy lefele (tetszőleges számú mezőt). Az nyer, aki a bal alsó sarokba tudja húzni a bástyát.

Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek vagy a másodszorra lépő játékosnak? Hogyan érdemes játszani?

**14.7.** Egy $5 \times 7$-es „sakktáblára" teszünk egy vezért. Ezzel a két játékos felváltva léphet de csak balra, lefelé, vagy átlósan balra lefelé (tetszőleges számú mezőt). Az nyer, aki a bal alsó sarokba tudja húzni a vezért.

Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek vagy a másodszorra lépő játékosnak? Hogyan érdemes játszani?

**14.8.** (M) Az asztalon van 40 db gyufaszál, s felváltva vesznek ketten 2,3,4 vagy 5 szálat. Az nyer, aki utolsóként vesz. Kinek van nyerő stratégiája?

**14.9.** (M) Ketten felváltva mondanak számokat. A kezdő először 1-et mond. A soron következő játékos az előzőleg elhangzott számnál legalább 1-gyel nagyobbat mond, de nagyobb számot nem mondhat, mint az előzőleg elhangzott szám és e szám jegyeinek összege. Az nyer, aki kimondja a százat. Kinek van nyerő stratégiája?

**14.10.** (M) Egy asztalra két játékos felváltva tehet egyforintosokat. Az érmék nem fedhetik egymást. Az nyer, aki utoljára tud tenni. Érdemes-e kezdeni? Hogyan játsszunk?

**14.11.** (M) Egy szabályos 12 oldalú sokszögben ketten felváltva átlókat húznak be úgy, hogy azok a sokszög belsejében egymást nem metszhetik. Az veszít, aki nem tud lépni. A kezdő nyerhet. Hogyan?

**14.12.** (M) Van egy $8 \times 8$-as csokitáblánk, melynek bal felső kockája mérgezett. Két játékos felváltva tör a táblából úgy, hogy valamelyik mezőt kiválasztja, s az összes tőle jobbra és lefelé eső kockát letöri. Az veszít, aki kénytelen a mérgezett kockát elvenni. Mutassuk meg, hogy a kezdő megnyerheti a játékot!

**14.13.** (M) Két játékos felváltva színezi a kocka 3-3 élét pirosra ill. feketére. Az a győztes, aki a kocka valamely lapjának mind a négy élét saját színével be tudja színezni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

**14.14.** (M) Bekeretezünk a négyzetrácsos füzetben egy $8 \times 9$-es téglalapot. A játékosok ezen belül felváltva választhatnak ki 3 olyan rácspontot, melyek háromszöget határoznak meg. A háromszögeket úgy kell kiválasztani, hogy kerületüknek ne legyen közös pontja. Az nyer, aki utoljára tud még háromszöget rajzolni.

**14.15.** (M) Az 1, 2, 3, .. 101 számokból ketten felváltva vesznek el 9 számot. 11 lépés után 2 szám marad. Kezdő nyer, ha különbségük 55. Megnyerheti-e biztosan a kezdő a játékot?

**14.16.** (M) Az asztalon van $n = 24$ kavics. Elvehető $k$ kavics, ha az asztalon levő kavicsok száma és $k$ relatív prímek. Ketten vehetnek el felváltva és az nyer, aki az utolsó kavicsot veszi el. Gondoljuk meg a feladatot más $n$ értékekre is.

**14.17.** (M) Péter és Pál a következő játékot játsszák: Először Péter mond egy egynél nagyobb egyjegyű egész számot, majd Pál ezt megszorozza az egynél nagyobb egyjegyű egész számok valamelyikével. Ezután Péter szorozza meg az eredményt az egynél nagyobb egyjegyű egész számok valamelyikével, s így tovább. Az nyer, aki először tud 1995-nél nagyobb számot mondani. Melyik számot kell Péternek először mondania, hogy ügyesen játszva meg tudja nyerni a játékot?

**14.18.** (M) Két játékos felváltva foglal le egész számokat. A kezdő akkor nyer, ha a számai közt lesz 3 egymás utáni, különben a második győz. Kinek van nyerő stratégiája?

**14.19.** (M) Van két kupac kavicsunk, az egyikben $n = 8$, a másikban $k = 12$ kavics. A két játékos felváltva vehet el néhány kavicsot, de egyszerre csak az egyik kupacból szabad elvenni. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

**14.20.** (M) Van több kupac kavics. Pl. legyen ezekben 4, 6, 11, 15, 17, 18 kavics. Ketten vehetnek el felváltva valamelyik kupacból egy kavicsot. Az nyer, aki az utolsó kavicsot veszi el.

**14.21.** (M) Van több kupac kavics. Pl. legyen ezekben 4, 6, 11, 15, 17, 18 kavics. Ketten vehetnek el felváltva kavicsokat. Legalább egy kavicsot el kell venni, akárhány kupacból vehetünk, de bármelyikből legfeljebb csak egyet.

**14.22.** (M) [10] Leírjuk a pozitív egészeket sorban és teszünk egy piros korongot a 8-asra, egy kéket pedig a 13-asra. A két játékos felváltva mozgathat egy általa választott korongot úgy, hogy az egy kisebb számra kerüljön, de a kék mindig csak nagyobb számra kerülhet, mint amin a piros áll. Az nyer, akinek lépése után a piros az 1-en a kék a 2-n lesz.

15. FEJEZET
# Játékok (teszt)

A 15.1-15.10. feladatok a „közép” szintnek, a 15.11-15.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**15.1.** (M) 50 kavicsból felváltva vesz el $A$ és $B$ kavicsokat, $A$ kezd. Legalább 1 és legfeljebb 8 kavics vehető el egyszerre. Az nyer aki az utolsó kavicsot elveszi. Hány kavicsot vegyen el az első lépésben $A$? **A)** 5 **B)** 1 **C)** 4 **D)** mindegy mennyit, mindenképpen $B$ nyer **E)** 8

**15.2.** (M) Bekeretezünk a négyzetrácsos füzetben egy $1 \times 9$-es, téglalapot. Két játékos felváltva foglalhat le egy mezőt, vagy két szomszédosat. Az nyer, aki az utolsó mezőt lefoglalja. A kezdő játékos lefoglalta a 4. mezőt. Melyik mezőt, ill. mezőket foglaljuk le ez után, ha szeretnénk nyerni?

**A)** mindegy, mindenképpen a kezdő nyer **B)** az 5. mezőt

**C)** a 6. mezőt **D)** az 5. és 6. mezőt

**E)** a 9. mezőt

**15.3.** (M) Az asztalon van 50 gyufa, ebből felváltva vesz el $A$ és $B$. $A$ kezd. Egy lépésben el lehet venni legalább 2, legfeljebb 6 gyufát. Az nyer, aki az utolsót elveszi. Hány gyufát vegyen el $A$ az első lépésben?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 2

**15.4.** (M) Egy óra lapjára minden órához tettünk egy-egy tízforintost kör alakban, „fej”-jel fölfele. Összesen 12 darabot. Két játékos felváltva forgatja az érméket, csak „fej”-ről „írás”-ra lehet forgatni. Egy lépésben egy vagy pedig két szomszédos érmét fordíthatnak meg. Az nyer, aki utolsóként tud fordítani. A kezdő a 7 és 8 óránál levő két érmét fordította meg. Melyik óránál levőt kell megfordítani a másodiknak ez után?

**A)** 1 és 2 **B)** 9 és 10 **C)** 3 **D)** 4 és 5 **E)** 12

**15.5.** (M) Az 1, 2, 3, .. 101 számokból ketten felváltva vesznek el 2 számot. 50 lépés után 1 szám marad. Kezdő nyer, ha a megmaradt szám páros. Melyik kezdő lépéssel nyerhet a kezdő? **A)** 1 és 2 **B)** 1 és 3 **C)** 2 és 4 **D)** 1 és 101 **E)** Ha a második jól játszik, akkor nem nyerhet a kezdő.

**15.6.** (M) Az asztalon van $n = 30$ kavics. Elvehető $k$ kavics, ha az asztalon levő kavicsok száma és $k$ relatív prímek. Ketten vehetnek el felváltva és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Kezdő elvett 7 kavicsot. Hány kavicsot vegyen el Második? **A)** Mindegy mennyit vesz el, mindenképpen Kezdő nyer. **B)** 7 **C)** 4 **D)** 16 **E)** 20

**15.7.** (M) Van két kupac kavicsunk, az elsőben $n = 7$, a másodikban $k = 15$ kavics. A két játékos felváltva vehet el néhány kavicsot, de egyszerre csak az egyik kupacból szabad elvenni. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Mi legyen Kezdő első lépése? **A)** Az első kupacból vegyen el 3-at. **B)** A második kupacból vegyen el 1-et. **C)** A második kupacból vegyen el 8-at. **D)** Az eslő kupacból vegyen el 5-öt. **E)** Mindegy hogyan kezd, mindenképpen Második nyer.

**15.8.** (M) Van több kupac kavics. Pl. legyen ezekben 3, 7, 12, 17, 23 kavics. Ketten vehetnek el felváltva valamelyik kupacból egy kavicsot. Az nyer, aki az utolsó kavicsot veszi el. Melyik igaz? **A)** Kezdő nyerhet, ha először a 12-es kupacból húz. **B)** Második csak úgy nyerhet, ha Kezdő először a 12-es kupacból húz. **C)** **D)** K **E)** e

zdő mindenképpen meg tudja nyerni a játékot.Második mindenképpen meg tudja nyerni a játékot.Az nyeri a játékot, aki először húz a 12-es kupacból.

**15.9.** (M) Leírjuk a pozitív egészeket sorban és teszünk egy piros korongot a 6-osra, egy kéket pedig a 16-osra. A két játékos felváltva mozgathat egy általa választott korongot úgy, hogy az egy kisebb számra kerüljön, de a kék mindig csak nagyobb számra kerülhet, mint amin a piros áll. Az nyer, akinek lépése után a piros az 1-en a kék a 2-n lesz. Kezdő első lépésében a kéket a 11-re mozgatta. Melyik igaz? **A)** Másodiknak most a pirosat kell a 3-ra mozgatni. **B)** Kezdő biztosan nyerni fog. **C)** Második megnyerheti a játékot. **D)** Másodiknak most a kéket kell a 9-re mozgatni. **E)** Kezdőnek a 11 helyett a 12-re kellett volna mozgatnia.

**15.10.** (M) Van három kupac kavicsunk, ezekben 1, 2, 3 kavics. A két játékos felváltva vehet el néhány kavicsot, de egyszerre csak az egyik kupacból szabad elvenni. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Kezdő a 3-as kupacból vett el 1-et. Mit lép a Második? **A)** Az 1-es kupac kavicsát elveszi. **B)** Valamelyik kettesből elvesz 1-et. **C)** Valamelyik kettesből elvesz 2-őt **D)** Bármit lép, mindenképpen Kezdő nyer. **E)** Bármit léphet, mindenképpen Második nyer.

**15.11.** (M) 25 kavicsból felváltva vesz el $A$ és $B$ kavicsokat, $A$ kezd és elvesz 1 kavicsot. $B$ a második lépésben elvehet 1, vagy 2 kavicsot. $A$ a harmadik lépésben elvehet 1, 2 vagy 3 kavicsot és így tovább: az $i$-dik lépésben elvehető 1, 2, ..., $i$ kavics. Az nyer aki az utolsó kavicsot elveszi. Az első négy lépésben mindig egy-egy kavicsot vettek el a játékoskok. Hányat kell most $B$-nek elvenni?

**A)** 1 **B)** 2

**C)** 3 **D)** 4

**E)** Mindegy, mindenképpen $A$ nyer.

**15.12.** (M) Bekeretezünk a négyzetrácsos füzetben egy

$1 \times 12$-es, téglalapot. Két játékos felváltva foglalhat le egy mezőt, vagy két szomszédosat. Az nyer, aki az utolsó mezőt lefoglalja. A kezdő játékos lefoglalta a 7. mezőt. Melyik mezőt, ill. mezőket foglaljuk le ez után, ha szeretnénk nyerni?

**A)** 5. és 6. **B)** 4. és 5. **C)** 3. és 4. **D)** 9. **E)** 1

**15.13.** (M) Kezdő kimondja az egyet, Második a kettőt, ezek után felváltva mondanak egy számot, mely az előzőleg mondott számnál legalább eggyel nagyobb, de legfeljebb a kétszerese. Az nyer, aki kimondja a 80-at. Ha az első három kimondott szám az 1, 2, 4, mit mond a következő lépésben a Második?

**A)** 5 **B)** 6

**C)** 7 **D)** 8

**E)** Mindegy, Kezdő mindenképpen nyerhet.

**15.14.** (M) A sakktáblára teszünk egy királyt (e6)-ra. Ezzel a két játékos felváltva léphet de csak balra, vagy lefele, vagy átlósan balra-le. Az nyer, aki a bal alsó -(a1) jelű- sarokba tudja húzni a királyt. Melyik igaz? (A)

A:; B:; C:; D:; E:; **A)** Kezdő bitosan nyerhet, ha az (e5)-re mozdít. **B)** Kezdő biztosan nyerhet, ha a (d6)-ra mozdít. **C)** Kezdő biztosan nyerhet, ha a (d5)-re mozdít.

**D)** Ebből a kezdőhelyzetből Kezdő nem nyerhet biztosan. **E)** Kezdő mindenképpen nyerni fog.

**15.15.** (M) Az 1, 2, 3, .. 101 számokból ketten felváltva vesznek el 3 számot. 33 lépés után 2 szám marad. Kezdő nyer, ha összegük páros. Melyik igaz? **A)** Ha kezdő az 1,2,3 számokat veszi el először, akkor nem nyerhet. **B)** A játékot mindig a második nyeri. **C)** Ha a kezdő a 10. lépésnél nem megfelelő számokat vesz el, akkor második nyerhet. **D)** A kezdő mindig nyerhet. **E)** A kezdő csak úgy nyerhet, ha az 1,2,3 számokat veszi el először

**15.16.** (M) Egy $8 \times 8$-as sakktáblára teszünk egy bástyát a (h4)-re. Ezzel a két játékos felváltva léphet de csak balra, vagy lefele 1,2 vagy 3 mezőt. Az nyer, aki a bal alsó -(a1) jelű- sarokba tudja húzni a bástyát. Melyik igaz? **A)** Másodiknak van nyerő stratégiája. **B)** Kezdőnek nyerő stratégiája szerint az első lépése (h3). **C)** Kezdőnek van nyerő stratégiája, először a (e4)-re kell lépnie. **D)** Kezdőnek van nyerő stratégiája, először a (g4)-re kell lépnie. **E)** Kezdőnek van nyerő stratégiája, először a (h2)-re kell lépnie.

**15.17.** (M) Van két kupacunk, az egyikben 38, a másikban 83 kavics. $A$ és $B$ felváltva vehetnek el legalább egy, legfeljebb 4 kavicsot, de egyszerre csak az egyik kupacból szabad elvenni kavicsot. $A$ kezd és a 83-asból elvesz kettőt. Mit lépjen most $B$?

**A)** Mindegy, mindenképpen $A$ nyerni tud. **B)** A 38-asból vegyen el 1-et.
**C)** A 81-esből vegyen el 3-at. **D)** A 81-esből vegyen el 1-et.
**E)** A 38-asból vegyen el 4-et.

**15.18.** (M) Leírjuk a pozitív egészeket sorban és teszünk egy piros korongot a 8-asra, egy kéket pedig a 7-esre. $A$ és $B$ felváltva mozgathat egy általa választott korongot úgy, hogy az egy kisebb számra kerüljön, $A$ kezd. A korongok lehetnek ugyanazon a számon. A piros korong száma legfeljebb 3-mal, a kék korong száma legfeljebb kettővel csökkenhet. Az nyer, akinek lépése után a piros és a kék is az 1-n lesz. Hogy kezdjen $A$?

**A)** Mindegy, mindenképpen $B$ nyerni tud. **B)** A pirosat mozgassa a 7-re.
**C)** A pirosat mozgassa a 6-ra. **D)** A kéket mozgassa az 5-re.
**E)** A kéket mozgassa a 6-ra.

**15.19.** (M) Az asztalon van $n = 35$ kavics. Elvehető $k$ kavics, ha az asztalon levő kavicsok száma és $k$ relatív prímek. Ketten vehetnek el felváltva és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Melyik igaz? **A)** Ha Kezdő jól játszik, akkor Második soha nem vehet el 17-et. **B)** Ha Kezdő 12-őt vesz el, akkor biztosan nyerhet. **C)** A Második biztosan nyerhet, ha Kezdő először 17-et vesz el. **D)** Kezdő csak egy megfelelő kezdő lépéssel tud nyerni. **E)** Ha Kezdő 11-et vesz el, akkor nyerhet.

**15.20.** (M) Van három kupac kavicsunk, ezekben 2, 5, 6 kavics. A két játékos felváltva vehet el néhány kavicsot, de egyszerre csak az egyik kupacból szabad elvenni. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Kezdő az 5-ös kupacból vett el 2-őt. Mit lép a Második?

**A)** A 2-esből vesz el 1-et. **B)** A 6-osból vesz el 2-őt.
**C)** A 3-asból vesz el 2-őt. **D)** A 6-osból vesz el 5-öt.
**E)** A hármasból vesz el 1-et

16. FEJEZET

# A teljes indukció

**16.1.** (M) A Bergengóc Agyvelőfejlesző Iskola tanévzáró értekezletén többen felvetették, hogy általában a tanév első napján semmit nem lehet még tanítani, ezért javasolták, hogy ez a tanítási nap maradjon el. Mi következik ebből?

**16.2.** (M) Repülő Rezső magasugróbajnok így emlékezett vissza pályafutásának kezdetére: „Életem legelső edzésén sikerült átugrani a 10 cm-es magasságot. Majd észrevettem, hogy ha egy $x$ cm-es magasságot sikerül átugrani, akkor kicsit alaposabb koncentrálással, nagyobb nekifutással az $(x+1)$ cm-es magasságot is át tudom ugrani."

Mire következtethetünk ez alapján?

**16.3.** (M) **a)** Felvágható-e egy négyzet 10 négyzetre? A darabok lehetnek különböző méretűek.

**b)** Felvágható-e egy négyzet 1234567 darab négyzetre?

**16.4.** (M) Felvágható-e egy háromszög $n$ háromszögre, melyek az eredetihez hasonlók, ha $n > 5$?

**16.5.** A 10 mely hatványai állíthatók elő két pozitív négyzetszám összegeként?

**16.6.** (M) A síkot néhány egyenes tartományokra osztja. Kiszínezhetők-e ezek két színnel úgy, hogy a közös határszakasszal rendelkező tartományok különböző színűek legyenek?

**16.7.** (M) A körmérkőzéses iskolai ping-pong bajnokságot követően, vacsoraosztás előtt a versenyzőket libasorba szeretnénk állítani úgy, hogy mindenki előtt, kivéve persze a sorban legelsőt, olyan ember álljon, akitől kikapott. Megtehetjük-e ezt minden esetben?

**16.8.** (M) Az 1, 2, …, $n$ számok egy sorrendjében két szám *inverzióban* áll, ha a nagyobb megelőzi a kisebbet. Például $n$=5 esetén a 42513 sorrendben az inverzióban álló párok a 4-2, 4-1, 4-3, 2-1, 5-1, 5-3. Az összes inverzió száma 6 és például a 2 két másik számmal áll inverzióban.

**a)** Igazoljuk, hogy $n = 7$ esetén van olyan sorrend, amikor minden szám két másikkal áll inverzióban.

**b)** Mely $n$ esetén van olyan sorrend, amikor minden szám 3 másikkal áll inverzióban?

**16.9.** (M) Hány részhalmaza van egy $n$ elemű halmaznak?

**16.10.** (M) Mutassuk meg, hogy minden $n > 0$ esetén egy $n$ elemű halmaznak ugyanannyi páros elemű részhalmaza van, mint páratlan elemű.

**16.11.** (M) Egy $n$ elemű halmaz részhalmazai elhelyezhetők-e egy kör mentén úgy, hogy két szomszédos részhalmaz legfeljebb egyetlen elemben különbözzön?

**16.12.** (M) Legyen $H = \{2, 3, \dots, n\}$. Tekintsük $H$ nem üres részhalmazaiban az elemek szorzatát. Mennyi ezen számok reciprokösszege? Pl. $n = 4$ esetén

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3}{2}$$

**16.13.** (M) Függönyt szeretnénk felcsipeszelni. Akkor könnyű egyenletesen elosztani a csipeszeket, ha először felcsiptetjük a két szélét, majd a közte levő részt felezzük, aztán a csipeszek közötti részeket tovább felezzük és így tovább.

Hány csipesz legyen a karnison, hogy ez a módszer működjön?

**16.14.** (S) Bontsunk fel egy háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy bárhogyan kiválasztva három pontot a felbontást adó háromszögek csúcsai közül azok ne essenek egy egyenesre. Igazoljuk, hogy a felbontásban szereplő kis háromszögek száma csak páratlan szám lehet.

**16.15.** (M) $n \geq 4$ idős hölgy mindegyike tud egy pletykát, azonban csak telefonon tudnak beszélni egymással. Mutassuk meg, hogy $2n-4$ hívással megoldható, hogy mindenki ismerje mindegyik pletykát.

**16.16.** (M) Mutassuk meg, hogy az $1, 2, \ldots, 3^k$ számok közül kiválasztható $2^k$ különböző szám úgy, hogy bármely két kiválasztott szám számtani közepe ne legyen kiválasztott.

**16.17.** (M) **a)** Mely páros számok írhatók fel két pozitív, páros, összetett szám összegeként?

**b)** Mely páros számok írhatók fel három pozitív, páratlan, összetett szám összegeként?

**16.18.** (M) Igazoljuk, hogy:

**a)** $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; **b)** $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; **c)** $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

**16.19.** (M) Igazoljuk, hogy:

**a)** $\sum\limits_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; **b)** $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

17. FEJEZET

# A teljes indukció (teszt)

A 17.1-17.10. feladatok a „közép” szintnek, a 17.11-17.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**17.1.** (M) Melyik a legkisebb $x$, amire igaz: Felvágható egy négyzet $x$ négyzetre. A darabok lehetnek különböző méretűek.
**A)** $x = 2$ **B)** $x = 3$ **C)** $x = 4$ **D)** $x = 5$ **E)** $x = 8$

**17.2.** (M) Melyik a legkisebb $n$, amire igaz: Felvágható egy szabályos háromszög $n$ háromszögre, melyek az eredetihez hasonlók.
**A)** $n = 3$ **B)** $n = 4$ **C)** $n = 5$ **D)** $n = 6$ **E)** $n = 9$

**17.3.** (M) A 13 mely hatványai állíthatók elő két pozitív négyzetszám összegeként? **A)** Csak azok, ahol a hatványkitevő páros. **B)** Csak azok, ahol a hatványkitevő páratlan. **C)** Csak az első hatványa. **D)** Minden pozitív egész kitevős hatványa. **E)** Csak az első és második hatványa.

**17.4.** (M) A síkot 12 egyenes tartományokra osztja. Legalább $k$ színnel tudjuk ezeket kiszínezni úgy, hogy a közös határszakasszal rendelkező tartományok különböző színűek legyenek. Határozzuk meg $k$-t.
**A)** $k = 2$ **B)** $k = 12$ **C)** $k = 24$ **D)** $k = \binom{12}{2}$ **E)** $k = 6$

**17.5.** (M) Melyik állítás, tétel bizonyításánál érdemes teljes indukciót használni? **A)** Pitagorasz tétel. **B)** A prímek száma végtelen. **C)** Az első $n$ pozitív páratlan szám összege négyzetszám. **D)** A háromszög szögeinek összege 180° **E)** 8 négyzetszám közt van kettő, melyek különbsége osztható 10-zel.

**17.6.** (M) Legyen $H = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Mennyi a $H$ halmaz elemeinek összege?
**A)** $2n^2 + n$ **B)** $\frac{n(n+1)}{2}$ **C)** $\frac{n(2n+1)}{2}$ **D)** $\frac{2n(2n-1)}{2}$ **E)** $n^2 + 2n$

**17.7.** (M) Legyen $H = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Tekintsük $H$ nem üres részhalmazaiban az elemek összegét. Mennyi ezen számok összege? (Pl $n = 2$ esetén 1+2+3=6)
**A)** $\frac{n(n+1)}{2}$ **B)** $n!$ **C)** $(n + 1)!$ **D)** $2^{n+1}$
**E)** $\frac{n(n+1)}{2} \cdot 2^{n-1}$

**17.8.** (M) Hány részhalmaza van egy $n + 1$ elemű halmaznak?
**A)** $(n + 1)^2$ **B)** $2^n$ **C)** $3^n$ **D)** $2^{n+1}$ **E)** $(n + 1)!$

**17.9.** (M) Legyen $H = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Melyik igazolható teljes indukcióval minden $n > 3$-ra? **A)** $H$-nak több háromelemű részhalmaza van, mint kételemű. **B)** $H$ elemeinek összege $\frac{n(n+1)}{2}$ **C)** $H$-nak eggyel több páratlan elemű részhalmaza van, mint páros elemű. **D)** $H$ legtöbb elemű részhalmazában az elemek átlaga egész. **E)** $H$ elemeinek összege $\frac{n(n-1)}{2}$

**17.10.** (M) Ebben a feladatban a változók egész számokat jelölnek. A koordinátasíkot kiszínezték. Tudjuk, hogy a (3;10) pont piros. Az alábbiak közül melyik teljesülése esetén lesz a (30;100) pont piros?
(p) Ha $(x; y)$ piros, akkor $(x+1; y+1)$ is piros.
(q) Ha $(x; y)$ piros, akkor $(x; y+1)$ is piros.
(r) Ha $(x; y)$ piros, akkor $(x+1; y)$ is piros.
**A)** (r) **B)** (q) **C)** (r) és (p)
**D)** (q) és (r) **E)** Az előzőek egyike sem.

**17.11.** (M) Egy $3n$ elemű halmaz részhalmazainak száma:
**A)** $3^n$ **B)** $2^n$ **C)** $8^n$ **D)** $2^{n^3}$ **E)** $(3n)^2$

**17.12.** (M) Legyen $H = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Mennyi a $H$ halmaz elemeinek négyzetösszege?
**A)** $\frac{(n^2+n)(2n+1)}{3!}$ **B)** $\frac{n(n+1)}{2}$ **C)** $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ **D)** $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
**E)** $\binom{n}{1}\binom{n}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{n}{n}$

**17.13.** (M) Mennyi az eredmény, ha az $n$ legkisebb pozitív páratlan szám reciprokösszegéből kivonjuk az első $n$ pozitív páros szám recoprokának összegét?
**A)** $\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2}$ **B)** $\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$ **C)** $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ **D)** $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$
**E)** $\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i(i+1)}$

**17.14.** (M) Mennyi egy $2n$ elemű halmaz azon részhalmazainak száma, melyekben páros sok elem van?
**A)** $2^n$ **B)** $4^n$ **C)** $\frac{4^n}{2}$ **D)** $\frac{2^{2n}}{2^n}$ **E)** $\frac{2n^2}{2}$

**17.15.** (M) Adott 200 állítás $A_1, A_2, \ldots, A_{200}$. Az alábbiak közül melyik teljesüléséből következik, hogy $A_{100}$ és $A_{200}$ igaz? **A)** $A_1$ igaz. Ha $A_i$ igaz, akkor $A_{i+2}$ is igaz. **B)** $A_{174}$ igaz. Ha $A_i$ igaz, akkor $A_{i-2}$ is igaz. **C)** $A_1$ igaz. Ha $A_i$ nem igaz, akkor $A_{i-1}$ sem igaz. **D)** $A_{74}$ igaz. Ha $A_i$ igaz, akkor $A_{i+2}$ is igaz. **E)** $A_{17}$ igaz. Ha $A_i$ igaz, akkor $A_{i+3}$ is igaz.

**17.16.** (M) A síkot 24 kör tartományokra osztja. Legalább $k$ színnel ezeket mindig ki tudjuk színezni úgy, hogy a közös határszakasszal rendelkező tartományok különböző színűek legyenek. Határozzuk meg $k$-t.
**A)** 2 **B)** 4 **C)** 24 **D)** 6 **E)** $2^24$

**17.17.** (M) Egy sorozat első eleme az 5, minden további elem az előző 3-szorosánál néggyel kisebb szám. (Azaz a második és harmadik elem 11 és 29.) Mi a sorozat $n$. tagjának explicit képlete?
**A)** $2n+1$ **B)** $5(2n-1) + (-1)^{n-1} \cdot 4$ **C)** $6n^2 - 12n + 11$
**D)** $3^n + 2$ **E)** $3 \cdot 5 - 4$

**17.18.** (M) Melyik állítás bizonyításánál érdemes teljes indukciót használni? **A)** $n$ darab irracionális szám összege mindig irracionális. **B)** $n$ darab pozitív szám szorzata mindig nagyobb, mint az összegük. **C)** $n$ darab pozitív szám mértani közepe kisebb egyenlő, mint a számtani közepük. **D)** Az első $n$ darab $(n > 1)$ pozitív egész reciprokának összege soha nem egész. **E)** $n$ darab irracionális szám szorzata nem lehet $n$.

**17.19.** (M) Adott 200 állítás $A_1, A_2, ..., A_{200}$. Az alábbiak közül melyik teljesüléséből következik, hogy $A_{145}$ és $A_{154}$ igaz?

(p) $A_1$ igaz;

(q) $A_2$ igaz;

(r) Ha $A_j$ igaz, akkor $A_{j+2}$ is igaz;

(s) Ha $A_j$ igaz minden $j < k$ esetén, akkor $A_k$ is igaz.

**A)** p és r **B)** q és r **C)** s **D)** r, p és q **E)** q és s

**17.20.** (M) Adott 200 állítás $A_1, A_2, ..., A_{200}$. Az alábbiak közül melyik teljesüléséből következik, hogy $A_1$ és $A_{200}$ igaz?

(p) $A_3$ igaz;

(q) $A_2$ igaz;

(r) Ha $A_j$ igaz, akkor $A_{2j}$ is igaz;

(s) Ha $A_j$ igaz, akkor $A_{j-2}$ is igaz.

**A)** p, q és r **B)** p, q és s **C)** p, r és s

**D)** q, r és s **E)** Az előzőek egyike sem.

# 18. FEJEZET
# Gráfok

**18.1.** (M) Egy társaságban öt ember találkozott. Megkérdeztük őket, kinek hány ismerőse van ötük között. A válaszok:
$A$: - Négy embert ismerek.
$B$: - Kevesebb ismerősöm van, mint $A$-nak.
$C$: - Ugyanannyi ismerősöm van, mint $D$-nek.
$D$: - Eggyel kevesebb ismerősöm van, mint $E$-nek.
$E$: - Páratlan számú embert ismerek.
Ismeri-e egymást $C$ és $D$?

**18.2.** (M) Rajzoljunk „térképet”, amin 5 város van, a városok között utak.
**a)** Az egyes városokból 1,2,2,3,4 út indul. Hány út van a térképen?
**b)** Az egyes városokból 1,2,2,3,3 út indul. Hány út van a térképen?

**18.3.** (M) Igaz-e, hogy bármely 9 tagú társaságban van olyan ember, akinek páros számú ismerőse van?

**18.4.** [7] Van-e olyan tíztagú társaság, amelyben az embereknek rendre
**a)** $4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$;
**b)** $9, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 0$;
**c)** $9, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2$;
**d)** $9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 6, 4, 4$
ismerőse van? (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük fel.)

**18.5.** [11] Egy város telefonközpontjában számontartják, hogy a központhoz tartozó telefonállomások mindegyikéről hány másikat hívtak fel aznap (ha egy állomást többször is felhívtak, azt is csak egynek számítják). Igaz-e, hogy van két telefonállomás, amelyről ugyanannyit hívtak?

**18.6.** [11] Egy társaságban némely emberek kezet fogtak egymással. Igaz-e, hogy mindig van két ember, aki ugyanannyiszor fogott kezet?

**18.7.** [11] **a)** Egy társaságban lejátszottak néhány sakkmérkőzést. Bármely két ember legfeljebb egy mérkőzést játszott egymás ellen. Bizonyítsuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel mérkőzött meg.
**b)** Igaz marad-e az állítás akkor is, ha megengedjük, hogy két ember többször is mérkőzzön egymással?

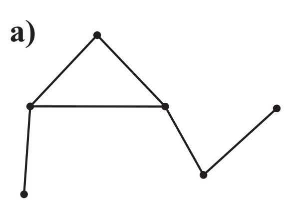
**18.8.** [11] Egy táncos estén négy fiú és négy lány vett részt. Megkérdeztük a lányokat, hogy hány fiúval táncoltak és a következő válaszokat kaptuk: 3, 1, 2, 2. Megkérdeztük a fiúkat is, hogy hány lánnyal táncoltak és a következő válaszokat adták: 2, 2, 3, 2. Mutassuk meg, hogy valaki nem az igazat mondta!

**18.9.** [11] **a)** Egy táncos estén 21 fiú és 21 lány vett részt. Minden fiú vagy négy lánnyal vagy két lánnyal táncolt, kivéve egyet, aki hat lánnyal táncolt. Lehetséges-e, hogy minden lány három vagy öt fiúval táncolt?

**b)** Egy 21 tagú társaságból mindenki két vagy négy másiknak írt levelet, kivéve egyet, aki hat társának írt levelet. Lehetséges-e, hogy mindenki három vagy öt levelet kapott?

**18.10.** (M) Adjunk meg, ha lehet olyan gráfot, amelyben a fokszámok:
**a)** 1, 2, 3, 4, 5, 6; **b)** 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7;

**18.11.** [2] A 18.0.1. ábrán néhány községet és a köztük futó utakat tüntettük fel sematikusan. Tudjuk, hogy a vidéken két buszjárat közlekedik, melyek rendre az alábbi községeket keresik fel:
I. járat: $C$, $E$, $F$, $B$; II. járat: $F$, $C$, $A$, $D$.




18.11.1. ábra.

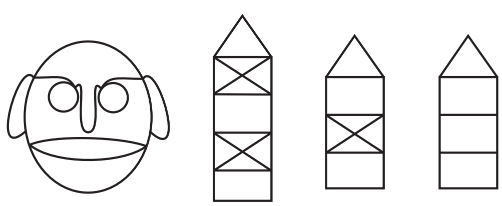
Az állomások az egyes járatokon a feltüntetett sorrendben következnek. Jelöljük be a térképen (külön **a)**-n, illetve **b)**-n) az $A$-nak megfelelő községet!

**18.12.** [11] Egy társaságban öt házaspár van jelen. Azok, akik nem ismerik egymást, bemutatkozásul kezet fognak egymással. Kovács úr megkérdezi minden jelenlevőtől, hogy hány emberrel fogott kezet és csupa különböző számot kap válaszul. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné? És Kovács úr?

**18.13.** [11] Egy összejövetelen 21 gyerek vett részt. Mindegyiktől sorra megkérdeztem, hány osztálytársa van a jelenlévők közt. Az első 13 válaszoló közül öten mondtak hármat, nyolcan négyet. Vajon hány osztálytársa volt jelen a többi gyereknek, ha azt tudjuk, hogy mindegyiküknek volt jelen legalább egy osztálytársa?

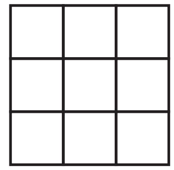
**18.14.** [11] Egy tíztagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja legalább hét másikat ismer. Igazoljuk, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse. Hogyan általánosítható a feladat? Fogalmazzuk meg az általános állítást gráfelméleti nyelven!

**18.15.** Rajzoljuk le a 18.0.1. ábrán látható figurákat a ceruza felemelése nélkül! Minden vonalon csak egyszer szabad haladni, de már megrajzolt vonalat keresztezni szabad.



18.15.1. ábra.

Jelöljük meg, hogy honnan indulva és hová érkezve sikerült elkészíteni a rajzot! Hasonlítsuk össze a különböző megoldók eredményeit és keressünk magyarázatot! (Vigyázat, nem mindegyik esetben van megoldás!)



18.16.1. ábra.

**18.16.** [17] A 18.0.1. ábrán egy $3 \times 3$-as „rács” látható. Kis négyzetekből áll. Rakjuk össze

**a)** nyolc darab három
**b)** négy darab hat
**c)** hat darab négy
**d)** három darab nyolc hosszúságú cérnából!

A cérnát elvágni nem szabad.

**18.17.** [17] A sakktáblán úgy helyeztünk el figurákat, hogy minden sorban és minden oszlopban

**a)** pontosan **b)** legalább

2 bábú található. Biztosak lehetünk-e benne, hogy ebben az esetben le lehet venni a tábláról néhány figurát úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 1 figura maradjon?

**18.18.** [17] Van egy készlet dominónk. E dominókra a 0, 1, 2, …, 10 számok vannak írva, mindegyik dominóra két szám. Készletünk teljes, azaz a fent említett számokból képzett bármely számpárhoz pontosan egy olyan dominó található, amelyre az a két szám van fölírva.

**a)** A készletből maximálisan hány dominó rakható ki az asztalra a játék szabályainak megfelelően?
**b)** Mi a helyzet akkor, ha teljes készletünk darabjaira a 0, 1, 2, …, 9 számok vannak írva?

**18.19.** (M) Hány olyan ötpontú gráf van, amelynek fokszámai:

**a)** $1, 2, 2, 3, 3$; **b)** $1, 2, 2, 2, 3$?

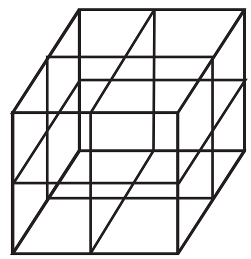
**18.20.** Hogyan helyezkedhet el 4 pont a síkban, ha a köztük fellépő távolságok között nincs három különböző?

**18.21.** (M) A Bergengóc Közlekedési Minisztérium felkért egy légitársaságot, hogy indítson ingajáratokat az ország legfontosabb városai között úgy, hogy egy városból legfeljebb három másikba induljon járat, de legfeljebb egy átszállással el lehessen jutni bármelyik városból bármelyik másikba. Legfeljebb hány város között lehet megszervezni ilyen összeköttetést? (Ingajárat: két város közti összeköttetés)

**18.22.** (M) Néhány évvel a Délnyugati Birodalom széthullása után a területén létrejött 16 hercegség mindegyike 3 másikkal barátságban élt, a többivel pedig ellenségeskedett. A hajdani birodalom szomszédságában található 8 állam elhatározta, hogy segítséget nyújt a viszályokban tönkrement hercegségeknek, méghozzá mindegyik állam 2 egymással barátkozó hercegségnek nyújt támogatást. Meg lehet-e szervezni minden esetben a segélyezést úgy, hogy mindegyik hercegség részesüljön belőle?

**18.23.** (M) Egy kocka lapjait 4-4 négyzetre osztottuk föl. Tekintsük azokat a kis szakaszokat, amelyek a kocka lapjain található összesen 24 négyzet közül egyszerre kettőnek is oldalai. Ezek közül 26 piros.

Bizonyítsuk be, hogy van olyan zárt töröttvonal, ami csupa piros szakaszból áll!



18.23.1. ábra.

**18.24.** A Bergengóc Közlekedési Minisztérium takaréskoskodik. A lehető legkevesebb ingajárattal szeretné megoldani, hogy 10 legnagyobb városából a 10 közül bármelyik másikba el lehessen jutni, ha szükséges átszállásokkal. Adjuk meg az ingajáratok minimális számát! (Ingajárat: két város közti összeköttetés)

**18.25.** Hét csillagász ül a saját bolygóján. Mindegyikük távcsővel figyeli a hozzá legközelebbi csillagász bolygóját. Van-e mindig olyan csillagász, akinek a bolygóját egyikük se figyeli?

**18.26.** Egy hat vívó körmérkőzést játszik. Igazoljuk, hogy bármely pillanatban igaz, hogy vagy van három köztük, akik közül egyik sem játszott a másikkal, vagy van három köztük, aki közül mindegyik játszott mindegyikkel. (Vö. Kürschák 195?)

## 19. FEJEZET

# Gráfok (teszt)

A 19.1-19.10. feladatok a „közép” szintnek, a 19.11-19.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

**19.1.** (M) Rajzoljunk „térképet”, amin 5 város van, a városok között utak. Az egyes városokból 2,2,3,3,4 út indul. Hány út van a térképen?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**19.2.** (M) Van olyan hattagú társaság, amelyben az emberek ismerőseinek száma rendre az alábbi. (Az ismerettséget kölcsönösnek tételezzük fel, saját magát senki nem tekinti "ismerősének".)

**A)** 1,2,3,4,5,6 **B)** 1,2,2,3,3,3 **C)** 3,4,3,4,3,4 **D)** 5,5,5,5,5,4 **E)** 1,2,2,4,4,4

**19.3.** (M) Egy táncos estén öt fiú és négy lány vett részt. Megkérdeztük a lányokat, hogy hány fiúval táncoltak és a következő válaszokat kaptuk: 3, 3, 2, 2. Megkérdeztük a fiúkat is, hogy hány lánnyal táncoltak és négyen a következő válaszokat adták: 1, 1, 2, 3. Hány lánnyal táncolt az ötödik fiú?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**19.4.** (M) Hány öt pontú 3 élű egyszerű gráf van? (Az ugyanolyan típusú -izomorf- gráfokat nem tekintjük különbözőnek.)

**A)** 7 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**19.5.** (M) Egy gráf csúcsai és élei legyenek egy kocka csúcsai és élei. Hány éle van ebben a gráfban a leghosszabb útnak?

**A)** 8 **B)** 6 **C)** 11 **D)** 7 **E)** 10

**19.6.** (M) Melyik betűt lehet lerajzolni a ceruza felemelése nélkül, ha minden vonalon legfeljebb egyszer húzhatjuk végig a ceruzát?

**A)** E **B)** T **C)** M **D)** K **E)** A

**19.7.** (M) Van olyan héttagú társaság, amelyben az emberek ismerőseinek száma rendre az alábbi. (Az ismerettséget kölcsönösnek tételezzük fel, saját magát senki nem tekinti "ismerősének".)

**A)** 6,6,4,4,2,1,1 **B)** 0,1,2,3,4,5,6 **C)** 5,3,3,3,2,1,0 **D)** 1,1,2,4,5,5,6 **E)** 2,2,2,2,4,5,5

**19.8.** (M) Egy 15 tagú társaságból mindenki három vagy négy másiknak írt levelet, kivéve egyet, aki hat társának írt levelet. Lehetséges, hogy mindenki $x$ vagy $y$ levelet kapott.

**A)** $x = 1, y = 7$ **B)** $x = 3, y = 7$ **C)** $x = 3, y = 5$ **D)** $x = 3, y = 4$ **E)** $x = 1, y = 5$

**19.9.** (M) Egy tizenháromagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja legalább $x$ másikat ismer. Ekkor a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse. Határozzuk meg a legkisebb $x$-et, amire biztosan igaz lesz az állítás.

**A)** 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 11

**19.10.** (M) 10 település között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Ha már $x$ vonalat kiépítettek, akkor bármely településről bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több már kiépített vonal összekapcsolásával. Határozzuk meg a legkisebb $x$-et, amire biztosan igaz lesz az állítás.

**A)** 41 **B)** 30 **C)** 20 **D)** 33 **E)** 37

**19.11.** (M) Egy hattpontú egyszerű gráfban a fokszámok 1,1,1,2,3,4. Melyik nem igaz?

**A)** A gráf összefüggő. **B)** A gráfban van kör.

**C)** A gráfban van 4 élű út. **D)** A gráf páros.

**E)** A 4 és 3 fokú pontok közt fut él.

**19.12.** (M) Egy hatpontú egyszerű gráfban minden pont foka 3. Legkeveseb hány háromszög lehet a gráfban?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**19.13.** (M) Egy 21 tagú társaságból mindenki három vagy négy másiknak írt levelet, kivéve egyet, aki hat társának írt levelet. Lehetséges, hogy mindenki $x$ vagy $y$ levelet kapott.

**A)** $x = 3, y = 2$ **B)** $x = 3, y = 5$ **C)** $x = 4, y = 6$ **D)** $x = 4, y = 3$

**E)** $x = 1, y = 5$

**19.14.** (M) Egy 9 tagú társaságban mindenki felírta egy papírra, hány embert ismer a jelenlevők közül. az ismeretség kölcsönös. Melyik lesz biztosan igaz a cédulákon levő 9 számról?

**A)** Van köztük 4-es. **B)** Van köztük páros szám. **C)** Van két relatív prím köztük.

**D)** A számok közt nem lehet kettőnél több 8-as. **E)** A számok átlaga egész.

**19.15.** (M) Egy társaságban némely emberek kezet fogtak egymással. Melyik lesz biztosan igaz? **A)** Van két ember, akik kézfogásainak száma 1-gyel különbözik. **B)** Van olyan ember, aki páros sokszor fogott kezet. **C)** A kézfogások összes száma legalább annyi, mint a társaság létszáma. **D)** Van két ember, akik ugyanannyiszor fogtak kezet. **E)** Van három ember, akik egymással kezet fogtak.

**19.16.** (M) Egy táncos estén hat fiú és öt lány vett részt. Megkérdeztük a lányokat, hogy hány fiúval táncoltak és a következő válaszokat kaptuk: $a = 3$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 2$, $e = 4$. Megkérdeztük a fiúkat is, hogy hány lánnyal táncoltak, hárman 2-őt, hárman 3-at mondtak. Később kiderült, az egyik lány elszámolta a dolgot, melyik javítás megfelelő?

**A)** $a = 5$ **B)** $e = 3$ **C)** $c = 4$ **D)** $b = 2$ **E)** $d = 3$

**19.17.** (M) Egy hatpontú teljes gráf éleit három színnel kiszíneztük. Melyik lesz biztosan igaz?

**A)** Lesz egyszínű háromszög. **B)** Valamelyik színű élek 6 pontú összefüggö gráfot adnak.

**C)** Lesz valamelyik színből kör. **D)** Az egyik színű éleket törölve a gráf összefüggő marad.

**E)** Lesz 7 azonos színű él.

**19.18.** (M) Egy egységkocka élvázát szeretnénk drótokból megalkotni, a csúcsoknál a találkozó végeket kicsi gyurmagombóccal rögzítjük. Drótot elvágni nem szabad. Milyen drótkészlettel sikerül megoldani a feladatot?

**A)** 2 darab 6 hosszúval.
**B)** 3 darab 4 hosszúval.
**C)** 1 darab 12 hosszúval.
**D)** Egy 4 és egy 8 hosszúval.
**E)** 4 darab 3 hosszúval.

**19.19.** (M) Ha $x$ pontú egyszerű gráfban nincs kör, akkor a komplementerében biztosan van. Keressük meg a legkisebb olyan $x$-et, amire igaz ez az állítás.

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**19.20.** (M) Egy összejövetelen 11 gyerek vett részt. Mindegyiktől sorra megkérdeztem, hány osztálytársa van a jelenlévők közt. Az első 8 válaszoló közül hatan mondtak kettőt, ketten négyet. Tudjuk, hogy mindegyiküknek volt jelen legalább egy osztálytársa. A maradék 3 gyerek mit válaszolt?

**A)** 4,2,2 **B)** 3,3,3 **C)** 4,4,4 **D)** 4,4,2 **E)** 2,2,2

# 20. FEJEZET
# Vegyes feladatok

**20.1.** (M) **a)** Helyezzünk 15 piros pontot egy hatszög oldalaira úgy, hogy minden oldalon ugyanannyi piros pont legyen!

**b)** Oldjuk meg a feladatot 16 ponttal! **c)** 2003 ponttal!

**d)** El lehet-e helyezni 15 pontot egy *hétszög* oldalaira a fenti szabálynak megfelelően?

**20.2.** Helyezzünk 10 piros és 14 kék pontot egy hatszög oldalaira úgy, hogy minden oldalon ugyanannyi piros pont legyen, mint kék!

**20.3.** (M) Ketten játszanak. Felváltva írnak be egy-egy előjelet minden szám elé (az 1-es elé is tehetnek) az alábbi sorban:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

**a)** „Kezdő” azt szeretné, hogy a legvégül kapott előjeles összeg ne legyen osztható hárommal, míg „Második” azt szeretné, hogy osztható legyen hárommal. Hogyan érdemes játszani? Kinek kedvező a játék?

**b)** És ha megfordítják a szerepeket?

**20.4.** Egy buli végén mindenki mindenkivel kezet fogott. Ekkor érkezett meg az egyik vendég barátja, hogy együtt menjenek majd el moziba, és kezet fogott azokkal, akiket ismert. Így összesen 68 kézfogás történt. A buli résztvevői közül hányan ismerték ezt az embert?

**20.5.** Hat focicsapat körmérkőzéses tornán vett részt. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. A bajnokság végén az egyes csapatok 12, 10, 9, 8, 7 illetve 6 pontot gyűjtöttek össze. Hány pont járt a győzelemért, ha döntetlenért 1, vereség esetén 0 pontot kapott minden csapat?

**20.6.** Színezzük ki a $3\times 3$-as táblázat mezőit minél több színnel úgy, hogy bármely két használt színhez található legyen egy-egy ilyen színű, oldalukkal szomszédos mező. (Az egyes mezőknek csak egyféle színe lehet!)

**20.7.** Ketten játszanak, felváltva húzzák be egy szabályos 2004-szög egy-egy átlóját. Tilos olyan átlót behúzni, amely metsz egy már korábban berajzoltat. Az *veszít*, akinek a lépése után létrejön egy olyan négyszög, amelynek egyik átlója sincs behúzva. Kinek van nyerő stratégiája?

**20.8.** Lehetséges-e olyan társaság, amelyben mindenkinek pontosan 6 barátja van, és bármely két embernek éppen 2 közös barátja van?

**20.9.** A „VAKÁCIÓ” szó betűit egy $3\times 3\times 3$-as kockában rendezte el a 7c osztály. A kocka elülső bal felső kis kockájában egy „V”, az azzal lapban szomszédos kis kockákban egy-egy „A”, az azok bármelyikével lapban szomszédos kis kockában egy-egy „K” stb. … betű áll, végül az „Ó”, a nagy kocka hátsó jobb alsó kis kockájában van. Hányféleképpen olvasható ki a „VAKÁCIÓ” szó, ha a „V”-ből indulva mindig csak lapban szomszédos (hátrébb vagy jobbra vagy lejjebb található) kis kockában található betűvel folytathatjuk az olvasást?

**20.10.** **a)** A bergengóc lottón 7 számból húzzák ki a 3 nyerőszámot, és a játékosok három számra tippelnek minden szelvényen. Legalább hány szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük olyan, amely legalább két találatos lesz?

**b)** A bergengóc lottó karácsonyi fordulójában a 7 számból csak 2 nyerőszámot húznak ki, de a játékosok továbbra is három számra tippelnek minden szelvényen. Legalább hány szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük telitalálatos (azaz két találatos)?

**20.11.** Bözsi 3 szál virágot kapott osztálytársaitól névnapjára: egy rózsát, egy szegfűt és egy dáliát. Otthon három vázája van: egy kristály, egy kínai porcelán és egy egyszerűbb kerámia. Hányféleképpen rendezheti el a virágokat a vázákba,

**a)** ha mindegyik vázába egy-egy virágot szeretne tenni?

**b)** ha nincs ilyen kikötés?

**20.12.** Picurka ország lakói olyan lottón játszanak, ahol az 1, 2, 3, …, 45 számok közül húznak ki 3-at.

**a)** Kiszámolták, hogy ha minden lakó másképp töltené ki a szelvényt, akkor is kijöhetnek olyan számok, hogy senki se legyen telitalálatos. Hányan lakhatnak Picurka országban?

**b)** Picurka országban János bácsi nagyon sok szelvényt vett: minden lehetséges módon kiválasztott három számot, és beadott egy-egy szelvényt minden ilyen kitöltéssel. Hány két-találatos szelvénye lett így?

**c)** Picurka ország lakosainak száma egyre nő, így áttérnek a 45-ből 42-es lottóra, azaz most a 45 számból 42-t fognak kihúzni és ennyire is kell tippelni. Így most hány szelvényt kell kitölteni a biztos telitalálathoz?

**d)** Ha Picurka ország új lottóján kitöltjük az összes lehetséges módon a lottószelvényt, akkor hány 41 találatos szelvényünk lesz?

**e)** És hány 40 találatos?

**20.13.** **a)** Egy piros egy kék és egy zöld golyót keresztülfúrtunk és egy madzagra valamilyen sorrendben ráfűzzük mind a hármat. Így hány különböző nyaklánc képezhető?

**b)** És ha még egy fekete golyónk is van és mind a négyet fel akarjuk használni?

**20.14.** Hét ember találkozott, egyesek kezet is fogtak egymással. Lehetséges-e, hogy mindenki pontosan 3-szor fogott kezet?

**20.15.** Felvehető-e a síkon 5 szakasz úgy, hogy mindegyik három másikat metsszen?

**20.16.** Három betörő kirabolt egy bankot. A rendőrség nagyon gyorsan kiért a helyszínre és nyolc gyanúsítottat szedett össze. A rendőrök tudják, hogy hárman bűnösök közöttük és azt is, hogy az alábbi vallomásokban az ártatlanok igazat mondanak:

$A$: $D$ ártatlan;
$B$: $F$ ártatlan;
$C$: $E$ ártatlan;
$D$: $H$ ártatlan;
$F$: $G$ ártatlan;
$G$: $C$ ártatlan;
$H$: $B$ ártatlan;
$A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ és $H$ közül melyik három a rabló?

**20.17.** (M) Lehet-e 9 db háromszöglapból konvex testet építeni?

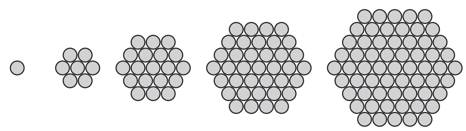
**20.18.** (M) Lehet-e egy szabályos hétszög átlóit és oldalait hat színnel színezni úgy, hogy minden csúcsból induljon mindenféle él?

**20.19.** (M) Egy kör alakú asztalnál 77-en ülnek, s mindenki gondol egy egész számra, majd mindenki felírja egy cédulára két szomszédja számának összegét. Bizonyítsuk be, hogy nem állhat minden cédulán 1991.

**20.20.** (M) Elhelyezhetők-e a szabályos nyolcszög csúcsaiba az 1, 2, …, 8 számok úgy, hogy bármely három szomszédos csúcsban levő számok összege 13-nál nagyobb legyen?

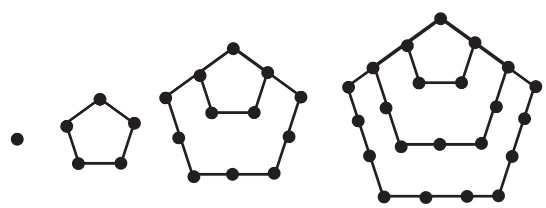
**20.21.** (M) Van-e öt olyan egész szám, melyekből képezve az összes kéttagú összeget, eredményül 10 egymást követő számot kapunk?

**20.22.** Határozzuk meg a 100. hatszögszámot! (Hány korong van a 20.0.1. ábrán a 100. kupacban?)



20.22.1. ábra.

**20.23.** Határozzuk meg a 100. ötszögszámot! (Hány korong van a 20.0.1. ábrán a 100. kupacban?)



20.23.1. ábra.

**20.24.** Hányféleképpen írhatjuk egy hatszög csúcsaihoz az 1, 1, 1, 3, 3, 3 számokat, ha
 **a)** a hatszög oldalai közt nincs két egyforma?
 **b)** a hatszög szabályos és az egymásba forgatható elrendezéseket nem különböztetjük meg?

**20.25.** (M) Fel lehet-e írni egy kör kerületére 10 különböző számot úgy, hogy mindegyik szám két szomszédja számtani közepe legyen?

**20.26.** (M) Fel lehet-e írni egy kör kerületére az 1, 2, …, 10 számokat úgy, hogy bármely két szomszédos szám különbsége 3,4 vagy 5 legyen?

**20.27.** (M) Egy 100 fős katonai alakulatnál a napi ügyeletet mindig hárman látják el. Meg lehet-e szervezni az ügyeletet egymást követő napokon át úgy, hogy bármely két fő együtt csak egyszer ügyeljen?

**20.28.** Egy kocka néhány csúcsát pirosra, ill. kékre színezzük; legyen több piros, mint kék. Van-e olyan kiterítése a kockának, amikor a hálózatban több kék csúcs van, mint piros? (Érdemes egy konkrét színezéssel indítani a kérdést.)

**20.29.** (M) A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. Ezen az ülésen három kérdést tűztek napirendre, mely fölött szavazással óhajtottak dönteni. A kérdések a következők voltak:

**1.** Okosabb-e a majom, mint az ember?

**2.** Szebb-e a majom, mint az ember?

**3.** Igaz-e, hogy az ember a majom őse?

A szavazás után kiderült, hogy az 1. és 3. kérdésre egyaránt 23-23 igen szavazat érkezett, míg a második kérdésre csak 17.

Az 1. kérdésre igennel válaszolók közül 13-an a 2.,12-en pedig a 3. kérdésre feleltek nemmel.

Igent mondott a 2. és 3. kérdésre 6 „akadémikus”, de közülük ketten az első kérdésre nemmel szavaztak.

Hányan szavaztak mind a három kérdésre nemmel?

**20.30.** Kiszíneztük két színnel a tér pontjait. Igazoljuk, hogy tetszőleges d-hez létezik d oldalú szabályos háromszög.

**20.31.** **a)** Bálint kijelöl egy pontot a rajzlapján, majd megkérdi húgát: „Milyenre színezzem Piroska?” „Pirosra!” –feleli a lány. Ezután Bálint Bálint új pontokat tűz ki, minden pont után Piroska dönti el, hogy kék legyen, vagy piros. Kaphat-e Bálint olyan szabályos háromszöget, melynek minden csúcsa azonos színű, ha ezt a húga nem akarja?

**b)** Mi a helyzet akkor, ha Bálint előre kijelöl valahány pontot, s ezután jön húga a színes ceruzákkal?

**20.32.** Kiszíneztük két színnel a tér pontjait. Igazoljuk, hogy van olyan háromszög a síkon, amelynek a csúcsai és a súlypontja is azonos színűek.

**20.33.** Bizonyítsuk be, hogy az első 1000 pozitív egész számot tíz diszjunkt halmazra lehet bontani úgy, hogy mindegyik csoportban legyen legalább két szám és egy halmazon belül semelyik két szám különbsége ne legyen az adott halmazban.

**20.34.** Adj meg

**a)** minél kevesebb **b)** minél kisebb

pozitív egészeket úgy, hogy a belőlük képzett különbségek között legyenek az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok.

**20.35.** Hány 5 jegyű szám készíthető az 1 és 2 jegyekből, amelyek legalább három helyen különböznek?

**20.36.** Egy szabályos ötszög minden csúcsába egy-egy számot írtunk. Ezután az oldalakra és az átlókra ráírtuk a végpontjaikban álló számok összegét. Igazoljuk, ha ez utóbbi tíz szám közül 7 egész, akkor mind a 10 egész.

**20.37.** Egy 5×5-ös táblába lehet-e úgy számokat írni, hogy mindegyik sorban a számok szorzata 20 legyen, mindegyik oszlopban a számok szorzata 30 legyen?

**20.38.** Egy 5×5-ös táblába lehet-e úgy számokat írni, hogy a számok összege pozitív legyen, de bármely 2×2-es részben a négy szám összege negatív legyen?

**20.39.** Nagyapáim dédapjai ugyanazok a személyek-e, mint dédapáim nagyapjai?

**20.40.** Hány olyan szám van, amelynek jegyei szigorúan monoton csökkennek?

**20.41.** Hány olyan szám van, amelynek jegyei monoton csökkennek?

**20.42.** (M) Peti és Pali 5 mérkőzéssel akarta eldönteni, hogy melyikük a jobb sakkozó. Ez azonban nem sikerült, mert a végén mindkettejüknek 2,5-2,5 pontja volt. Hányféleképpen történhetett ez meg, ha a győztes 1 pontot, a vesztes 0 pontot kapott, s döntetlenért 0,5-0,5 pont járt?

**20.43.** (M) Az 1, 2, 3, 4 számjegyekből elkészítjük az összes lehetséges olyan tizedestörtet, amelynek egy, kettő vagy három tizedesjegye van és mindegyik számjegyet pontosan egyszer tartalmazza. Mennyi az így kapott tizedestörtek összege?

**20.44.** Hányféleképpen lehet 4 piros és 4 kék gyöngyből karkötőt készíteni?

**20.45.** Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet a megcímzett borítékokba úgy, hogy semelyik levél se a jó címzéshez kerüljön?

**20.46.** Egy négyzet mindegyik oldalát 7 egyenlő részre osztottuk. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai a négyzet oldalain megjelölt (csúcsoktól különböző) osztópontok közül kerülnek ki?

**20.47.** Egy osztály 16 tanulója evezőstúrára készül. Minden diáknak pontosan 3 barátja van az osztályban (a barátságokat tekintsük kölcsönösnek). A túrán 8 kétszemélyes kenuban kell elhelyezkedniük. Biztosan igaz-e, hogy be lehet őket osztani úgy, hogy mindenki egy barátjával kerüljön egy csónakba?

**20.48.** (M) El lehet-e osztani 1000 üveggolyót 5 gyerek között úgy, hogy mindenkinek páratlan sok golyó jusson?

**20.49.** (M) Lehet-e 10 egész szám összege és szorzata is 10?

**20.50.** (M) Csalafinta Csaba azzal henceg barátainak, hogy sikerült 15 kockacukrot beletennie három műanyag pohárba úgy, hogy mindegyikben páratlan sok kockacukor van. Hihetünk-e neki?

**20.51.** (M) Lehet-e 100 különböző páratlan szám reciprokának összege 1?

**20.52.** (M) Lehet-e az $1, 2, \ldots, 30$ számokat 10 csoportra osztani úgy, hogy minden csoportban 3 szám legyen és közülük a legnagyobb egyenlő legyen a másik kettő összegével?

**20.53.** (M) A betűk valós számokat jelölnek. Bizonyítsuk be, hogy az abc, def, ghi, -gbf, -dhc, -aei számok mindegyike nem lehet pozitív.

**20.54.** (M) Van-e olyan szám, amelyben a jegyek összege 9, a kétszeresében a jegyek összege 10?

**20.55.** (M) Panni és Peti is leírtak egy 7 jegyű számot a füzetükbe. Panni észrevette, hogy mindkét számban pontosan ugyanazok a jegyek szerepelnek. Peti kiszámolta, hogy a két szám különbsége 1369631. Mutassuk meg, hogy valamelyikük tévedett.

**20.56.** (M) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek segítségével felírható-e két olyan hétjegyű szám, hogy egyik a másiknak kétszerese legyen?

**20.57.** (M) Van-e öt olyan egész szám, amelyből képezve az összes kéttagú összeget, eredményül tíz egymást követő egész számot kapunk?

**20.58.** Ki lehet-e rakni hézag és átfedés nélkül 2 egység oldalú és 3 egység oldalú négyzetekből egy 101 egység oldalú négyzetet?

**20.59.** (M) Kilenc korong van az asztalon, ezek egyik oldala kék a másik piros. Kezdetben minden korongnak a piros oldalát látjuk. Megfordíthatunk 4 korongot. Ezt a lépést többször ismételhetjük. Elérhető-e, hogy minden korongnak a kék oldalát lássuk?

**20.60.** (M) A „csodakert” fáin 25 banán és 30 narancs van. Egy-egy alkalommal két gyümölcsöt veszünk le, ha egyformákat vettünk le, akkor egy narancs nő helyettük. Ha különbözőeket vettünk le, akkor egy banán nő. Utolsóként milyen gyümölcs marad?

**20.61.** Egy sakkozó kertjét sakktábla mintára alakította ki. 7 mező gyomos lett. Ha egy nem gyomos mezőnek legalább két szomszédja is gyomos, akkor az egy nap múlva szintén gyomossá válik. Begyomosodhat-e az egész kert?

**20.62.** Két kupacban gyufák vannak. Egy-egy alkalommal valamelyik kupacba betszünk néhány szálat, s ugyanekkor a másik kupacba kétszer annyit helyezünk. Elérhető-e, hogy mindkét kupacban 50 gyufaszál legyen, ha kezdetben az egyes kupacokban 7 és 34 gyufa volt?

**20.63.** Szorozzuk meg a Pascal háromszög $n$-edik sorában álló számokat rendre az 1, 2, 4, 8, … számokkal, azaz a 2 hatványaival! Mennyi lesz az így kapott számok összege? (Pl. $n = 3$ esetén az összeg: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 1$)

**20.64.** (M) A térbeli koordinátarendszer origójából hányféleképpen juthatunk el a $(2; 3; 5)$ pontba, ha csak a koordinátatengelyekkel párhuzamosan pozitív irányban léphetünk egyet-egyet?

**20.65.** (M) Határozzuk meg $(a + b + c)^{10}$ kifejtett alakját!

**20.66.** [15] Rakjuk sorba a 2, 3, 4, 5, …, 29, 30 egész számokat (összesen 29 számot) úgy, hogy az első szám osztható legyen 1-gyel, a második kettővel, a harmadik hárommal, … a huszonkilencedik 29-cel. Hány megoldás van?

**20.67.** Hat focicsapat körmérkőzéses tornán vett részt. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. A bajnokság végén az egyes csapatok 12, 10, 9, 8, 7 illetve 6 pontot gyűjtöttek össze. Hány pont járt a győzelemért, ha döntetlenért 1, vereség esetén 0 pontot kapott minden csapat?

**20.68.** A Torpedó játékban egy $10 \times 10$-es táblán kell elhelyezni a 10 hajóból álló „hajórajt”. Egy hajó a tábla egy $1 \times 2$-es téglalapja, a különböző hajóknak megfelelő téglalapoknak nem lehet közös pontja, még közös oldala, csúcsa sem. Bizonyítsd be, hogy 32 megfelelően választott „lövéssel” biztosan el lehet találni legalább egy hajót!

**20.69.** Lehetséges-e olyan társaság, amelyben mindenkinek pontosan 6 barátja van, és bármely két embernek éppen 2 közös barátja van?

**20.70.** Ketten játszanak, felváltva húzzák be egy szabályos 2004-szög egy-egy átlóját. Tilos olyan átlót behúzni, amely metsz egy már korábban berajzoltat. Az veszít, akinek a lépése után létrejön egy olyan négyszög, amelynek egyik átlója sincs behúzva. Kinek van nyerő stratégiája?

**20.71.** (M) Képzeljük el, hogy a Föld körül 36 mesterséges bolygó kering. Igazoljuk, hogy minden pillanatban van a Földön olyan hely, ahonnan legfeljebb 18 látható közülük.

**20.72.** [7] Adottak egy szabályos $n$-szög csúcsai. Szeretnénk berajzolni a sokszög összes oldalát és átlóját a ceruza felemelése nélkül. Mely $n$-re lehetséges ez?

**20.73.** (M) [17] Andris az 1,2,3,4 halmaz minden részhalmazát felírta egy-egy piros cédulára. (Minden piros cédulára egy részhalmazt írt, s az összes részhalmazt felírta.) Ezután sorra vette a piros cédulákat: fogta az elsőt, és a rajta szereplő halmaz összes részhalmazát felírta egy-egy fehér cédulára. Ezután vette a következő pirosat - ennek részhalmazait is felírta fehérekre stb. Miután ezzel készen lett vette a fehér cédulákat, mindegyik minden részhalmazát felírta egy-egy zöld cédulára. Hány zöld cédulája van Andrisnak?

**20.74.** (M) Negyven gyufaszálat szétosztottunk húsz skatulyába, mindegyikben van legalább egy gyufa, egyikben sincs húsznál több. Igazoljuk, hogy kiválasztható néhány skatulya, amelyekben összesen 20 gyufa van.

**20.75.** (M) [17] Egy kocka 6 lapját piros, fehér és kék színekkel akarjuk kifesteni. Egy-egy oldalhoz csak egyféle szín használható és a kocka kiszínezéséhez nem kell feltétlenül mindegyik színt fölhasználnunk. Hányféle színes kockát kaphatunk, ha csak azokat tekintjük különbözőnek, amelyek nem forgathatók egymásba?

**20.76.** Össze lehet-e állítani egy

**a)** $3 \times 3 \times 3$-as **b)** $4 \times 4 \times 4$-es

kockát $1 \times 1 \times 1$-es fekete és fehér kis kockákból úgy, hogy bármelyik kis kocka mellett pontosan két vele megegyező színű, lapban szomszédos kis kocka legyen?

**20.77.** [5] Tekintsük a páratlan számokat az alábbi háromszögben elrendezve!

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & 1.\ \text{sor}\\
 & & & 3 & & 5 & & & & 2.\ \text{sor}\\
 & & 7 & & 9 & & 11 & & & 3.\ \text{sor}\\
 & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & 4.\ \text{sor}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}
$$

Határozzuk meg

**a)** Az első $n$ sorban összesen található számok számát!

**b)** Az első $n$ sorban összesen található számok összegét!

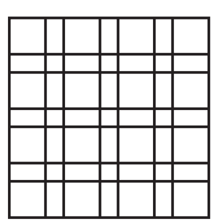
**c)** A $k$. sorban található számok összegét!

**d)** Kíséreljünk meg a b) és c) részek eredményét nem egymásból meghatározni! Vessünk össze utólag a két feladatrész eredményét, állítsunk föl formulát!

**20.78.** (M) **a)** Hány téglalap van a 20.0.1. ábrán?

**b)** Ebből mennyi a négyzet?

(A kis téglalapok oldalai 1 és 2 egység hosszúak.)



20.78.1. ábra.

**20.79.** (M) Pithagorasz táblázatában, a szorzótáblában, a bal fölső saroktól számított $n$-edik sor és $m$-edik oszlop találkozásában található mezőben az $n \cdot m$ szorzat értéke áll. Tekintsük az egy átlóban álló számok összegét! (A 20.0.1. ábrán föltüntettük az 1. és a 2. átlóban kapott összeget.) Mennyi lesz az 1999. átlóban kapott összeg?

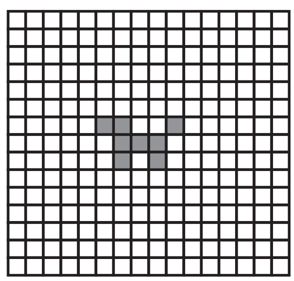
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 4 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |
| | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 |

20.79.1. ábra.

**20.80.** (M) A négyzethálós papíron néhány mező fekete, a többi pedig fehér. Egy lépésben az összes mező színe az alábbi szabály szerint módosul:

*a mező fekete lesz, ha 4 élszomszédja közül egy vagy három (tehát páratlan számú) fekete, illetve fehér lesz, ha nulla, kettő vagy négy (azaz páros darab) élszomszédja fekete.*

Mi lesz a 20.0.1. ábrán látható kutyából 8 lépés után? A papírt képzeljük végtelen nagynak!



20.80.1. ábra.

**20.81.** (M) Egyforma egyforintosokat osztunk ki gyerekek között úgy, hogy mindenki kapjon legalább 1 forintot. Hányféleképpen oszthatunk ki

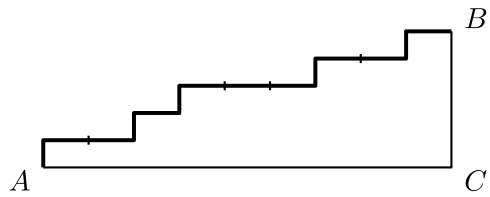
**a)** 2 gyereknek 8 Ft-ot? **b)** 3 gyereknek 8 Ft-ot? **c)** 4 gyereknek 10 Ft-ot?

**d)** $k$ gyereknek $n$ Ft-ot?

**20.82.** (M) Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek jegyei monoton csökkennek?

**20.83.** [16] Az $A$ és $B$ pont között lépcsőt akarunk építeni. Az $\overline{AC}$ távolság 4,5 méter a $\overline{CB}$ távolság 1,5 méter (lásd a 20.0.1. ábrát). Az egyes lépcsőfokok 30 cm magasak, szélességük (hosszuk) 50 cm egész számú többszöröse. Hányféleképpen építhetjük meg a lépcsőt?

**20.84.** (M) Egy osztály nagyon sikeresen zárta a félévet. A diákok több, mint fele ötöst kapott bizonyítványába matematikából, de ugyanez volt a helyzet angolból, magyarból, történelemből és fizikából is. Bizonyítsuk be, hogy az említett öt tantárgy között van két olyan, amelyekre igaz, hogy az osztály diákjainak több mint egyötöde mindkettőből ötöst kapott.



20.83.1. ábra.

**20.85.** (M) Bergengóciában a hölgyek -és újabban a férfiak is- szívesen hordanak színes golyókból álló nyakláncokat, karkötőket. Mivel a divat igen gyorsan változik, népszerűek lettek a festőgépek, melyek első prototípusát Bigéc (a MikiFoszt cég mostani igazgatója) fejlesztette ki. A Bigéc típusú festőgépbe ötféle színű golyót (pirosat, kéket, zöldet sárgát és fehéret) lehet beledobni. A gépnek van egy szabálya, amely egyértelműen megmondja, hogy melyik színt melyikké alakítsa át. A gép érzékeli a bedobott golyó színét, és a szabálya szerint átfestett golyót adja ki. A Piri-gép például minden golyót pirosra fest. Csak a sznobok veszik az Ident gépet, amelyik minden golyót olyannak hagy, amilyen volt.

**a)** Összesen hányféle Bigéc típusú festőgép lehetséges?

**b)** Ezek között hány olyan van, amelyik semelyik golyót sem hagyja meg olyan színűnek, amilyen volt?

**20.86.** (M) **a)** Hány olyan Bigéc típusú festőgép van (lásd a 20.85. feladatot), amely különböző színű golyókból mindig különbözőeket készít?

**b)** És ezek között hány olyan van, amelyik semelyik golyót sem hagyja meg olyan színűnek, amilyen volt?

**20.87.** (M) **a)** Hány olyan Bigéc festőgép van, amelyik pontosan egy színt nem fest át más színre?

**b)** És hány olyan, amelyik legalább egy színt nem fest át más színre?

**20.88.** (M) Bigéc gépeit úgy alakították ki, hogy egymás mögé lehessen kapcsolni azokat.

Jelölje például D azt a gépet, ami a piros golyókat kékre, a kékeket zöldre festi, a többi színét pedig nem változtatja; Piri pedig legyen az a gép, ami mindent pirosra fest.

Ha D mögé kapcsoljuk Pirit, akkor olyan összetett gépet kapunk, ami ugyanúgy viselkedik, mint Piri, mindent pirosra fest. Ha viszont Pirit vesszük előre és mögé a D gépet, akkor új gépet kapunk: olyat, amely mindent kékre fest. Egy gépet saját maga mögé is kapcsolhatunk. Három D gépet egymás mögé kapcsolva olyan gépet kapunk, amelyik a kék és piros korongokat zöldre festi, a többi színét nem változtatja.

**a)** Hány olyan gép van, amelynek két példányát összekapcsolva olyan gépet kapunk, mint Ident, ami minden korongot olyannak hagy, amilyen volt?

**b)** Hány olyan gép van, amelynek megfelelő számú példányát összekapcsolva Identet kapjuk?

**20.89.** (M) Bergengócia nemzeti ünnepe alkalmából kedvezményesen árusítják mindazokat a gépeket, amelyeknek

**a)** két példányát

**b)** néhány (megfelelő számú) példányát

egymás mögé kapcsolva az összekapcsolt gép úgy működik, mint „Piri”, azaz minden golyót pirosra fest.

Hányféle gépet árusítanak akciósan az a) illetve a b) esetben?

**20.90.** (M) A MikiFoszt gyárban új stratégiát dolgoztak ki a festőgépek minél olcsóbb előállítása érdekében. Az elképzelés szerint csak néhány fajta gépet gyártanának, azokból viszont sokat, és e néhány fajta gép példányainak megfelelő összekapcsolásával állítanák elő a többi gépet is.

Mennyi a „néhány”, azaz legkevesebb hányfajta gép segítségével lehet a stratégiát megvalósítani, ha egyelőre csak annak a 120 gépnek az előállítására törekednek, amelyek különböző színű golyókból különbözőeket készítenek?

**20.91.** (M) Készítsünk algoritmust, ami véletlenszerűen megkeveri a 32 lapos magyar kártya paklit, amelynek elemeit a $v$ vektorban tároljuk. A vektor egy eleme a kártya egy lapját jelenti, aminek van színe (piros, zöld, makk, tök) és száma (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász).

# Segítség, útmutatás

## 1. Bemelegítő feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 2. Leszámlálási feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 3. Leszámlálási feladatok (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 4. A Pascal-háromszög

**4.7.** Keressük meg az eredményt a Pascal–háromszögben!

**4.8.** Keressük meg az eredményt a Pascal–háromszögben!

**4.9.** Keressük meg az eredményt a Pascal–háromszögben!

## 5. A Pascal-háromszög (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 6. A szita-módszer

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 7. A szita-módszer (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 8. A skatulyaelv

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 9. A skatulyaelv (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 10. Feladatok a sakktáblán

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 11. Feladatok a sakktáblán (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 12. Kombinatorikus geometria

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 13. Kombinatorikus geometria (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 14. Játékok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 15. Játékok (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 16. A teljes indukció

**16.14.** Vizsgáljuk a szögek összegét!

## 17. A teljes indukció (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 18. Gráfok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 19. Gráfok (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

## 20. Vegyes feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

# Megoldások

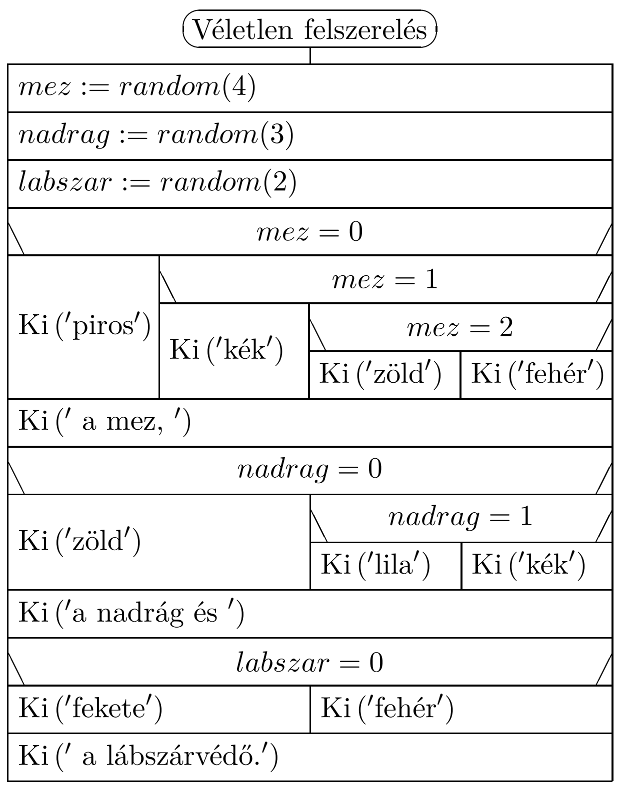
## 1. Bemelegítő feladatok

**1.2.** $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$.

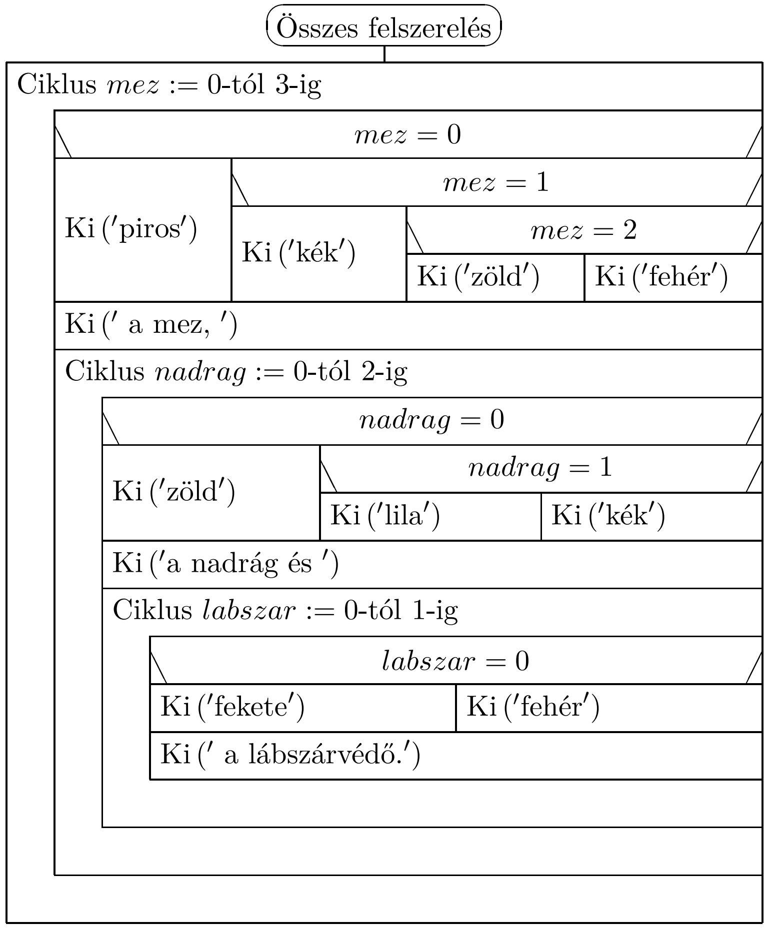
**1.22.** Lásd [17][17. fel.].

**1.31.** 32 oldalas.

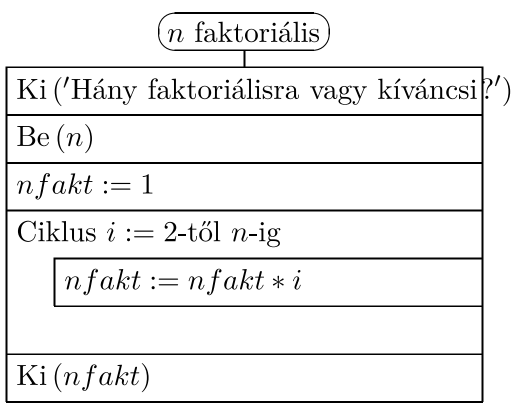
**1.33. a)**




**b)**




**1.34.**




## 2. Leszámlálási feladatok

**2.1.** 4!=24.

**2.2.** 3!=6

**2.3.** M:4!=24.

**2.4.** 3!=6

**2.5.** 3!=6.

**2.6.** 3!=6.

**2.7.** Mindkét kérdésre a válasz 4!=24.

**2.8.** **a)** 6!=720, **b)** $6^6 = 46656$.

**2.9.** **a)** 6, **b)** 12.

**2.10.** **a)** 24, **b)** 108.

**2.11.** **a)** 4!=24; **b)** 4!:2=12; **c)** 4!:2:2=6.

**2.12.** **a)** 24; **b)** 6.

**2.14.** 4!·2=48.

**2.15.** 6!=720.

**2.16.** 5!:2=60. Megfelelő szavak például: LILLA, ETELE, vagy ETETTE.

**2.17.** 3! ·2=12.

**2.18.** 3! ·4·3=72.

**2.21.** 5!=120.

**2.22.** A PINTY szó betűiből 5!=120 szó készíthető. A NÜNÜKE szó betűiből 6!:2:2=180 szó készíthető.

**2.23.** **a)** 60; **b)** 10.

**2.24.** **a)** 5!=120 **b)** 6!:6=5!=120

**2.25.** 5! ·6·5·4=14400.

**2.27.** **a)** 51423.

**2.29.** $2^6 = 64$.

**2.30.** $2^5 = 32$.

**2.31.** 9·10·10=900; 9·9·8=648.

**2.32.** $5^4 = 625$.

**2.33.** $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.

**2.34.** $2^5$-1=31.

**2.35.** **a)** $5^3 = 125$, $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 111 \cdot 5^2 = 27750$;
**b)** 5·4·3=60, (1+2+3+4+5) ·111·4·3=13320.

**2.36.** 5·5·5=125, ha lehetnek azonos gombócok. 5·4·3=60, ha minden gombóc különböző.

**2.37.** Ugyanakkora az esély.

**2.39.** $26^3 \cdot 10^3 = 17576000$.

**2.40.** $2^9 - 1 = 511$.

**2.41.** 10·9·8·7=5040.

**2.42.** 6·6·6·6=1296.

**2.43.** 9000-9·9·9·9=2439.

**2.44.** 128.

**2.45.** 4·3=12, ha a sorrend számít, ennek fele, ha nem számít.

**2.46.** **a)** $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$;
**b)** $(1+2+3+4+5+6+7+8+9) \cdot (1000 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 111 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7)$, hiszen a 0-tól különböző jegyek az ezres helyiértéken $9 \cdot 8 \cdot 7$ esetben állhatnak, a többi helyiértéken viszont csak $8 \cdot 8 \cdot 7$ esetben.
**b)** 1465.

**2.47.** $3^{13} = 1594323$.

**2.48.** $13 \cdot 2$, kiválasztjuk a hibás tippet és oda kétféle nem jó eredményt írhatunk. A 11 találatos esetben $\binom{13}{2} = 78$ féle lehet a rossz tippek helye és ott $2 \cdot 2 = 4$ lehetőségünk van, összesen tehát 312 ilyen szelvény tölthető ki.

**2.49.** 4 kérdéssel.

**2.53.** $\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = \binom{6}{3} = 20$.

**2.54.** $\frac{14\cdot13\cdot12}{3\cdot2\cdot1} = \binom{14}{3} = 364$.

**2.55.** $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \binom{7}{4} = 35$.

**2.56.** $\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = \binom{7}{3} = 35$. A 8-as csak egy helyre kerülhet, utána ki kell választanunk azt a három számot, amit elé teszünk. Ezek után a számok sorrendje egyértelmű.

**2.57.** $\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = \binom{7}{3} = 35$. Ha a jobbra lépést J-vel, a lelépést L-lel jelöljük, akkor egy 7 jelből álló sorozat felel meg egy kiolvasásnak. Kiválasztjuk, a 7 jel közül melyik 3 legyen L.

**2.58.** $\binom{8}{3} = 56$.

**2.59.** A lehetséges párok száma $\binom{10}{2} = 45$. $2^5 < 45 < 2^6$, ezért 6 kérdés elég.

**2.60.** $\binom{90}{5} = 43949268$.

**2.61.** Ha kiválasztok három különböző jegyet, azok egyértelműen meghatároznak egy ilyen számot, ezért számuk éppen $\binom{10}{3} = 120$.

**2.62.** **a)-b)** $\binom{6}{2} = 15$.

**2.63.** $\binom{7}{3} = 35$.

**2.64.** A táblázatnak 9 függőleges és 9 vízszintes osztóvonala van. Ezek közül kell kettőt-kettőt választani, ezért a téglalapok száma: $\binom{9}{2} \cdot \binom{9}{2} = 1296$.

**2.65.** 56.

**2.66.** **a)** 35.

**2.67.** Legyen a középső jegy t, ekkor t>1. Az első jegy lehet t-1 féle, az utolsó jegy pedig t féle, ezért a válasz 1·2+2·3+3·4+...+8·9=240.

**2.68.** Felsoroljuk a szám jegyeit monoton növekvő rendben. Mindig a lehető legkisebbet vesszük a soron következő lépésben. A számjegyek sorrendjére majd később térünk vissza.

111, 122, 133, 144, 155, 166, 177, 188, 199,
222, 223, 233, 234, 244, 245, 255, 256, 266, 267, 277, 278, 288, 289, 299,
333, 334, 335, 344, 345, 346, 355, 356, 357, 366, 367, 368, 377, 378, 379, 388, 389, 399,
444, 445, 446, 447, 455, 456, 457, 458, 466, 467, 468, 469, 477, 478, 479, 488, 489, 499,
555, 556, 557, 558, 559, 566, 567, 568, 569, 577, 578, 579, 588, 589, 599,
666, 667, 668, 669, 677, 678, 679, 688, 689, 699
777, 778, 779, 788, 789, 799
888, 889, 899
999.

Három azonos jegy van 9 számban, pontosan két azonos jegy van 8+7+6+5+4+3+2+1=36 esetben, három különböző szám van 34 esetben. A lehetőségek száma tehát 9+3·36+6·34=321.

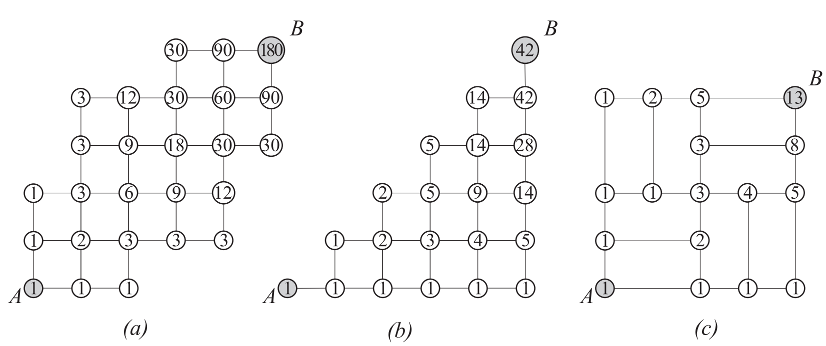
**2.69.** Vegyük sorra az esetek a szerint, hogy hányszor lépünk kettőt: $\binom{8}{0}+\binom{7}{1}+\binom{6}{2}+\binom{5}{3}+\binom{4}{4}=$ $=34$.

**2.70.** A feladat visszavezethető az előzőre, hiszen a fekvő dominók csak pontosan egymás felett lehetnek. Az álló dominó az egy lépcsőfoknak, a fekvő dominópár a két lépcsőfoknak felel meg.

**2.71.** Ha a szám $\overline{abc}$, akkor négy lehetőség van a<b<c, a<b>c, a>b<c, vagy a>b>c. Ezeknél sorra 7, 8, 9, 8 a lehetőségek száma, összesen 32.

**2.72.** **a)** Gondoljunk magunk elé 8 darab egyest, köztük + jelekkel. Ezek közül néhányat bekarikázunk, a bekarikázott + jelek közti 1-eseket pedig összeadjuk. Pl. $1+1+1\oplus1\oplus1+1+1+$ $+1=3+1+4$. A hét darab eredeti + jel közül mindegyiknél eldönthetjük, hogy bekarikázzuk-e, ezért a válasz $2^7$.

**2.73.** A számjegyek lehetnek nagyság szerint rendezve: 006, 015, 024, 033, 114, 123, 222. A lehetséges esetek száma az előző sorrendet követve: 1, 4, 4, 2, 3, 6, 1, összesen 23 ilyen szám van.




2.74M.2. ábra.

**2.74. a)-b)-c)** Minden csomóponthoz beírjuk, oda hányféleképpen juthatunk el (lásd a 2.2. ábrát!). Ezt a számot úgy kapjuk, hogy vesszük a bal oldali és az alsó szomszédokon található számok összegét. Ahol ilyen szomszédból csak az egyik fajta van, ott azt a számot írjuk tovább.

**2.75.** 20.

**2.76.** A feladat természetesen ugyanaz, mintha az (1, 1)-ből az (5, 3)-ba kéne eljutni. Az $(n, k)$ számpárba léphetünk minden olyan $(x, y)$ számpárból, amelyre $x \leq n$és $y \leq k$. Készítünk egy táblázatot, melyben feltüntetjük, mely számpárba hányféleképpen juthatunk el, ebből leolvasható a válasz. A lépések rendszere 200 féle lehet.

| $k$ \ $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| 2 | 1 | 3 | 8 | 20 | 48 |
| 3 | 2 | 8 | 26 | 72 | 200 |

**2.77.**

n alatt a k

Be $(n)$

Be $(k)$

$nfakt := 1$

$kfakt := 1$

$nminuszkfakt := 1$

Ciklus $i := 1$-től $n$-ig

  $nfakt := nfakt * i$

Ciklus $i := 1$-től $k$-ig

  $kfakt := kfakt * i$

Ciklus $i := 1$-től $(n - k)$-ig

  $nminuszkfakt := nminuszkfakt * i$

$x := nfakt/(nminuszkfakt * kfakt)$

Ki $(x)$

**2.78. a)**

Véletlen négyjegyű nullával

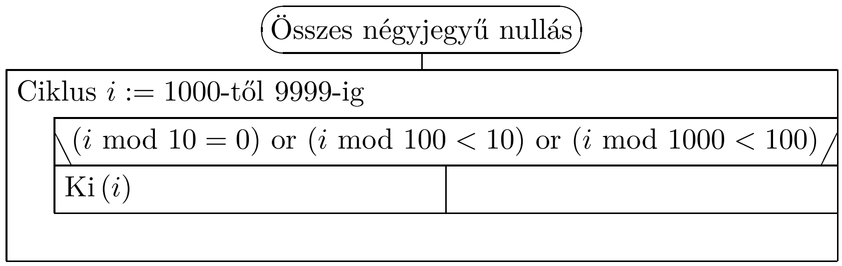
  $szam := random(9000) + 1000$

  Str $(szam, sz)$

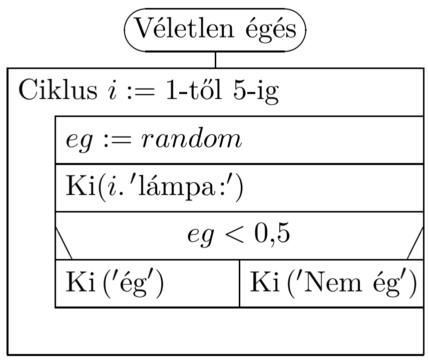
$(sz[2] = 0)$ or $(sz[3] = 0)$ or $(sz[4] = 0)$

Ki $(sz)$

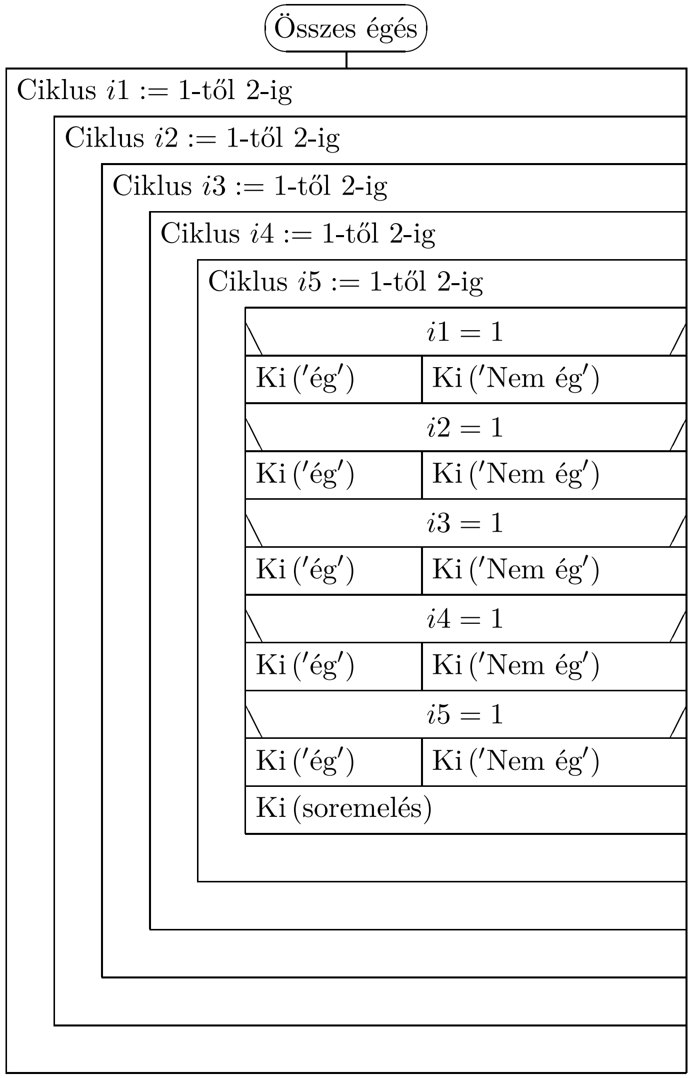
**b)**


Összes négyjegyű nullás
Ciklus $i$ := 1000-től 9999-ig
($i$ mod 10 = 0) or ($i$ mod 100 < 10) or ($i$ mod 1000 < 100)
Ki ($i$)

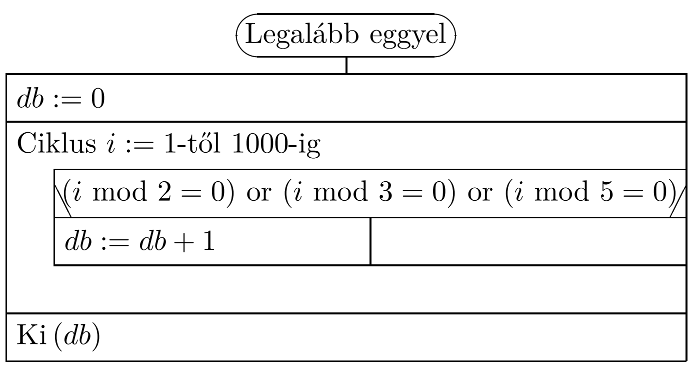
**2.79. a)**


Véletlen égés
Ciklus $i$ := 1-től 5-ig
$eg := random$
Ki($i$.′lámpa:′)
$eg < 0{,}5$
Ki (′ég′)
Ki (′Nem ég′)

**b)**


Összes égés
Ciklus $i1$ := 1-től 2-ig
Ciklus $i2$ := 1-től 2-ig
Ciklus $i3$ := 1-től 2-ig
Ciklus $i4$ := 1-től 2-ig
Ciklus $i5$ := 1-től 2-ig
$i1 = 1$
Ki ('ég')
Ki ('Nem ég')
$i2 = 1$
Ki ('ég')
Ki ('Nem ég')
$i3 = 1$
Ki ('ég')
Ki ('Nem ég')
$i4 = 1$
Ki ('ég')
Ki ('Nem ég')
$i5 = 1$
Ki ('ég')
Ki ('Nem ég')
Ki (soremelés)

**2.80. a)**


Legalább eggyel
$db := 0$
Ciklus $i$ := 1-től 1000-ig
$(i \text{ mod } 2 = 0)$ or $(i \text{ mod } 3 = 0)$ or $(i \text{ mod } 5 = 0)$
$db := db + 1$
Ki ($db$)

**b)**

Pontosan eggyel

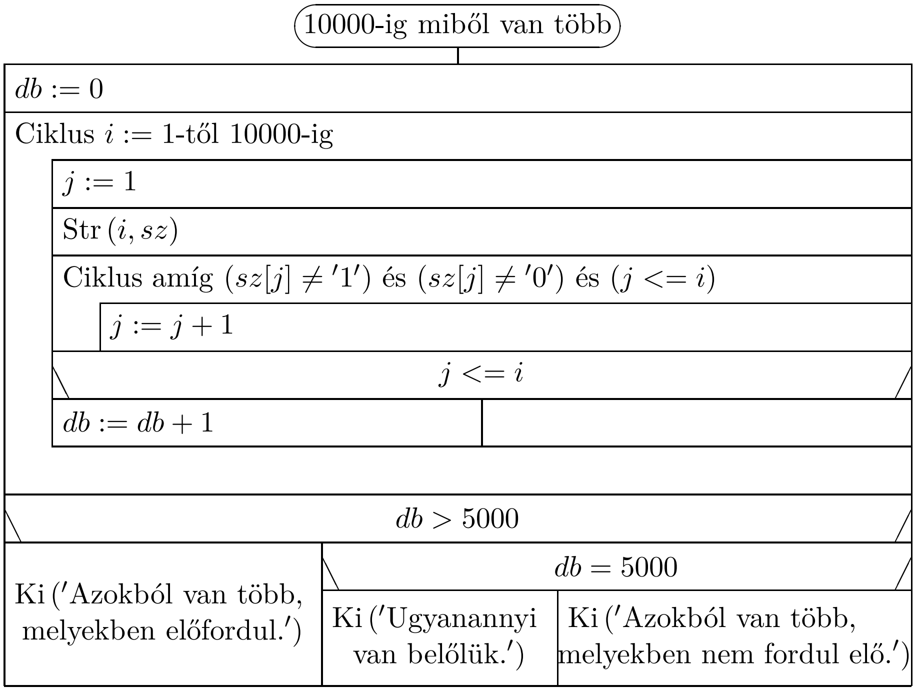
| |
|---|
| $db := 0$ |
| Ciklus $i := 1$-től 1000-ig |
|     $(i \bmod 2 = 0)$ and $(i \bmod 3 \neq 0)$ and $(i \bmod 5 \neq 0)$ |
|     $db := db + 1$ |
|     $(i \bmod 2 \neq 0)$ and $(i \bmod 3 = 0)$ and $(i \bmod 5 \neq 0)$ |
|     $db := db + 1$ |
|     $(i \bmod 2 \neq 0)$ and $(i \bmod 3 \neq 0)$ and $(i \bmod 5 = 0)$ |
|     $db := db + 1$ |
| Ki $(db)$ |

**c)**

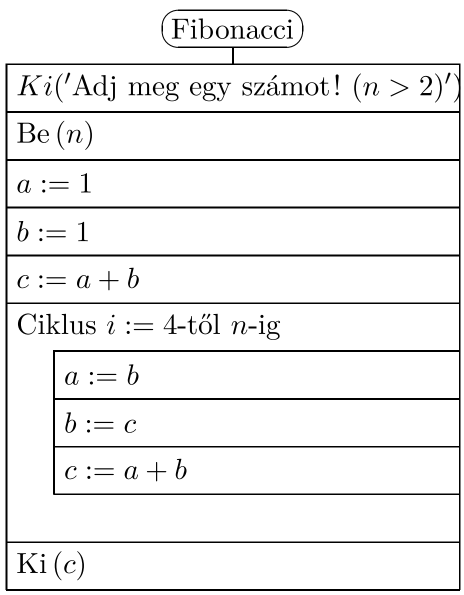
Pontosan kettővel

| |
|---|
| $db := 0$ |
| Ciklus $i := 1$-től 1000-ig |
|     $(i \bmod 6 = 0)$ and $(i \bmod 5 \neq 0)$ |
|     $db := db + 1$ |
|     $(i \bmod 2 \neq 0)$ and $(i \bmod 15 = 0)$ |
|     $db := db + 1$ |
|     $(i \bmod 3 \neq 0)$ and $(i \bmod 10 = 0)$ |
|     $db := db + 1$ |
| Ki $(db)$ |

**2.81.**


10000-ig miből van több
$db := 0$
Ciklus $i :=$ 1-től 10000-ig
$j := 1$
Str $(i, sz)$
Ciklus amíg $(sz[j] \neq '1')$ és $(sz[j] \neq '0')$ és $(j <= i)$
$j := j + 1$
$j <= i$
$db := db + 1$
$db > 5000$
Ki ('Azokból van több, melyekben előfordul.')
$db = 5000$
Ki ('Ugyanannyi van belőlük.')
Ki ('Azokból van több, melyekben nem fordul elő.')

**2.82.**


Fibonacci
$Ki$('Adj meg egy számot! $(n > 2)$')
Be $(n)$
$a := 1$
$b := 1$
$c := a + b$
Ciklus $i :=$ 4-től $n$-ig
$a := b$
$b := c$
$c := a + b$
Ki $(c)$

**2.83.**

Fibonacci ($n$)

- $Ki('$Az első ennyi Fibonacci számot kiírom! $(n > 1)')$
- Be ($n$)
- $a := 0$
- $b := 1$
- $c := a + b$
- Ki ($'1'$)
- Ki ($'1'$)
- Ciklus $i :=$ 3-tól $n$-ig
    - $a := b$
    - $b := c$
    - $c := a + b$
    - Ki ($c$)

**2.84.**

Keverés

- Ciklus $i :=$ 1-től $n$-ig
    - $c := random(n)$
    - $csere := v[i]$
    - $v[i] := v[c]$
    - $v[c] := csere$

**2.85.**

$k$ db véletlen elem

- Ciklus $i :=$ 1-től $k$-ig
    - $hely := random(n - i + 1) + 1$
    - $csere := v[hely]$
    - $v[hely] := v[n - i + 1]$
    - $v[n - i + 1] := csere$
- Ki ($'$Kiválasztott elemek:$'$)
- Ciklus $i :=$ 1-től $k$-ig
    - $v[n - i + 1]$

# 3. Leszámlálási feladatok (teszt)

**3.1. C**

**3.2. D**

**3.3. A**

**3.4. E**

**3.5. E**

**3.6. B**

**3.7. A**

**3.8. E**

**3.9. E**

**3.10. B**

**3.11. A**

**3.12. B**

**3.13. C**

**3.14. D**

**3.15. E**

**3.16. E**

**3.17. D**

**3.18. C**

**3.19. B**

**3.20. A**

# 4. A Pascal-háromszög

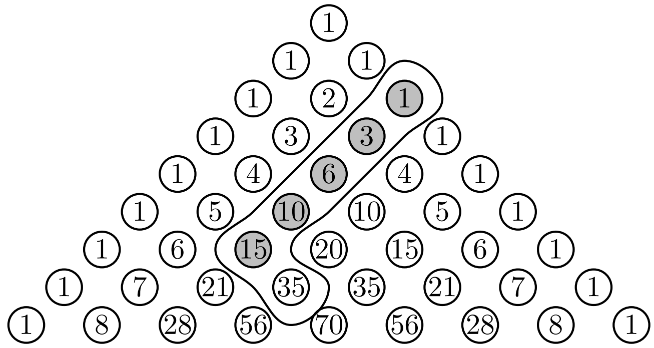
**4.7. Zokni lemma:** Bármely $m \leq n$ természetes számok esetén

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

azaz (lásd a 4.2. ábrát) a Pascal háromszög bármely zokni alakú részében a száron található számok összege az újjaknál található számmal egyezik meg.

**A Lemma bizonyítása:** Cseréljük ki az összeg első tagját, $\binom{m}{m}$-et a vele azonos értékű $\binom{m+1}{m+1}$-re és használjuk fel rekurzívan a $\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1}$ azonosságot!

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} = \binom{m+1}{m+1} + \binom{m+1}{m}$$

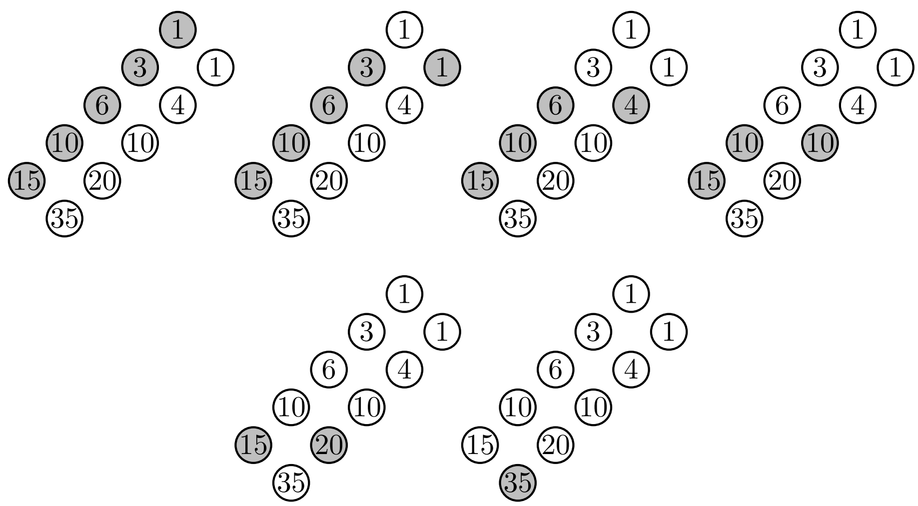



4.7M.2. ábra.

$$\binom{m+1}{m+1}+\binom{m+1}{m}=\binom{m+2}{m+1},\qquad \binom{m+2}{m+1}+\binom{m+2}{m}=\binom{m+3}{m+1},$$

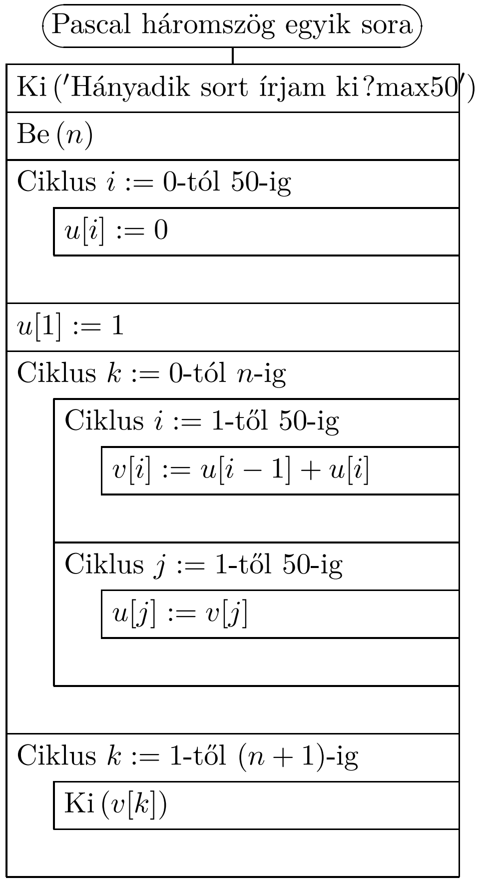
$$\binom{m+3}{m+1}+\binom{m+3}{m}=\binom{m+4}{m+1},\quad \dots,\quad \binom{n}{m+1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}.$$

A 4.3. ábrán látható, ahogy a kezdeti részletösszegek értéke halad lefelé a Pascal háromszögben.



4.7M.3. ábra.

**4.27.**


Pascal háromszög egyik sora
Ki ('Hányadik sort írjam ki?max50')
Be (n)
Ciklus i := 0-tól 50-ig
u[i] := 0
u[1] := 1
Ciklus k := 0-tól n-ig
Ciklus i := 1-től 50-ig
v[i] := u[i − 1] + u[i]
Ciklus j := 1-től 50-ig
u[j] := v[j]
Ciklus k := 1-től (n + 1)-ig
Ki (v[k])

**4.28.**

Pascal háromszög

- Ki ('Hányadik sorig írjam ki?max50')
- Be ($n$)
- $For i :=$ 0-tól 50-ig
  - $u[i] := 0$
- $u[1] := 1$
- Ciklus $k :=$ 0-tól $n$-ig
  - Ciklus $i :=$ 1-től 50-ig
    - $v[i] := u[i-1] + u[i]$
  - Ciklus $j :=$ 1-tól 50-ig
    - $u[j] := v[j]$
  - Ciklus $j :=$ 1-től $(k+1)$-ig
    - Ki ($v[j]$)

## 5. A Pascal-háromszög (teszt)

**5.1. B**

**5.2. B**

**5.3. C**

**5.4. C**

**5.5. A**

**5.6. A**

**5.7. E**

**5.8. E**

**5.9. D**

**5.10. D**

**5.11. C**

**5.12. B**

**5.13. A**

**5.14.** **E**

**5.15.** **A**

**5.16.** **B**

**5.17.** **D**

**5.18.** **B**

**5.19.** **A**

**5.20.** **E**

# 6. A szita-módszer

**6.1.** **a)** 8 **b)** 6.

**6.3.** 30.

**6.4.** 9-en zongoráznak és 18-an hegedülnek.

**6.5.** 2.

**6.6.** 29.

**6.7.** 320+280+350-60-130=760.

**6.8.** 30-19-15-18+7+9+10-3=1.

**6.11.** Halmazábráról leolvasható a megoldás:
**a)** 734 **b)** 468 **c)** 1000-34=966 **d)** 232.

**6.12.** 320.

**6.13.** **a)** 6 **b)** 36 **c)** $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.

**6.14.** $9000 - 7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 5416$.

**6.15.** 4680 marad meg.

**6.18.** Lásd [18][127. fel.].

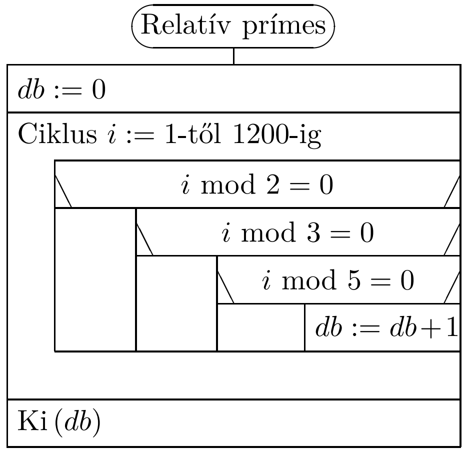
**6.19.** Lásd [18][145. fel.].

**6.20.** $5! - 5 \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot 3! - \binom{5}{3} \cdot 2! + \binom{5}{4} \cdot 1! - \binom{5}{0} \cdot 0!$

**6.21.** $9! - 5 \cdot 2 \cdot 8! + \binom{5}{2} \cdot 2^2 \cdot 7! - \binom{5}{3} \cdot 2^3 \cdot 6! + \binom{5}{4} \cdot 2^4 \cdot 5! - \binom{5}{5} \cdot 2^5 \cdot 4!$

**6.22.** $7! - 6 \cdot 6! + \binom{6}{2} \cdot 5! - \binom{6}{3} \cdot 4! + \binom{6}{4} \cdot 3! - \binom{6}{5} \cdot 2! + \binom{6}{6} \cdot 1!$

**6.23.**




## 7. A szita-módszer (teszt)

**7.1. B**

**7.2. A**

**7.3. E**

**7.4. A**

**7.5. C**

**7.6. D**

**7.7. B**

**7.8. A**

**7.9. C**

**7.10. E**

**7.11. C**

**7.12. A**

**7.13. A**

**7.14. B**

**7.15. D**

**7.16. E**

**7.17. B**

**7.18. E**

**7.19. E**

**7.20. C**

# 8. A skatulyaelv

**8.1.** 38.

**8.2.** **a)** 46 **b)** 41 **c)** 76 **d)** 36
**e)** 9

**8.3.** **a)** $F = 1$, $G = 7$; **b)** $S = 2$, $G = 11$.

**8.4.** 37.

**8.5.** 4.

**8.6.** Igaz.

**8.7.** $2^{32}+1$ (Feltételezve, hogy mindenkinek eredetileg szabályos fogazata volt.)

**8.9.** Vizsgáljuk a végződéseket, ezekből 6 fajta van.

**8.11.** Max 4-et. Öt prím közt ugyanis már biztosan található három olyan, melyek összege 3-mal osztható. Ez az összeg nem lehet a 3, így nem lehetne prím.

**8.12.** A sorok és oszlopok száma összesen 10, míg a lehetséges összegek értéke -5 és 5 között csak 9 féle lehet.

**8.13.** Válasszunk ki két különböző színű tárgyat. Ha ezek alakra is különböznek, kész vagyunk. Ha alakra nem különböznek, akkor van egy alakra tőlük különböző, s az valamelyiktől színben is különbözik.

**8.14.** **a)** $n$=2. 3 számunk van ezek közül kettő paritása megegyezik, ezek összege osztható 2-vel.
**b)** $n$=3. A számok hármas maradékát figyeljük. Ha van 0, 1, 2 maradék, akkor ezek összege megfelel. Ellenkező esetben csak kétféle maradék lehet, de akkor valamelyik típusból van legalább három, ezek összege 3-mal osztható.
**c)** $n$=4. Az $n$=2 esetben leírt módon alkothatunk 3 párt, melyek összege páros, pl $2x$, $2y$, $2z$. Most alkalmazzuk még egyszer az $n$=2 esetben leírt algoritmust az $x$, $y$, $z$ számokra.

**8.15.** A kockás lapot bontsuk fel $2 \times 2$-es kis részekre, ezekben legyen a bal alsó négyzet piros, a jobb alsó fehér a bal felső zöld, a jobb felső pedig narancssárga. Valamelyik színből lesz legalább 10, ezek megfelelnek a feladatnak.

**8.17.** $10^3$ féle lehet egy ilyen számhármas, s végtelen sok számhármas van.

**8.18.** A számok közül $\binom{21}{2} = 210$-féle pár készíthető. A különbség legfeljebb 69 lehet. Készen is vagyunk, hiszen $210 > 3 \cdot 69$.

**8.19.** Válasszuk ki az összes lehetséges módon három számot, ez $\binom{7}{3} = 35$-féle lehet. Tegyük fel, hogy ezek mindegyikében az összeg kisebb 50-nél, akkor mindet összeadva legfeljebb $35 \cdot 49 = = 1715$lehet az eredmény. Minden szám mellé $\binom{6}{2} = 15$-féle párt választhattunk, ezért minden egyes szám az előző összegzésben 15-ször szerepel. Mivel a számok összege 100, ezért eredményül 1500-at kellett volna kapnunk. Feltevésünk tehát nem lehetett helyes.

**8.20.** Képzeljük el a 20 számot a számegyenesen és vágjuk fel az egyenest a legkisebb és a legnagyobb számnál. Így kapunk egy 70 egységnél rövidebb szakaszt, rajta 18 ponttal. Ha feldaraboljuk most e szakaszt is a 18 pontnál végrehajtott vágással, akkor 19 kis szeletet kapunk. Állítjuk, hogy e 19 kis szelet között van négy egyenlö. Valóban, ha minden egész hosszúságból csak legfeljebb három darabunk lenne, akkor a szeletek összhossza legalább

$$1+1+1+2+2+2+3+3+3+...+6+6+6+7=70$$

lenne.

**8.21.** Lásd [17][49. fel.]

**8.22.** Az 1 egység oldalú szabályos háromszög valamelyik két csúcsa jó lesz.

**8.23.** Ehhez elég arra gondolni, hogy a síkon van végtelen sok pont.

**8.24.** Tekintsük egy kör 2n-1 pontját, közülük legalább n azonos színű. Ezek konvex burka megfelelő lesz.

**8.25.** **a)** Egy $3 \times 7$-es pontrács színezése során biztosan kialakul ilyen téglalap, ez 21 pontot jelent.
**b)** Egy $(n+1) \times \left(n \cdot \binom{n+1}{2} + 1\right)$-es pontrács esetén minden sorban van legalább két azonos színű pont. Minden sorban kiválasztunk két aazonos színű pontot és a sor mellé írjuk oda, mely szín és melyik pontpár. Ezekből $n$ illetve $\binom{n+1}{2}$ van, így a megadott pontrács jó lesz. Persze ennél nagyvonalúbbak is lehetünk, ha a pontrácsunk mérete $(n+1) \times \left(n^{n+1}+1\right)$. Ebben az esetben lesz két azonosan színezett sor.

**8.26.** Ha csak véges sok érték lenne, aknor három pont köré a lehetséges távolságokkal, mint sugarakkal köröket rajzolunk. Az adott pontok ezen körök közös pontjaiban lehetnek, viszont ilyenből csak véges sok van.

**8.29.** 10cm $\times$ 10cm-es négyzetekre osszuk a céltáblát! Így van olyan mező, amelyre legalább 2 találat esett. (skatulya) Ezek távolsága kisebb mint 14,2.

**8.30.** **a)** Elképzelhető, hogy nem, lásd [18][223. fel.].
**b)** Igaz.

**8.31.** Osszuk a körlapot 6 egybevágó körcikkre!

**8.32.** Osszuk fel a négyzetet 25db egybevágó négyzetre, s vizsgáljuk egy ilyen köré írható körét!

**8.33.**

Célbalövés

Ciklus $i :=$ 1-től 50-ig
PontXY$(random(70)+1, random(70)+1)$

# 9. A skatulyaelv (teszt)

**9.1. B**

**9.2. C**

**9.3. D**

**9.4. C**

**9.5. A**

**9.6. B**

**9.7. E**

**9.8. C**

**9.9. A**

**9.10. A**

**9.11. E**

**9.12. D**

**9.13. B**

**9.14. B**

**9.15. E**

**9.16. A**

**9.17. A**

**9.18. B**

**9.19. E**

**9.20. D**

**9.21. C**

## 10. Feladatok a sakktáblán

**10.1.** 64.

**10.2.** Ha a bástyák különbözőek, akkor $64 \cdot 49$ a válasz. Amennyiben a két bástya ugyanolyan, akkor a válasz ennek fele, $32 \cdot 49$.

**10.3.** 8 elhelyezhető, például az egyik átló mentén. Ennél több nem. Ha ugyanis 8-nál több bástya kerül a táblára, lesz olyan sor, amelybe legalább 2 kerül, ezek ütik egymást.

**10.4.** $8!$

**10.5. a)** 32, például minden fekete mezőre helyezve. Ennél többet nem lehet, ugyanis a 64 mező 32 párra osztható, amelyek a huszár lépése szerint ütésben vannak.

**b)** 14, például az első és utolsó sorban 7-7 futó az a1-a7 és h1-h7 mezőkön. 14-nél több nem helyezhető el. Tekintsük az egyik átlóval párhuzamosan futó vonalakat. 15 van, ezek mindegyikébe legfeljebb egy futó kerülhet. Ha mindben van egy futó, akkor a másik átló két végére is került egy-egy, amik viszont ütik egymást.

**c)** 8. Erre nem könnyű megoldást találni. Gauss is foglalkozott a feladattal, összesen 92 megoldása van. (Lásd [3][101-106. old.])

**10.6. a)** $n = 9$ esetén egy megoldás: a1, d1, g1, a4, d4, g4, a7, d7, g7;

**b)** $n = 5$ esetén egy megoldás: e2, g3, d4, f5, c6.

**10.7.** Gondoljuk meg, milyen egybevágóság viheti a részeket egymásba. Ha rájövünk a 90$^\circ$-os forgatásra, akkor már könnyű a megoldás.

**10.8. a)** Igen, ehhez elég megadnunk egyetlen körbejárást.

**b)** Ha $k$ és $n$ is páratlan, akkor a feladat nem oldható meg. A táblát sakktáblaszerűen színezve minden lépésben színt váltunk ezért páratlan sok lépés után nem érhetünk vissza.

**c)** A térbeli feladat esetén megadható megfelelő körbejárás, ha van páros hosszú él.

**10.9.** Beugrató kérdés, hiszen a válasz nagyon egyszerű, három lépéssel: c4, d6, e8.

**10.10.** Nem, mert a két mező azonos színű.

**10.11.** Ha mindkét oldal páratlan, akkor páratlan sok mező van a táblán. Ilyenkor a szokásos színezést tekintve nem járható körbe, hiszen minden második lépésben a kiindulási mezővel egyező színre lép.

A 4×4-es táblán sem lehet ilyen kört tenni. Ha a mezők a gráf csúcsai és a lólépéssel elérhetők közt fut él, akkor a középső négy mező elhagyásával a gráf 6 komponensre esik. Ha lenne Hamilton kör, abból négy csúcsot kivéve legfeljebb 4 komponensre eshetne szét a maradék gráf.

A 8×8-as tábla bejárható, erről itt olvashatunk bővebben: [3][106-110. old.].

**10.12.** Nem lehetséges. Gondoljunk a szokásos színezésre, egyikből 12, a másikból 13 van és a sípszó után mindegyik színt kell váltson.

**10.13.** Nem fedhető. Gondoljunk a szokásos színezésre, minden dominó mindkét színből egy-egy mezőt fed, míg a két átellenes sarok ugyanolyan színű.

**10.14.** Nem fedhető. A lefedett rész területe hárommal osztható szám lehet csak, míg esetünkben 62 mezőt kéne fedni.

**10.15.** Nem fedhető. Legyen a hiányzó sarok a jobb felső. Az 1. 4. 7. oszlopok minden mezőjébe írjunk 1-est, a 2. 5. 8. oszlopok minden mezőjébe írjunk 2-est. A többibe 0-t. Bárhogy teszünk le egy dominót, az általa lefedett számok összege hárommal osztható. Így a teljes fedhető rész alatt is hárommal osztható lesz az összeg. A mi táblánk összege viszont hárommal osztva 1 maradékot ad. Sok más megoldás létezik.

**10.16.** Igen, pl a c3 mezőre. Az összes ilyen mezőnek a megtalálását érdemes későbbre hagyni.

**10.17.**

**1. megoldás.** Nem lehet lefedni. 2×2-es részekre bontunk és ezeket felváltva színezzük fehérre és feketére. Minden dominó két-két mezőt takar mindkét színből, a táblán viszont nem azonos a fekete és fehér mezők száma.

**2. megoldás.** Nem lehet lefedni. Az 1. 5. 9. oszlop mezőibe 1-eseket, a 3. 7. oszlopok mezőibe 3-asokat írunk, a többi helyre 0-t. Minden dominó négy számot takar, melyek összege 4-gyel osztható. Az egész táblán viszont az összeg 4-es maradéka 2.

**3. megoldás.** Nem lehet lefedni. Ha egy mező az i-dik sor j-dik tagja, akkor legyen ennek a mezőnek a száma i+j 4-es maradéka. Ekkor minden dominó alatt egy-egy 0, 1, 2, 3 fog állni. A teljes táblán viszont nem minden szám szerepel 25-ször.

**4. megoldás.** Nem lehet lefedni. Beszínezzük az egyik átló mentén a mezőket, és vele párhuzamosan az összes átlós vonalban úgy, hogy köztük mindig 3 átlós vonal maradjon ki. Ekkor minden dominó egy színezett mezőt fed, viszont a táblán 26 színezett mező van.

**10.18.** 5 féle van.

**10.19.** A téglalap területe 20 egység, tehát van páros oldala. Ezért sakktábla színezés esetén ugyanannyi fehér és fekete mező lesz. A dominók közül 4 mindig 2-2 fehéret és feketét takar, egy viszont nem. (Ez a T alakú.)

**10.20.** 12 fajta van.

**10.21.** Kirakható mind a 10×6-os, mind az 5×12-es is.

## 11. Feladatok a sakktáblán (teszt)

**11.1. B**

**11.2. C**

**11.3. A**

**11.4. D**

**11.5. E**

**11.6. A**

**11.7. E**

**11.8. C**

**11.9. B**

**11.10. A**

**11.11. C**

**11.12. D**

**11.13. C**

**11.14. A**

**11.15. C**

**11.16. B**

**11.17. B**

**11.18. C**

**11.19. E**

**11.20. A**

## 12. Kombinatorikus geometria

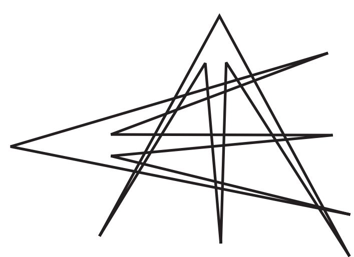
**12.1.** **a)** 10 **b)** 15 **c)** 45 **d)** $\binom{n}{2}$.

**12.2.** Pl. egy háromszög csúcsai, oldalfelező pontjai és súlypontja.

**12.6.** $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$

**12.9.** Hat pontot el lehet így helyezni: egy szabályos ötszög és a középpontja. Többet nem lehet (vázlatosan): ha felveszünk kettőt, akkor az összes többi pontnak a felezőmerőlegesükön vagy azon a két körön kell lennie, amelyek középpontja egyikük és átmegy a másikukon.

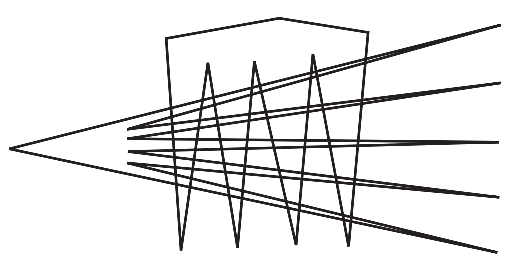
**12.10.** Beugratós kérdés, a diákok sokszor konvex hatszögre gondolnak, ott 6·2=12 a válasz. Általános esetben lehet 36 közös pont is, ekkor minden oldal minden oldalt metsz (lásd a 12.1. ábrát!). Persze lehet végtelen sok közös pont is.



12.10M.1. ábra.

**12.11.** Egy egyenest a hétszög oldalai legfeljebb hatszor metszhetnek el. Ha a hatszög minden oldalát hatszor metszik akkor 36 közös pont lesz. Persze lehet végtelen sok közös pont is.

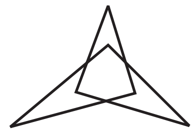
**12.12.** A 12.11. feladat gondolatmenete alapján $n = 9$ esetén legfeljebb 72 metszéspontot kaphatunk. Ha $n$=10, akkor lehetséges a 80 metszéspont. (Lásd pl. a 12.1. ábrát!)



12.12M.1. ábra.

**12.13.** A sokszög egy oldala a kört legfeljebb 2 pontban metszheti, ezért a közös pontok száma legfeljebb $2n$.

**12.14.** Minden szakasznak van egy őt metsző párja, ezért a szakaszok száma páros. 4 szakasz még nem elég, 6 szakasz esetén jó megoldást mutat az alábbi a 12.1. ábra.)



12.14M.1. ábra.

**12.15.**

**1. megoldás. a)** A pontpárok csak véges sok irányt határoznak meg. Tekintsünk egy ezektől különböző irányt és egy ilyen egyenessel „söpörjük” végig a síkot (önmagával párhuzamosan toljuk). Erre egyesével kerülnek a pontok, ezért tetszőleges $k$-t le tudunk választani.

**2. megoldás. a)** Vegyünk a pontok konvex burkán kívül egy olyan $P$ pontot, amely nincs rajta semely két adott pont egyenesén sem. Ezen a ponton át húzzunk egy egyenest és forgassuk $P$ körül. Ezt is tekinthetjük egy fajta „söprésnek”.

**b)** Vegyünk egy olyan pontot, ami nincs rajta semely két adott pontpár szakaszfelező merőlegesén. Ha e köré rajzolunk kört, azon az adott pontok közül legfeljebb egy lehet. A kör sugarát változtatva elérhető a kívánt cél.

**12.16.** Legyen $A$ az adott pontok konvex burkának egyik csúcsa. Haladjunk a konvex burok mentén és az adott pontok közül $A$-hoz legközelebbi legyen $B$. Az $AB$ egyenes tehát a konvex burok egyik oldalegyenese és az $AB$ szakaszon nincs további adott pont. Most tekintsük az adott pontok közül azokat, amelyek nincsenek rajta az $AB$ egyenesen és mindegyiknél nézzük meg mekkora szögben látszik az $AB$ szakasz. A legnagyobb szög legyen $C$-nél. (Lehet hogy egyszerre több ilyen pont van, akkor ezek egyike legyen $C$.) Az $ABC$ háromszög köréírt köre megfelelő lesz.

**12.17.** Jelölje a pontokat $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Ha a pontok konvex burka háromszög feltehető, hogy ennek csúcsai $ABC$ és a $DE$ egyenes az $AB$ és $BC$ oldalakat metszi. Legyen a $BC$ egyeneshez közelebbi pont $E$, a távolabbi $D$. Ekkor $BCD$ köréírt köre megfelelő.

Ha a konvex burok négyszög, legyenek csúcsai $ABCD$, legyen $E$ az $ABD$ háromszögben. Ha az $ABD$ köréírt körében nincs benne $C$, akkor ez a kör jó, ha benne van, akkor $BDE$ köréírt köre lesz jó.

Ha a konvex burok ötszög, akkor van olyan csúcs, amelyen áthaladó körök egyike sem tartalmaz az adott pontok közül 4-et. Legyen ez $D$, a konvex burkon a mellette levő pont $E$. Az $A$, $B$, $C$ pontokból ekkor páronként különböző szögekben látszik a $DE$ szakasz. Amelyiknél ezen szögek közül a középső van, az lesz $D$ és $E$ mellett a kört kijelölő pont. A legnagyobb szögű pont kerül belülre, a legkisebb szögű pedig kívülre.

**12.18.** Igen, pl legyenek a pontok 1, 2, ..., 6, az élek színezése pedig: piros 1-6, 2-5, 3-4; kék 2-6, 1-3, 4-5; zöld 3-6, 2-4, 1-5; okker 4-6, 3-5, 1-2; narancssárga 5-6, 1-4, 2-3.

**12.19.** Tekintsünk egy olyan egyenest, mely nem párhuzamos semely két pontpár egyenesével. Ezen egyenessel párhuzamosan osszuk fel a síkot $k$ részre. Az osztóvonalak ne menjenek át az adott pontokon. Ekkor az azonos részekben, sávokban levő pontokat színezhetjük ugyanolyanra.

**12.20.** Tekintsünk egy metszéspontot. A rajta átmenő két egyenesen kívül még $n$-2 másik van, ezek metszéspontjaival mind összeköthetjük, ez legfeljebb $\frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2}$ egyenes, ráadásul számolnunk kell még az eredeti n egyenest is, a válasz tehát: $\frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} + n$.

**12.21.** 65. Részletesen lásd [18][177. fel.].

**12.22.** Ha három egyenes páronként vett szögfelezőit tekintjük azok a háromszög beírt és hozzáírt köreinek metszéspontjait határozzák meg, háromszögenként tehát legfeljebb 4 pontot kaphatunk, ez $4 \cdot \binom{5}{3} = 40$. Ha két egyenespár szögfelezőit tekintjük, akkor ezeknek legfeljebb 4 metszéspontja lehet, tehát számuk $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 60$. Hozzá kell még számítanunk az eredeti egyeneseket, így a válasz 40+60+10=110.

**12.23.** $\binom{n}{4}$.

**12.24.** Teljes indukcióval megy.

**12.26.** $\frac{n(n+1)}{2} + 1$. Az $n$=1, 2, 3 esetek még könnyen áttekinthetők. A továbbiakban egy új egyenes behúzásával a keletkezett metszéspontok számánál eggyel több új rész keletkezik.

## 13. Kombinatorikus geometria (teszt)

**13.1. A**

**13.2. C**

**13.3. B**

**13.4. E**

**13.5. D**

**13.6. C**

**13.7. A**

**13.8. D**

**13.9. C**

**13.10. B**

**13.11. E**

**13.12. E**

**13.13. A**

**13.14. A**

**13.15. A**

**13.16. C**

**13.17. E**

**13.18. B**

**13.19. C**

**13.20. E**

# 14. Játékok

**14.1. a)** Kezdeni érdemes és kijelölni a középső mezőt. A továbbiakban ellenfelünk lépéseit tükrözzük a középső mezőre.

**b)** Most a középső két mező lefoglalásával érdemes kezdeni, utána pedig tükrözni a középső választóvonalra.

**c)** Lásd az **a)** részben leírt stratégiát.

**14.2.** Számozzuk meg a sorokat lentről felfele, az oszlopokat balról jobbra 0-tól 7-ig. A bal alsó mező számai (0, 0). Azokba a mezőkbe érdemes lépni, amelyeknek mindkét száma páros.

**14.3.** Érdemes visszafele gondolkozni. 49-nél nagyobb, de 100-nál kisebb számot nem jó mondani, ezért mi arra törekedünk, hogy kimondjuk a 49-et. Ugyanezt a gondolatmenetet ismételve az általunk kiválasztott számok sorban visszafele a 100, 49, 24, 11, 5, 2. Tehát átengedjük a kezdés jogát és másodikként tudunk nyerni.

**14.4.** Ebben a játékban átengedjük a kezdés jogát. Minden kezdésre megadjuk a válaszlépést, a kapott helyzetből pedig minden alkalommal szimmetrikusan játszva nyerhetünk. Az egymás melletti számok sorban a kupacokban levő kavicsok számát jelzi: 023-022, 113-110, 103-101, 122-022, 121-101, 120-110.

**14.5.** Ebben az esetben másodiknak érdemes lenni. Hagyjuk ellenfelünket kezdeni, majd a lépése után megmaradt „fej”-ek közül válasszuk ki a középsőt, vagy középső kettőt. Innentől már szimmetrikusan lépve nyerni fogunk.

**14.8.** Visszafelé gondolkozunk, az 40 előtt a 33-at szeretnénk elérni, előtte a 26-ot, majd sorban hetesével 19, 12, 5. Tehát kezdeni érdemes és 5 gyufát elvenni. A továbbiakban ha ellenfelünk $k$ gyufát vesz el, akkor mi 7-$k$ gyufát veszünk el és így nyerni fogunk.

**14.9.** Visszafelé okoskodva: 100, 90, 80, 71, 62, 53, 44, 35, 30, 23, 20, 14, 11, 5, 2.

**14.10.** Kezdeni érdemes és egy pénzt pontosan az asztal közepére tenni. A továbbiakban ellenfelünk lépéseit tükrözzük a középpontra.

**14.11.**

**1. megoldás.** Húzzuk be a leghosszabb átlók egyikét, majd erre tükrözzük ellenfelünk lépéseit.

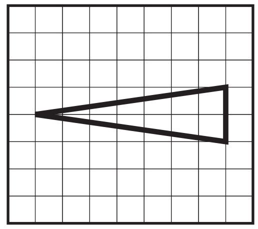
**2. megoldás.** Tetszőleges játékban kilenc átlót kell behúzni, hiszen háromszögekre kell bontani a sokszöget.

**14.12.** A kezdőnek érdemes a bal felsőből induló átló mentén levő mezők közül a bal felső mezővel szomszédosat választani. Ekkor megmarad a bal szél és a legfelső sor. Ellenfelünk lépéseit tükrözhetjük a bal felső mezőből induló átlóra.

**14.13.** Három páronként kitérő él minden lapból tartalmaz csúcsot. A kocka 12 éle felbontható négy csoportba úgy, hogy a csoporokban 3-3 páronként kitérő él legyen. Így a skatulya elv szerint kezdő első lépése után második beszínezhet három kitérő élt, így döntetlenre mentheti a játszmát.

**14.14.** Ha kezdő kijelöli a 14.1. ábrán feltüntetett háromszöget, akkor a továbbiakban tükrözheti ellenfelének lépéseit a 8 hosszú oldalakra merőleges szimmetriatengelyre.

**14.15.** Igen. Kezdetben 47, 48, …, 55 számokat veszi el, majd ellenfele lépését kiegészíti úgy, hogy az elvett számok között mindegyiknek a párja is szerepeljen a $(k, 55-k)$ párosítás alapján.



14.14M.1. ábra.

**14.16.** Másodiknak érdemes lenni. Az első játékos páratlan sok kavicsot vehet csak el, megmarad m kavics, ezért mi elvehetünk $(m-2)$ kavicsot és így marad 2. Ebből egyet vesz az ellenfél, az utolsót pedig mi.

Ha a kiindulási kavicsok száma 1-nél nagyobb páratlan szám, akkor kezdeni érdemes, kettő kavicsot hagyunk az asztalon.

**14.17.** Keressük a nyerő helyeket! ( rák módszer )

**14.18.** Kezdő nem nyerhet. Második mindig a Kezdő által mondottnál eggyel nagyobb számot, tehát egy szomszédot választ, ha lehet, különben az eggyel kisebbet, ha azt sem lehet, akkor bármit. Második akkor nyerhet, ha meghatározzák a játék végét, pl. időben vagy a tábla méretével.

**14.19.** Kezdeni kell és a 12-ből elvenni 4-et. Innentől kezdve a két kupac közé képzeljünk egy tükörtengelyt és erre tükrözzük ellenfelünk lépéseit.

**14.20.** A kavicsok száma mindig eggyel csökken, ezért csak azon múlik a játék, hogy kezdetben páros, vagy páratlan a kavicsok száma. Esetünkben páratlan, ezért kezdeni érdemes.

**14.21.** Kezdünk és a páratlan kavicsot tartalmazó kupacokból elveszünk mindegyikből egyet. A továbbiakban is ezen stratégiát követve játszunk. Ha kezdetben minden kupacban páros sok kavics van, akkor átengedjük a kezdés jogát.

**14.22.** Kezdeni érdemes, a kéket a 9-re tenni. Most ellenfelünk $x$-re mozdítja a pirosat, mi pedig $(x+1)$-re a kéket.

## 15. Játékok (teszt)

**15.1. A**

**15.2. D**

**15.3. E**

**15.4. A**

**15.5. E**

**15.6. B**

**15.7. C**

**15.8. D**

**15.9. C**

**15.10. A**

**15.11. D**

**15.12. E**

**15.13. E**

**15.14. A**

**15.15. D**

**15.16. A**

**15.17. C**

**15.18. E**

**15.19. A**

**15.20. D**

## 16. A teljes indukció

**16.1.** A tanítás el se kezdődik, hiszen az első nap elmarad, ezért az utána következő nap lesz az első, aminek ezért el kell maradnia és így tovább.

**16.2.** Rezső megfigyelése nem lehet igaz, hiszen a gondolatmenetet elég sokszor alkalmazva Rezső akár a Holdat is átugorhatná. Ez pedig legutóbb a mesebeli tehénnek sikerült.

**16.3.** Egy négyzetet középvonalaival 4 négyzetre könnyű felvágni. Ha a meglevő darabok közül egyet tovább bontunk, akkor a felbontásban a darabok száma 3-mal nő. Ilyen módon minden $4 + 3k$ alakú szám esetén van megfelelő felbontás, azaz 10-re is. Keressünk felbontást 6-ra és 8-ra. Ekkor minden $6 + 3k$ és $8 + 3k$ alakú számra is van megfelelő felbontás az imént leírtak szerint. Nincs felbontás a 2, 3, 5 számokra.

**16.4.** Egy háromszöget középvonalaival 4 hozzá hasonlóra vághatunk. A meglevő háromszögek közül bármelyiket így tovább vágva a háromszögek száma 3-mal nő. Ilyen módon minden 4+3k alakú szám esetén van megfelelő felbontás. Keressünk felbontást 6-ra és 8-ra. Ekkor minden $6+3k$ és $8+3k$ alakú számra is van megfelelő felbontás az imént leírtak szerint. Nincs felbontás a 2, 3, 5 számokra.

Más gondolatmenetet is követhetünk: Vegyünk nagyon sok egybevágó kis háromszöget. Az egyikhez hozzáillesztve 3 másikat kapjuk az előző megoldás kezdő lépésének felbontását. Ehhez a nagy háromszöghöz 5 másikat illesztve kapunk egy másik felbontást. Ez összesen 9 kis háromszög, de gondolhatjuk úgy is, hogy 1 nagyobb és öt kicsi, azaz összesen 6. Ehhez hozzáépíthetünk 7 kis háromszöget és így tovább. Ezzel a módszerrel minden $1 + (2k + 1)$ alakú számra kapunk felbontást. Ezt a módszert még ki kell egészítenünk a páratlan számokra való felbontással. Ezt érdemes a 7-tel kezdeni.

**16.6.** Ha csak egy egyenest húztunk, a színezés egyszerű, a két félsík legyen különböző színű. Tegyük fel, hogy van egy jó színezésünk és behúzunk egy új egyenest. Ennek egyik oldalán minden tartománynak változtassuk meg a színét.

**16.7.** Ha csak két versenyző van, akkor ők persze beállhatnak így. Ha már van egy megfelelő libasor, és érkezik egy új ember, őt is be lehet állítani a libasorba. Nézze meg kiket vert meg és közülük ki az első, majd álljon be közvetlenül ezen ember elé. Ha mindenkitől kikapott, akkor pedig álljon a sor végére.

**16.8. a)** A 3216745 megfelelő sorrend. Az $n = 1, 2, 5$ számok kivételével mindig van megfelelő sorrend ez felépíthető a 321 és a 3412 alapján, hiszen minden 5-nél nagyobb szám előáll $3s + 4t$ alakban.

**b)** $n = 123$ és 7-re nincs megoldás. Az $n = 4, 5, 6$-ot oldjuk meg, majd minden további szám előáll $4r + 5s + 6t$ alakban.

**16.9.** Sok meggondolás van, most az indukciósat tekintjük: $n = 0, 1, 2, 3$ esetekben rendre 1, 2, 4, 8. sejtésünk, hogy $2^n$. A sejtés kezdetben igaz. Tegyük fel, hogy $n$-re igaz. Ennek segítségével megmutatjuk, hogy $n + 1$-re is igaz. Az $n + 1$ elemű halmaznak legyen egy eleme $x$. Az olyan részhalmazok száma, melyekben $x$ nincs benne az indukciós feltétel szerint $2^n$. Ezekhez mindegyikhez hozzávéve $x$-et, megkapjuk az $x$-et tartalmazó részhalmazokat. Összesen $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

**16.10.** Az állítást érdemes $n = 1, 2, 3$ esetén közvetlenül igazolni, pl. a megfelelő részhalmazok felsorolásával. Ha az állítás igaz $n$-re, akkor vegyünk most hozzá a halmazhoz egy új elemet, $x$-et. Az $x$-et nem tartalmazó részhalmazokra igaz az állítás. Mindegyikhez hozzávéve $x$-et azt kapjuk, hogy az $x$-et tartalmazó részhalmazokra is igaz, ekkor viszont az összesre is.

**16.11.** Az üres halmazra igaz az állítás. (Érdemes közvetlenül ellenőrizni az egy és kételeműre is, de nem feltétlenül szükséges.) Az indukciós lépéshez a részhalmazokat a sorrend megtartása mellett zsúfoljuk össze a kör egyik felére, majd tükrözzük őket a másik félre. A tükörképekhez mindegyikhez hozzávesszük az új elemet.

**16.12.** Érdemes felírni kis $n$-ek esetén az összeget, így megsejthető, hogy a válasz $\frac{n-1}{2}$. Bizonyítás történhet teljes indukcióval. Ha $n + 1$-re lépünk, a meglevő $\frac{n-1}{2}$-hez hozzájön ennek $\frac{1}{n+1}$-szerese, amikor minden nevezőbe beírjuk még szorzónak az új elemet, és hozzájön még maga az $\frac{1}{n+1}$. Így kapjuk sejtésünk igazolását:

$$\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{2}.$$

**16.13.** Kevés csipesz esetén pl. a 3 nyilván jó megoldás. Viszont ha $k$ jó megoldás, akkor $2k$-1 is az, hiszen a középső csipesz mindkét oldalán ugyanaz az algoritmus működik, viszont a középső csipeszt csak egyszer kell számolni. Ezért a szükséges csipeszek száma $2^n - 1$.

**16.15.** $n = 4$ esetén a hölgyeket megszámozva a következő hívások megfelelők: 1-2, 3-4, 1-3, 2-4. (Érdemes meggondolni, hogy 3 hívás miért nem elég.) Az indukciós lépésben eggyel növeljük a hölgyek és kettővel a hívások számát. Az új hölgy telefonál valakinek, azután a régi hölgyek egymást közt lebonyolítják a megszokott rendben a hívásokat, végül az új hölgy újra felhív valakit.

**16.16.** $k = 1$ esetén az 1 és 3 kiválasztása megfelelő. Indukciós lépés: ha i kiválasztott szám $k$-ra, akkor i és $i + 2 \cdot 3^k$ is kiválasztott lesz $k + 1$ esetén. Így a kiválasztott számok száma megduplázódott. Ellenőrizni kell, hogy ez a rendszer is jó!

**16.17. a)** A 2, 4 és 6 nem írható fel. 8=4+4, 10=6+4. A továbbiakban minden szám felírható. Ha ugyanis n kettőnél nagyobb páros szám, akkor összetett, ezért (n+4)-nek jó felbontása lesz az n és 4 összegeként való előállítás. A 8 és 10 kezdőlépésről indulva ezek alapján minden további páros szám felírható a kívánt módon.

**b)** Beugrató kérdés, egyik sem írható fel így.

**16.18.** Teljes indukcióval történhet a bizonyítás. (Mindháromra van más módszer is!)

**16.19.** Teljes indukcióval történhet a bizonyítás.

## 17. A teljes indukció (teszt)

**17.1. C**

**17.2. B**

**17.3. D**

**17.4. A**

**17.5. C**

**17.6. A**

**17.7. E**

**17.8. D**

**17.9. B**

**17.10. D**

**17.11. C**

**17.12. A**

**17.13. B**

**17.14. C**

**17.15. D**

**17.16. A**

**17.17. D**

**17.18. C**

**17.19. D**

**17.20. E**

## 18. Gráfok

**18.1.** Lásd [17][2. fel.]

**18.2.** Lásd [17][42. fel.]

**18.3.** Igaz.

**18.10.** a) Nyilván nincs ilyen *egyszerű* gráf, hiszen egy hatpontú egyszerű gráfban minden pont foka legfeljebb öt lehet. De nincs ilyen nem-egyszerű gráf sem, hiszen a fokszámok összege 21, páratlan.

b) Egyszerű gráfot keresünk. Érdemes inkább azt nézni, hogy hány ponttal nincs összekötve egy-egy pont. A hetedfokú pontok egy-egy ponttal nincsenek összekötve. A hatodfokúak két-két ponttal, az ötödfokúak három-három ponttal nincsenek összekötve. Elég tehát egy olyan kilencpontú egyszerű gráfot konstruálnunk, amelyben három-három pont foka rendre egy, kettő és három. Ilyet viszont nem nehéz: veszünk két „háromszöget" (három pontból álló klikket), majd az egyik háromszög minden pontjáról „lelógatunk" egy-egy további élt.

**18.19.** **a)** Nincs ilyen gráf.

**b)** két ilyen gráf van.

**18.21.** Lásd [17][19. fel.]

**18.22.** Lásd [17][90. fel.]

**18.23.** Lásd [18][224. fel.]

## 19. Gráfok (teszt)

**19.1. C**

**19.2. A**

**19.3. D**

**19.4. D**

**19.5. D**

**19.6. C**

**19.7. E**

**19.8. D**

**19.9. B**

**19.10. E**

**19.11. D**

**19.12. A**

**19.13. D**

**19.14. B**

**19.15. D**

**19.16. E**

**19.17. D**

**19.18. E**

**19.19. C**

**19.20. C**

## 20. Vegyes feladatok

**20.1. a)** 15 nem osztható hattal, így valamit „trükközni” kell. Egyfajta trükk lehetséges: ha csúcsra teszünk pontot, akkor az mindkét oldalon számít!

A pontok száma 15. Ha összeadjuk az egyes oldalakon található pontok számát, akkor 15 helyett 18-at vagy 24-et vagy 30-at stb. kellene kapjunk, ha minden oldalon ugyanannyi pont van. Ha egy pontot nem az oldalra, hanem a csúcsra teszünk, akkor így kétszer is beleszámoljuk az összegbe, tehát a pontok száma az összegben így 15 helyett már 16 lesz. Így 3 pontot kell csúcsra tennünk, hogy megkapjuk a 18-as összeget. 24-es vagy nagyobb összeget nem is kaphatunk, mert ehhez már 9 vagy több pontot kellene csúcsra tennünk, de csak 6 csúcs van.

Innen már könnyen találhatunk megoldást.

**20.3.** Eredmény: Kezdő mindkét játékot meg tudja nyerni, ha ügyes.

Csoportosítsuk a számokat így:

$$(3, 6, 9) \qquad (1, 2) \qquad (4, 5) \qquad (7, 8).$$

Kezdő válasszon az első csoportból egy számot, és rakjon elé tetszőleges előjelet. Ezután bármelyik számot válassza is Második, Kezdő ugyanannak a csoportnak a másik elemét választja ki. A $(3, 6, 9)$ csoport számaival mindegy, hogy mit csinálnak. A másik három csoport esetén Kezdő kétszer ugyanazt az előjelet választja, mint Második tette, így a $\pm(1+2) = \pm3$, $\pm(4+5) = \pm9$, $\pm(7+8) = \pm15$ hárommal osztható részösszegekből kettőhöz juthatnak, egyszer pedig ellenkező előjelet választ, így biztos nem lesz hárommal osztható a teljes összeg.

**b)** A fordított játékban Kezdő majdnem ugyanígy jár el, mindig ugyanabból a csoportból választ, mint Második, de most kivétel nélkül mindig ugyanolyan előjelet is ad, mint előtte Második tette. Így minden részösszeg, tehát a teljes összeg is osztható lesz hárommal.

**20.17.** 1., 2.,és 3. megoldásánál arra hivatkozhatunk, hogy egy gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros.

**20.18.** Nem.

**20.19.** $77 \cdot 1991$ páratlan, ezért nem lehet.

**20.20.** Nem. $8 \cdot 12 = 112$, míg az összes csak 108.

**20.21.** Vizsgáljuk az összeget!

**20.25.** Válasszuk ki a legkisebbet!

**20.26.** Nem.

**20.27.** Nem. Ha a 100-ból egy kiválasztottra ez menne, akkor a többi 99 diszjunkt párokba lenne osztható.

**20.29.** Lásd [17][14. fel.].

**20.42.** 51-féleképpen. Szépen le lehet rajzolni az ehhez tartozó fát.

**20.43.** 6666+666,6+66,66=7399,26

**20.48.** Nem lehet, ugyanis páratlan sok páratlan szám összege páratlan, míg az 1000 páros.

**20.49.** Nem lehet. A szorzatot figyelve kiderül, hogy a számok között csak egy páros lehet, hiszen a 10-ben a kettes prímtényező csak egyszer szerepel. Ezek szerint a további kilenc szám páratlan, viszont ekkor az összegük páratlan lesz.

**20.50.** Beugrató kérdés! Ha a poharakat egymásba tesszük és a legbelsőbe az összes kockacukrot, akkor a 15 kockacukor benne lesz mindegyikben.

**20.51.** Közös nevezőre hozás után a számlálóban 100 darab páratlan szám összege van, ami páros, míg a nevező páratlan. Nem lehet az összeg 1.

**20.52.** Nem lehet, mivel a számok összege páratlan.

**20.53.** A szorzatuk negatív.

**20.54.** Ilyen szám nincs, ugyanis ha a jegyek összege 9, akkor a szám osztható 9-cel, tehát a kétszerese is 9 többese. Ekkor a jegyeinek összegét is osztania kellene a 9-nek.

**20.55.** Ha a jegyek azonosak, akkor ugyanaz a kilences maradék, de ekkor a különbség 9-cel oszthatónak kell lennie. A feladatban leírt különbség viszont nem osztható 9-cel.

**20.56.** Nem írható fel. Mindkét számnak nem lehet a kilences maradéka 1. Ha a kisebb számnál a maradék 1, akkor a kétszeresében 2.

**20.57.** Nincs, mivel az összeg nem osztható 4-gyel, míg a kéttagú összegekben mind az öt számot pontosan négyszer veszünk.

**20.59.** Nem érhető el. A kékek száma minden lépés után páros.

**20.60.** A banánok száma mindig 0-val, vagy 2-vel csökken, ezért banán marad a végén.

**20.64.** Lásd [8].

**20.65.** Lásd [8].

**20.71.** Tekintsünk egyetlen mesterséges bolygót, ami látszik belőle a Földön azt fessük pirosra, ami nem látszik azt fessük kékre. A kék rész legalább a Föld fele. Ha az eljárást megismételjük akkor lesz a Földnek olyan pontja, amit legalább 18-szor festettünk kékre, hiszen 36-szor legalább a fele bekékült.

**20.73.** Lásd [17][79. fel.]

**20.74.** Legyen az egyes dobozokban levő gyufák száma $d_1, d_2, \ldots, d_{20}$. Tekintsük a következő számok 20-as maradékait:

$$D_1 = d_1, \quad D_2 = d_1 + d_2, \quad D_3 = d_1 + d_2 + d_3, \quad \ldots, \quad D_{20} = d_1 + d_2 + ... + d_{20}. \qquad (1)$$

(1) $D_1 = d_1, \quad D_2 = d_1 + d_2, \quad D_3 = d_1 + d_2 + d_3, \quad \ldots, \quad D_{20} = d_1 + d_2 + ... + d_{20}$.

Amennyiben $D_i$ és $D_j$megegyezik, akkor $d_{i+1} + d_{i+2} + ... + d_j$értéke éppen 20 lesz, ezen skatulyákat lehet választani. Sajnos ez a jól ismert gondolatmenet nem működik, ha a $D_i$számok páronként különbözők. Több lehetőség is van a bizonyítás befejezésére, tekintsük a következőt.

Ha minden dobozban ugyanannyi gyufa van, akkor bármelyik tíz dobozt választhatjuk. Ellenkező esetben van két doboz, melyekben különböző számú gyufa van, legyenek ezek $d_1$ és $d_2$. Ha a két doboz sorszámát megváltoztatjuk, az az 1. egyenletben csak a $D_1$ szám fog megváltozni és most már működik a kiindulási gondolatmenetünk.

**20.75.** Lásd [17][48. fel.].

**20.78.** Lásd [17][116. fel.].

**20.79.**

**1. megoldás.** Az $n$-edik átló olyan szorzatokat tartalmaz, amelyben a két tényező összege $(n+1)$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} k(n+1) - k^2 = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

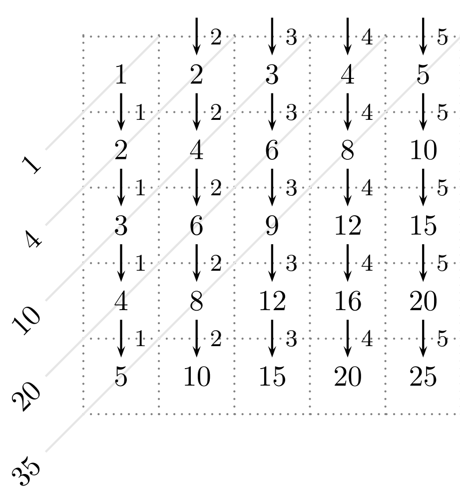
$$= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ahol felhasználtuk az első $n$ pozitív egész összegére, illetve az első $n$ pozitív négyzetszám összegére vonatkozó jól ismert képleteket. Egyszerűbb alakot kapunk ha a két tényezőből kiemeljük az $n(n+1)$ szorzatot és közös nevezőre hozunk:

$$a_n = n(n+1)\left(\frac{3(n+1)}{6} - \frac{(2n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \qquad (1)$$

**2. megoldás.** *Zokni*

Haladjunk átlóról átlóra (lásd a 20.2. ábrát)!




20.79M2.2. ábra.

A második átlóban a számok rendre 1-gyel illetve 2-vel nagyobbak a fölöttük – az előző átlóban – álló számnál. A harmadik átlóban rendre 1, 2 és 3 a differencia stb. A további gondolatmenet leolvasható az alábbi elrendezésből, amelyben az összegzések a „zoknin” (lásd a 4.7. feladatot) alapulnak.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 && = \binom{1}{1} = \\
& && = \binom{2}{2} && = \binom{3}{3} \\
a_2 &= a_1 + (1+2) && = a_1 + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\right) = \\
& && = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} && = \binom{4}{3} \\
a_3 &= a_2 + (1+2+3) && = a_2 + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1}\right) = \\
& && = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} && = \binom{5}{3} \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + (1+2+\ldots+n) && = a_{n-1} + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{n}{1}\right) = \\
& && = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} && = \binom{n+2}{3}
\end{aligned}
$$

**3. megoldás.** *Kombinatorikai értelmezés*

A 20.79M1., 20.79M2. megoldásokban kapott végeredménynek, az $\binom{n+2}{3}$-nak önálló jelentése van: azt mondja meg hányféleképpen választható ki $(n+2)$ objektumból három. Szeretnénk megérteni miképpen kapcsolódik ez a jelentés a feladathoz.

Válasszunk ki az $1, 2, \ldots, (n+2)$ számokból hármat úgy, hogy először közülük a nagyságrendi sorrendben középsőt választjuk ki!

A középső szám értéke 2 és $n+1$ közötti egész szám lehet. Ha ez a középső érték $(k+1)$, ahol $1 \leq k \leq n$, akkor a legkisebb szám $k$-féle, a legnagyobb szám pedig $(n+2)-(k+1) = n+1-{}$ $-k$-féle lehet, tehát $k \cdot (n+1-k)$-féleképpen lehet a $(k+1)$ szám a középső. A $k \cdot (n+1-k)$ alakú szorzatok (ahol most $n$ rögzített és $k$ fut 1-től $n$-ig) épp a szorzótábla $n$-edik átlójának elemei. A szorzótábla $n$-edik átlójában álló számok tehát azt fejezik ki, hogy hányféleképpen választhatunk ki az első $(n+2)$ pozitív egészből hármat, ha a középső rögzített. Az átlóban álló számok összege pedig kiadja azt összes lehetőséget, ahányféleképpen három szám kiválasztható $(n+2)$-ből.

**20.80.** Lásd [18][135. fel.].

**20.81.** Modellt alkotunk: $n$ hosszú perforált szalagot akarunk szétosztani, tehát $n-1$ helyen téphetünk és $k-1$ helyen tépnünk kell. Így az általános formula: $\binom{n-1}{k-1}$.

**20.82.** Visszavezetjük a 20.81. feladatra: van három forintunk és 10 gyerekünk. A gyerekek lesznek a számjegyek. Minden jegyből annyi lesz, ahány forintot kapott a megfelelő gyerek. A jegyek ismeretében már egyértelmű a szám. A 000-t ki kell zárnunk, ezért a válasz: $\binom{3+10-1}{10-1} -$ $- 1 = 219$

**20.84.** Lásd [18][195. fel.].

**20.85.** Lásd [18][132. fel.].

**20.86.** Lásd [18][149. fel.].

**20.87.** Lásd [18][160. fel.].

**20.88.** Lásd [18][163. fel.].

**20.89.** Lásd [18][170. fel.].

**20.90.** Lásd [18][185. fel.].

**20.91.**

Kártyás

Rekord **kártyalap**

- $szin$ : szöveg
- $szam$ : szöveg

$v$ : **kártyalap**ok vektora

Ciklus $j := 1$-től 32-ig

- Ki ('Add meg a következő lap színét!')
- Be ($v[j].szin$)
- Ki ('Add meg ennek a lapnak a számát!')
- Be ($v[j].szam$)

Ciklus $i := 1$-től 32-ig

- $c := random(32)$
- $csere := v[i]$
- $v[i] := v[c]$
- $v[c] := csere$

# Alkalmazott rövidítések

## Könyvek neveinek rövidítései

| | |
|---|---|
| A.I | Algebra, 7–8. évfolyam |
| A.II | Algebra, 9–10. évfolyam |
| A.III | Algebra, 11–12. évfolyam |
| ALG.II | Algoritmusok, 9–10. évfolyam |
| ANAL.III | Analízis, 11–12. évfolyam |
| F.I | Függvények, 7–8. évfolyam |
| F.III | Függvények, 11–12. évfolyam |
| G.I | Geometria, 7–8. évfolyam |
| G.II | Geometria, 9–10. évfolyam |
| G.III | Geometria, 11–12. évfolyam |
| GR.II | Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam |
| K.I | Kombinatorika, 7–8. évfolyam |
| K.II | Kombinatorika, 9–10. évfolyam |
| K.III | Kombinatorika, 11–12. évfolyam |
| SZ.I | Számelmélet, 7–8. évfolyam |
| SZ.II | Számelmélet, 9–10. évfolyam |
| V.II | Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam |
| VV.III | Városok viadala, 11–12. évfolyam |
| ZARUB | Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam |

## Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

## Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

# Irodalomjegyzék


[1] Csernák Tamás diák, 2014c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[2] Hejny Milan. milan.hejny@pedf.cuni.cz.

[3] J. I. Ignatyev: *A találékonyság birodalmában*. Általános Iskolai szakköri füzet sorozat. Budapest, 1982, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 6631 4.

[4] Hajós György-Neukomm Gyula-Surányi János: *Matematikia versenytételek, II. rész*. 1986-os, Surányi János által átdolgozott. kiad. Budapest, 1986, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 4736 0.

[5] Urbán János: *Matek+ 15 éveseknek*. Szeged, 1993, Mozaik Oktatási Stúdió.

[6] Kalmár László Matematikaverseny. a Kis Matematikus Baráti Körök versenye. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Kalmar_Laszlo_verseny.html`.

[7] Középiskolai matematikai és fizikai lapok. A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata. URL `http://www.komal.hu`.

[8] Juhász Máté Lehel: 2001. A trinomiális együtthatókról. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/kutatomunkak/trinom/trinom.html`.

[9] Vesztergombi Katalin Lovász László, Pelikán József: *Kombinatorika – az általános és középiskolai matematika szakkörök számára*. Tinitudomány sorozat. 2004?, Typotex. ISBN 963 9326 88 7. URL `http://www.typotex.hu/book/m_0086.htm`.

[10] Pósa Lajos közlése.

[11] Surányi László: Gráfelmélet. URL `http://home.fazekas.hu/~lsuranyi/Grafok/bevezeto.htm`.

[12] N. N. Szergejeva (szerk.): *Nemzetközi Matematikai Olimpiák*. Bibliotecska Matematicseszkovo kruzska, vüpuszk 17 sorozat. Moszkva, 1987, Nauka.

[13] Róka Sándor: *2000 feladat az elemi matematika köréből*. Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 50 0.

[14] Varga Tamás Matematikai Verseny. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Varga_Tamas_verseny.html`.

[15] Városok Viadala Matematikai Verseny. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/vv/vv.html`.

[16] N. J. Vilenkin: *Kombinatorika*. Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó. ISBN 963 10 6836 6.

[17] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár*. Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 31 4.

[18] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár 2.* Budapest, 2001, Typotex. ISBN 963 9326 10 0.