Számelmélet

9–10. évfolyam

Szerkesztette:
Surányi László

2018. július 15.

Technikai munkák
(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2017

Tartalomjegyzék

Bevezetés

1. FEJEZET

Oszthatóság

Ebben a fejezetben főleg az oszthatósági különböző számrendszerek etc.

1.1. (M) Melyik az a legnagyobb szám, amelyre igaz, hogy minden számjegye különböző és a számjegyeit bárhogyan cserélve mindig prímszámot kapunk?
(OKTV, 2009/I)

1.2. (MS) * Igazoljuk, hogy egy x^2+1 alakú számnak nem lehet pozitív $4k-1$ alakú osztója.

Segítség, útmutatás

1. Oszthatóság

1.2. Okoskodjunk indirekt módon, tegyük fel, hogy $p|x^2+1$-et valamely x-re és $p=4k-1$ prímre. Írjuk át x^2-re kongruenciává és használjuk fel, hogy x valamelyik hatványáról tudunk még valamit.

Megoldások

1. Oszthatóság

1.1. A 97 ilyen szám, mert mind a 97, mint a 79 prímszám.

Megmutatjuk, hogy nagyobb szám nem jön szóba. Nyilvánvaló, hogy a számjegyek között nem szerepelhet páros, mert akkor azt téve az utolsó helyre kettőnél nagyobb páros számot kapunk, ami nem prímszám. Hasonló okból az 5-ös sem szerepelhet a számjegyek között. Marad a 9,7,3,1. Mivel 9713 osztható 11-gyel, e négy számjegy mindegyike sem szerepelhet. A háromjegyűeket is kizárhatjuk, mert 973, 931, 791 és 371 osztható héttel.

Tehát a keresett szám a 97.

1.2. Elég belátnunk, hogy egy x^2+1 alakú számnak nem lehet $4k-1$ alakú pozitív prímosztója. Hiszen ha ilyen nincs, akkor $4k-1$ alakú pozitív osztója sem lehet, hiszen $4k-1$ alakú pozitív szám nem állhat elő $4k-1$ alakú prímek szorzataként. (Ezt már a K.II.13.1. feladat megoldásában is használtuk.)

Tegyük fel, hogy valamely x számra és valamely $p = 4k-1$ alakú prímre mégis igaz volna, hogy $p|x^2+1$, azaz $x^2 \equiv -1$ volna mod p. Emeljük mindkét oldalt $(p-1)/2$-edik hatványra. A jobb oldalon x^{p-1}-et kapunk, ami a „kis-Fermat” tétel szerint eggyel kongruens mod p. Másrészt $(p-1)/2$ páratlan, tehát a jobb oldal továbbra is -1 lesz, ami ellentmondás.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...