Nemzeti versenyek

11–12. évfolyam

Szerkesztette: I. N. Szergejeva

2018. július 22.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2017

Tartalomjegyzék

Bevezetés **3**

Feladatok **5**
1. Egyenlőtlenségek . . . 5
2. Egész rész . . . 9
3. Háromszögek . . . 11
4. Sorozatok . . . 13
5. Szélsőértékek . . . 17
6. Függvények különböző tulajdonságai . . . 19
7. Függvényegyenletek . . . 21
8. Polinomok gyökei . . . 25
9. Polinomok oszthatósága és egyenlősége . . . 29
10. Polinomok különböző tulajdonságai . . . 33

Segítség, útmutatás **35**
1. Egyenlőtlenségek . . . 35
2. Egész rész . . . 35
3. Háromszögek . . . 35
4. Sorozatok . . . 35
5. Szélsőértékek . . . 35
6. Függvények különböző tulajdonságai . . . 35
7. Függvényegyenletek . . . 35
8. Polinomok gyökei . . . 35
9. Polinomok oszthatósága és egyenlősége . . . 35
10. Polinomok különböző tulajdonságai . . . 36

Megoldások **37**
1. Egyenlőtlenségek . . . 37
2. Egész rész . . . 37
3. Háromszögek . . . 37
4. Sorozatok . . . 37
5. Szélsőértékek . . . 37
6. Függvények különböző tulajdonságai . . . 37
7. Függvényegyenletek . . . 37
8. Polinomok gyökei . . . 37
9. Polinomok oszthatósága és egyenlősége . . . 37
10. Polinomok különböző tulajdonságai . . . 38

Alkalmazott rövidítések **39**
Könyvek neveinek rövidítései . . . 39
Segítség és megoldás jelzése . . . 39
Hivatkozás jelzése . . . 39

Bevezetés

Az [1] könyv példáit fordította Hraskó András.

1. FEJEZET

Egyenlőtlenségek

1.1. (NDK, 74). Melyik a nagyobb:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2} \qquad \text{vagy} \qquad 0?$$

1.2. (Belgium, 79). Rakjuk nagyságrendi sorrendbe az

$$x=(a+b)(c+d), \qquad y=(a+c)(b+d), \qquad z=(a+d)(b+c)$$

számokat, ha tudjuk, hogy $a<b<c<d$!

1.3. (Jugoszlávia, 76). Mutassuk meg, hogy ha három szám szorzata 1, és összegük nagyobb a reciprokösszegüknél, akkor a három szám közül pontosan egy olyan van, amely nagyobb 1-nél!

1.4. (New York, 75). Az a, b tetszőleges, de egymástól különböző pozitív számok számtani közepét $A=\frac{a+b}{2}$, mértani közepüket pedig $B=\sqrt{ab}$ jelöli. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségláncot:

$$B<\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}<A!$$

1.5. (Jugoszlávia, 76). Mutassuk meg, hogy bármely 1-nél nagyobb számokból álló a, b,c számhármasra fennáll az

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geq\frac{9}{a+b+c}$$

egyenlőtlenség!

1.6. (Ausztria, 71). Mutassuk meg, hogy bármely pozitív számokból álló a, b, c számhármasra teljesül az

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+a^2(a+b-c)+\leq 3abc$$

egyenlőtlenség

1.7. (USA, 80). Igazoljuk, hogy ha a, b, $c\in[0;1]$, akkor

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1!$$

1.8. (Csehszlovákia, 59). Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számok kielégítik az

$$a+b+c>0, \qquad ab+bc+ca>0, \qquad abc>0$$

egyenlőtlenségeket, akkor a három valós szám mindegyike pozitív!

1.9. (Belgium, 76). Igazoljuk, hogy bármely α valós számra fennáll az

$$\sin(\cos\alpha)<\cos(\sin\alpha)$$

egyenlőtlenség!

1.10. (Balkániáda, 84). Igazoljuk, hogy ha az a_1, a_2, …, a_n pozitív számok ($n \geq 2$) összege 1, akkor
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2-a_i} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

1.11. (NDK, 67; Anglia, 76). Igazoljuk, hogy ha a_1, a_2, …, a_n mind pozitív számok és $n \geq 2$, akkor
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}, \qquad \text{ahol} \qquad s = \sum_{i=1}^{n} a_i!$$

1.12. (New York, 75). Igaz-e, hogy ha az a_1, a_2, …, a_n számok mind pozitívak és $a_{n+1} = a_1$, akkor
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n \geq \frac{a_{i+1}}{a_i}?$$

1.13. (Zsűri, Kanada, 82). Mutassuk meg, hogy ha az a, x pozitív valós számokra $x \neq 1$ és $a < 1$, akkor
$$\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}.$$

1.14. (Zsűri, Szovjetunió, 82). Bizonyítsuk be, hogy ha az α, x_1, x_2, …, x_n számokra
$$\alpha \leq 1, \qquad \text{és} \qquad 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0,$$
akkor
$$(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^\alpha \leq 1 + 1^{\alpha-1}x_1^\alpha + 2^{\alpha-1}x_2^\alpha + \ldots + n^{\alpha-1}x_n^\alpha!$$

1.15. (Bulgária, 82). Igazoljuk, hogy ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \ldots, a_n \in [0;2]$, akkor
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_i - a_j| \leq n^2.$$
Mely a_1, … , a_n számok esetén van egyenlőség?

1.16. (Jugoszlávia, 72). Mutassuk meg, hogy ha az M számra és az
$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{matrix}$$
számhalmazra minden x_1, …, $x_n \in \{-1; 1\}$ értékrendszer esetén fennáll az
$$\sum_{j=1}^{n} |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n| \leq M$$
egyenlőtlenség, akkor teljesül az
$$|a_{11}| + |a_{11}| + \ldots + |a_{nn}| \leq M$$
egyenlőtlenség is!

1.17. (Zsűri, USA, 82). Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokhoz megadható olyan $k \in \{1; \ldots; n\}$ egész szám, hogy bármely $1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ számokra fennálljon az

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i a_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right|$$

egyenlőtlenség!

1.18. (Bulgária, 84). Legyenek m, n tetszőleges pozitív egész számok, míg $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ olyan valós számok a $[0; 1]$ intervallumban, melyekre az $x_i + y_i = 1$, ha $i = 1, \ldots, n$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1 - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^m + (1 - y_1^m) \cdot \ldots \cdot (1 - y_n^m) \geq 1!$$

1.19. (Zsűri, USA, 77). Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a \leq b \leq c \leq d$ pozitív számokra teljesül az

$$a^b b^c c^d d^a \geq b^a c^b d^c a^d$$

egyenlőtlenség!

1.20. (NDK, 80). Bizonyítsuk be, hogy ha n és k 1-nél nagyobb egész számok, akkor

$$\sum_{j=2}^{n^k} \frac{1}{j} > k \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}!$$

1.21. (Zsűri, Franciaország, 82). Mutassuk meg, hogy ha $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k} \leq e \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

ahol e a természetes alapú logaritmus alapja.

1.22. (USA, 77). Rögzítsük a p, q pozitív számokat és legyenek α, β, γ, δ és ϵ tetszőleges számok az $[p; q|$ intervallumban! Mutassuk meg, hogy

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\epsilon}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2!$$

Mely α, β, γ, δ, ϵ számokra áll fenn az egyenlőség?

1.23. (NDK, 70). Igazoljuk, hogy bármely ä, b, c, d pozitív számokra teljesül az

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

egyenlőtlenség! Mely ä, b, c, d számokra teljesül az egyenlőség?

2. FEJEZET
Egész rész

2.1. (MS) (Ausztria, 73). Oldjuk meg az

$$1 - |x+1| = \frac{[x] - x}{|x-1|}$$

egyenletet!

2.2. (Anglia, 75). Oldjuk meg a

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = 400$$

egyenletet a természetes számok halmazán!

2.3. (Kanada, 81). Mutassuk meg, hogy az

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$$

egyenletnek nincs megoldása!

2.4. (Svájc, 82). Az n természetes szám minden értékére adjuk meg az $x^2 - [x^2] = x^2$ egyenlet $[1; n]$ intervallumba eső megoldásainak számát!

2.5. (Ausztria, 74). Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra fennáll az

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$$

összefüggés!

2.6. (Zsűri, Belgium, 79). Mely természetes számok nem állíthatók elő $[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}]$ alakban, ahol n természetes szám?

2.7. (Jugoszlávia??, 83). Mutassuk meg, hogy az

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = [\frac{3}{2} a_n] \qquad n \in \mathbb{N}$$

összefüggésekkel definiált a_n sorozatban végtelen sok páros és végtelen sok páratlan szám van!

2.8. (Ausztria–Lengyelország, 79). Keressük meg minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz $k \in \mathbb{Z}^+$ legnagyobb olyan értékét, amelyre a $[(3 + \sqrt{11})^{2n-1}]$ szám osztható 2^k-nal!

2.9. (Zsűri,??, 79). Mutassuk meg, hogy minden n természetes szám esetén fennáll az

$$\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenség, de minden $\epsilon > 0$ értékhez van olyan n természetes szám, amelyre

$$\{n\sqrt{2}\} < \frac{1 + \epsilon}{2n\sqrt{2}}.$$

2.10. (USA?, 75). **a)** Mutassuk meg, hogy minden nemnegatív x, y számra fennáll az

$$[5x] + [5y] \geq [3x + y] + [3y + x]$$

egyenlőtlenség!

b) Igazoljuk, hogy a

$$\frac{(5m)!\,(5n)!}{m!\,n!\,(3m+n)!\,(3n+m)!}$$

kifejezés értéke bármely $m, n \in \mathbb{N}$ szám esetén egész!

2.11. (USA?, 81) Mutassuk meg, hogy az

$$[nx] \geq \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \ldots + \frac{[nx]}{n}$$

egyenlőtlenség bármely $x \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül!

2.12. (??, 83) Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c számok olyanok, hogy minden n természetes számra teljesül az $[na] + [nb] = [nc]$ összefüggés, akkor a és b legalább egyike egész!

3. FEJEZET

Háromszögek

3.1. (Jugoszlávia, 81) Adott egy hegyesszögű, nem szabályos háromszög. Behúzzuk egyik csúcsából a magasságvonalát, egy másikból a súlyvonalát, a harmadikból a szögfelezőjét. Bizonyítsuk be, hogy e három egyenes által határolt háromszög nem szabályos!

3.2. (Belgium, 77) Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c pozitív számok olyanok, hogy bármely pozitív egész n-re az a^n, b^n, c^n hosszúságú olddalakból szerkeszthető háromszög, akkor ezek a háromszögek mind egyenlő szárúak!

3.3. (Svájc, 82) Adjuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyhez található m pozitív egész szám, és az $AB = 33$, $AC = 21$, $BC = n$ hosszúságú oldalakkal rendelkező háromszög AB, AC oldalain a D ill. az E pont úgy, hogy $AD = DE = EC = m$!

3.4. (Zsűri, Magyarország, 79) Egy háromszög körülírt körének átmérője 6,25 egység és minden oldalának hossza –a, b és c is – egész szám. Határozzuk meg az összes ilyen a, b, c számhármast!

3.5. (New York, 78) Az ABC, DEF háromszögek körülírt körének sugara egyenlő. Mutassuk meg, hogy kerületük pontosan akkor egyenlő, ha

$$\sin A\angle + \sin B\angle + \sin C\angle = \sin D\angle + \sin E\angle + \sin F\angle.$$

3.6. (Jugoszlávia, 81) Mutassuk meg, hogy ha egy egyenes megfelezi a háromszög területét és kerületét is, akkor a háromszög beírt körének középpontja illeszkedik erre az egyenesre!

3.7. (Ausztria, 83) Az ABC háromszög AB, AC, BC oldalain úgy vettük fel a C', B', A' pontokat, hogy az AA', BB', CC' egyenesek egy ponton mennek át. Az A'', B'', C'' pontokat úgy kaptuk, hogy A-t, B-t ill. C-t középpontosan tükröztük A'-ra, B'-re ill. C'-re. Igazoljuk, hogy az egyes háromszögek területe között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$T_{A''B''C''} = 3T_{ABC} + 4T_{A'B'C'}!$$

3.8. (Ausztria, 71) Igazoljuk, hogy az ABC háromszög S súlypontjára

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)!$$

3.9. (New York, 79) Igazoljuk, hogy ha a háromszög súlypontja megegyezik a háromszög határvonalának súlypontjával, akkor a háromszög szabályos!

4. FEJEZET

Sorozatok

4.1. (Jugoszlávia, 76). Számoljuk ki az $a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}$ összeg pontos értékét, ahol

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$

4.2. (Csehország, 72). Mutassuk meg, hogy megadható olyan A és B valósz szám, hogy az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A \cdot \mathrm{tg} n + B \cdot n$$

összefüggés minden n természetes számra teljesüljön, ahol

$$a_k = \mathrm{tg} k \cdot \mathrm{tg}(k-1).$$

4.3. (New York, 74). Legyen

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Adjuk meg a $\lim_{n\to\infty} a_n$ határértéket!

4.4. (New York, 74). A pozitív számokból álló a_0, a_1, ... sorozatban a_0-n kívül mindegyik elem az előző fele vagy gyöke. Lehetséges-e, hogy a sorozatnak a $(0; 1)$ intervallumban van határértéke?

4.5. (USA, 80; Jugoszlávia, 81). Legfeljebb hány három tagból álló növő számtani sorozat lehet egy n elemű számhalmazban? Adjuk meg a sorozatok maximális számát n függvényében, explicit alakban!

4.6. (Jugoszlávia, 81). Vizsgáljuk azt az egész számokból álló sorozatot, amelynek első négy eleme, ebben a sorrendben, 1, 9, 8, 1 és minden további eleme az előző négy elem összegének utolsó számjegye! Lehet-e a sorozatban négy egymást követő elem 1, 2, 3 és 4 ebben a sorrendben?

4.7. (Ausztria-Lengyelország, 80). A természetes számokból álló $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ sorozatban $a_1 = 1$ és $a_{n+1} \leq 2n$ minden n pozitív egész esetén. Mutassuk meg, hogy tetszőleges k pozitív egészhez találhatók olyan p, q pozitív egészek, amelyekre $a_p - a_q = n$.

4.8. (Lengyelország, 79). Adottak az A, B pozitív egész számok, valamint egy, az $[1; AB]$ intervallumban található számokból álló $\{a_n\}$ sorozat. Mutassuk meg, hogy létezik olyan, az $[1; B]$ intervallumban található számokból álló $\{b_n\}$ sorozat, hogy bármely pozitív egészekből álló m, n számpárra fennálljon az $\frac{a_m}{a_n} \leq B\frac{b_m}{b_n}$ egyenlőtlenség!

4.9. (Zsűri, Franciaország, 82). Mutassuk meg, hogy ha az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ sorozat elemei is természetes számok, akkor van olyan p, q számpár, amelyre $a_p \leq a_q$ és $b_p \leq b_q$!

4.10. (Peking, 64). Mutassuk meg, hogy ha a pozitív számokból álló $\{a_n\}$ sorozatban bármely n pozitív egészre fennáll az $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ egyenlőtlenség, akkor az $a_n < \frac{1}{n}$ egyenlőtlenség is teljesül minden n-re!

4.11. (???, Finnország, 80). Az a_0, a_1, …, a_n sorozatot a következő szabályok definiálják:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n}a_{k-1}^2 \qquad (k = 1, \quad 2, \ldots, n).$$

Mutassuk meg, hogy $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

4.12. (Ausztria-Lengyelország, 80). Mutassuk meg, hogy ha az $\{a_n\}$ számsorozatban bármely m, k pozitív egészre teljesül az

$$|a_{m+k} - a_m - a_k| \leq 1$$

egyenlőtlenség, akkor bármely p, q pozitív egészre

$$\left|\frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q}\right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

is fennáll!

4.13. (Lengyelország, 78). Bármely $a_1 \in \mathbb{R}$ számból az

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{a_n}\right) & \text{, ha} \quad a_n \neq 0, \\ 0 & \text{, ha} \quad a_n = 0 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

rekurzióval egy végtelen sorozat generálható. Mutassuk meg, hogy ebben a sorozatban minden esetben végtelen sok nempozitív szám található.

4.14. (Anglia, 80). Adjuk meg az összes olyan $a_0 \in \mathbb{R}$ számot, amelyre az $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ szabállyal értelmezett sorozat monoton növő.

4.15. (Ausztria, 72;??, 78). Mutassuk meg, hogy ha az a_1, a_2, …, sorozat nullától különböző számokból áll, és van olyan a szám, amelyre

$$a_1, \quad a_2 \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{a_1^2 + a_2^2 + a}{a_1 a_2} \in \mathbb{Z}, \qquad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a}{a_n}$$

minden n pozitív egészre, akkor a sorozat elemei mind egész számok!

4.16. (Csehszlovákia, 68). Mutassuk meg, hogy az

$$a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

sorozat mindegyik eleme egész szám! Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre a_n osztható 3-mal!

4.17. (Csehszlovákia, 78). Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n}{4} - 2 \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat mindegyik eleme természetes szám és n paritásától függően $5m^2$ illetve m^2 $(m \in \mathbb{N})$ alakban írható!

4.18. (Zsűri, Anglia, 82). Az $\{a_n\}$, sorozatot az $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ kezdeti értékek és az

$$a_{k+1} = 2a_k + (a-1)a_{k-1} \qquad (k \in \mathbb{N}^+)$$

rekurzió definiálja, ahol az a paraméter pozitív egész szám. A rögzített $p_0 > 2$ prímszámhoz adjuk meg az a paraméter legkisebb olyan értékét, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:
I.) Ha a p prímszámra $p \leq p_0$, akkor a_p osztható p-vel;
II.) Ha a p prímszámra $p > p_0$, akkor a_p nem osztható p-vel!

4.19. (Anglia, 78). Igazoljuk, hogy egy és csakis egy olyan egész számokból álló $\{a_n\}$ sorozat van, amelyre

$$a_1 = 1, \qquad a_2 > 1, \qquad a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

4.20. (Csehszlovákia, 70). Minden p prímszámra határozzuk meg azoknak az $\{a_n\}$ sorozatoknak a számát, amelyek pozitív egészekből állnak és amelyekre minden n pozitív egészre teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1!$$

4.21. (Anglia, 83). Mutassuk meg, hogy az $a_1 = a_2 = 1$ kezdeti feltételekkel és az

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

rekurzióval definiált sorozathoz (Fibonacci sorozat) egyféleképpen választhatók meg az a, b, c pozitív egész számok úgy, hogy az $b < a$, $c < a$ egyenlőtlenségek mellett minden n pozitív egészre teljesüljön az is, hogy $a_n - nbc^n$ osztható a-val!

5. FEJEZET

Szélsőértékek

5.1. (NDK, 73). Adjuk meg az összes olyan pozitív számokból álló $(x;y)$ számpárt, amelyre az

$$f(x;y)=\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

függvény értéke maximális, és adjuk is meg f maximális értékét!

5.2. (Zsűri, Svájc, 79). Határozzuk meg az $x^2y^2z^2u$ szorzat maximális értékét az

$$x,\quad y,\quad z,\quad u\geq 0,\qquad 2x+xy+z+yzu=1$$

feltételek mellett!

5.3. (NDK, 78; Csehszlovákia, 80). Adottak az $a_1<a_2<\ldots<a_n$ valós számok. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, amelyre az

$$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_n|$$

függvény értéke minimális és adjuk is meg a minimumot!

5.4. (Zsűri, NDK, 79). Minden rögzített $n\geq 2$ pozitív egész esetén adjuk meg az $x_1x_2\ldots x_n$ szorzat minimális és maximális értékét az alábbi feltételek mellett:

$$x_i\geq\frac{1}{n}\quad(i=1,\quad 2,\ldots,n),\qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1!$$

5.5. (Zsűri, Svájc, 79). Adott az $n>2$ egész és az $a>0$ valós szám. Határozzuk meg az

$$\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$$

összeg maximális értékét az alábbi feltételek mellett:

$$x_i\geq 0\quad(i=1,\quad 2,\ldots,n),\qquad x_1+x_2+\ldots+x_n=a.$$

5.6. (???, 79). Adottak az $a_1<a_2<\ldots<a_n$ pozitív számok. Ezek mely $(b_1;b_2;\ldots;b_n)$ permutációjára lesz maximális a

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)$$

szorzat?

5.7. (Csehszlovákia, 63). Írjuk fel $2k$-t minden k pozitív egész esetén két egymáshoz relatív prím szám összegeként úgy, hogy azok szorzata a lehető legnagyobb legyen!

5.8. (Csehszlovákia, 83). Határozzuk meg minden n pozitív egészre és minden $a \in [0; n]$ valós számra az

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i\right|$$

kifejezés maximumát az

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = a$$

feltétel mellett!

5.9. (Jugoszlávia, 74). Néhány pozitív egészről csak annyit tudunk, hogy összegük n. Legfeljebb mekkora lehet a szorzatuk?

5.10. (Anglia, 81). Határozzuk meg $|12^m - 5^n|$ minimumát, ha m és n pozitív egészek!

6. FEJEZET

Függvények különböző tulajdonságai

6.1. (NDK, 83). Adott x_1, x_2 számokhoz keressünk olyan $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=ax^4+bx^2+c \qquad (a,b,c\in\mathbb{R},\quad a\neq 0)$$

alakú függvényt, amelyre $f(0)=f(x_1)=1$ és $f'(x_2)=0$.

6.2. (Románia, 81). Van-e olyan $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvény, amelyre bármely x valós szám esetén teljesül az $f(x^2)-(f(x))^2\geq\frac{1}{4}$ összefüggés és amelyik minden értéket legfeljebb egy helyen vesz fel?

6.3. (Magyarország, 79; Zsűri, USA, 79). Igazoljuk, hogy ha az $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvény bármely x, y valós számokra teljesíti az

$$f(x)\leq x, \qquad f(x+y)\leq f(x)+f(y)$$

egyenlőtlenségeket, akkor $f(x)\equiv x$ $(x\in\mathbb{R})$.

6.4. (NDK, 72). Legyen

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}\\ \frac{1}{2+\mathrm{tg}^2 x} & \text{a többi } x\text{-re}\end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy a $g(x)=f(x)+f(\alpha x)$ függvény pontosan akkor periodikus, ha α racionális.

6.5. (Kanada, 81). Az $f(x)$, $g(x)$ folytonos függvéynekre teljesül az

$$f(g(x))\equiv g(f(x)) \qquad x\in\mathbb{R}$$

összefüggés. Mutassuk meg, hogy ha az $f(x)=g(x)$ egyenletnek nincs valós megoldása, akkor nem teljesülhet az előző mellett az

$$f(f(x))\equiv g(g(x)) \qquad x\in\mathbb{R}$$

összefüggés is.

6.6. (Románia, 81).

a) Mutassuk meg, hogy ha az $f:[0;+\infty)\longrightarrow[0;+\infty)$ függvény folytonos és

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(f(x))=+\infty, \qquad \text{akkor} \qquad \lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=+\infty.$$

b) Igaz-e, hogy ha az $f:(0;+\infty)\longrightarrow(0;+\infty)$ függvény folytonos és

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(f(x))=+\infty, \qquad \text{akkor} \qquad \lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=+\infty?$$

6.7. (Románia, 79). Igazoljuk, hogy nem létezik olyan $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $f(x)$ pontosan akkor racionális, ha $f(x+1)$ irracionális.

6.8. (New York, 79). Van-e olyan nem konstans $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden valós x, y számpár esetén teljesül az

$$(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3$$

egyenlőtlenség?

6.9. (New York, 76). Az $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ függvény folytonos, a $(0; 1)$ intervallumban differenciálható és $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Mutassuk meg, hogy a (0,1) intervallumban van olyan egymástól különböző a és b szám, amelyekre $f'(a)f'(b) = 1$!

6.10. (Ausztrália, 82). Adjuk meg a $(0; 1]$ intervallumban található összes olyan d számot, amelyre igaz az alábbi állítás: *ha $f(x)$ a $[0; 1]$ intervallumon folytonos függvény, melyre $f(0) = f(1)$, akkor van olyan $x_0 \in [0; 1 - d]$ szám, melyre $f(x_0) = f(x_0 + d)$.*

6.11. (Románia, 78). Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen értelmezzük: $f(x) = 0$, ha x irracionális és $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q^3}$, ha $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^+$ és $(p, q) = 1$. Mutassuk meg, hogy az f függvény differenciálható a $\sqrt{k}$ alakú pontokban, ahol k pozitív egész szám, de nem négyzetszám!

6.12. (Zsűri, Lengyelország, 76). Legyen $I = (0; 1]$. Tetszőleges $a \in (0; 1)$ valós számhoz képezhetünk egy $f : I \longrightarrow I$ függvényt az alábbi definícióval:

$$f(x) = \begin{cases} x + (1 - a), & \text{ha } 0 < x \leq a, \\ x - a, & \text{ha } a < x \leq 1 \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy bármely $J \subset I$ intervallumhoz található olyan n pozitív egész szám, amelyre az $f^n(J) \cap J$ metszet nem üres.

6.13. (Zsűri, Svájc, 77). Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő függvényből képezzük a

$$g(x; y) = \frac{f(x + y) - f(x)}{f(x) - f(x - y)}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

függvényt. Igazoljuk, hogy ha az

$$2^{-1} < g(x; y) < 2$$

egyenlőtlenség teljesül minden $y > 0$-ra, ha $x = 0$ és minden $y \in (0; |x|]$-re, ha $x \neq 0$, akkor az

$$14^{-1} < g(x; y) < 14$$

egyenlőtlenség is teljesül minden $x \in \mathbb{R}$-re, ha $y > 0$!

7. FEJEZET

Függvényegyenletek

7.1. (New York, 78). Az $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényre teljesül az

$$f(xy)\equiv\frac{f(x)+f(y)}{x+y},\qquad x,y\in\mathbb{R},\qquad x+y\neq 0$$

azonosság. Lehet-e f-nek 0-tól különböző értéke?

7.2. (Bulgária, 68). Adjuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$xf(y)+yf(x)\equiv(x+y)f(x)f(y),\qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

7.3. (Zsűri, NDK, 82). M-mel jelöljük azoknak az $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényeknek a halmazát, amelyekre $f(0)\neq 0$ és

$$f(n)f(m)\equiv f(n+m)+f(n-m),\qquad n,m\in\mathbb{Z}.$$

Adjuk meg az összes olyan $f\in M$ függvényt, amelyekre
a) $f(1)=\frac{5}{2}$; **b)** $f(1)=\sqrt{3}$.

7.4. (Ausztria-Lengyelország, 79). Adjuk meg az összes olyan $f:\mathbb{Z}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(n+m)+f(n-m)\equiv f(3n),\qquad n,m\in\mathbb{Z}^+,\qquad n\geq m.$$

7.5. (New York, 76). Az $f,\ g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ konstanstól különböző függvényekre teljesül az alábbi kettős azonosság:

$$\begin{aligned} f(x+y)&\equiv\ f(x)g(y)+g(x)f(y)\\ f(x+y)&\equiv\ g(x)g(y)-f(x)f(y)\end{aligned}$$

$x,y\in\mathbb{R}$. Adjuk meg $f(0)$ és $g(0)$ összes lehetséges értékét!

7.6. (MMC?, Luxemburg, 80). Adjuk meg az összes olyan $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ függvényt, amelyre $f(1)=2$ és

$$f(xy)\equiv f(x)f(y)-f(x+y)+1\qquad x,y\in\mathbb{Q}.$$

7.7. (Jugoszlávia, 83). Az $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$ függvényt az alábbi összefüggés definiálja:

$$f(n)=\begin{cases} n-10 & \text{, ha } n>100,\\ f(f(n+11)) & \text{, ha } n\leq 100\end{cases}$$

minden $n\in\mathbb{Z}$-re. Mutassuk meg, hogy ha $n\leq 100$, akkor $f(n)=91$.

7.8. (Románia, 79). Az f, g, $h : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+$ függvényekre teljesül az alábbi három feltétel:
a) a h függvény minden értéket legfeljebb egy helyen vesz fel;
b) a g függvény minden pozitív egész értéket felvesz.
c) $f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1 \qquad n \in \mathbb{N}^+$. Igazoljuk, hogy $f(N) \equiv 1 \qquad n \in \mathbb{N}^+$.

7.9. (Románia, 78). Mutassuk meg, hogy van olyan $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+$ függvény, amelyre

$$f(f(n)) \equiv n^2 \qquad n \in \mathbb{N}^+.$$

7.10. (Románia, 78). Olyan nem konstans $f(n,m)$ függvényeket vizsgálunk, amelyek értelmezési tartománya az egész számok párjaiból álló halmaz és amelyek mindenütt egész értéket vesznek fel. Megköveteljük még az alábbi tulajdonságot is:

$$f(n;m) \equiv \frac{1}{4}\left(f(n-1,m) + f(n+1,m) + f(n,m-1) + f(n,m+1)\right) \qquad n,m \in \mathbb{Z}.$$

Mutassuk meg, hogy
a) léteznek ilyen tulajdonságú függvények;
b) minden k egész számra bármely ilyen függvény k-nál nagyobb és k-nál kisebb értéket is felvesz.

7.11. (Ausztria-Lengyelország, 78). Az egész számok párjainak S részhalmazán értelmezett $f :$ $: S \longrightarrow S$ függvényt S-univerzálisnak nevezzük, ha létezik inverze és bármaly $(m;n) \in S$ esetén

$$f(n;m) \in \{(n-1;m), (n+1;m), (n;m-1), (n;m+1)\}.$$

Mutassuk meg, hogy ha létezik S-univerzális f függvény, akkor olyan S-univerzális f függvény is van, amelyre

$$f(f(n;m)) \equiv (n;m) \qquad (n;m) \in S.$$

7.12. (S) (USA, 82). Adjuk meg az összes olyan, 0-tól különböző elemekből álló $m \leq n$ számpárt, amelyre $m + n \neq 0$ és amelyre

$$f_m(x,y)f_n(x,y) \equiv f_{m+n}(x,y) \qquad x, y \in \mathbb{R}, \qquad xy(x+y) \neq 0,$$

ahol

$$f_k(x,y) = \frac{x^k + y^k + (-1)(x+y)^k}{k}.$$

7.13. (Zsűri, Lengyelország, 77). Az $f(x,y)$ függvény az racionális számok párjaiból álló halmazon értelmezett és csak pozitív értékeket vesz fel. Igazoljuk, hogy ha f teljesíti az

$$\begin{aligned} f(xy,z) &\equiv f(x,z)f(y,z), \\ f(z,xy) &\equiv f(z,x)f(z,y), \\ f(x,1-x) &\equiv 1 \end{aligned}$$

x, y, $z \in \mathbb{Q}$ azonosságokat, akkor teljesülnek rá az

$$f(x,x) \equiv 1, \qquad f(x,-x) \equiv 1, \qquad f(x,y)f(y,x) \equiv 1 \qquad x, y \in \mathbb{Q}$$

összefüggések is!

7.14. (Zsűri, Jugoszlávia, 79). Igazoljuk, hogy ha valamely $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti az alábbi függvényegyenletek egyikét, akkor a másik is teljesül rá!

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y) \qquad x, y, \in \mathbb{R};$$

$$f(xy+x+y) \equiv f(xy) + f(x) + f(y) \qquad x, y, \in \mathbb{R}.$$

7.15. (Ausztria, 75). Adjuk meg az összes olyan $f : (1; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(xy) \equiv xf(y) + yf(x), \qquad x, y > 1.$$

7.16. (Románia, 82). **a)** Mutassuk meg, hogy ha az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény kielégíti az

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) \equiv x \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

függvényegyenletet, akkor $f(x) \equiv x$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Adjunk meg ettől különböző olyan nem folytonos függvényt, amelyre teljesül az (1) azonosság!

7.17. (Zsűri, Franciaország, 79). Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton függvényt, amelyre teljesül az

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x \qquad x \in \mathbb{R}$$

azonosság!

7.18. (New York, 77). Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre teljesül az

$$f'(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad x, y \in \mathbb{R}, \quad x \neq y$$

összefüggés!

7.19. (Belgium, 77). Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvényt, amelyre teljesül az

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y) + 2xy \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

azonosság!

7.20. (Anglia, 69). Mutassuk meg, hogy ha a nem azonosan nulla $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesül az

$$f(x)f(y) \equiv f(x+y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

azonosság, és az $x = 0$ pontban differenciálható, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható!

8. FEJEZET
Polinomok gyökei

8.1. (MS) (??, 80). Mutassuk meg, hogy az

$$x^2 + px - \frac{1}{p^2}, \qquad p \in \mathbb{R}, p \neq 0,$$

polinom x_1, x_2 gyökeire fennáll az $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$ egyenlőtlenség!

8.2. (??, 61). Keressük meg az összes olyan p,q valós számpárt, amelyre az $x^4 + px^2 + q$ polinomnak négy olyan valós gyöke van, amelyek számtani sorozatot alkotnak!

8.3. (Anglia, 67). Mutassuk meg, hogy ha az $x^2 + px + 1$ polinom gyökei α és β, az $x^2 + qx + 1$ polinom gyökei γ és δ, akkor

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2.$$

8.4. (NDK, 70). Mutassuk meg, hogy az α, β paraméterek bármely nullától különböző értékeire az

$$\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$$

polinom x_1, x_2, x_3 gyökeire teljesül az

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$$

összefüggés!

8.5. (Ausztria, 83). Határozzuk meg az a valós paraméterösszes olyan értékét, amelyre az

$$x^3 - 6x^2 + ax + a$$

polinom x_1, x_2, x_3 gyökeire teljesül az

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$$

összefüggés!

8.6. (Zsűri, Kanada, 82). Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c egész paraméterekre a

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

polinom egyik gyöke a másik kettő szorzata, akkor $2P(-1)$ osztható a

$$P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$$

számmal!

8.7. (USA?, 77). Igazoljuk, hogy ha a és b az $x^4 + x^3 - 1$ polinom gyökei közül kettő, akkor ab gyöke az $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ polinomnak!

8.8. (??, 81). Az a, b, c egész számokról tudjuk, hogy $a > 0$ és az $ax^2 + bx + c$ polinomnak két különböző gyöke van a $(0; 1)$ intervallumban. Mutassuk meg, hogy $a \geq 5$. Adjunk meg legalább egy b, c párt $a = 5$ esetén!

8.9. (Csehszlovákia, 67). Az $x^4 - ax^3 - bx + c$ polinom négy gyöke közül három épp a, b és c. Adjuk meg az összes ilyen a, b, c számhármast!

8.10. (Csehszlovákia, 54). Igazoljuk, hogy az a, b komplex számokra pontosan akkor teljesül az $a^2 = 2b \neq 0$ összefüggés, ha az $x^2 + ax + b$ egyenlet gyökei a komplex számsíkon egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög csúcsai, amelynek derékszögű csúcsa a koordinátarendszer origója!

8.11. (??, 83). A

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + 1$$

polinom $a_1, \ldots, a_{n-1}$ együtthatói nemnegatív valós számok és a polinomnak n különböző valós gyöke van. Mutassuk meg, hogy

$$P(2) \geq 3^n.$$

8.12. (??, 84). Az

$$= ax^n - ax^{n-1} + c_2 x^{n-2} \ldots + c_{n-2} x^2 - n^2 bx + b$$

polinomnak pontosan n pozitívgyöke van. Mutassuk meg, hogy ezek a gyökök mind egyenlők egymással!

8.13. (??, 83). Lehet-e az

$$= x^5 - x - 1, \qquad x^2 + ax + b \qquad (a, b \in \mathbb{Q})$$

polinomoknak közös komplex gyöke?

8.14. (Singapur, 78). Az n-edfokú $P(x)$ polinomra és az $a < b$ valós számokra teljesülnek a

$$P(a) < 0, \quad -P'(a) \leq 0, \quad P''(a) \leq 0, \ldots, (-1)^n P^{(n)}(a) \leq 0,$$

$$P(b) > 0, \quad P'(b) \geq 0, \quad P''(b) \geq 0, \ldots, P^{(n)}(b) \geq 0,$$

egyenlőtlenségek. Mutassuk meg, hogy a P polinom valós gyökei az $(a; b)$ intervallumban vannak!

8.15. (NDK, 70). Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész n-re az

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

polinomnak legfeljebb egy valós gyöke van!

8.16. (NDK, 69; NDK, 71). Mutassuk meg, hogy ha a $P(x)$ valós együtthatós n-edfokú polinomnak nincs valós gyöke, akkor α bármely értékére a

$$Q(x) = P(x) + \alpha P'(x) + \ldots + \alpha^n P^{(n)}(x)$$

polinomnak sincs valós gyöke.

8.17. (Lengyelország, 79). Mutassuk meg, hogy $n > 1$ esetén bármely olyan n-edfokú $P(x)$ polinom, amelynek n különböző gyöke x_1, x_2, …, x_n teljesíti a

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$$

összefüggést!

8.18. (New York, 75). Legyen $P(x)$ olyan valós együtthatós polinom, amelynek minden gyöke tiszta képzetes szám. Mutassuk meg, hogy a $P'(x)$ polinomnak is, egy kivételével, minden gyöke tisztán képzetes!

8.19. (??, 78). Mutassuk meg, hogy a komplex együtthatós, nem azonosan nulla P, Q polinomoknak pontosan akkor ugyanazok a gyökei (ugyanakkora multiplicitással), ha az $f(z) = |P(z)| - |Q(z)|$ függvénynek minden olyan pontban ugyanaz az előjele, ahol értéke nem nulla!

9. FEJEZET

Polinomok oszthatósága és egyenlősége

9.1. (MS) (New York, 73; Belgium, 81). Mutassuk meg, hogy bármely n pozitív egész szám esetén a $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ polinom osztható az x^2+x+1 polinommal!

9.2. (?, 62). Mutassuk meg, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ számok esetén, melyekre $n \neq 1$ és $\sin\alpha \neq 0$, a

$$P(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

polinom osztható a

$$Q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$$

polinommal!

9.3. (??, 66). Határozzuk meg az összes olyen 4-nél kisebb fokú $R(x)$ polinomot, amelyhez található olyan $P(x)$ polinom, melyre minden t valós számra fennáll az

$$7\sin^{31} t + 8\sin^{13} t - 5\sin^5 t\cos^4 t - 10\sin^7 t + 5\sin^5 t - 2 \equiv$$
$$\equiv P(\sin t)\left(\sin^4 t - (1+\sin t)(\cos^2 t - 2)\right) + R(\sin t)$$

összefüggés!

9.4. (USA, 77). Keressük meg az összes olyan $m, n \in \mathbb{N}$ számpárt, amelyre az $1+x^n+x^{2n}+$ $+\ldots+x^{mn}$ polinom osztható az $1+x+x^2+\ldots+x^m$ polinommal!

9.5. (USA, 76). Mutassuk meg, hogy ha a $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ polinomokra teljesül az

$$p(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) \equiv (x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$

összefüggés, akkor $P(x)$ osztható az $(x-1)$ polinommal!

9.6. (New York, 75). Adjuk meg az összes olyan $P(x)$ polinomot, amely kielégíti a $P(0)=0$ feltételt és az

$$P(x) \equiv \frac{1}{2}\left(P(x+1)+P(x-1)\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

algebrai összefüggést!

9.7. (NDK, 77). Adjuk meg az összes olyan $P(x)$ polinomot, amelyre

$$xP(x-1) \equiv (x-2)P(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

9.8. (New York, 76). Adjuk meg az összes olyan $P(x)$ polinomot, amelyre

$$(x-1)P(x+1) - (x+2)P(x) \equiv \qquad x \in \mathbb{R}.$$

9.9. (??, 80). Adjuk meg az összes olyan nem azonosan nulla $P(x)$ polinomot, amelyre

$$P(x^2) \equiv (P(x))^2 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

9.10. (??, 79). Adjuk meg az összes olyan nem azonosan nulla $P(x)$ polinomot, amelyre

$$P(x^2 - 2x) \equiv (P(x-2))^2 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

9.11. (Zsűri,??, 79). Adjuk meg az összes olyan nem azonosan nulla, valós együtthatós $P(x)$ polinomot, amelyre

$$P(x)P(2x^2) \equiv P(2x^3 + x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

9.12. (??, 78). Mutassuk meg, hogy bármely $P(x) \not\equiv x$ polinomra és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra a

$$Q_n(x) = P\left(P\left(\ldots P(x)\ldots\right)\right) - x$$

polinom osztható a $Q_1(x) = P(x) - x$ polinommal!

9.13. (??, 78). Mutassuk meg, hogy ha a $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ harmadfokú, valós együtthatós polinomokra minden x valós szám esetén teljesül a $P(x) \le Q(x) \le R(x)$ egyenlőtlenség és valamely x_0 helyen az $P(x_0) = R(x_0)$ egyenlőség áll fenn, akkor valamely $k \in [-1; 1]$ számmal

$$Q(x) \equiv kP(x) + (1-k)Q(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Igaz-e az analóg összefüggés negyedfokú polinomokra?

9.14. (Zsűri,??, 79). Adott a $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinom, amelyben $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy semelyik $n \in \mathbb{N}$ szám esetén sem lehet -nél több olyan n-edfokú $Q(x)$ polinomot megadni, amelyre teljeül az alábbi azonosság:

$$Q(P(x)) \equiv P(Q(x)) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

9.15. (??, 79). Mutassuk meg, hogy a $P(z)$ polinom pontosan akkor páros függvénye a $z \in \mathbb{C}$ változónak, ha van olyan $Q(z)$ polinom, amelyre

$$P(z) \equiv Q(z)Q(-z) \qquad z \in \mathbb{C}.$$

9.16. (Zsűri,??, 79). Mutassuk meg, hogy ha a $P(x)$ valós együtthatós polinom minden $x \in \mathbb{R}$ helyen nemnegatív értéket vesz fel, akkor felírható

$$P(x) \equiv Q_1^2(x) + Q_2^2(x) + \ldots + Q_n^2(x)$$

alakban, ahol $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, …, $Q_n(x)$ megfelelő valós együtthatós polinomok.

9.17. (??, 76, Zsűri, Svájc, 76). Mutassuk meg, hogy ha a $P(x)$ valós együtthatós polinom pozitív x-re pozitív értéket vesz fel, akkor vannak olyan nemnegatív valós együtthatós $Q(x)$, $R(x)$ polinomok, amelyekkel

$$P(x) \equiv \frac{Q(x)}{R(x)}.$$

9.18. (Zsűri, NDK, 83). Jelölje A_n a

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

alakú polinomok halmazát, ahol

$$0 \leq a_0 = a_n \leq a_1 = a_{n-1} \leq \ldots \leq a_{[n/2]} = a_{[(n+1)/2]}.$$

Mutassuk meg, hogy ha $P(x) \in A_n$ és $Q(x) \in A_m$, akkor a $P(x)Q(x)$ polinom az A_{m+n} halmazban van.

9.19. (Zsűri,??, 77). Mely n természetes számhoz találhatók olyan nem azonosan nulla, n-változós, egész együtthatós P, Q polinomok, amelyekre

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}?$$

9.20. (Zsűri,??, 81). Legyenek $P(x)$, $Q(x)$ legalább elsőfokú polinomok és vezessük be az alábbi jelölést!

$$P_c = \{z \in \mathbb{C} | P(z) = c\}, \qquad Q_c = \{z \in \mathbb{C} | Q(z) = c\}.$$

Mutassuk meg, hogy ha $P_0 = Q_0$ és $P_1 = Q_1$, akkor $P(x) \equiv Q(x) \qquad x \in \mathbb{R}$.

9.21. (??, 78). Mutassuk meg, hogy ha az m-nél kisebb fokú $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $R(x,y)$ polinomokra

$$x^{2m}P(x,y) + y^{2m}Q(x,y) \equiv (x+y)^{2m}R(x,y) \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

akkor

$$P(x,y) \equiv Q(x,y) \equiv R(x,y) \equiv 0.$$

10. FEJEZET

Polinomok különböző tulajdonságai

10.1. (MS) (??, 62). A p, q egész paraméterek mely értékeire vesz fel a

a) $P(x) = x^2 + px + q$ polinom minden $x \in \mathbb{Z}$ helyen páros (páratlan) értéket?

b) $P(x) = x^3 + px + q$ polinom minden $x \in \mathbb{Z}$ helyen hárommal osztható értéket?

10.2. (NDK, 83). Mutassuk meg, hogy a

$$P(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$$

polinom minden egész helyen egész értéket vesz fel!

10.3. (Csehszlovákia, 62). Adjuk meg az összes olyan x egész számot, amelyre a $2x^2 - x - 36$ polinom értéke prímszám négyzetével egyenlő.

10.4. (??, 75). Adottak a $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterek. Határozzuk meg a $P(x) = x^2 + px + q$ polinom értékkészletét a $[-1; 1]$ intervallumon. Adjuk meg az összes olyan x efész számot, amelyre a $2x^2 - x - 36$ polinom értéke prímszám négyzetével egyenlő.

10.5. (Peking, 63). A $P(X)$ egész együtthatós polinomnak négy különböző egész helyen is 2 az értéke. Mutassuk meg, hogy nincs olyan egész hely, ahol 1, 3, 5, 7 vagy 9 lenne az értéke.

10.6. (Anglia, 80). Keressünk legalább egy olyan M halmazt, amely 7 egymást követő természetes számból áll és amelyhez található az alábbi három tulajdonsággal rendelkező ötödfokú $P(x)$ polinom:

a) $P(x)$ együtthatói egészek;

b) az M halmaz öt különböző elemére ($k \in M$)– köztük az M legnagyobb és legkisebb elemére – is teljesül a $P(k) = k$ összefüggés;

c) az egyik $k \in M$ elemre $P(k) = 0$.

10.7. (NDK, 74). **a)** Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $P(x)$ polinom, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ számra teljesül az alábbi két összefüggés:

1.) $P'(x) > P''(x)$ 2.) $P(x) > P''(x)$.

b) Igaz marad-e az a) rész állítása, ha az 1.) feltételt kicseréljük az alábbi feltételre:

1'.) $P(x) > P'(x)$?

10.8. (??, 82). Adottak a $P_0(x)$, $P_1(x)$, …, $P_n(x)$ valós együtthatós polinomok és az a_1, …, a_n valós számok. Mutassuk meg, hogy ha az

$$f(x) = P_0(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k |P_k(x)|$$

függvény egy valós értéket sem vesz fel egynél több helyen, akkor minden valós értéket felvesz.

10.9. (Zsűri,??, 83). Az $\{a_n\}$ sorozatot (Fibonacci sorozat) az $a_1 = a_2 = 1$ értékek és az $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) rekurziós szabáály definiálja. Mutassuk meg, hogy ha a 990-ad fokú $P(x)$ polinomra a $k = 992, 993, \ldots, 1982$ értékeknél $P(k) = a_k$, akkor $P(1983) = a_{1983} - 1$.

10.10. (Anglia, 78). Mutassuk meg, hogy

a) minden n természetes számhoz található olyan n-edfokú egés zegyütthatós $P_n(x)$ polinom, amelyre

$$2\cos nt = P_n(2\cos t) \qquad t \in \mathbb{R};$$

b) bármely $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén a zcos $\alpha\pi$ szám vagy megegyezik a 0, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ számok egyikével, vagy irracionális.

10.11. (Finnország, 80). Adott a koordinátasíkon egy görbe, amely egy

$$P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s, \qquad (p, q, r, s \in \mathbb{R})$$

alakú polinomfüggvény grafikonja. A sík valamely egyenesét „vízszintes”-nek nevezzük, ha párhuzamos az x-tengellyel és négy különböző pontban – balról jobbra: A, B, C, D – metszi a görbét. Ha emellett az AB, AC, AD szakaszok hossza iegy háromszög oldalhosszai is lehetnek, akkor az egyenes „trianguláris”-nak is nevezzük. Mutassuk meg, hogy csak két eset lehetséges: vagy minden horizontális egyenes trianguláris, vagy egyik sem.

10.12. (??, 77). Mutassuk meg, hogy ha a $Q(x)$ polinom nem az azonosan nulla polinom, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ számra a $P(x) = (x-1)^n Q(x)$ polinomnak legalább $(n+1)$ nullától különböző együtthatója van.

10.13. (Csehország, 74). Jelölje M a

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

alakú olyan polinomok halmazát, amelyekre $|P(x)| \leq 1$, ha $x \in [-1; 1]$. Mutassuk meg, hogy van egy olyan k korlát, amelyre $|a| \leq k$ minden $P(x) \in M$ polinomra. Adjuk meg a legkisebb ilyen k korlátot!

10.14. (Zsűri, Finnország, 83). Mutassuk meg, hogy bármely p, q pozitív egészekhez található olyan $P(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre valamely $\frac{1}{q}$ hosszúságú $I \subset \mathbb{R}$ intervallumban teljesül a $|P(x) - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ egyenlőtlenség.

10.15. (NDK, 80). Adjuk meg harmadfokú valós együtthatós polinomok összes olyan $P(x)$, $Q(x)$ párját, amely teljesíti az alábbi négy feltételt:

a) az $x = 1, 2, 3, 4$ mindkét polinom a 0 vagy az 1 értéket veszi fel;

b) ha $P(1) = 0$ vagy $P(2) = 1$, akkor $Q(1) = Q(3) = 1$;

c) ha $P(2) = 0$ vagy $P(4) = 1$, akkor $Q(2) = Q(4) = 0$;

d) ha $P(3) = 1$ vagy $P(4) = 1$, akkor $Q(1) = 0$.

10.16. (??, 75). Az n-ed fokú $P(x)$ polinomra $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ esetén teljesül a $P(k) = k/(k+$ $+1)$ összefüggés. Adjuk meg $P(n+1)$ értékét!

10.17. (Zsűri, 81). Az n-ed fokú $P(x)$ polinomra $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ esetén teljesül a $P(k) =$ $= 1/\binom{n+1}{k}$ összefüggés. Adjuk meg $P(n+1)$ értékét!

10.18. (Zsűri,??, 77). Adottak az $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ egész számok. Mutassuk meg, hogy az $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$ polinomnak az x_0, x_1, x_2, $\ldots x_n$ helyeken felvett értékei között van olyan, amelynek az abszolút értéke legalább $\frac{n!}{2^n}$.

10.19. (Zsűri,??, 79). A $P(x)$ polinom foka legfeljebb $2n$. Tudjuk, hogy a $[-n; n]$ intervallumban található bármely k *egész* számra fennáll a $|P(k)| \leq 1$ egyenlőtlenség. Mutassuk meg, hogy ugyanezen intervallumban található bármely x *valós* számra teljesül a $|P(x)| \leq 2^{2n}$ egyenlőtlenség!

Segítség, útmutatás

1. Egyenlőtlenségek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

2. Egész rész

3. Háromszögek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

4. Sorozatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

5. Szélsőértékek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

6. Függvények különböző tulajdonságai

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

7. Függvényegyenletek

7.12. Az $m = 2$, $n = 3$ és az $m = 2$, $n = 5$ párra is teljesül a feltétel.

8. Polinomok gyökei

9. Polinomok oszthatósága és egyenlősége

10. Polinomok különböző tulajdonságai

Megoldások

1. Egyenlőtlenségek

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

2. Egész rész

3. Háromszögek

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

4. Sorozatok

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

5. Szélsőértékek

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

6. Függvények különböző tulajdonságai

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

7. Függvényegyenletek

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

8. Polinomok gyökei

9. Polinomok oszthatósága és egyenlősége

10. Polinomok különböző tulajdonságai

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] N. N. Szergejeva (szerk.): *Nemzetközi Matematikai Olimpiák.* Bibliotecska Matematicseszkovo kruzska, vüpuszk 17 sorozat. Moszkva, 1987, Nauka.