Tanári kézikönyv

a 9–10. évfolyamokhoz

Szerkesztette:
Hegedűs Pál, Hraskó András,
Surányi László

2018. július 22.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2017

Tartalomjegyzék

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Algebra

Általános irányelvek

1. Másodfokú függvények, polinomok

1.10. Messzire vezet annak felkutatása, hogy hol igaz ez a törvényszerűség. A diákok felkészültségétől és érdeklődésétől függően lehet más számköröket is nézni, de még a 10. osztályban is valószínűleg alacsony az absztrakciós képességük ahhoz, hogy ezzel a kérdéssel egy óránál többet szívesen foglalkozzanak. Mindenesetre a jelenség szemlélettágító hatású és ezért fontos, hogy megjelenjen.

1.42. Erre a feladatra mindenképpen próbáljunk alternatív megoldásokat kerestetni. Lehet a számtani és mértani közép közöti egyenlőtlenséget használni, lehet f reciprokát nézni. Pimaszul egyszerűnek tűnik a feladat és mégis a diákok megoldásaiból jól ki fog domborodni, hogy a folytonosságot valahol kell használnunk. (Természetesen a másodfokú függvénynél is használtuk, erre is vezetjük most vissza. Az viszont a parabola tulajdonságaiból következik. Lásd ehhez az A.II.1.11 feladatot.)

1.47. Természetesen ez ugyanaz, mint az

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}$$

függvény értékkészletének meghatározása. Éppen ezért a diákoktól függjön, milyen sorrendben kerülnek elő ezek a megoldási módszerek.

2. Egyenlőtlenségek

2.1. A **c)** feladatrész egy rokon feladata különösen alkalmas a *nagyság érzékeltetésére*. Melyik az a legnagyobb egész szám, melynek reciproka még nagyobb, mint $\sqrt{219}-\sqrt{218}$? Itt ismeretlen bevezetése helyett lehet reciprokot venni és gyökteleníteni, ekkor a $\sqrt{219}+\sqrt{218}$ összeget kapjuk, amely már könnyen megbecsülhető. (14,5 körül van mindkettő, de érezhetően túl rajta, így az összeg nagyobb, mint 29. Így lehet az érzékelhetetlen nagyságú különbségből érzékelhető nagyságú reciprokot csinálni. Ez az ötlet jó ha felszínre kerül időről időre, a deriválásnál nagy segítséget fog jelenteni. Lásd még az A.II.5.17 feladot.

2.6. Esetleg érdemes megtippeltetni, melyik a kisebb. Utána meghallgatni az ötleteket, miért kisebb az egyik, miért nagyobb a másik átlagsebesség. És csak utána számoljuk ki. Ebből a feladatból látszik az is, hogy a harmonikus közép gyakran(mindig) valamilyen „átlagsebességet” fejez ki.

2.14. Fontos hagyni, hogy a közepekkel próbálják meg meghatározni a maximumot is. Erre ugyanis az alkalmatlan, ezt érezzék meg. Ez fontos bevezető lehet a A.II.2.8 feladathoz.

2.15. Fordíttassuk meg a diákokkal az állításokat, azaz játsszunk azzal, melyik mennyiség állandó, és melyik a „minél,” melyik az „annál.”

2.17. A közepek közötti egyenlőtlenség ezek szerint kvantifikálható. Minden esetben az eredeti számok különbségétől függ, de minden esetben más és más. Ez a feladat megoldási módszere tulajdonképpen körmönfontabb megoldást ad a A.II.2.7 feladatra is. És fordítva, annak és tulajdonképpen a A.II.2.8 feladatnak a módszere alkalmazható jól itt is. Matematikailag nagy jelentősége van annak, ha egy egyenlőtlenséget kvantifikálni lehet, ez ugyanis az igazság *szerkezetéről* árul el valamit. Ilyen egyszerű kvantifikáció a többváltozós közepek körében már nincs, ezt nem árt észrevétetni, tudatosítani a diákokkal, de más, bonyolultabb változatok ott is találhatók.

2.28. Érdemes sok különböző bizonyítást találni az általános esetre is. Indukcióval lehet fokozatosan közelíteni az átlaghoz a tagokat. Lehet egymáshoz közelíteni, akkor vigyázni kell, hogy végetérjen a módszer. Szerencsés a tanár, ha a diákok maguktól belesétálnak ebbe a csapdába.

2.33. Kapcsolatba sikerült hozni a három tényezőt. Ez nem mindig ilyen egyszerű, de a sikereses becslésnek gyakran ez a „kapcsolatbahozás” az alapja. Lásd még a A.II.2.9 feladatot.

2.43. Így lényegében azt is bizonyíthatjuk, hogy az ellipszis konvex.

2.45. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $(a_1, \dots, a_n)$ és $(b_1, \dots, b_n)$ vektorok egy egyenesbe esnek.

2.48.

1. didaktikai javaslat. Vesd össze a A.II.2.2 feladattal.

2. didaktikai javaslat. Érdemes jól átgondoltatni, hogy ez az indukciós lépés hogyan van beleépítve a feladatba magába.

2.54. Természetesen a gyökvonás miatt van a feladat szövegében a „nemnegatív” feltétel. És természetesen negatívakra „méginkább” igaz az állítás. Ezt hadd vegyék észre a diákok. Nagyon fontos ez a fajta matematikai, illetve logikai érzékenység: Mit használtunk ki a feltételekből? Illetve: Hol használtuk ki őket?

Hasonlóan érdemes megbeszélni, hogy a Jensen-tétel bizonyításánál a konvexitást nem használtuk teljes erejével, csupán a gyenge konvexitást, vagyis elég az $s = 1/2$ esetet ellenőrizni a feladat megoldásánál.

2.62. Fontos, hogy az elképzeléseinkhez alkalmazzuk a fegyvertárunkat. Olyan egyenlőtlenséget akarunk alkalmazni, amely megenged egyenlőséget. Ha ez a számtani-négyzetes egyenlőtlenség, akkor a sejtett $a = b = c = 1/3$ miatt az 1-et is a^2-tel egyenlő részekre kellett bontani. Nehezebb lett volna a helyzetünk, ha 1 helyett $\sqrt{2}$ áll, mert azt ilyen egyszerűen nem lehet felbontani. Érdemes megcsináltatni a diákokkal ezt az esetet is.

2.66. Lásd [**?**][Nyolcoldalú zselékocka 14.].

3. Polinomok

3.13. A valós számok tulajdonságai közül csak azt használtuk, hogy

1. a gyök kiemelhető (A.II.3.2 feladat);
2. (ebbe beleértve, hogy) a hányadospolinom is valós;
3. $0 = p(b) = (a - b)r(b)$ csak úgy lehet, ha $r(b) = 0$, mivel két nemnulla valós szám szorzata sem nulla.

3.14. Ide kapcsolódik az A.II.1.5 feldat is.

3.33. Lásd még a A.II.2.13 feladatot.)

3.35. (Egyszerűbb a számolás, ha azt is használjuk, hogy $f(-1) = -1$.) A bizonyítás gondolatmenete nehézhesebb, ha az első n szám négyzetösszegét szeretnénk kiszámolni. De kis ötletességgel javíthatunk rajta, lásd a A.II.3.2 feladatot.

3.52. $p(x) = (x-1)(x+1)^3 = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$. Részletesebben lásd [**?**][Gy. 2608., 1991/2. 69. old.]

4. Lineáris egyenletrendszerek

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Vegyes feladatok

5.5. Jelölje az m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f\Big(f(f(m))\Big)$, $\ldots$ sorozat elemeit rendre a_0, a_1, a_2, a_3, $\ldots$ Teljes indukcióval igazolható, hogy $a_n = (a_0 - 1) \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + 1$. Bővebben lásd [**?**][Gy.2822, 1993/10/315.o.].

5.6. $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 5x - 3) - x^3$. Bővebben lásd [**?**][Gy.2182, 1984/11/388.o.].

5.7. Az $x^2 - \frac{1}{2}$ függvény esetén $\frac{1}{2}$ a maximum értéke, minden más esetben nagyobb. Bővebben lásd [**?**][Gy.2904, 1995/1/13.o.]

5.8. Bővebben lásd [**?**][Gy.3049, 1996/12/522.o.]

5.17. Ez is egyik példája annak, hogy a különbséget hogyan lehet mérhetővé tenni. Lásd még a A.II.2.1 feladathoz fűzött megjegyzést.

5.24. Átszorzás, rendezés, majd szorzattá alakítás után az $(x-y)^2(1-xy) = 0$ egyenlethez jutunk, amelyből $xy = 1$. [**?**][Gy. 2247., 1985/11. 390. old.]

5.29. [**?**][3. feladat]

5.30. [**?**][15. feladat]

5.31. [**?**][16. feladat]

5.32. [**?**][21. feladat] A feladat persze megoldható az új ismeretlenek bevezetésenélkül is, de érdemes megnézni, hogy min múlhat az, ha egy összegnek és a reciprokösszegnek a szorzata állandó. Ez adja a motivációt a megoldásbeli két szorzatalak felírásához.

5.33. [**?**][23. feladat]

5.34. [**?**][24. feladat]

Algoritmusok

1. Az állapotfüggvény

1.3. Ha a legnagyobb súly m gr-os, akkor a két serpenyőben levő súlyok különbsége kezdetben – az első súly felrakása után – m. Nyilvánvaló, hogy a két serpenyőben a súlyok különbsége sosem nő. Tehát végig legfeljebb m lehet.

Elég tehát belátni, hogy van legalább m db 1 gr-os súly. Tegyük fel ugyanis, hogy ezt beláttuk. És nézzük azt a helyzetet, amikor az első 1 gr-os súly sorra kerül. A két serpenyő közötti különbség legfeljebb m szám, ezt tehát biztosan ki fogjuk egyenlíteni az 1 gr-osokkal. Ha az egyensúlyi helyzet után még maradnak súlyaink, azokat felváltva rakjuk a két mérlegre. (Biztos, hogy páros sok maradt az egyensúlyi helyzet után, hiszen a súlyok összege is páros, a felrakott súlyoké is páros.)

Már csak azt kell belátnunk, hogy legalább m darab 1 gr-os súlyunk van. De ez igaz, hiszen ha legfeljebb $m-1$ db 1 gr-os súly volna, akkor volna egy m gr-os, és legalább $101-m$ darab legalább 2 gr-os súlyunk. A többit 1 grammal becsülve is a súlyok összege legalább $m+(m-1)+2(101-m)=201$ volna.

1.5. A tapasztalat az, hogy a megfelelő alakú polinomot könnyebben megtalálják a diákok, viszont nem tudják elég jól indokolni, hogy miért lesz ilyen alakú polinom a táblán. Sokan azt hiszik, hogy biztos, hogy előáll egy olyan helyzet, amikor b 10 és 20 között van. Mindenképp tisztázandó, hogy ez egyáltalán nem biztos. Lehet, hogy először a konstans tagot növelik például 30-ig, aztán a lineáris együtthatót 31-ig, utána a konstans tagot csökkentik 10-ig és csak ezután csökkentik vissza a lineáris tagot 20-ig.

2. A „mohó algoritmus”

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Fák, favázak

3.17. Gyakorló feladat, a páros gráf jellemzésére, ugyanakkor a számtani-mértani középre.

3.18. Összetett feladat, ezért a két *. „Ránézésre” látszik, hogy gráfelméleti feladatról van szó, de ötlet kell hozzá, hogy hogyan „játsszuk át” az élekre vonatkozó feltételt a pontokra vonatkozó feltételre. Utána pedig több, korábbi gráfelméleti ismeretet is használni kell.

4. „Hibás mérések”

4.3. Több módszer is van arra, ahogyan 11 méréssel minden érme súlya eldönthető. Szándékosan egy olyat mutattunk, ami nem ad rögtön ötletet a későbbi feladatok megoldásához. De itt bemutatunk egy ilyet is:

Kiválasztunk egy a érmét a hét közül, a többi hetet párba állítjuk: $b-1-c-1$, b_2-c_2 és b_3-c_3. Ezután végrehajtjuk az ab_i, b_ic_i és c_ia méréseket. Ez eddig kilenc mérés, s ebből három különböző eredményt kapunk a-ra. Ha ezek mind egyeznek, akkor nem volt hibás eredmény, minden mérés eredménye helyes volt, és minden érme súlya kiszámolható a ALG.II.4.3. megoldásban leírt módon. Ha két különböző eredményt kapunk a-ra (többet nem kaphatunk, mert csak egy hibás mérés volt), akkor a hibás mérés abban a „körben” volt, amelyikből a másik kettőtől eltérő eredményt kaptuk. Tehát már öt érme súlyát ki tudjuk számolni, és a maradó két érmét, b_i és c_i súlyát megkaphatjuk többféleképpen is, például úgy, hogy lemérjük mindkettőt a-val (aminek már ismerjük a valódi súlyát).

4.4. 1. A feladat alkalmas arra, hogy érzékeltesse a diákokkal, mit nevezünk „nagyságrendnek”. Tehát nyugodtan mondhatjuk, hogy ami a $9n/7$ „után” jön, az aránylag érdektelen, az a fontos, hogy valami pontos szám legyen.

2. Mivel a „11 mérésből hét érmét” feladatra sokféle olyan megoldás lehetséges, amit itt nem ismertettünk, elképzelhető, hogy a diákok által hozott megoldásból nem a 9/7-es szorzó jön ki általában. Ebben az esetben persze érdemes azzal a szorzóval feladni a feladatot, ami az ő megoldásuk általánosításából jön ki.

4.5. A **??**. feladat szerint 3225 méréssel már meg tudjuk állapítani minden érme pontos súlyát. Ott az volt az ötlet, hogy hetes csoportokba osztottuk őket, és egy csoportban általában 9 mérés kellett ahhoz, hogy ha nem volt hibás mérés, akkor erről meg is győződjünk és ráadásul mind a hét érme súlyát is megtudjuk. Ennél kicsit jobban járunk, ha hatos csoportokba osztjuk az érméket és egy csoportok belül is két hármas csoportot képzünk. A hármas csoportokban minden érmepárt megmérünk egyszer, majd kiszámoljuk minden érme súlyát e szerint a hat mérés szerint. Ezután ellenőrzésképp veszünk egy-egy érmét a két hármas csoportból és lemérjük. Ha nem kapunk ellentmondó eredményt, akkor hét mérésből tudjuk a hat érme súlyát. Miután most is legfeljebb egy csoportban kaphatunk hibás eredményt, ez az eljárás $7n/6 + c$ méréssel méri meg minden érme súlyát, ahol c egy mondjuk húsznál nem nagyobb konstans. Ez már kevesebb, mint 3000 mérés 2500 érme esetén.

4.6. Az ALG.II.4.5. megoldásában követett módszert fejlesztjük. n darab hetes csoportba osztjuk az érméket. Vegyünk egy csoportot, válasszunk külön egy E érmét a hétből, a többi hatot osszuk két hármas csoportba: a, b, c és d, e, f. Mérjük le a két hármas csoportból mind a három párt: ab, bc, ca és de, ef, fd. Ez hat mérés és kapunk egy-egy eredményt c-re és d-re. Az ALG.II.4.5. megoldásában közvetlenül c és d érme együttes lemérésével ellenőriztünk. Most közbe iktatjuk E-t is, tehát c-t is, d-t is lemérjük E-vel. A két mérésből kapunk egy-egy eredményt E-re. Ha a két eredmény egyezik, akkor tudhatjuk, hogy mind a nyolc mérésünk pontos volt, és minden érme súlyát ki is tudjuk számolni. Ez tehát eddig $8n$ mérés.

Legfeljebb egy csoportban lehet hibás mérés. Az ott szereplő hét érme súlyát most már könnyen megállapíthatjuk egy-egy méréssel, ha fogunk egy már ismert súlyú érmét (ilyen van, mert $n > > 1$), és azzal együtt lemérjük őket. Ez pontosan $8n + 7$ mérés.

4.7. Az ALG.II.4.6. megoldását tovább általánosíthatjuk, ha nem hetes, hanem k-as csoportba osztjuk az érméket. Ha kn érménk van, akkor az ottani gondolatmenet kis általánosításával $(k+ + 1)n/k + k$ méréssel megállapíthatjuk minden érme súlyát. Ez $n = 2500$ érme esetén $k = 50$ választással pontosan a kívánt eredményt adja.

Egy k-as csoporton belül két „háromszöget” mérünk és egy, a két háromszöget összekötő $k-5$ hosszú út élein alkalamazzuk az ellenőrzést. Vagyis az x_1x_2, x_2x_3, $\cdots$, $x_{k-5}x_{k-4}$, valamint az x_1a, ab, bx_1, $x_{k-4}c$, cd, dx_{k-4} méréseket hajtjuk végre. Az utolsó három mérésből kiszámoljuk x_{k-4} súlyát, majd „visszafele” sorra a többi x_i súlyát, végül megkapjuk x_1 súlyát. Ezt azonban kiszámolhatjuk az x_1a, ab, bx_1 mérésekből is. Ha nincs ellentmondás az eredményekben, akkor ez $k + 1$ mérés és k érme súlyát tudjuk pontosan.

Egy helyen lehet hibás mérés, ott újabb k méréssel boldogulunk. Ez pontosan $(k+1)n/k+k$ mérés.

2. megjegyzés. Ha az érmék száma nem osztható k-val, hanem $n = km + l$, akkor marad egy l-es csoport, ahol ugyanezt csináljuk, csak nem $k+1$, hanem $l+1$ méréssel. Ebben az esetben a szükséges mérések száma legfeljebb $(k+1)m/k+k+l+1 < (k+1)n/k+k+1$.

4.7. 1. A helyzettől függ, hogy a bizonyítást először általános k-ra, vagy konkrétan ötvenre tárgyaljuk-e.

2. Az ALG.II.4.6. feladat azt a célt szolgálja, hogy közelebb hozza a kívánt általánosítást. A tapasztalat szerint ugyanis a diákok „máshonnan” jutnak a konstrukcióikhoz, és ezért nehezükre esik a kívánt irányú általánosítás.

3. Érdemes továbbmenni és rámutatni, hogy a megoldásból az is kijön, hogy n érme esetén lényegében $n + c\sqrt{n}$ mérés elégséges. A c konstans persze javítható. Általában n^2 érme esetén a megoldásból az jön ki, hogy $(n^2 + 2n$ mérés elégséges.

Mindez ismét alkalmas lépés lehet a nagyságrend fogalmának kialakítása felé.

4. Végül bemutatunk egy megoldást, ami 2501 érmére is jó. (Ha csak 2500 érmére akarjuk végrehajtani, akkor az egyik érmét „két szerepben” léptetjük fel, csak arra vigyázunk, hogy ne kelljen e két szerepében egyszerre mérnünk.)

Vegyünk külön egy E érmét, a többit osszuk ötvenes csoportokba. Minden ilyen ötvenes csoporthoz tegyük hozzá az E érmét, és mérjük „körbe” az 51 érmét. Vagyis állítsuk őket körbe és minden két szomszédosat tegyünk rá egyszer a mérlegre. A kapott eredményekből minden érme súlyát ki tudjuk számolni, így E-jét is. Így E-re 50 eredményt kapunk. Ha ezek mind egyeznek, akkor mind a 2550 mérés helyes volt és máris tudjuk minden érme súlyát. Ha van egy eredmény, ami eltér a többitől (több nem lehet, mert csak egy hibás mérés lehetett), akkor annak az ötven érmének nem tudjuk a súlyát, amelyből az eltérő eredményt kaptuk. Az itt szereplő ötven érmét egyesével lemérjük E-vel együtt, és most már biztos jó eredményt kapunk, amiből E súlyának ismeretében kiszámítható a másik súlya is. Ez pontosan 2600 mérés.

5. Játékok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. Eljárások

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. Programozási feladatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Barkochba

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Geometria

Tematika

3.6. Geometria, 9. évfolyam: 35 óra

Tananyag: Az egybevágósági transzformációk folytatása. A háromszög nevezetes pontjai, vonalai. Trigonometriai alapismeretek. Kúpszeletek elemi tárgyalása. A középpontos hasonlóság folytatása.

Fogalmak: Tengelyes tükrözések összetétele; irányított szakaszok és szögek. Az egybevágósági transzformáció, mint távolságtartó transzformáció. A középpontos hasonlóság általános definíciója. Alakzatok egybevágósága és hasonlósága. Feuerbach-kör. [Háromszög izogonális pontja.] A trapéz tulajdonságai. A szögfüggvények (vektorokkal, lásd 3.7.). [Pont körre, gömbre vonatkozó hatványa.] Ellipszis, hiperbola, parabola. [Tengelyes affinitás; tulajdonságai vektorokkal.] [Egyenlő oldalú és ortogonális tetraéder. Bennfoglaló paralelepipedon.]

Tételek, összefüggések: Forgatás és eltolás, mint két tengelyes tükrözés összetétele. Héron-képlet. Érintőnégyszögek tétele ("visszafelé" is). Párhuzamos szelők tétele racionális arányra; a középpontos hasonlóság tulajdonságai. A trapéz tulajdonságai; szögfelező-tétel a háromszögben; magasságtétel, befogótétel derékszögű háromszögben. A Feuerbach-kör (kilencpontos kör). [A háromszög izogonális pontjának tulajdonságai.] Hasonló sokszögek területének, hasonló testek térfogatának és felszínének aránya. [Hatványvonal, hatványpont.] Szinusz-tétel. A kúpszeletek elemi tulajdonságai. Tetraéder súlypontjának tulajdonságai [egyenlő oldalú tetraéder és ortogonális tetraéder tulajdonságai].

Eljárások, algoritmusok: A háromszög középvonalának tulajdonságait, ill. a kerületi szögek tételét bebizonyítani tengelyes tükrözések összetevésével. Egybevágóságon, hasonlóságon alapuló síkbeli és térbeli számításos és bizonyítási feladatok; számítások a derékszögű háromszögre tanult tételek alapján; a trigonometria alkalmazása egyszerű feladatokban. A Feuerbach-kör felhasználása feladatokban.

Pontosítás: Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet[**?**]

4.6. Geometria, 10. évfolyam: 25 óra

Tananyag: Az egybevágósági transzformációk összetétele; a sík [és a tér] egybevágóságainak osztályozása, összefoglalása. A hasonlósági transzformációk folytatása. A trigonometriai ismeretek bővítése. [Gömbi geometria és gömbi trigonometria.] Inverzió [sztereografikus projekció]. Alakzatok transzformációcsoportja. Az egybevágósági transzformációk csoportja. A terület általános fogalma.

Fogalmak: Transzformációk összetétele. Az egybevágósági transzformációk osztályozása síkban [és térben]. A terület általános fogalma. A forgatvanyújtás. Inverzió: Gömbkétszög, gömbháromszög. [Henger és gömbi koordináták.] [Szabályos háromszög, négyzet, téglalap, szabályos tetraéder transzformációcsoportja; a sík egybevágósági transzformációinak csoportja.] [A háromszög további nevezetes pontjai és vonalai: Brocard-pontok, antiparalellek, Lemoine-pont, Nagel-pont.]

Tételek, összefüggések: A sík minden egybevágósági transzformációja előáll három tengelyes tükrözés összetételeként [a tér minden egybevágósági transzformációja előáll négy síkra való tükrözés összetételeként; három tengelyes tükrözés összetétele csúsztatva tükrözés]. Koszinusztétel. A szögfüggvények addíciós tételei. Az ismert területképletek bizonyítása a terület általános fogalma alapján. Trigonometrikus területképletek. A párhuzamos szelők tétele, a területképletek bizonyítása irracionális esetekben. A forgatvanyújtás tulajdonságai. [Ptolemaiosz tétele húrnégyszögekre és általában.] Meneláosz és Ceva tétele. Az inverzió alaptulajdonságai. [A gömbháromszögek elemi tételei.] [A Brocard-pontok és a Brocard-szög; a szimediánok egy ponton mennek keresztül; a Lemoine-pont tulajdonságai; a Nagel- pont tulajdonságai.]

Eljárások, algoritmusok: Trigonometria biztos ismerete. [Gömbi és síkgeometria összehasonlítása.]

Részletezés:

1. Bevezetés

1.4. Ez a feladat előkészíti az G.II.5.1 példát, de utána is feladhatjuk. Hasonló jellegű, de nehezebb a G.II.6.1. feladat.

2. Háromszög adatai az oldalak függvényében

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Egybevágóságok

3.38. A feladat kapcsán érdemes kitérni két négyszög egybevágóságának kérdésére (lásd a G.II.3.5M1.). A G.II.3.5M2. megoldásban leírt gondolattal – a rész és az egész egybevágóságával – is óvatosan kell bánni, ahogy az a G.II.4.2. feladatból és a hozzá fűzött 4.38D. tanári megjegyzésből is kiderül.

3.40. Megkérdezhetjük: a metszet területe hanyad része az eredeti szabályos háromszög területének?

3.58. Jó lenne a G.II.3.4M-ben leírtnál egyszerűbb bizonyítást adni a $\gamma \geq 90°$ esetre, de vigyázni kell, becsaphatja az embert a szemlélet. Gondolhatnánk pl, hogy a G.II.9.1. feladat állítása alkalmazható a $P'AP''$, $P'OP''$ töröttvonalak összehasonlítására, de sajnos ez tévedés, O nincs mindig benne a $P'AP''$ háromszögben. Még arra is könnyen adhatunk példát, hogy O a $P'AP''$, $P'BP''$ háromszögek egyikében sincs benne.

Hasznos lehet a felmerült megoldásokat diszkutálni, a „nyilvánvalónak” tűnő állításoknak utánanézni.

3.60. A G.II.3.8M1. tanulságos, de nem egyszerű. Az adott társulathoz alkalmazkodva lehet, hogy a kérdést érdemesebb a kerületi szögek tételével való megismerkedés után elővenni, hogy alkalmazható legyen a G.II.3.8M2. gondolatmenet.

3.63. Mikor esnek egy egyenesre a P_C, P_A, P_B pontok? Ajánlható kutatási témának ez a kérdés. Később a G.II.6.5–G.II.6.9. feladatok tisztázzák ezt a kérdést.

A feladatban leírt $P \longrightarrow Q$ leképezést az ABC háromszögre vonatkozó *izogonális konjugálás*nak nevezzük és később térünk rá vissza.

3.67. A három forgatási középpont egy egyenesen van. Ösztönözzük a diákokat, hogy tegyék meg ezt a megfigyelést és gondolkodjanak el, miért van így. A válasz egyszerű: az egyik szabályos háromszög középpontja a másik szabályos háromszög középpontjába képződik mindegyik forgatásnál, így a forgatási középpontok a szabályos háromszögek középpontjainak felezőmerőlegesén vannak.

3.69. Feladhatjuk a példát koordinátarendszerben is, pl, ha $A(-2;-3)$, $B(2;-3)$, $C(2;3)$, $D(-2;3)$, akkor a forgási középpont $O(-1,-1)$.

4. Egybevágósági transzformációk kompozíciója

4.38. Felmerül a kérdés, hogy van-e olyan korlártos alakzat (pl az egységnégyzet részhalmaza), amely egybevágó önmaga egy valódi részhalmazával. Erre is igenlő a válasz. Alább egy viszonylag egyszerű konstrukciót adunk meg.

Tekintsük a kör egy P pontját és forgassuk el az O középpont körül egy irányban a teljes szög irracionális részével és annak pozitív egész többszöröseivel: $H = \{O^{n\alpha}(P)|P \neq O, n \in \mathbb{N}, \frac{\alpha}{360°} \notin \mathbb{Q}\}$ Ezt a halmazt az O körüli α szögű forgatás önmagába viszi, de P nem lesz benne a képhalmazban, mert az $\{O^{n\alpha}(P)\}$ pontsorozat nem periodikus.

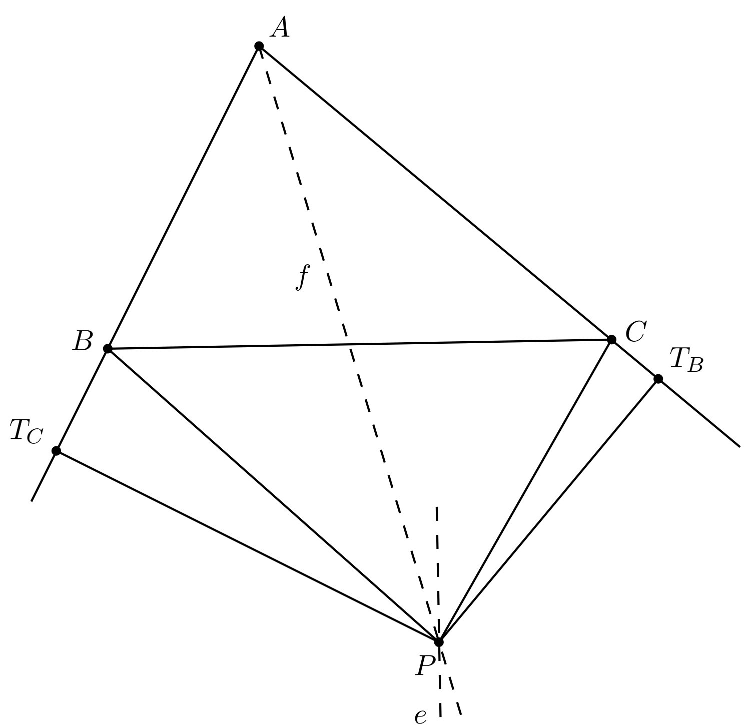
5. Kerületi szögek I.

5.5. A gyerekek tipikus válasza: az a hiba, hogy az ábra rossz, mert a P pont a háromszögön kívül van, a háromszögek nem „úgy” állnak. Dr Agynak erre is van gondolatmenete.

Lehetséges, hogy a T_B, T_C pontok nem az oldalakon, hanem azok meghosszabbításai helyezkednek el (lásd az 5.5.1. ábrát). A feladat szövegében leírt gondolatmenet 1-5. lépései most is helyesek, a 6. részt kissé módosítani kell.

6'. A 4., 5. állításokból következik, hogy $AB = AC$. Valóban $AB = AT_C - T_CB$, $AC = AT_B - T_BC$ és ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, akkor egyenlőket kapunk.

Így a 7. konklúzió is helyes marad, minden háromszög szabályos.



5.5D.1. ábra.

Később (lásd az G.II.5.3., G.II.6.1., G.II.6.2., G.II.6.3. feladatokat) látni fogjuk, hogy P a háromszög körülírt körén van, így $ABPC$ húrnégyszög, tehát (G.II.5.8. feladat) az $ABP\angle$,

$ACP\angle$ szögek 180°-ra egészítik ki egymást, ami épp annak felel meg, hogy T_B és T_C közül az egyik mindig a megfelelő oldalon a másik pedig a meghosszabbításán van. Tehát a 6., 6'. lépések egyike sem helyes, az egyik oldalon az összeget, a másikon a különbséget kell venni, így nem vonható le a 7. konklúzió.

5.7. Értékeljük a sejtés megfogalmazását is, nem baj, ha még nincs bizonyítás.

5.9. Itt elsősorban szerkesztést és a sejtés megfogalmazását várjuk el, a bizonyítást még nem feltétlenül követeljük meg.

5.12. Érdemes ezt a példát úgy feladni, hogy vele párhuzamosan újra kitűzzük az érintőnégyszögre vonatkozó összefüggést bizonyítását, miszerint a két szemköztes oldal hosszának összege egyenlő a másik két szemköztes oldal hosszának összegével (lásd a G.I.3.1. feladatot és megoldását).

5.23. Ez a feladat is példa arra, hogy "ha adott a súlyvonal, tükrözd a háromszöget a szemközti oldal felezőpontjára", ez célra vezethet (bár, mint láthatjuk, van rá más megoldás is). Érdemes megemlíteni, hogy ha a magasság helyett a (belső) szögfelező adott, a feladat megoldható, de sokkal nehezebb, trigonometria is kell hozzá, és $b+c$-re kapunk másodfokú egyenletet.

6. Kerületi szögek II.

Két metsző kör

A téma a forgatva nyújtásokkal kapcsolatban újratárgyalható, illetve akkor feleleveníthető. Felfogható ez a fejezet a forgatva nyújtás alapkérdéseit feszegető G.II.12.3. –G.II.12.4. feladatok előkészítésének. Ugyanakkor a G.II.12.5. feladat eredményét megértve sok itt felsorolt kérdés röviden megválaszolható.

6.6. Ptolemaiosz „Almagest”-je lényegében az α, $h(\alpha)$ értékpárokat tartalmazta, ez volt a „húrtáblázat”, a függvénytábla elődje. Így, hogy az *átmérő* hossza egységnyi $h(\alpha) = \sin(\alpha)$.

6.28. Az ABC háromszög beírt körének középpontja az egyetlen ilyen tulajdonsággal rendelkező pont.

7. A terület

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Középpontos nagyítás

A középpontos nagyítás fogalmával más 7-8. osztályban találkozunk (lásd a G.I.8. fejezetet). Akkor bizonyíthatjuk alapvető tulajdonságait, de csak bizonyos arányokra, pl $\lambda = 2$-ra, $\lambda = 3$, minden egész arányra vagy minden racionális arányra(G.I.8.2., G.I.8.3., G.I.8.4. feladatok) a csoport érdeklősésétől és elméleti kérdések iránti affinititásától függően. Kilencedikben már ne hagyjuk ki ezeket a bizonyításokat, amelyeket vektorokkal könnyebb elvégezni. Megbeszélhetjük, hogy irracionális arányra hogy megy a bizonyítás, de az sem tragédia, ha egyszerűen elfogadjuk, hogy a tulajdonságok ilyenkor is igazak. A valós számok bevezetése kapcsán visszatérhetünk erre a bizonyításra, de az is elég lehet, hogy hasonló gondolatmenetnél (mind hatványozás azonosságainak kiterjesztése irracionális kitevőre) utalunk rá, hogy itt is elvégezhető a kiterjesztés.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. Egyenlőtlenségek

9.35. A G.II.9.5. feladat bizonyításához használtuk a G.II.9.5. feladatot, s ennek bizonyításához használtuk a skalárszorzat tulajdonságait. Lehetne tisztán trigonometriailak is bizonyítani. A G.II.9.8. feladat állítása azonban bizonyítható trigonometria és a skalárszorzat fogalma nélkül is:

A nem-tompaszögű eset kijön a G.II.9.3. feladatból és a sugáregyenlőtlenségből (G.II.9.4. feladat). A tompaszögű háromszög esetét trigonometria nélkül a G.II.9.6. és a G.II.9.7. feladat alapján intézhetjük el. E két feladatból azt kapjuk, hogy ha egy háromszögben a c oldallal szemben tompaszög van, akkor a súlyvonalak összege kisebb, mint $(0{,}5+\sqrt{2{,}5})c<(1+\sqrt{10})R$, ami lényegesen kisebb, mint $4{,}5R$.

10. Az Apollóniusz probléma I.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

11. Kör és pont

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. A sík hasonlósági transzformációi

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

13. Parabola, ellipszis, hiperbola

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

14. Térgeometria

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

15. Axiomatikus térgeometria

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

16. Speciális témák

16.7. Valószínűleg érdemesebb

I.) először néhány kis n értékre megoldani a problémát,

II.) azután utánanézetni a gyerekekkel a weben. Kiindulópont lehet a

http://www.pomonahistorical.org/12times.htm

weboldal.

III.) Igazolni a képletet.

16.10. Az ebben az alfejezetben szereplő feladatok „egy csokorba” tartoznak, érdemes egymás után venni őket, ezért felesleges volna minden feladatnál hivatkozni az előzőekre.

16.12. A Brocard-szög kifejezhező a háromszög szögeinek függvényében, ez inkább a 11-12-es anyagba tartozik, majd ott tárgyaljuk.

16.42. 1. Az „ideális pont” fogalmát nem feltétlenül szükséges bevezetni, habár tapasztalat szerint inkább egyszerűsíti, mint nehezíti a tárgyalást. Ha nem vezetjük be, akkor vagy azt kell mondanunk, hogy bizonyos aránylármasokhoz nem tartozik semmi, vagy azt, hogy bizonyos aránylármasokhoz nem pont, hanem irány tartozik.

2. Érdemes ezt a feladatot a konkrét példákat tartalmazó G.II.16.20-G.II.16.24. (és esetleg a G.II.16.25.) feladatokkal párhuzamosan feldolgozni.

3. A feladat inkább körülményes (a technikai részletek miatt), mint nehéz, nem szabad tőle „ megijedni”.

16.43.

1. didaktikai javaslat. Ad b) és c): Itt érdemes tisztázni, hogy elég azzal a két esettel foglalkozni, ha mindhárom szám pozitív, vagy ha egy negatív, kettő pozitív. Ad d): ez a tapasztalat szerint nem triviális.

2. didaktikai javaslat. Ez a feladat már alkalmat nyújt annak észlelésére is, hogy egy ponthoz tartozó aránylármast többféleképpen is érdemes lehet felírni. További ilyen feladat pl. a G.II.16.23. feladat.

De például a következő, G.II.16.21. feladatban, a Lemoine-Grebe ponthoz tartozó aránylármast is érdemes kizárólag szögekkel, a szinuszaik arányaként is felírni.

16.46. Ez a feladat már a G.II.16.27. feladat előkészítésére is jó. A következő feladat is, de l. az ahhoz a feladathoz fűzött megjegyzést is!

16.47. A feladat a) része is kíván némi találékonyságot. Ha a feladatot itt adjuk fel, akkor a b) rész már kifejezetten nehéz. Ha viszont a G.II.16.27. feladat után vesszük ezt a feladatot, akkor a b) rész már gyakorló feladat.

16.48. A feladatnak inkább technikai szerepe van, viszont jó gyakorlás lehet a „nagy” színusz tételre.

17. Vegyes feladatok

17.11. Az 1938. évi Kürschák verseny 3. feladata. Lásd pl. Kömal, 1939/1, 111. oldal.

17.12. Az 1927. évi Kürschák verseny 3. feladata. Lásd pl. Kömal, 1928/1, 146. oldal.

17.13. Az 1961. évi Kürschák verseny 3. feladata. Lásd pl. Kömal, 1962/3, 104-107. oldal.

17.14. Az 1989. évi Kürschák verseny 1. feladata. Lásd pl. Kömal, 1990/2, 51-57. oldal.

17.15. Az 1966. évi OKTV 2. fordulójának 2. feladata. Lásd pl. Kömal, 1967/2, 49. oldal.

17.16. Lásd Kömal, 587. feladat, 1899/3, 147. oldal.

17.17. Lásd Kömal, 541. feladat, 1899/1, 89-91. oldal.

17.28. Tanári megjegyzés: ha a G.II.17.27. feldatot együtt megcsináltuk, akkor ezt már feladhatjuk gyakorlásnak is.

17.32. Az állítás megfordítása is igaz, l. a G.II.17.34. feladatot. De ez a bizonyítás közvetlenül nem fordítható vissza, hiszen elvileg elképzelhető, hogy ha $ABCD$ nem húrnégyszög, akkor valamely, az átlók metszéspontjától különböző M' középpontú kör írható $PQRS$-be. A megfordításhoz tehát szükséges a következő (G.II.17.33.) feladat. De erősebb csoportokban érdemes rögtön a G.II.17.34. feladatot feladni, és megvárni, hogy a tanulók maguktól fogalmazzák meg, mi szükséges a feladatunk megfordításához.

17.33. Érdemes felhívni a figyelmet, hogy a „demokrácia szabályai” valóban érvényesek, de amikor D-re bizonyítunk, akkor az R-hez és S-hez tartozó belső szögfelező M' metszéspontjáról *még nem tudjuk, hogy azonos-e M-mel*! Csak a bizonyításunk *következményeként* derül ki, hogy a $PQRS$ belső szögfelezői egy pontban metszik egymást.

Érdemes azt is tisztázni, hogy vajon következik-e a bizonyításból, hogy a $PQRS$ négyszögbe írható kör középpontja és az $ABCD$ húrnégyszög átlói egybeesnek-e. (Igen.)

17.36. A feladat szövegében megszorítás, hogy a négy pont a négyszög *négy oldalán* van: van olyan eset is, amikor valamelyik vetület nem az oldalra, csak az oldal*egyenesre* esik. Ezt a megszorítást a felesleges diszkusszió elkerülése érdekében tettük – a feladat igazi szépségét (és nehézségét) ez a diszkusszió csak eltakarná.

És hiába van meg a szerkesztés, helyességének igazolása még így is kíván némi újabb találékonyságot.

17.37. Ez a feladat jó gyakorló feladat a kerületi szögekhez. Az állítás általánosítható (l. a G.II.17.39. feladatot), de az általános állítás lényegesen nehezebben bizonyítható. Van még egy speciális esete az általános állításnak, ami jó gyakorló feladat, ez a G.II.17.38. feladat. Megjegyezzük, hogy az általános állítás bizonyításához is használjuk mindkét speciális eset külön bizonyítását!

17.39. Erre a példára (és a G.II.17.38. feladatra) visszatérhetünk a polaritás fogalmával való megismerkedés után (lásd az G.III.5. fejezetet), vagy azt előkészítendő később is elővehetjük.

17.42. Természetesen BP, PQ és QR tetszőleges arányaira ugyanígy feladható (esetleg gyakorlásként?) a feladat és a megoldás is ugyanez.

17.43. A feladat a G.II.16.5. feladat megfordítása. Ott azt láttuk be, hogy a Lemoine-Grebe ponton át húzott párhuzamosok a háromszögből húrhatszöget metszenek ki. Itt azt látjuk be, hogy *ha* e párhuzamosok húrhatszöget alkotnak, akkor csakis a Lemoine-Grebe pontról lehet szó. Azt nem bizonyítjuk újra, hogy erre a pontra teljesül is a feladat állítása. „Visszafele” ugyanis csak annyi következik a fenti gondolatmenetből, hogy az $TUS'S$, $U'STT'$ és $S'T'U'U$ négyszögek húrtrapézok. Ám konvexitási meggondolások alapján ebből már következik, hogy $STUS'T'"U'$ húrhatszög.

17.49. Valójában bármilyen a szögfelező hossza helyett a háromszög bármelyik hosszadatát megadhatjuk!

Kombinatorika

Bevezetés

A feladatgyűjtemény bevezetőjében elmondottakhoz a következő didaktikai elemeket teszem hozzá. A feladatgyűjtemény tankönyv céljait is szolgálja, így nagy hangsúlyt fektettem – főleg a gráfelméletnél – az egyes fogalmak előkészítésére, bevezetésére. Ebből adódik az is, hogy néhol a bevezetendő fogalomra vonatkozó feladatok egy része megelőzi a fogalom bevezetését. Ilyen szempontból az alfejezet címek néhol „csalókák”, csak azt jelzik, hol kerül bevezetésre az illető fogalom.

A feladatok nehézségi fokát úgy igyekeztem összeállítani, hogy széles spektrumot fedjen le. A fogalmakra vonatkozó legegyszerűbb feladatoktól a könnyebb, rutinszerűbb és nehezebb gyakorló feladatokon át az ötletet kívánó feladatokig mindenből próbáltam egyforma súllyal szerepeltetni feladatokat. Természetesen főleg a gyakorló feladatok vonatkozásában az egyes feladatoknak számtalan „variációja” feladható. A tanári kézikönyvben szereplő megjegyzések, kommentárok is elég bőségesek, hogy segítsék a tájékozódást a feladatgyűjteményben.

Minden feladatgyűjtemény belső problémája a linearitás. De ami a könyvben egymás után jön, azt sokszor célszerű párhuzamosan tanítani. Erre vonatkozóan is igyekeztem minél többször jelezni, hogy milyen „átkötések” lehetségesek egyes fejezetek feladatai között, melyeket érdemes egyszerre tanítani, stb.

Tematika

Az alábbi felsorolásban zárójelbe tettem azokat a témákat, amelyek más kötetekbe kerülnek, megjelölve azt is, hogy melyik kötetben van/lesz a helyük.

GRÁFELMÉLET:

9. OSZTÁLY: Lényegében az út, a kör, az összefüggőség, az összefüggő komponensek, az erdő és a fa fogalma áll a középpontban.

10. OSZTÁLY: Gráfelméleti „alaptételek”.

Fogalmak:

9. osztály: Út, kör, összefüggőség, komponens, fa, fa ekvivalens definíciói, szerkezete, erdő. Fa, mint minimális összefüggő és maximális körmentes gráf. Páros gráf. Hamilton-kör konkrét gráfokban. Kromatikus szám konkrét feladatokban. (Számozatlan és számozott fa. [Prüfer-kód.] GR.II.) Gráfokkal kapcsolatos algoritmusok (Elkezdve K.II.7. fejezetben, folytatása ALG.II. kötetben). (Irányított Euler-vonal. GR.II.)

10. osztály: Független él- és pontrendszerek. (Idevettem a lefogó pontrendszereket és a lefedő élrendszereket is, és összefüggéseiket is.)

Tételek:

9. osztály: A fa definícióinak ekvivalenciája, élszámára, szerkezetére, mini-max-tulajdonságára vonatkozó tételek. Az „úttal összekötve lenni” tranzitivitása. Összefüggő komponensekre bontás. Gráf vagy komplementere összefüggő. Két leghosszabb útnak van közös pontja. Fa leghosszabb útjai, (átmérője, középpontja(i), stb. [Összefüggés a fokszám és a magasság között.] GR.II.)

10. osztály: Gráfelméleti alaptételek. Turán-tétel háromszögre ([és teljes k-asra] tapasztalatom szerint nem szabad elsietni a k-asra való általánosítást, egyelőre csak k=4-re szerepel, GR.II.-ben benne lesz minden k-ra. Erdős-Szekeres-tétel, egyéb egyszerű Ramsey-típusú tételek. [Kétszeresen összefüggő gráfok, blokkok, blokkfa; Menger-tétel 2-re.] GR.II.) (A mohó algoritmus szuboptimális független él- és pontrendszerek keresésére (lásd 10.8.) ALG.II.)

Alkalmazások feladatokban:

9. osztály: Távolsággráf (minden pontot összekötünk a hozzá legközelebbivel, a tőle legtávolabbival). Maximális fokszám $\leq$ kromatikus szám (mohó algoritmus). ([Steiner-fa.] GR.II.) ([Depth-first és breadth-first keresés.] Ez a GR.II.-be kerül, ma már nélkülözhetetlen a programozásban, inkább törzsanyagnak tekintenénk.)

10. osztály: Hídélek, vágáshalmazok keresése. (Vágáshalmazok GR.II.-ben jönnek, alapfogalomnak csak a hídélt vettem.) Körmérkőzések párosításai. (Adott gráfban pontok közti legrövidebb, leghosszabb utak megkeresése algoritmussal. ALG.II.) (Ramsey tételek és Turán-tétel alkalmazásával megoldható feladatok. GR.II.) [4-reguláris gráfok 2-faktorokra bontása.]

Aránylag nagy hangsúllyal szerepelnek a feladatgyűjteményben a „Dirac-típusú” gráfok, a független élekre vonatkozó tételek, valamint nagy hangsúlyt fog kapni a GR.II. kötetben a csoportelméletre is átvezető gráfizomorfia és -automorfizmus, a csúcs- és éltranzitivitás valamint a „pálya” fogalma. Ezt tapasztalatom szerint nagyon jól veszik a diákok, segíti a szemléletük fejlődését. Éppen ezért már itt is szerepelnek olyan aránylag nagyfokú szimmetrikával rendelkező gráfok, amelyeknek majd ott lesz aztán nagyobb jelentőségük.

KOMBINATORIKA:

9. OSZTÁLY:

10. OSZTÁLY: A kombinatorikus gondolkodásmód elmélyítése.

Fogalmak, módszerek:

9. osztály: A diszkrétség kihasználásának módjai: van legkisebb elem, „vegyük a legkisebb, legnagyobb olyat”; állapotfüggvény (részletesebben majd az ALG.II. kötetben).

Megjegyzés: Kimaradt a tananyagból a skatulyaelv, l. K.II.16, K.II.17 és GR.II.1 (folytatása, gráfelméleti élesítései a GR.II-ben). (A szita-formula - jó anyag van rá a K.I.6 fejezetben.) Ismétléses kombináció, variáció. Teljes indukció, a Pascal-háromszög és (a binomiális tételt a kombinatorika kötet folytatásában tárgyaljuk; Permutációk különböző felírási módjai – ez inkább csoportelméleti téma).

10. osztály: A kétszeres leszámolás módszere. Kombinatorikus geometria. (Rekurzió és kombinatorika. [A Catalan-számok.] A kombinatorika kötet folytatásában kerül sorra.)

Tételek, eljárások:

9. osztály: A teljes indukció alkalmazása kombinatorikus és kombinatorikus geometriai feladatokban. A „vegyük a legnagyobbat, legkisebbet” módszer és az állapotfüggvény alkalmazása. (Az utóbbi részletesebben az ALG.II. kötetben következik.) $x_1+x_2+\cdots+x_m = n$ pozitív (és nemnegatív) egész megoldásai, ha a sorrend számít. (A szita-formula alkalmazása kombinatorikai és számelméleti feladatokban. A $\phi(n)$ függvény kiszámítása a szita-formulával. A következő kombinatorika kötetben jön.)

10. osztály: Erdős-Sylvester-tétel; egy síkban levő n pont által meghatározott háromszögeknek legalább a 25%-a, 30%-a stb. derékszögű, mint példa az önmagát javító gondolatmenetre; (a polinomiális tétel;) kombinatorikus interpretációval igazolható azonosságok, kétszeres leszámolással igazolható azonosságok. ([A Catalan-számok kiszámítása], a következő kombinatorika kötetben jön.) (Permutációcsoportok, ez a csoportelméleti fejezetben kerül tárgyalásra, de előkerül az automorfizmusokkal kapcsolatban is GR.II.-ben.)

További kombinatorikai feladatok a „vegyük a legkisebbet, legnagyobbat” gondolatra, az állapotfüggvényre. Feladatok kétszeres leszámolásra. ([A Catalan-számokhoz vezető feladatok („mozijegy”, séták).]) Feladatok, amelyekben a létezést az átlaggal bizonyítjuk: pl. 2 db 2n részre beosztott korong részeire n-n db A-t vagy B-t írva a két korong egymásra illeszthető úgy, hogy legalább n helyen ugyanaz a betű álljon mindkét korongon. (Permutációk szorzása.)

(A polinomiális tétel), a kétszeres leszámolás, a „vegyük a legnagyobbat, stb.”, az állapotfüggvény további alkalmazásai feladatok megoldásában.

1. A gráf fogalma

1.1. Öttagú társaságban mindenki legfeljebb négy mérkőzést játszhatott, hiszen semelyik két ember nem játszott kétszer egymással.

Ha van olyan, aki már minden mérkőzését lejátszotta, akkor már mindenki játszott legalább egy mérkőzést. Tehát mindenki egy, kettő, három vagy négy mérkőzést játszhatott. Ez négy lehetőség, de a társaság öttagú, tehát vannak ketten, akik ugyanannyi mérkőzést játszottak.

Ha nincs olyan, aki már minden mérkőzését lejátszotta, akkor mindenki nulla, egy, kettő vagy három mérkőzést játszhatott. Ez ismét csak négy lehetőség, tehát vannak ketten, akik ugyanannyit játszottak.

Az állítás ugyanígy bizonyítható akárhány tagú társaságra. Például hattagú (tíztagú) társaság esetén mindenki nulla, egy, kettő, három, négy, vagy öt (nulla, egy, kettő … vagy kilenc) mérkőzést játszhatott. Ez hat (tíz) lehetőség. Azonban ha van olyan tagja a társaságnak, aki már minden mérkőzését lejátszotta, akkor már mindenki játszott legalább egy mérkőzést, tehát csak öt (kilenc) lehetőség marad. Ha viszont nincs olyan tagja a társaságnak, aki minden mérkőzését lejátszotta, akkor megint csak öt (kilenc) lehetőség marad. Mivel a társaság hattagú (tíztagú), mindkét esetben lesz két ember, aki ugyanannyi mérkőzést játszott.

2. didaktikai javaslat. Ez és a következő feladatok szerepelnek a 7-8. osztályos feladatok között is (lásd a K.I.18.5., K.I.18.6., K.I.18.7. feladatokat). Az ismétlés oka az, hogy ott a gráf fogalmának előkészítéseként szerepeltek, most átismételjük őket, hogy eljussunk a gráf pontos fogalmához. Ráérünk 9. osztályban eljutni idáig, de ha a csoport érett rá, megtehetjük 8. osztályban is. Ebben az esetben még inkább érdemes az itt következő feladatsort végigcsinálni.

Természetesen az itt szereplő feladat helyett más feladattal is végigcsinálhatjuk ugyanazt, például a K.I.18.26. feladattal. Az általunk választott feladat előnye az, hogy rögtön felhívhatjuk a figyelmet az egyszerű gráf fogalmára, bevezethetjük az irányított gráf és a végtelen gráf fogalmát, és megmutathatjuk, hogy azokra nem igaz a feladat állítása.

1.2. Legyen a társaság tagjainak a száma n és nézzük, egy ember hány mérkőzést játszhatott. Nyilvánvaló, hogy legfeljebb $n-1$-et, hiszen mindenkivel legfeljebb egyszer játszott. Másrészt elképzelhető az is, hogy még egyet sem játszott. Tehát az általa játszott mérkőzések száma nullától $n-1$-ig bármely szám lehet.

Nem lehet azonban a társaságban egyszerre olyan, aki még egyetlen mérkőzést sem játszott és olyan, aki már mindenkivel játszott. Vagyis nem lehet egyszerre olyan is, aki nulla és olyan, aki $n-1$ mérkőzést játszott. Így két lehetőség van: vagy 1 és $n-1$ között van mindenki mérkőzéseinek a száma, vagy 0 és $n-2$ között. A társaság tagjainak a száma azonban n, tehát a „skatulyaelv” szerint van közöttük kettő, aki ugyanannyi mérkőzést játszott.

1.3. Legyen a társaság tagjainak a száma n és nézzük, egy embernek hány ismerőse lehet a társaságban. Nyilvánvaló, hogy legfeljebb $n-1$, másrészt elvileg elképzelhető az is, hogy egyetlen ismerőse sincs (bár nem világos, ebben az esetben hogyan kerül a társaságba). Tehát ismerősei száma nullától $n-1$-ig bármely szám lehet.

Nem lehet azonban a társaságban egyszerre olyan, aki senkit sem ismer és olyan, aki mindenkit ismer. Vagyis nem lehet egyszerre olyan is, akinek nulla és olyan, akinek $n-1$ ismerőse van. Így két lehetőség van: vagy 1 és $n-1$ között van mindenki ismerőseinek a száma, vagy 0 és $n-2$

között. A társaság tagjainak a száma azonban n, tehát a „skatulyaelv” szerint van közöttük kettő, akinek ugyanannyi ismerőse van a társaságban.

2. megjegyzés. Ennek és az előző feladatnak a megoldását igyekeztünk a lehető legjobban hasonítani egymáshoz, hogy a megcélzott analógia ezzel is világosabb legyen. Az K.II.1.5. feladat éppen erről szól.

1.5. Az K.II.1.3. feladatban csak az volt az érdekes, hogy két ember ismeri-e egymást vagy sem, az K.II.1.2. feladatban csak az az érdekes, hogy két ember játszott-e egymással vagy sem. A megoldás tehát pontosan ugyanaz lesz, ha az „ismerősök” száma helyett a „sakkpartnerek” számát tekintjük. Ugyanígy az K.II.1.4. feladat első megoldásában csak az volt érdekes, hogy hány „nem-ismerőse” van egy-egy embernek, vagyis itt ezzel helyettesíthető a „sakkpartnerség”.

1.6. Képzeljük el például, hogy akik még nem ismerik egymást, azok (és csak azok) kezet fognak egymással. Így az K.II.1.4. feladat állításából egy másikat kapunk, amely így szól:

Egy társaságban bizonyos emberek kezet fognak. Ekkor a társaságban biztosan van két ember, aki ugyanannyi másikkal fogott kezet.

Itt tehát az egyes emberek „ismeretségeinek a száma”, illetve a lejátszott „sakkmérkőzéseinek a száma” helyett a „kézfogásainak a számát” kell figyelnünk. Ezekre igaz, hogy nulla és $n-1$ között változhat, de nem lehet egyszerre olyan, aki nulla emberrel fogott kezet és aki mindenkivel kezet fogott.

Természetesen nem csak „emberekre” vonatkozó állításokra gondolhatunk.

Vegyük például a következőt:

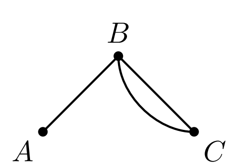
Egy ország bizonyos városait közvetlen (oda-vissza) repülőjárat köti össze. Ekkor van két város, amelyből ugyanannyi járat indul (és érkezik).

Ebben az esetben a városból induló (és oda érkező) repülőjáratok számát kell figyelnünk.

De észrevehetjük azt is, hogy a K.I.18.5. feladat is „ugyanerről” szól.

1.8. A feladathoz nem írunk megoldást, ezt a következő „chaptercomment” tartalmazza. Az ebben foglaltakat készítette elő az összes eddigi feladat és most következik a gráf – első, még nem teljes – definíciója.

1.9. Korábban már bebizonyítottuk, hogy egy társaságban mindig van két ember, aki *ugyanannyi másik emberrel* fogott kezet. Csakhogy ott csak az érdekelt minket, hogy egy ember hány másikkal fogott kezet. Elképzelhető azonban, hogy – bármilyen okból - két ember többször is kezet fogott, s *ebben* a feladatban nem a „kézfogási partnereket” kell számolni, hanem a kézfogások számát. Ez lényeges különbség. Ha például egy három tagú társaság tagjai A, B és C, A és B egyszer fogtak kezet, B és C viszont kétszer is kezet fogtak, akkor A egyszer, C kétszer, B viszont háromszor fogott kezet, tehát nincs közöttük kettő, aki ugyanannyiszor fogott volna kezet. L. az 1.1.1. ábrát.



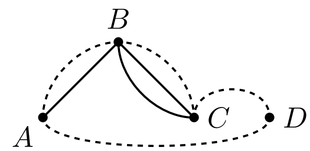
1.9T.1. ábra.

A feladat állítása tehát *nem igaz*.

2. megjegyzés. Ez előtt a feladat előtt érdemes a definíciónk megértetése érdekében különböző alakú élekkel összekötött hárompontú teljes gráfot, vagy „levélborítékot” rajzoltatni a diákokkal.

1.10. Csak $n = 2$-re igaz. Ha ketten vannak, akkor nyilván mindketten csak egymással foghatnak kezet, ahányszor az egyik, annyiszor a másik is.

$n = 3$-ra a K.II.1.9. feladat megoldásában láttunk ellenpéldát. Képzeljük el, hogy az ottani háromtagú társaságban megtörtént az ott jelzett három kézfogás (kettő B és C között, egy A és B között). Érkezzen most egy további D ember a társasághoz és szólítsuk fel az immár négytagú társaságot, hogy a már megtörtént három kézfogáson kívül fogjon még kezet A B-vel, B C-vel, C D-vel és D A-val. Így a társaság minden tagja további kétszer fogott kezet, tehát mindenkinek ugyanannyival nőtt a kézfogásai száma. Eddig sem volt közöttük kettő, aki ugyanannyiszor fogott volna kezet, ezután sem lesz. L. az 1.1.1. ábrát.



1.10T.1. ábra.

Az eljárás nyilván folytatható. Ha már van egy olyan n tagú társaság, ahol mindenki fogott kezet és a társaság semelyik két tagja nem fogott ugyanannyiszor kezet, akkor csatlakoztatunk a társasághoz egy $n+1$-edik embert. Ő eddig nem fogott kezet, tehát most van egy $n+1$ tagú társaságunk, amelyben semelyik két ember nem fogott ugyanannyiszor kezet. Ahhoz, hogy tovább tudjunk lépni, ebből egy olyan társaságot kell csinálnunk, ahol mindenki legalább egyszer kezet fogott és továbbra sincs két ember, aki ugyanannyiszor fogott volna kezet. Ezt a következőképpen érhetjük el. A társaság eddigi tagjait megszámozzuk egytől n-ig, és felszólítjuk őket, hogy mindenki fogjon kezet a nála eggyel nagyobb és kisebb sorszámúval, továbbá az $n+1$-edik fogjon még kezet az elsővel. Így mindenki kézfogásainak a száma kettővel nő, tehát továbbra sem lesz két ember, aki ugyanannyiszor fogott volna kezet.

1.11. Természetesen az itt szereplők helyett bármelyik másik egyszerűbb szövegű feladat is megteszi.

1.13. A gráfelméleti kört, s így a négyszöget is csak később definiáljuk, de nyugodtan használhatjuk mint egyszerűsítő kifejezést. Természetesen így fennáll a veszélye, hogy nem válik el egymástól a geometriai négyszög és a gráfelméleti négyszög fogalma, de ez ezen a szinten még nem baj – a fokozatosság itt is fontos. Vö. még a K.II.2.1. és a K.II.2.1. feladathoz írt megjegyzésekkel.

1.15. Legyen xy a gráf egy tetszőleges él. Tudjuk, hogy x nem telített pont, tehát van egy u pont, amellyel nincsen összekötve. Azt is tudjuk, hogy u nem izolált pont, tehát össze van kötve legalább egy v ponttal. Ha v nem azonos y-nal, akkor xy és uv két független él. Ha $v = y$, akkor legyen z a(z egyik) pont, amellyel y nincs összekötve. z sem izolált pont, tehát össze van kötve egy w ponttal. Ha w nem azonos x-szel, akkor xy és zw két független él. Ha viszont $w = x$, akkor uy és wx két független él.

2. megjegyzés. Ez egy tipikusan némi türelmet igénylő „esetszétválasztós” gráfelméleti feladat, mindenképp érdemes végigcsináltatni a csoporttal.

1.17.

1. megoldás. Igaz. Nem lehet egyszerre izolált pont és telített pont a gráfban. Ha egyik sincs, akkor kész vagyunk, hiszen van két azonos fokú pont.

Tegyük fel, hogy nincs telített pont. Hagyjuk el a gráfból az izolált pontokat. Így minden megmaradó pont foka változatlan és van közöttük kettő, amelynek foka egyenlő. (Megjegyezzük, hogy lehetséges, hogy a maradó gráfban talált két azonos fokú pont *ott* már telített pont, de az eredetiben biztosan nem az!)

Marad az az eset, amikor telített pont van a gráfban. Most tekintsük azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy a gráf éleit „kicseréljük" a gráfban eddig *nem szereplő* élekre. Azaz elhagyjuk a gráf összes behúzott élét és helyette behúzzuk az összes be nem húzott élét. Állapítsuk meg a következőket:

– Két pont ebben a gráfban pontosan akkor azonos fokú, ha az eredeti gráfban az volt.
– Az eredeti gráf telített pontjai ebben a gráfban izolált pontok lesznek.
– Az eredeti gráfban nem voltak izolált pontok, tehát ebben a gráfban nincsenek telített pontok.

Ha erre a gráfra alkalmazzuk az előző gondolatmenetet, akkor most is kapunk két azonos fokú pontot, amelyek se nem telített pontok, se nem izolált pontok. Ugyanez az eredeti gráfban is igaz rájuk.

2. megoldás. A bizonyítást befejezhettük volna úgy is, hogy ha elhagyjuk a telített pontokat a belőlük futó élekkel, a maradó gráfban akkor is van két azonos fokú pont, és ezek az eredeti gráfban nem telített pontok (hiszen azokat elhagytuk) és nem is izolált pontok (hiszen volt telített pont, tehát nem lehetett izolált pont).

1.17. Ez a feladat a következő két „nagy" fogalom, a komplementergráf és a részgráf fogalmának előkészítését is segíti. Ezért érdemes mind a két bizonyítást végigvenni.

1.19. Először vegyük észre, hogy ez a feladat lényegesen különbözik az K.II.1.7. feladattól. Itt ugyanis nem kölcsönös a hívás, csak az számít, hogy honnan *indították*.

A feladat állítása egyébként könnyen beláthatóan nem is igaz. Állítsuk nagyság szerint sorrendbe a város mobiltelefonjait például hívószámuk alapján és szólítsunk fel mindenkit, hogy hívjon fel minden olyan mobilszámot, amely nagyobb az övénél. Ez ugyan sok pénzbe kerülhet, de nyilvánvaló, hogy ha ezt a költséges felhívást mindenki végrehajtja és más telefont nem bonyolít le, akkor nem lesz két mobiltelefon, amelyről ugyanannyi hívást kezdeményeztek volna. Két mobiltelefon közül arról kezdeményeznek többet, amelynek kisebb a hívószáma.

1.20. Ez a feladat természetesen csak azt a célt szolgálja, hogy a diákok észrevegyék, hogy az irányított gráf fogalmára is szükség van, és ez nem azonos az eddigi gráffogalommal.

1.22. Nem véletlenül van csillag e mellett a feladat mellett. Ha a végtelen fogalmában már elég jól otthon vannak a diákok, akkor persze nem nehéz ellenpéldát találni, éppen azt kell használni, hogy végtelen sok pontunk van. De a gráf fogalmának bevezetésekor a diákok általában még nem mozognak „szabadon a végtelenben", s ez a feladat talán épp arra jó, hogy szokják a végtelen fogalmát.

2. Részgráfok és a komplementergráf – izomorfia

Ebben a fejezetben valóban a legelemibb fogalmak szerepelnek, az izomorfia azonban látszólag kivétel ez alól, hiszen ez a „gráf" fogalmához képest is eggyel magasabb absztrakciós szintet követel. A tapasztalat az, hogy ennek ellenére „latensen" megvan a diákok nagy részének. És amíg nem okoz gondot, hogy mit jelent, hogy két gráf „ugyanaz", addig nem is érdemes a pontos definíciót megadni, sőt, amíg egy-egy utalással sikerül a kérdést a helyére tenni, addig sem. Nem véletlen, hogy itt a feladatok a fogalom bevezetése előtt szerepelnek. A fogalmat részletesen csak a gráfok izomorfiáját és az automorfizmusokat tárgyaló GR.II.4 és GR.II.5. fejezetben vizsgáljuk.

2.1. a) Az oktaéder megfelel.

b) Ha egy hatpontú gráfban van egy negyedfokú pont, az pontosan egy ponttal nincs összekötve. Tehát ha tekintjük azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy kihúzzuk a gráfból a behúzott éleket és berajzoljuk a kimaradt éleket, akkor olyan gráfot kapunk, amelyben minden pont egy másikkal van összekötve. Ilyen gráf nyilvánvalóan pontosan egy van. (Három független élből áll.)

Könnyen ellenőrízhetjük, hogy a b) részben kapott gráf valóban az oktaéder gráfja. Az oktaéderben minden csúcs csak a szemközti csúccsal nincs összekötve.

2. megjegyzés. 1. Természetesen a gráf csúcsai és az oktaéder csúcsai „más típusú” fogalmak, s ugyanez igaz az „éleikre” is. Mégis azt gondoljuk, hogy ezen a ponton még egyáltalán nem baj, ha a kettő nem vált élesen ketté. Többet nyerünk, mint vesztünk, ha a diákoknak van konkrét geometriai jelentéssel bíró „gráfélményük”. A két fogalom különválása majd fokozatosan történik meg. L. főleg a K.II.2.1. feladatot és a hozzá írt megjegyzést.

2. A feladat megfogalmazása szándékosan nem egyértelmű. Ezért el kell fogadni azt is, ha valaki 15 megoldást talál, mert a pontokat számozottnak tekinti. A később sorra kerülő izomorfia fogalma miatt azonban mindenképp jó hangsúlyozni, hogy ezek a gráfok bizonyos szempontból egyformák.

2.2. Az itt következő, reguláris gráfokra vonatkozó feladatok az élszám és fokszám közötti Euler-tétel előkészítésére is jók. Ha úgy látjuk jobbnak, itt elhalaszthatjuk őket oda és rögtön rátérhetünk a komplementergráf fogalmához vezető feladatokra. Vagy ha jobbnak látjuk, ide előre vehetjük az Euler-tételt és a vele kapcsolatos feladatokat is.

2.3. A két feladat jó egyrészt az izomorfia fogalmának bevezetésére, másrészt az általános feladat előkészítésére.

2.6. Ez a feladat jó példa arra, hogy az általánosítás – jelen esetben: a gráfelméleti nyelv – nemcsak egyik irányban „működik”. Egy konkrét relációra – az ismeretségekre – könnyen megoldhatjuk a feladatot és ezzel az *általánost* oldottuk meg.

Az általánosításnak erre az oldalára – hogy segítségével az egyik struktúrán tapasztaltat egy másik struktúrára vihetjük át, tehát hogy pontos *analógiákat* állíthatunk fel – érdemes hangsúlyt fektetni.

2.7. Természetesen ez a feladat is jó az Euler-féle fokszám-élszám összefüggés előkészítésére – vagy gyakorlására – is.

2.9. Legyen x és y a gráf két pontja, S_x és S_y a szomszédságuk. Mindkét szomszédságnak legalább $k-1$ pontja különbözik x-től és y-tól. Ha nem volna közös pontjuk, ez összesen $2k$ pontot jelentene, ami ellentmondás.

Nem minden $2k$ pontú, k-reguláris egyszerű gráfra igaz az állítás. Vegyünk ugyanis $2k$ pontot, és osszuk őket két egyenlő részre, és húzzunk be minden élt a két csoport között. Az így kapott k-reguláris gráfban két különböző csoportba tartozó pontnak nincs közös szomszédja.

2. megjegyzés. Az adott konstrukció alkalmas a „teljes páros gráf” bevezetésére is, ha a páros gráfokat párhuzamosan tárgyaljuk, vagy ha a páros gráfoknál visszatérünk erre a feladatra.

2.10. A második rész előtt érdemes feladni azt a „beugratós” kérdést, hogy végül is elhagyunk egy pontot, a két pont közül az egyik még mindig jó. Észreveszik-e, hogy közben megszűnt k-reguláris lenni a gráf? És vajon megpróbálják-e „kijavítani” ezt a gondolatot?

2.12. Az ötletre gyakorló feladat a K.II.2.3. feladat. De a „vegyük a komplementert” ötlete használható például a K.II.4.11. feladatnál, továbbá a K.II.10.5. és a K.II.10.8. feladatnál is – utóbbinál meglehetősen „cselesen”.

2.14. A feladat arra a szituációra épít, amikor a diákokban még nem teljesen válik ketté a geometriai és a gráfelméleti ábra. Ez ugyan fogalmi tisztázatlanságot jelent, de ugyanakkor segít is a gráffogalmak tisztázásában. Itt is fő a fokozatosság (vö. az K.II.1.1. feladatnál mondottakkal is). A feladatnak ilyen szempontból is van haszna: azzal, hogy a geometriai „ábra” *komplementerét* rajzoltatjuk fel, elősegítjük a geometriai és a gráfelméleti ábra különválását, hiszen a komplementerek általában már nem „geometriai” ábrák.

2.18. A feladat folytatását l. a *Szimmetria és aszimmetria* című (GR.II.4.) fejezet *Komplementerükkel izomorf gráfok* c. alfejezetében (a GR.II.4.1. feladattal kezdődően).

2.28. A feladatnak az a célja, hogy gyakoroltassuk a fogalmakat a tanulókkal. De nagyon fontos észben tartani, hogy ez nem lehet öncél. Az a fontos, hogy *értsék* a fogalmat és nem az, hogy rávágják a nevét. Tudnunk kell, hogy minden ilyen terminológia csak annyiban fontos, amennyiben *könnyíti* a diákok számára, hogy kifejezzék magukat. Vigyáznunk kell, nehogy ehelyett nehezítsük a dolgukat azzal, hogy bebifláztatjuk velük a fogalmak nevét.

2.29. A feladat szerepel a 7-8. osztályos anyagban is. Itt ismétlés céljából adjuk újra fel.

3. Összefüggések a fokszám és az élszám között

A vegyes feladatok közül ide tartozik a K.II.20.9. feladat is.

3.5. A feladatra abban a formában is szükségünk lesz, hogy ez minden komponensben külön-külön is igaz. Lásd az K.II.5.12. feladatot.

3.6. Nyilván van legalább 12 ember a társaságban. A „legalább” és „legfeljebb” esetben a gondolatmenet ugyanaz, ezért egyszerre mondjuk el.

Átfogalmazva gráfra azt tudjuk, hogy egy egyszerű gráfban bármely két pont fokszámának összege legalább (legfeljebb) tíz. Ha $n = 2m$ páros számú pont van, akkor párba állítjuk a pontokat, s így azt kapjuk, hogy a fokszámok összege $10m = 5n$. Ha a pontszám $n = 2k + 1$ páratlan, akkor $k - 1$ párt és egy hármas csoportot csinálunk. A kettes csoportokban a fokszámösszeg legalább (legfeljebb) $10(k - 1) = 5(n - 3) = 5n - 15$). A hármas csoportban vegyük mind a három párt és adjuk össze a fokszámaikat, ez legalább (legfeljebb) 30, de minden fokszámot kétszer számoltunk, tehát a fokszámok összege itt legfeljebb 15. A gráf fokszámainak összege tehát legalább (legfeljebb) $5n$.

3.7. Pontosan ugyanúgy látható be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban bármely két pont fokszámának összege legalább (legfeljebb) k, akkor a gráf élszáma legalább (legfeljebb) $nk/2$.

2. megjegyzés. A feladat tovább általánosítható, lásd a K.II.3.3. feladatot. Lehet, hogy néhány diák erre már a következő feladatok nélkül is rájön.

3.8. Az élszám legalább nk. Megint bizonyíthatjuk úgy, hogy hármas csoportokba állítjuk a pontokat és az esetleg maradó négy vagy öt pontra külön átlagolunk. Nyilván lesznek, akik ezzel próbálkoznak és érdemes végigcsinálni ezt is. Aztán megkérdezni, hogy nem lehet-e azt a gondolatot, amit itt használtunk, rögtön az egész gráfra is alkalmazni? Hogyan? Ha sikerül, akkor könnyebben látjuk már a feladat általánosítását is:

Egy n pontú egyszerű gráfban bármely l pont fokszámának az összege legalább (legfeljebb) k. Ekkor a gráf élszáma élszáma legalább (legfeljebb) $nk/2l$.

A bizonyítás „kétszeres leszámolással” megy: a gráf bármely l pontjában a fokszámösszeg legalább (legfeljebb) k, ezt az összes l-esre öszeadva $\binom{n}{l}k$-t kapunk. Így minden pont fokszámát pontosan $\binom{n-1}{l-1}$-szer számoltunk, tehát az összfokszám legalább (legfeljebb) nk/l, az élszám ennek a fele, $nk/2l$.

A feladat páros gráfos megfelelőjét lásd a K.II.3.3. feladatnál.

3.10. A feladat alkalmat ad a Ramsey-típusú tételek bizonyítási alapgondolatának előkészítésére. A K.II.3.6. feladat általánosítja az itt kimondott állítást.

3.11. A feladat jó előkészítés a Ramsey-témakörhöz.

3.12. Rengeteg ilyen gráf van, azért érdemes a diákokkal ilyet rajzoltatni, hogy lássák: a fokszámok megadásával ellentétben csak a ki- illetve csak a befokok megadása alig jelent megszorítást.

4. Páros gráfok

4.1. Akár a fiúk által mondott számokat adjuk össze, akár a lányok által mondottakat, mindkét esetben az összes különböző táncospár számát kapjuk meg. Tehát a lányok által mondott számok összege egyenlő lesz a fiúk által mondott számokéval – természetesen, ha mindenki helyes számot mondott.

4.2. Észrevetethetjük a diákokkal, hogy ez a K.II.3.1. feladat megfelelője, főleg, ha figyelembe vesszük a K.II.4.1. feladatot is. A megoldás is ugyanúgy megy, az állítás most az, hogy ha l darab lány van, akkor összesen legfeljebb $3l$ különböző táncospár volt.

Nyilván kijön általában is, hogy ha bármely két lány együtt legfeljebb (legalább) k fiúval táncolt, akkor az estélyen legfeljebb (legalább) $lk/2$ táncospárt számolhattunk össze.

De mi a helyzet, ha k páratlan? Erre válaszol a következő feladat.

4.3. a) Most a K.II.4.2. feladatban látott módszerrel $7l/2$ táncospárt kapunk. Ennél azonban több is igaz. Tekintsük azt a lányt, aki a legkevesebb fiúval táncolt, legyen az ő táncpartnereinek száma k. Ha k legalább négy, akkor a táncospárok száma legalább $4l$ volt. Ha $k < 4$, akkor az összes többi lány legalább $7-k$ fiúval táncolt. Ez a „legrosszabb” eredményt nyilván akkor adja, ha $k = 3$, s ekkor a táncospárok száma legalább $4l - 1$ volt. Ez $l > 2$-re jobb becslés a $7l/2$-nél.

b) Most a K.II.4.2. feladatban látott módszerrel $10l/3$ táncospárt kapunk: a lányok közül összesen $l(l-1)(l-2)/6$-féleképp választhatunk ki hármat, mindenesetben legalább 10 lesz az általuk mondott összeg, ez legalább $10l(l-1)(l-2)/6$ táncospárt jelent, de minden lányt így pontosan $(l-1)(l-2)/2$-szer számoltunk, ennyivel el kell osztani a kapott eredmények összegét, ez pontosan $10l/3$.

A becslés most is javítható, most azt a két lányt kell venni, akik a legkevesebb fiúval táncoltak. Ha ők együtt legalább hét fiúval táncoltak, akkor bármely két lány is együtt legalább hét fiúval táncolt, tehát a feladat a) részénél vagyunk, a táncospárok száma legalább $4l - 1$. Ha viszont ők kevesebb, mint hét fiúval táncoltak, akkor minden más lány legalább néggyel táncolt, s ez is csak akkor teljesül, ha ők ketten hat fiúval táncoltak (a közös partnereket mindkettőjüknél számolva). A táncospárok száma ekkor legalább $4(l-2) + 6 = 4l - 2$, a többi esetben legalább $5(l-2) + 5 = 5l - 5$, ami $l > 3$-ra több.

A kapott alsó becslés tehát $4l - 2$ (ez $l = 3$-ra is érvényes).

4.4. $K_{2,2}$ izomorf azzal a gráffal, amelynek csúcsa egy négyszög négy csúcsa, élei a szomszédos csúcsokat kötik össze (vagyis a négyszög négy oldala a négy él).

A $K_{3,3}$ a „3-ház-3-kút” gráf (lásd a K.II.2.3. feladatot).

4.8. A feladat folytatását l. a K.II.4.1. feladatnál.

4.11. Ha egy páros gráfnak legalább öt pontja van, akkor az egyik osztályában legalább három pont van. E három pont a gráf komplementerében van összekötve. Viszont ha egy gráfban van három pontú teljes részgráf, akkor a K.II.4.6. feladat szerint nem lehet páros gráf, mert a három pontú teljes gráf sem az. Tehát ha $n \geq 5$, akkor nincs a feladatnak megfelelő gráf. $n = 2$-re mindkét gráf megfelel, $n = 3$-ra az egy- és a kétélű egyszerű gráf egyaránt megfelel, $n = 4$-re több megfelelő gráf is van, például az, amely két közös végpont nélküli (független) élből áll (ugyanígy megfelel e gráf komplementere, a „négyszög” is).

2. megjegyzés. Lényegében ennek a feladatnak a folytatása az GR.II.1.15. feladatnak az a része, hogy egy gráfnak és komplementerének kromatikus száma együtt legalább $2\sqrt{n}$. Ha n legalább öt, akkor ebből következik, hogy vagy a gráfnak, vagy a komplementerének kettőnél nagyobb a kromatikus száma. Ha jól meggondoljuk, az ottani bizonyítás is az itteni bizonyítás általánosítása.

4.14. Ha egy páros gráf egyik osztályában bármely l pont fokszámának az összege legalább (legfeljebb) k, akkor a gráf fokszáma legalább (legfeljebb) nk/l. A bizonyítás ugyanazzal a „kétszeres leszámolással” megy, mint a K.II.3.3. feladatnál.

Erre a feladatra szükségünk lesz később, amikor a K.II.9.7. feladatban azt vizsgáljuk, hogy k független él esetén mennyi a maximális élszám.

A becslés azonban csak akkor pontos, ha k osztható l-lel. Ellenkező esetben hasonló okoskodással javítható, mint a K.II.4.3. feladatban javítottuk a K.II.4.2. feladat becslését.

4.16. Természetesen a feladatnak létezik olyan megoldása is, amely nem használja kimondottan a páros gráfok fogalmát. Egy ilyet olvashatunk [**?**]. 48. oldalán. Mi azért ezt a megoldást választottuk, mert ez jól előkészíti a páros gráfoknak mátrixokkal történő „ábrázolását”.

4.17. Egyenlők. Ha ugyanis a gráf d-reguláris és n az egyik osztály pontszáma, akkor a gráf élszáma nd, s ez nem függ attól, hogy melyik osztályt néztük.

4.19. Érdemes a következőre emlékeztetni: A páros gráfot képzelhetjük úgy, hogy az egyik osztályban a lányok, a másikban a fiúk vannak. Egy kör azt jelenti, hogy felváltva ültetjük le a fiúkat és a lányokat.

Érdemes meggondolni a következőt is: Ha azt akarjuk megállapítani, milyen n-re páros az a)-ban szereplő gráf, nyilván elég azt megvizsgálnunk, előfordulhat-e valamelyik teljes páros gráfban. Miért?

A b)-ben szereplő gráf gráf nem páros, ha n páratlan, ez már következik a)-ból. Páros n-re viszont páros gráf. Érdemes kiszíneztetni a pontjait két színnel.

2. megjegyzés. Kihagyhatatlan feladat, szükségünk lesz rá a páros gráfok alternatív jellemzésénél, a K.II.4.4. feladatban.

4.21. A K.II.4.1. feladat szerint a páratlan hosszúságú körök nem páros gráfok. Másrészt a K.II.4.6. feladat szerint páros gráf részgráfja is páros. Tehát páros gráfban nem lehet páratlan kör.

Másik megoldást ad a K.II.4.2. feladathoz adott segítő lökés.

2. megjegyzés. Ez a feladat természetesen alig több a K.II.4.1. feladat állításánál, ha enélkül is boldogulunk, nyugodtan kihagyható, de némely csoportban nem árt feladni házi feladatnak ismétlésként.

4.22. A feladat többszörös célt szolgál, amellett, hogy önmagában is fontos, jó előkészítés a) az út (K.II.5. fejezet), b) az összefüggő komponens és c) a fa és főleg a faváz (K.II.7. fejezet), azon belül is a szélességi faváz (l. ALG.II.3) fogalmának bevezetéséhez. Érdemes tehát alaposan „kivesézni” és csak az után bevezetni ezeket a fogalmakat, hogy e feladat során szinte definiáltatjuk a diákokkal.

Miután a K.II.4.2. kutató feladat során már elegendő tapasztalatot szereztek a diákok és talán ki is mondták, első lépésként kimondatjuk a bizonyítandó tételt: ha egy gráfban nincsen páratlan kör, akkor a gráf páros. Érdemes a „színezős” definíciót ajánlani a bizonyításhoz és megkérdezni, hogyan kezdjük el színezni a gráfot?

Tehát feltesszük, hogy a G gráfban nincs páratlan kör, vesszük egy pontját és elkezdjük színezni. x színe kék lesz. Milyen pontokat *kell* mindenképp másra, mondjuk zöldre színezni? A szomszédait. Ezeket felrajzoljuk a következő „emeletre”. Most milyen pontokat kell biztosan kékre színeznünk? Ezek szomszédait. De nem lehet-e ezek között már kék? Nem, mert akkor lenne háromszög. Tehát x másodszomszédait felrajzoljuk a második „emeletre” (x volt a „földszint”).

Hogyan megyünk tovább? A „k-adik emeletre” a „$k-1$-edik emeleten” szereplő pontok szomszédait rajzoljuk. De ilyenek már szerepelhettek korábban is. Hol? Csak a $k-2$-edik és $k-1$-edik emeleten. Miért? És miért nem lehet, hogy a $k-1$-edik emeleten szereplő pontot – egy másik ott szereplő pont miatt – be kellene rajzolnunk a k-adikra is? Vagyis miért nem lehet a $k-1$-edik emelet két pontja összekötve éllel? Ezt persze aránylag könnyű „látni”, de éppen ezért itt jön az első komolyabb hibázási lehetőség: x-től mindkettőhöz vezet k élből álló csatlakozó élsorozat (út), tehát ez összesen egy páratlan kör. Ami persze nem biztos. Ha kijavítjuk ezt a hibát (csak az első közös ősig megyünk vissza), akkor már készen vagyunk – legalábbis az x-szel „összefüggő” résszel. A többire elölről kezdjük az eljárást. Az összefüggőség fogalmát itt ennél pontosabban nem kell definiálnunk. Viszont a megoldás során lényegében definiáltuk a szélességi favázat, erre később, az ALG.II.3. fejezetben építeni fogunk.

5. Utak, összefüggő gráfok

Javasoljuk, hogy a fejezetben szereplő definíciókat próbáljuk a diákokkal megfogalmaztatni. Például a séta és az út megkülönböztetése sokkal jobban fog menni, ha ők maguk jönnek rá a különbségre. Mindehhez segítséget nyújthat – mint ezt már a megoldásánál is hangsúlyoztuk – a K.II.4.3. feladat alapos megbeszélése. A K.II.5.2. feladatra is nyilván rájönnek maguktól. Ez persze rögtön a „távolság” bevezetésére és a háromszögegyenlőtlenség felismerésére is módot adhat. Kívánatos, hogy ezt is a diákokkal fogalmaztassuk meg.

A sorrenddel kapcsolatban hangsúlyozni kell, hogy egy könyv felépítése mindig túl lineáris a konkrét órai munkához képest. Tehát az itt aránylag távolabb szereplő fogalmak és feladatok könnyen előkerülhetnek egymáshoz közelebb is, egyszerre több irány is „terítéken” lehet az órán.

Az K.II.5.4. feladat szerepe például az, hogy a diákokat rávezesse az összefüggő komponens fogalmára, ami egyébként már a K.II.4.3. feladatnál is ott van a háttérben. (Ha pedig a zárt Euler-sétára („Euler-körre”) vonatkozó tétel korábban előkerült, ott is szükségünk van rá. Mi ezért is soroltuk hátrébb a felépítésben.)

Ha nem is mindig írjuk ki külön, a kérdés formájában megfogalmazott feladatok arra szolgálnak, hogy az órai keretek között is kutatásra ösztönözzék a diákokat.

5.2. Igen: a legrövidebb séta nyilván út, hiszen ha egy pont kétszer szerepelne a legrövidebb sétában, akkor a kétszeri előfordulása közötti részt elhagyhatnánk és rövidebbet kapnánk.

5.3. Vigyázat! Hiába van a G gráfban többszörös él, a G' gráf mindenképp egyszerű gráf!

5.4. G' pontdiszjunkt teljes gráfok uniója.

Vigyázat! Hiába van esetleg a G gráfban többszörös él, a G' gráf mindenképp egyszerű gráf!

5.5. Azt, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció.

Az K.II.5.4. feladat megoldásában is ezt kell bizonyítani.

A definícióból következik, hogy a reláció szimmetrikus és reflexív. Csak azt kell bizonyítani, hogy tranzitív is. Vagyis azt kell bizonyítanunk, hogy ha x-et és y-t út köti össze a gráfban, és ugyanez igaz y és z-re is, akkor x-et is köti össze út z-vel. Az x-et y-nal összekötő út és az y-t z-vel összekötő utat összetéve egy x-ből z-be vezető sétát kapunk. Ha két pont között van séta a gráfban, akkor a legrövidebb séta egyben út is (lásd a **??**. feladatot).

5.9. Igen. Ha a G_0 feszítő gráf összefüggő, akkor az K.II.5.8. feladat állítása szerint van olyan pont, amelyből G_0 minden pontjához megy út G_0-ban. De G és G_0 pontjai azonosak, másrészt ezek az utak G-ben is benne vannak, tehát G is összefüggő.

A megfordítás még egyszerűbb: maga a gráf egy megfelelő feszítő részgráf.

5.13. A kérdés szándékosan van „trehányul” fogalmazva: könnyen megadható $2k$ pontú, nem-összefüggő 5-reguláris gráf bármilyen k-ra: veszünk k darab pontfüggetlen élt és mindet megötszörözzük. Az igazi kérdésre a diákoknak kell rájönniük:

Van-e tízpontú, 5-reguláris *egyszerű* gráf, amely nem összefüggő.

Erre viszont már nemleges a válasz: Ha egy tízpontú gráfban minden pont foka 5, akkor bármely két, éllel össze nem kötött pontnak van közös szomszédja. Tehát a gráf nemcsak hogy összefüggő, hanem 2 az átmérője.

5 helyett 4-et írva már nem igaz a feladat állítása: két pontdiszjunkt, ötpontú teljes gráf uniója az ellenpélda.

Érdemes elgondolkozni, van-e más ellenpélda is? L. az K.II.5.3. feladatot.

5.14. Ha egy $2n$ pontú n-reguláris gráf két csúcsa nincs összekötve, akkor van közös szomszédjuk, tehát nemcsak hogy összefüggő a gráf, hanem kettő az átmérője.

Ha viszont a gráf két n pontú, pontdiszjunkt teljes gráf uniója, akkor nem összefüggő és minden pont foka $n-1$.

Kisebb k értékekre sem nehéz ellenpéldát csinálni. Ha k páros, akkor vehetünk két n pontú, pontdiszjunkt k-reguláris gráfot, ilyen a K.II.2.7. feladat szerint van.

Ha k páratlan, akkor legyen az egyik komponens egy $k+1$ pontú teljes gráf és egy k-reguláris, $2n-k-1$ pontú gráf a másik komponens. Mivel $2n-k-1$ páros, ezért ilyen gráf létezik megint csak a K.II.2.7. feladat szerint.

Tehát k legkisebb értéke n.

2. megjegyzés. Ez csak kicsivel nehezebb gyakorló feladat a K.II.5.1. feladat után!

Viszont folytatása a „Dirac-gráfok” témája!

5.15. Ha nem összefüggő a $2k$ pontú gráf, akkor legalább két komponense van. Egyszerű a gráf és minden pont foka $k-1$, így minden komponensben legalább k pont van. Tehát a gráf pontosan két k pontú komponensből áll. Ezek mindegyike teljes gráf.

A válasz: minden k-ra pontosan egy ilyen gráf van.

5.16.

1. megoldás. Számolással.

Ha az egyik komponensnek k pontja van, a másiknak $n-k$, akkor az előbbiben legfeljebb $k(k-1)/2$, a másodikban legfeljebb $(n-k)(n-k-1)/2$ él futhat. Ez összesen legfeljebb $n(n-1)/2-k(n-k+1))$ él. Ez akkor a legnagyobb, ha $k=1$ vagy $k=n-1$, tehát ha a gráf egyik komponense egyetlen izolált pont, a másik komponense $n-1$ pontból áll. Vagyis a kétkomponensű gráfnak maximálisan $(n-1)(n-2)/2$ éle lehet.

2. megoldás. „Átpakolással”.

Talán egyszerűbb a következő meggondolás. Tegyük fel, hogy a két komponensben k, illetve $n-k$ pont van és $1 < k < n-k$. A legtöbb éle akkor lesz ennek a gráfnak, ha mindkét komponens teljes gráf. Ha most a k pontú komponensből egy pontot átteszünk a másikba, akkor megszűntetjük azt a $k-1$ élt, ami ennek a komponensnek a pontjaival köti össze, de behúzhatjuk azt az $n-k$ élt, ami a másik komponens pontjaival köti össze. Így növeltük az élszámot. Ezt mindaddig tehetjük, amíg a kisebbik komponensben egy pont nem marad. Ekkor a gráf egy $n-1$ pontú teljes gráfból és egy izolált pontból áll, tehát az élei száma $(n-1)(n-2)/2$. Ez a maximum.

5.17.

1. megoldás. A két kérdés lényegében ugyanazt kérdezi: ha b)-re válaszolunk, az eggyel nagyobb szám a)-ra is válasz. b)-ra adunk választ. Ha egy gráf nem összefüggő, akkor legalább két nem üres összefüggő komponensre bontható, az egyik pontszáma legyen k. A többi komponense között viszont behúzhatjuk az összes esetleg be nem húzott élt, ezzel csak nő az élek száma. Tehát feltehető, hogy a gráfnak két komponense van. Innen a feladat azonos az K.II.5.4. feladattal.

Az a) kérdésre tehát az a válasz, hogy ha egy gráfnak $(n^2-3n+4)/2$ éle van, akkor biztosan összefüggő, ha kevesebb, akkor nem biztos. Vagyis: ha a komplementerében legfeljebb $n-2$ él van, akkor biztosan összefüggő, ha több, akkor már nem biztos.

2. megoldás. a) Ha a gráf komplementerében legfeljebb $n-2$ él van, akkor a komplementere nem összefüggő a K.II.7.6. feladat szerint. Ha viszont a komplementer nem összefüggő, akkor a gráf maga összefüggő a K.II.8.9. feladat szerint. Ez bizonyítja, hogy ha a gráfnak legalább $n(n-1)/2-n+2$ éle van, akkor összefüggő. Van olyan n pontú egyszerű gráf, amely nem összefüggő és a komplementernek $n-1$ éle van: ez az eset áll fenn, ha a komplementer egy n pontú csillag, vagyis maga a gráf egy izolált pont és egy $n-1$ pontú teljes gráf.

A feladat a) részére tehát $(n^2-3n+4)/2$ a válasz. A b) részére ennél nyilván eggyel kevesebb.

5.18. Vegyünk egy kockát és a belsejében „fúrjunk ki” egy kis kockát. Az így kapott test gráfja két összefüggő komponensből fog állni, mindkettő a kocka gráfjával izomorf.

5.19. A bizonyítás tkp. nem egyszerű. A legszemléletesebben a következőképpen mondható el. Ha a poliéder konvex, akkor vegyünk a felületén két csúcsot, A-t és B-t. Az AB szakasz teljes egészében a poliéder belsejében vezet. Vegyük a poliédernek egy további csúcsát, C-t. Az ABC sík egy $S = AP_1 \cdots P_iCQ_1 \cdots Q_kB$ konvex sokszögben metszi a poliédert. Minden P_j és Q_j a poliéder egy-egy élén van (de nem feltétlenül csúcsa a poliédernek). Két, S-en szomszédos csúcshoz van a poliédernek egy lapja, amely mindkettőt tartalmazza. Így van közöttük egy olyan töröttvonal, amely csak ennek a lapnak az élein halad. A töröttvonal a két szélső szakasz kivételével a gráf éleiből áll. Ezekből a töröttvonalakból összeállítható egy séta A és B között – az egyetlen „baj”, hogy a kapott töröttvonalon még vannak „csonka” élek, tehát olyan szakaszok, amelyek nem a poliéder két csúcsát kötik össze. De két eset van: két ilyen szomszédos „csonka” él vagy kiadja a gráf egy élét, vagy *azonos* és akkor elhagyható.

A bizonyításban többszörösen felhasználtuk, hogy a poliéder konvex, tehát egyszerű.

Megjegyzés: a bizonyítás hasonlóan megy minden *egyszerű* poliéderre is, ha az egyszerűséget úgy definiáljuk, hogy „felfújható a gömbre”.

5.22. Az K.II.5.5. feladat bizonyítása változtatás nélkül átvihető a végtelen esetre is. De azért érdemes jobban körüljárni, hogy maga az „összefüggőség” mindig csak *véges* utakról szól. Tehát a tranzitivitásnál is a gráf egy véges részével kell csak foglalkoznunk.

6. Elvágó pontok, hídélek

6.1. Ha már vettük a A K.II.10.2. feladatot, akkor érdemes a következő megoldásra is rávezetni a diákokat („mit tudunk már a 4-reguláris gráfokról” kérdéssel – legalább ismétlünk is –):

A K.II.10.2. feladat szerint egy 4-reguláris gráf két 2-reguláris feszítő részgráfra bontható. Egy 2-reguláris gráf körök diszjunkt uniója. Tehát minden él benne van egy ilyen körben. Tehát nem lehet hídél.

6.2. Véges gráf nincs, ezt láttuk a K.II.6.1. feladatban. De végtelen gráfot tudunk konstruálni. Vegyünk egy négyzetrácsot. Ennek minden pontja negyedfokú, de nincs hídél. Hagyjuk el két szomszédos függőleges egyenesen az összekötő éleket, így mindkét egyenes pontjai harmadfokúak lettek. Kössük össze a két egyenes egy-egy pontját egy éllel (ez lesz a hídél). A maradó pontokat pedig mindkét egyenesen párosítsuk úgy, hogy a kiválasztott ponttól k távolságra „felfelé” levő pontot kössük össze a k távolságra „lefelé” levő ponttal (k tetszőleges egynél nagyobb szám). Az így kapott gráf már ismét 4-reguláris és van egy hídél.

Megjegyzés. Nyilván nem okoz gondot akárhány hídélt csinálni egy 4-reguláris végtelen gráfban, csak nem egy, hanem k darab szomszédos egyenespáron kell ugyanezt megcsinálni. (Arra kell csak vigyázni, hogy egy egyenes se szerepeljen két egyenespárban.)

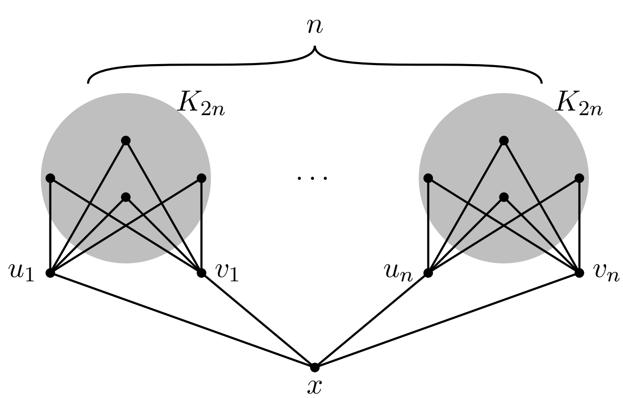
6.3. A K.II.6.1. feladat megoldásából kijön, hogy páros k-ra nincs ilyen gráf. Ha ugyanis egy $2l$-reguláris gráfnak volna hídéle, akkor ezt elhagyva a keletkező két komponens mindegyikében egyetlen $2l-1$ fokú pont keletkezne, a többi pont foka $2l$ lenne. De nincs olyan gráf, amelynek pontosan egy páratlan fokú pontja van.

Páratlan k-ra viszont van. Legyen $k = 2n + 1$.

Először konstruálunk egy hídél nélküli gráfot, amelynek egy $2n$-ed fokú pontja van – ezt fogjuk x-szel jelölni –, a többi pontja $2n+1$-ed fokú. Ha ez megvan, akkor felvesszük két példányban, a második $2n$-ed fokú pontját x'-vel jelöljük. Ha e két gráfot összekötjük az xx' éllel, akkor egy olyan $2n+1$-reguláris gráfot kapunk, amelynek egyetlen hídéle van: xx'.

Konstruálnunk kell tehát egy olyan gráfot, amelynek nincs hídéle, egyetlen $2n$-ed fokú pontja van, a többi pontja $2n+1$-ed fokú. Erre több konstrukciót is mutatunk.

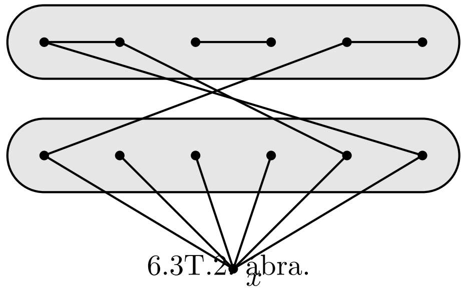
1. KONSTRUKCIÓ. Vegyünk egy $2n+2$ pontú teljes gráfot és helyettesítsük egy uv élét egy uxv úttal, ahol x új pont. Így kaptunk egy olyan gráfot, amelyben nincs hídél, x másodfokú, minden más pontja $2n+1$-ed fokú. Ha most n darab ilyen gráfot „összeragasztunk” az x pontjánál, akkor olyan gráfot kapunk, amelyben nincs hídél, minden x-től különböző pontja $2n+1$-ed fokú, x pedig $2n$-ed fokú. (Lásd a 6.6.1. ábrát.)



6.3T.1. ábra.

2. KONSTRUKCIÓ. Vegyünk egy $K_{2n,2n}$ teljes páros gráfot. Egyik osztályában húzzunk be egy teljes párosítást a $2n$ pont között. A másik osztály pontjait kössük össze az x ponttal. Így

x-et kivéve minden pont $2n+1$-ed fokú, x viszont $2n$-ed fokú. (A gráfot $n=3$-ra vázlatosan a 6.6.2. ábra mutatja.)

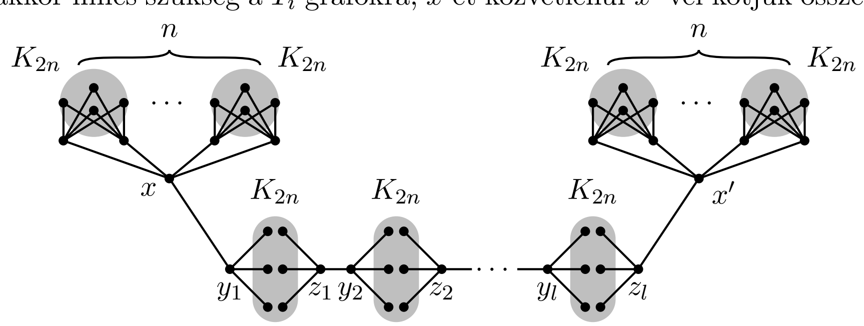


6.3T.2. ábra.

3. KONSTRUKCIÓ. Vegyünk egy $2n+2$ pontú teljes gráfot, tüntessük ki egy uv élét, a többi pontot állítsuk párba és hagyjuk el az egy pár két tagját összekötő n darab élt. Végül x-et kössük össze ezzel a $2n$ ponttal. Ismét olyan gráfot kaptunk, amelynek x pontja $2n$-ed fokú, a többi pontja $2n+1$-ed fokú.

6.4. Páros k-ra nem lehet hídél a gráfban, ezt már láttuk a K.II.6.3. feladatban.

Legyen most $k=2n+1$ páratlan. A K.II.6.3. feladatban láttuk, hogy lehet olyan gráfot konstruálni, amelyben egyetlen x pont kivételével minden pont foka $2n+1$, x foka $2n$. Ott felvettük ennek a G_1 gráfnak két példányát (a másodikban x' felelt meg x-nek), és összekötöttük az xx' hídéllel. Ha most több hídélt akarunk, akkor még közé kell iktatnunk több olyan gráfot, amelynek két pontja $2n$-ed fokú, a többi $2n+1$-ed fokú. Ha tehát $l+1$ hídélt akarunk, akkor vegyünk még l darab $2n+2$ pontú (pontdiszjunkt) teljes gráfot, legyenek ezek $T_1, T_2, \ldots, T_l$. Mindegyikből hagyjunk el egy-egy élt, T_i-ből az $y_i z_i$ élt. Ezután kössük össze x-et y_1-gyel, z_1-et y_2-vel és általában z_i-t y_{i+1}-gyel, majd z_l-et x'-vel. Így kapunk egy $2n+1$-reguláris gráfot, amelynek pontosan $l+1$ darab hídéle van, az utoljára behúzott $l+1$ él. Ha azt akarjuk, hogy 1 hídél legyen, akkor nincs szükség a T_i gráfokra, x-et közvetlenül x'-vel kötjük össze. Lásd a 6.6.1. ábrát.



6.4T.1. ábra.

6.6. Itt arra kell rávezetnünk a diákokat, hogy egy xy él pontosan akkor hídél, ha a) a gráf összefüggő, b) nincs x és y között az élen kívül más út a gráfban.

6.11. Egy konvex poliéder gráfja összefüggő, tehát a kérdés értelmes.

Egy konvex poliéder minden lapja gráfelméleti értelemben vett kör. A poliéder minden éle két lapot határol, tehát minden éle két körben is benne van. Tehát nincs hídéle.

Elvágó pontja sincsen, mert bármely csúcsának bármely két szomszédját köti össze olyan út, amely nem megy keresztül ezen a csúcson. Tehát a csúcs elhagyása után is összefüggő marad a gráf.

Egy alternatív bizonyítás: legyen az elhagyott pont P és legyen a maradó gráf két pontja Q és R. A PQR sík egy konvex sokszögben metszi a konvex poliéder felületét és ezen van egy P-t nem tartalmazó út P és Q között.

6.13. Ez a kérdés kicsit becsapós. Az állítás „majdnem” igaz. Mondanunk sem kell, hogy az ilyen feladatokat nem azért adjuk fel, hogy megszidjuk azt, aki beugrik!! Mert valljuk be: mi is sokszor beugrunk az ilyeneknek. Azért adjuk fel, hogy óvatosságra intsük őket, magunkkal együtt.

6.17. Ehhez a feladathoz lásd még a K.II.7.1. feladatot.

6.21. A kérdés ez: igaz-e, hogy ha egy összefüggő gráfban van kör, akkor annak pontjai nem elvágó pontok?

Nem. Ha a gráf két olyan körből áll, amelyek egy pontban érintkeznek, akkor ez a közös pont elvágó pont.

2. megjegyzés. Ismét egy kissé megtévesztő feladat. De a korábbi példák (például a K.II.6.4. feladat ábrái) segíthetnek.

6.22. A diákok kedvelik ezt a „megoldást”. Erre cáfolatként került elő a Luca-széke” ábra (lásd a K.II.2.3. feladat megoldásának az ábráját). Megpróbálkozhatnak a bizonyítás kijavításával, de ez lényegében a „blokkok” (maximális kétszeresen összefüggő részgráfok) definiálásához vezet. Általában nem szokott sikerülni. Az adott két megoldás sokkal egyszerűbb. És ismét egy feladat, ahol – az első megoldás esetében – már hangsúlyozhatjuk, hogy a „vegyük a legnagyobbat” gondolat vezetett célhoz. A favázas bizonyításnál pedig „a legkisebb összefüggő feszített részgráfot” vettük.

6.24. Nehezebb gyakorló feladat.

6.26. Ez is a blokkok bevezetését előkészítő feladat.

7. Fák, erdők, favázak

7.1. Körülbelül ilyen megoldásra számítunk, illetve próbáljuk rávezetni a diákokat:

Vegyük fel a kilenc pontot. Amíg nem húzunk be élt, addig 9 komponens van. Minden él behúzásával eggyel tudjuk csökkenteni a komponensek számát. Tehát legalább hat élt kell behúznunk, hogy 3 komponens „maradjon”. Hat él behúzásával viszont el is érhető, hogy pontosan 3 komponens legyen: például ha mindhárom komponens egy kétélű út.

7.2. Amíg a soron következő játékos nem összefüggő gráfot „kap”, addig be tud húzni olyan élt, amely két komponenst köt össze, és ezzel nyilván nem zár be kört. Viszont ha összefüggő gráfot „kap”, akkor bármelyik további élt behúzva kört zár be, hiszen az él két végpontja között már vezet út. A helyes játék ezek szerint az, hogy amíg lehet, két komponens közötti élt húz be a soron következő. Ezzel eggyel csökkenti a komponensek számát. Minthogy kezdetben 10 komponens volt, 9 él behúzása után válik összefüggővé a gráf, tehát a tizedik élt behúzó Béla veszít.

2. didaktikai javaslat. Nem árt, ha a diákok ténylegesen lejátszanak egymással „mérkőzéseket”, akár más-más pontszámú gráfokon is. Tapasztalat szerint nagyon jó módszer arra, hogy a K.II.7.1. feladatban sorra kerülő algoritmust világosan értsék.

7.3. A 7.2T. megoldásban mondottak most is megismételhetők. Amíg a soron következő játékos nem összefüggő gráfot „kap”, addig tud olyan élt behúzni, amellyel nem zár be kört. Bármelyik, két komponenst összekötő él jó. Más élt behúzva viszont veszítene.

Ha viszont összefüggő gráfot „kap”, akkor bármely élt behúzva kört zár be és veszít. Ha tehát mindkét játékos jól játszik, akkor minden lépésben egy-egy olyan élt húz be, amely két komponenst köt össze, tehát minden lépésben eggyel csökkentik a komponensek számát. Így az nyer, aki összefüggővé teszi a gráfot. Kezdetben n komponens van, a komponensek száma minden lépésben eggyel csökken, tehát az nyer, aki az $n-1$-edik élt behúzza. Ez páros n esetén Anna, páratlan n esetén Béla.

7.4.

1. megoldás. Végignézzük újra a 7.3T. megoldást. Az ottani játékból éppen az a tanulság szűrhető le, hogy akárhogyan húzunk be n élt az n pontú üres gráfba, keletkezik kör. Tehát a következő egyszerű tételhez jutunk:

Tétel. Minden n pontú, n élű egyszerű gráfban van kör.

Az állítás csak $n>2$-re nem üres. Ha viszont megengedünk többszörös éleket, és két „párhuzamos” (azonos pontokat összekötő) élt is körnek tekintjük, akkor a tétel már minden hurokélmentes gráfban igaz lesz.

2. megoldás. Az alábbi megoldásban egy másik, teljes indukciós bizonyítást is bemutatunk. Ehhez azonban használjuk a K.II.12.1. feladatot.

Érdemes ezt a bizonyítást is átvenni. Bevezetőként azt kérdezhetjük, hogy mikor nem használhatjuk a K.II.12.1. feladatot?

Most teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Kezdő lépés: $n=3$. Ha egy hárompontú egyszerű gráfnak három éle van, akkor az egy három pontú kör.

Ezután tegyük fel, hogy $n-1$-re már tudjuk az állítást.

Ha a gráf minden pontja legalább másodfokú, akkor a K.II.12.1. feladat szerint van benne kör. Ha viszont van benne nullad- vagy elsőfokú pont, akkor hagyjuk el a belőle induló éllel (ha nulladfokú a pont, akkor nincs elhagyandó él). Így kapunk egy $n-1$ pontú, legalább $n-1$ élű gráfot. Erre a gráfra tehát alkalmazható a teljes indukciós feltevés: van benne kör. De akkor az eredetiben is van.

7.5. A gráf élszáma n. Tehát ez a feladat a K.II.7.4. feladat után egyszerű gyakorló feladat, alkalmas házi feladatnak, ha az a feladat megvolt.

7.6.

1. megoldás. Ismét átnézzük, hogy mit láttunk a 7.4T2. megoldásban. Kiderül, hogy akárhogyan húzunk be $n-2$ élt az n pontú üres gráfba, az még nem lesz összefüggő, hiszen minden lépésben legfeljebb eggyel csökkenthető a komponensek száma.

2. megoldás. A pontszámra vonatkozó indukcióval is bizonyíthatjuk az állítást.

Kezdő lépés: Ha a gráfnak két pontja van és összefüggő, akkor a két pont közötti él be van húzva, tehát legalább egy éle van.

Tegyük fel, hogy $n-1$ pontú összefüggő gráfokra már tudjuk, hogy legalább $n-2$ élük van.

Legyen G egy n pontú gráf és tegyük fel, hogy csak $n-2$ éle van. Ekkor az Euler-összefüggés szerint (K.II.3.3. feladat) van egy legfeljebb elsőfokú pontja. Ha a foka nulla, akkor izolált pont, tehát a gráf nem összefüggő. Ha elsőfokú, akkor hagyjuk el a belőle induló éllel együtt. A maradó $n-1$ pontú gráfnak $n-3$ éle van, tehát az indukciós feltevés szerint nem összefüggő. így legalább két összefüggő komponensből áll. Az elhagyott él elsőfokú volt, tehát csak az egyik komponenshez csatlakozhat, nem tud két komponenst összekötni. Vagyis az eredeti gráf sem összefüggő.

7.8. A feladat természetesen arról szól, hogy más azt követelni, hogy *biztosan* összefüggő legyen egy gráf és más azt kérdezni, hogy hány él esetén *lehet* már összefüggő (azaz hány élig *biztosan nem* összefüggő) egy n pontú gráf.

7.10. Célszerű jó pár gráfot felrajzolni és az éleit többféleképpen is megszámozni és megnézni, mikor milyen eredményt ad az 1. eljárás.

7.11. Természetesen: nem. Hiszen minden faváznak hét éle van, a kockának viszont csak 12 éle van. Így biztosan lesz közös éle bármelyik két faváznak. A feladat általánosítását l. a K.II.16.11. feladatban.

7.14. Felmerül, hogy egyáltalán hány olyan számozása lehetséges a kocka éleinek, amely esetén a faváza egy út lesz. Ehhez először tudni kellene azt, hogy hány Hamilton-út van a kockában. Erről szól a K.II.19.12. feladat. Nyilván $7!\,5!$-ral kell az ott kapott számot megszorozni, hogy megkapjuk a „jó” élszámozások számát.

7.16. Arra kell rávezetnünk a diákokat, hogy a K.II.7.7. feladat tanulsága az, hogy a „maximális” jelentheti azt, hogy *maximális elemszámú* megfelelő részhalmazokat keresünk, de jelentheti azt is, hogy *tovább nem bővíthető* részhalmazokat keresünk. Első esetben csak két jó részhalmazt találunk, a második esetben hármat.

A későbbiekben több példát is fogunk látni a két fogalom különbségére. L. például a K.II.9.6. feladatot. A **??**. fejezetben definiálandó teljes párosítás pedig részben hasonló a fa fogalmához. L. ott.

7.20. Érdemes meggondolni, hogy ez a megoldás lényegében egyezik a **??**. feladatra adott első bizonyításunkkal.

7.32. Valamit KÖNNYÍTÜNK a feladaton azzal, hogy a d_i-ket nagyság szerinti sorrendben adjuk meg. Egy kicsit kézenfekvőbbé tesszük ezzel a megoldás kulcsát adó ötletet.

8. Utak, távolság, átmérő.

Mint a K.II.5. fejezet bevezetőjében is mondtuk, a fogalmakat igyekszünk a diákokkal „felfedeztetni”. E fejezet fogalmaihoz is segítséget nyújthat – mint ezt már a megoldásánál is hangsúlyoztuk – a K.II.4.3. feladat alapos megbeszélése. A K.II.5.2. feladatra is nyilván rájönnek maguktól, ami rögtön a „távolság” bevezetésére és a háromszögegyenlőtlenség felismerésére is módot adhat. Kívánatos, hogy ezt is a diákokkal fogalmaztassuk meg.

A sorrenddel kapcsolatban hangsúlyozni kell, hogy egy könyv felépítése mindig túl lineáris a konkrét órai munkához képest. Tehát az itt aránylag távolabb szereplő fogalmak és feladatok könnyen előkerülhetnek egymáshoz közelebb is, egyszerre több irány is „terítéken” lehet az órán.

Továbbra is hangsúlyozzuk, hogy ha nem is mindig írjuk ki külön, a kérdés formájában megfogalmazott feladatok arra szolgálnak, hogy az órai keretek között is kutatásra ösztönözzék a diákokat.

8.2. Ehhez és a következő feladatokhoz megjegyezzük, hogy a gráf bármely két pontja közötti 2 hosszú utak számát a szomszédsági mátrix segítségével könnyen kiszámíthatjuk, de ez későbbi anyag.

8.12. Az éllel összekötött pontpárok eleve nem jók, tehát egy n pontú gráfban legfeljebb $\binom{n}{2} - e$ jó pontpár van, ahol e az élszámot jelöli. Egyenlőség akkor van, ha a gráf (összefüggő és) kettő az átmérője. Összefüggő gráfok közül a fák élszáma a legkisebb, ezek élszáma $n-1$, és a csillag

2-átmérőjű fa, tehát az összefüggő gráfok közül a legtöbb jó pontpár az n pontú csillagban van. Itt a jó pontpárok száma $\binom{n-1}{2}$, a rossz pontpároké $n-1$.

Ha a gráf nem összefüggő, akkor az éleken kívül a különböző komponenshez tartozó pontpárok sem jók. Az ilyen pontpárokból legalább $n-1$ van, és pontosan $n-1$ csak akkor lehet, ha van izolált pont, és a másik komponens összefüggő. De ekkor ebben a komponensben még legalább $n-2$ él van, s ez még legalább ugyanennyi rossz élt is jelent.

A legtöbb jó pontpár tehát az n pontú csillagban van: $\binom{n-1}{2}$.

2. megjegyzés. Gondolkodtató bevezető feladat a 2-átmérő, és általában az átmérő definíciójához.

8.13. Ennek a feladatnak a folytatása a GR.II.4.20 és a GR.II.4.20. feladat. (Azért csak a tanári kézikönyvben említjük, mert különben az utalással nagyon megkönnyítenénk a feladat megoldását, és elvennénk a meglepetést élményét.)

8.14. Mindkét gráfban igaz, hogy bármely két pont távolsága legfeljebb kettő (és van két olyan pont, amelynek a távolsága kettő).

2. megjegyzés. Természetesen az átmérő bevezetését szolgáló feladatokról van szó.

8.19. A feladat – de tkp. már K.II.8.8. és K.II.8.9. feladat is – nyilván jó előkészítés egyrészt a szélességi favázhoz, másrészt a csúcstranzitivitás fogalmához.

8.20. Ez is, mint az előzők, egyszerű fogalom-gyakorló példa.

9. Független pontok és élek

9.6. A feladatnak egy furcsa átfogalmazása szerepelt az 2004-es Arany Dániel versenyen a haladóknál. Lásd a K.II.20.12. feladatot.

2. didaktikai javaslat. A feladat megoldása során ismét példát látunk arra, hogy egy adott tulajdonságra *nem bővíthető* gráf nem feltételenül *maximális* is. A háromszögből és $n-3$ izolált pontból álló gráf nem bővíthető úgy, hogy továbbra is egyszerű maradjon és ne legyen két független éle. Van azonban nagyobb élszámú n pontú egyszerű gráf is ilyen tulajdonsággal.

9.7. A feladat megoldható úgy is, hogy nem a „független élek” oldaláról vizsgáljuk az élek számát, hanem a független T oldaláról. Minthogy a K.II.9.2. feladat megoldásánál ez a gondolat fog segíteni, talán érdemes most is rávezetni a diákokat, hiszen minél többször találkoznak egy ötlettel, annál inkább elsajátítják.

Azt látjuk be, hogy T bármely két pontjából az x_iy_i élhez legfeljebb két él vezethet. Legyen tehát u és v a T független ponthalmaz két pontja. Ha u-ból és v-ből együtt legalább három él vezetne az x_iy_i élhez, akkor legalább az egyikük, mondjuk u össze lenne kötve x_i-vel is, y_i-vel is. Másrészt v is össze lenne kötve legalább az egyikükkel, mondjuk x_i-vel. De akkor az x_iy_i élt kicserélhetnénk a vx_i és x_iu élekre, s ezzel eggyel növelnénk a független élek számát, ami ellentmond a maximalitásnak.

Ezzel beláttuk, hogy T bármely két pontjából együtt legfeljebb $2k$ él vezet az x_i, y_i pontok halmazához. Ebben viszont alkalmazhatjuk a K.II.4.2. feladatot: ha az utóbbi pontok között futó élektől eltekintünk, akkor a kapott páros gráfban összesen legfeljebb $|T|k = (n-2k)k$ él van. T pontjai között nem fut él, az x_i, y_i pontok között összesen legfeljebb $k(2k-1)$ él fut. Ez összesen legfeljebb $(n-1)k$ él.

9.8. Ezt bizonyítottuk a 9.7T. megoldásban. A feladatot tehát akkor érdemes feladni, ha az ott tárgyalt bizonyítást át akarjuk venni. Mint említettük, használni fogjuk a K.II.9.2. feladat megoldásában is.

9.11. Az általános tétel így szól:

Egy $2n$ pontú n-reguláris egyszerű gráfban van n darab független él. (l. Hajós-Neukomm-Surányi: *Matematikai versenytételek*, II. rész, [?], 180-181. oldal.)

Ennek bizonyításához is elindulhatunk a K.II.9.1. feladat bizonyításának a gondolatmenete nyomán.

Legyen $E_1E_2, E_3E_4, \cdots, E_{2k-1}E_{2k}$ a gráf egy maximális független élrendszere és tegyük fel, hogy $k < n$, azaz van még párba nem állított pontja a gráfnak. Ezek között a pontok között nem futhat él, hiszen akkor egy $k+1$-edik független éllel kiegészíthetnénk a független élrendszert. A kimaradó pontok száma páros, vegyünk közülük kettőt, legyenek ezek X és Y. Vegyünk továbbá az E_1E_2 élt. Azt állítjuk, hogy X-ből és Y-ból együtt nem futhat három él E_1-be és E_2-be. Ha futna, akkor valamelyikük, például X össze volna kötve E_1-gyel is, E_2-vel is, és Y is össze volna kötve legalább az egyikkel, például E_1-gyel. De akkor az E_1E_2 él kicserélhető volna az E_1Y és E_2X élekre, és nagyobb ($k{+}1$ élű) független élrendszert kapnánk, ami ellentmond az élrendszerre tett feltevésünknek. Tehát X-ből és Y-ból együtt legfeljebb két él indul E_1 és E_2-höz, de akkor ugyanígy a független élrendszer bármelyik élének két végpontjához is. Tehát X és Y-ból együtt összesen legfeljebb $2k$ él indul ki. (Azt már korábban megállapítottuk, hogy csak E_i-kel lehetnek összekötve.) De mindkettőjük fokszáma n, vagyis együtt összesen $2n$ él indul belőlük. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy k nem lehet kisebb n-nél, vagyis van n darab független él.

Megjegyzések. 1. Valójában a bizonyítás nem igazán indirekt bizonyítás, hanem algoritmizálható eljárást ad a maximális, n élű független élrendszer megtalálására. Egyben előkészítés lehet a „vegyük a legnagyobbat” gondolathoz.

2. Mint a K.II.9.7. feladatnál már említettük, ez a bizonyítás lényegében ugyanaz, mint az ott a tanári megjegyzésben adott bizonyítás. A bizonyítás röviden – közvetlenül a K.II.9.8. feladatot használva – így mondható el: Ha az n pontú G egyszerű gráfban a független élek maximális száma $\nu(G) = k$, gráf, és $E_{2i-1}E_{2i}$ $(i = 1, \cdots, k)$ egy maximális független élrendszer, akkor a kimaradó pontok közül bármely kettőből együtt legfeljebb $2k$ él indul ennek az élrendszernek a pontjaiba, s így bármely két itteni pont fokszámösszege is legfeljebb $2k$. Így egyrészt megkapjuk az ottani állítást a maximális élszámról, másrészt a mostani feladatban tudjuk, hogy minden pont foka n, ezért bármely két pontból $2n$ él indul ki, így k nem lehet kisebb n-nél.

3. Az GR.II.1. fejezet *„Dirac-gráfok” és hasonlók* c. részében visszatérünk az olyan $2n$ pontú gráfokra, amelyekben minden pont foka n, vagy legalább n. Az itt szereplő tétel élesítése Dirac tétele, mely szerint az ilyen gráfokban van Hamilton kör is. Ezt viszont már a K.II.12.1. és a K.II.12.2. feladatban látni fogjuk. Az előbbi $n = 4$-re mutatja a bizonyítást, az utóbbi általában.

4. Valójában csak annyit használtunk, hogy bármely két egymással össze nem kötött pont fokszámának az összege legalább $2n$. Ha ez teljesül egy $2n$ pontú egyszerű gráfban, akkor van benne n független él. A K.II.12.4. feladat azt mondja ki, hogy ebben az esetben is igaz, hogy a gráfban van Hamilton-kör.

9.12. A legegyszerűbb ellenpélda: egy négypontú teljes gráfból elhagyunk egy élt. Ha a négy pont a, b, c, d és az ab élt hagytuk el, akkor az egyelemű $\{cd\}$ élhalmaz nem bővíthető független élrendszer, ám van kételemű független élrendszer is: $\{ac, bd\}$.

9.13. Talán nem árt már itt tisztázni – ha felmerül –, hogy „valójában” csak egy pár kitérő él van a kockában, azaz bármely két kitérő élpár automorfizmussal egymásba vihető. Természetesen nem feltétlenül kell használni ezeket a kifejezéseket, inkább az a fontos, hogy lássák a diákok, amiről szó van. A második megoldás (K.II.9.4M2) elkerüli ezt a kérdést.

9.14. Ez a feladat is „észrevétlenül” előkészíti az automorfizmus és a pálya fogalmát.

9.15. Ismét egy feladat, amely „észrevétlenül” előkészíti – természetessé teszi – az automorfizmus és a pálya fogalmát.

9.16. Ez a feladat is egyben előkészítő feladat az automorfizmus és a pálya fogalmához.

9.17. A feladat tkp. „ellenőrző” feladat. Azt figyeli, hogy emlékeznek-e a diákok egy másik szituációban arra, hogy ez a gráf nem más, mint a 3-ház-3-kút gráf, aminek nyilván hat 1-faktora van.

9.18. Ez a feladat is lényegében „ellenőrző” feladat. Azt figyeli, hogy emlékeznek-e a diákok egy másik szituációban arra, hogy egy gráf pontosan akkor páros, ha minden köre páros és hogy a 2-regularitás mit jelent.

9.23. Válasszunk ki egy tetszőleges embert, állítsuk az egyik oldalra, majd állítsuk a másik oldalra azokat, akikkel kezet fogott. Marad még legalább 19 ember. Közülük is válasszunk ki egy embert, állítsuk az első mellé és állítsuk a másik oldalra azokat, akikkel kezet fogott. A maradó legalább 13 ember közül is kiválasztunk egyet, a másik oldalra állítjuk azokat, akikkel kezet fogott. Így már hárman állnak az egyik oldalon, legfeljebb tizenöten a másikon, még maradt hét ember. Ezek között is van biztosan kettő, aki nem fogott egymással kezet, hiszen különben mindegyikük legalább hatszor fogott volna kezet. Ha ezt a két embert hozzávesszük a másik három kiválasztotthoz, akkor kapunk öt olyan embert, akik közül senki senkivel nem fogott kezet.

A feladat állításánál kicsit többet bizonyítottunk. Gráfelméleti nyelven elmondva azt bizonyítottuk, hogy ha egy 25 pontú hurokél nélküli gráfban bármely pont foka legfeljebb öt, akkor van benne öt független pont, sőt bármelyik pontot kiválasztva találunk másik négy olyan pontot, amelyekkel együtt független ötöst alkot. A bizonyítás úgy nevezett mohó algoritmussal történt, mégpedig annak is a legtriviálisabb fajtájával: minden lépésben egy tetszőleges embert választottunk ki, aki még megfelel.

24 pontú gráfok között állításunk már nem mindig igaz: ha a 24 tagú társaság négy hattagú klikkre oszlik, egy klikken beül mindenki mindenki mindenkivel kezet fogott, különböző klikkhez tartozók viszont nem fogtak kezet, akkor ebben a társaságban nincs öt megfelelő ember.

A gráfelméleti általánosítás, ami ugyanezzel az eljárással bizonyítható: ha egy $mk+1$ pontú, hurokél nélküli gráfban minden pont foka legfeljebb $k-1$, akkor a gráfban van $m+1$ független pont. mk pontú gráfokra ez már nem mindig igaz.

A bizonyítás jó akkor is, ha a gráf tartalmaz többszörös éleket.

9.26. A független élek maximális száma legfeljebb akkora, mint a lefogó pontok minimális száma. Hiszen a független élek mindegyikét is le kell fognia a lefogó pontok halmazának és két független élt nem lehet egy ponttal lefogni. Tehát legalább annyi pont kell az élek lefogásához, ahány független él van.

9.29. A feladat a fogalmak megértését, elmélyítését szolgálja. Egy független ponthalmaz kiegészítő halmaza lefogja a gráf összes élét és egy lefogó ponthalmazon kívüli pontok között nem futhat él, tehát független ponthalmazt alkotnak. Vagyis egy ponthalmaz pontosan akkor független, ha a többi pont lefogja a gráf összes élét. Ebből következik, hogy egy gráf független pontjainak maximális számát és lefogó pontjainak minimális számát összeadva épp a gráf pontszámát kapjuk. Ezt is szokták Gallai tételnek nevezni: $\alpha(G)+\tau(G)=n$.

9.30. A *lefedő élek* fogalmáról van szó. Ezen olyan élhalmazt értettünk, amelynek végpontjai a gráf összes pontját kiadják. Természetesen nincs ilyen halmaz, ha a gráfban van izolált pont.

Minden egyéb esetben igaz az, hogy ha egy gráfban k darab független pont van, akkor már ezek lefedéséhez k különböző élre van szükség, tehát a lefedő élek száma legalább annyi, amennyi a független pontok száma.

9.32. Azt várjuk, hogy a K.II.9.2. feladat alapján a diákok kimondják: ha egy n pontú, hurokél nélküli gráfban van $\lfloor n/2 \rfloor$ független él, akkor $\lceil n/2 \rceil$ éllel lefedhetők a pontjai.

9.33. Ha a gráfban nincs izolált pont, akkor a független élek maximális száma és a lefedő élek minimális száma együtt pontosan a gráf pontszámát adják.

Tegyük fel ugyanis, hogy az n pontú, izolált pont nélküli gráfban van k darab független él. Ezek együtt lefednek $2k$ pontot. A maradó $n-2k$ pont mindegyikét lefedhetjük egy-egy éllel (nincs izolált pont), tehát $n-k$ éllel biztosan le tudjuk fedni a gráf pontjait. Ha tehát k a független élek maximális száma, akkor a lefedő élek minimuma legfeljebb $n-k$, tehát
(i) *a független élek maximális száma és a lefedő élek minimális száma együtt legfeljebb* n.

Másrészt tegyük fel, hogy sikerült l éllel lefednünk a gráf összes pontját. Legyen ezek között a lefedő élek közötti maximális független élek száma k' és válasszunk ki egy ilyen k' darab független élből álló részhalmazát a lefedő éleknek. Ezek együtt lefednek $2k'$ pontot. A maradó $n-2k'$ pontot egyesével kellett lefednünk, hiszen különben a lefedő élek között lenne egy él, amit még hozzávehetnénk a k' független élhez. További élre viszont nincs szükség a pontok lefedéséhez, így pontosan $n-2k'+k'$ élű a minimális lefedő élrendszer, azaz $l=n-k'$ vagy másképp $l+k'=n$. De k' legfeljebb akkora, mint a független élek maximális száma, ezért
(ii) *a független élek maximális száma és a lefedő élek minimális száma együtt legalább* n.

(i) és (ii) együtt bizonyítja, amit bizonyítani akartunk.

10. Vegyes gráfelméleti feladatok

10.6. Vegyük a gráf egy tetszőleges x pontját. Mivel a gráf 2-átmérőjű, a gráf minden pontját felsoroljuk, ha felsoroljuk x szomszédait és „másodszomszédait”. De x-nek legfeljebb k szomszédja van, és minden szomszédjának legfeljebb $k-1$ további szomszédja van. Ez összesen legfeljebb $k(k-1)+k+1=k^2+1$ pont.

Ha van k^2+1 pontú, a feltételnek megfelelő gráf, annak egyszerű, k-reguláris gráfnak kell lennie. Nem könnyű kérdés, hogy milyen k-kra létezik k-reguláris, 2-átmérőjű, k^2+1 pontú gráf. $k=3$-ra a K.II.8.4. feladatban szereplő Petersen-gráf, $k=2$-re az ötszög megfelelő. (Utóbbira érdemes is rákérdezni!)

10.7. A K.II.8.10. ábra mindhárom gráfja felbontható három teljes párosítás uniójára. (A legnehezebb talán a középsőnél megtalálni a jó felbontást.)

Ami a K.II.8.4. feladat gráfját illeti, a K.II.9.7. feladatban láttuk, hogy ennek a gráfnak összesen hat teljes párosítása van. Egyesével végignézhetjük, hogy bármelyiket hagyjuk el a gráfból, két pontdiszjunkt ötszög marad, aminek nincs teljes párosítása.

2. megjegyzés. Ha már ismerjük a Petersen-gráf „ötszög-csillagötszög-5küllős” alakját, akkor kicsit egyszerűbb a dolgunk, mert a „küllőket” elhagyva nyilvánvalóan két ötszög keletkezik, és a K.II.9.7. feladat megoldásából kiolvasható, hogy a Petersen-gráf bármely két teljes párosítása egymásba vihető a gráf egy alkalmas autmorfizmusával.

Egyébként érdemes talán elmondani a diákoknak, hogy sokáig azt gondolták, hogy ha egy 3-reguláris gráfnak van teljes párosítása, akkor felbomlik három teljes párosítás uniójára. Épp a Petersen-gráf volt az első ellenpélda.

10.8. A feladatot két csillaggal jelöltük, mert hiába aránylag egyszerűen leírható a megoldása, a tapasztalat azt mutatja, hogy nagyon nehéz rájönni.

10.10. A feladat egy érdekes felhasználása található a K.II.6.1. feladatban.

10.12. Természetesen van. Attól, hogy egy egyszerű gráfban minden fokszám legalább négy, még nem következik, hogy élelhagyással 4-reguláris gráfot lehet csinálni belőle. Például a $K_{4,5}$ teljes páros gráfban minden pont foka legalább négy, de bármely élét elhagyva már lesz négynél kisebb fokú pontja. De bármilyen páratlan pontú $2k$-reguláris gráf is ellenpélda $k > 2$-re.

2. megjegyzés. A feladat látszólag triviális, mégsem árt átvenni, mert különben nem tudatosodik ez a tény, és később tévedésekhez vezethet. Van persze egyszerűbb – de éppen ezért egyszerűbben át is látható – ellenpélda: minden 4-reguláris, hurokél nélküli gráfban van zárt Euler-séta, de ha hozzáveszünk egy további élt, már nem lesz benne zárt Euler-séta. Erre persze mondhatja valaki, hogy jó, de itt nem arról van szó, hogy valamilyen részgráf van. Ezért jobb példa talán a $K_{4,5}$: ebben nincs teljes párosítás, holott minden pont foka legalább négy.

10.15. A feladat nehéz azért is, mert megzavarhatja a diákokat az, hogy itt két izomorf gráfot nem tekintünk azonosnak. És nehéz, vagy legalábbis trükkös a megfeleltetés is, bár ez nem igazán látszik.

10.16. A K.II.12.2. feladatban látni fogjuk, hogy egy ilyen 4-reguláris gráfnak legalább 9 (10) pontja van, A K.II.12.2. feladatban pedig látni fogjuk, hogy egy ilyen k-reguláris gráfnak legalább $2k + 1$ $(2k + 2)$ pontja van.

11. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt! Bevezető feladatok

A vegyes feladatok közül idetartozik például a K.II.20.6. feladat.

Ebben a fejezetben és a következőkben azt az egyszerű gondolatot járjuk körül, hogy véges sok szám közül van legkisebb és legnagyobb. Ez a tulajdonság valójában a véges halmazok tulajdonsága: egy véges halmazból mindig ki lehet választani a valamilyen szempont szerinti legnagyobbat, legkisebbet – és ezt a szempontot mi magunk adhatjuk meg.

Először egyszerű feladatokon mutatjuk be a gondolatot. Egy immár klasszikussá vált Kürschák-feladat (K.II.11.4.) elemzésével kezdjük. Megjegyezzük, hogy az előbbivel kapcsolatos feladatok alkalmasak lehetnek az összefüggő komponensek fogalmának kialakítására is, célszerű együtt tárgyalni tehát az K.II.5. fejezet első feladataival. Itt még csak annyit használunk, hogy nemnegatív egészek között van legkisebb és hogy véges sok egész között van legnagyobb. Ennek a gondolatnak kissé bonyolultabb használatát igénylik a *„További feladatok”* (az ilyen című alfejezetben).

A fejezet ezután következő részében azonban már nem kifejezetten számok közül választunk legnagyobbat vagy legkisebbet, itt tehát már csak a végesség a „fogódzó”, viszont szabadabban határozhatjuk meg, hogy milyen szempont szerinti legszélsőt választjuk. Erre példa az egydimenziós Helly-tétel (K.II.11.2.), és ennek egy továbbfejlesztése, ami szintén immár klasszikussá vált Kürschák-feladat. – A kétdimenziós Helly-tételre a K.II.15. fejezetben térünk vissza.

A következő fejezetekben több területről vett példákon fejlesztjük a gondolatot. A K.II.12. fejezetben azt mutatjuk be részletesebben, hogyan van jelen ez a gondolat a gráfelméletben, majd a K.II.13. fejezetben azt, hogy a számelméletben és a kombinatorikus geometriában hogyan alkalmazható.

Megjegyezzük, hogy a „vegyük a valamilyen szempontból legszélsőt” gondolat fejlesztése az állapotfüggvény fogalmához vezet, ami az algoritmusoknál játszik fontos szerepet, bár bizonyításokban is használjuk. Erről részletesebben majd az algoritmusokról szóló kötet az ALG.II.1. fejezetében lesz szó.

A K.II.13. fejezetben a konvex burokkal kapcsolatban megemlítjük, hogy ez is egy „vegyük a legkisebbet” gondolatból „elvont” fogalom. Érdemes ismét emlékeztetni arra, hogy a „fa” fogalma kétszeresen ilyen extrém fogalom, a fa ugyanis egyszerre a legkisebb összefüggő és a legnagyobb körmentes gráf. (Mint említettük, nem mindenütt van ilyen szerencsénk, a lefogó pontok minimális száma például *legalább* akkora, mint a független élek maximális száma, de páratlan körnél nagyobb annál.)

11.1. Érdemes megfogalmazni, sőt: a diákokkal megfogalmaztatni, hogy mikor használható az első megoldásban használt ötlet: ha a feltételrendszer lineáris, homogén egyenletekből áll és az egyenletek mindegyikében az együtthatók összege nulla. (Fontos azonban, hogy az együtthatók ne legyenek nullák.) Ezt segíti elő a következő, K.II.11.2. feladat

11.7. Azt várjuk a diákoktól, hogy megfogalmazzák: véges sok szám között mindig van legkisebb és legnagyobb. Egyelőre nem várunk el többet. Természetesen ez a feladat egyáltalán nem választható el a K.II.11.8. és a K.II.11.9. feladatoktól. A könyv szükségszerű linearitásából következik, hogy egymás után tárgyaljuk őket.

11.8. Lásd a K.II.11.7. feladathoz írt megjegyzést.

11.9. Lásd a K.II.11.7. feladathoz írt megjegyzést.

11.11. A feladat szoros kapcsolatban áll az úgynevezett Sidon-feladattal, l. a K.II.19. fejezet K.II.19.1. és K.II.19.2. feladatait.

11.13. Az eddigi feladatokban pozitív, nem-negatív számok közül, vagy legalábbis véges sok szám közül vettük mindig a legkisebbet. A következő lépés az, amikor már mi mondjuk meg, hogy miszerint választjuk a legszélsőt egy véges halmazból. A következő alfejezetek már erre vonatkozó példákat adnak. Ehhez előkészítés a K.II.11.5. feladat.

11.21. Természetesen az a jobb, ha a K.II.11.1., K.II.11.2. és K.II.11.3. feladatok megoldása közben felrajzolt ábrákról közvetlenül a diákok is leolvassák ezt a két állítást.

A feladat egy alkalmazása a K.II.20.4. feladat.

12. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt! Gráfelmélet

12.4. Belátjuk, hogy egyetlen irányított Hamilton-út pontosan a tranzitívan irányított tournamentekben van. Ha a tournament tranzitívan irányított, akkor ez lefordítva a döntetlen mentes körmérkőzés (=tournament) nyelvére azt jelenti, hogy egyértelmű erősorrend van a versenyzők között, tehát az első legyőzi az összes többit, a második az elsőt kivéve mindenkit, stb. A Hamilton-út biztos az elsőből indul ki, biztosan a második helyezett lesz a második pontja és általában az i-edik helyezett az i-edik pontja. Tehát valóban egyetlen Hamilton-út van (és nincs Hamilton-kör).

Az állítás megfordítását a pontszámra, n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1,2,3$-ra az állítás triviális. Legyen tehát adva egy n pontú tournament. Azt már beláttuk, hogy van benne $x_1x_2\dots x_n$ Hamilton-út. Tudjuk, hogy több nincs. Azt akarjuk belátni, hogy ekkor minden x_ix_j él a kisebb indexűből mutat a nagyobb indexűbe. Tegyük fel, hogy nem így van. Vegyük a legkisebb i indexet, és a hozzátartozó legnagyobb j indexet, amelyre egy x_ix_j él fordított irányba mutat, tehát $j > i$ és az él mégis x_i-be mutat. Ekkor x_j-t betehetjük közvetlenül x_i elé. Ugyanis x_{i-1}-ből (ha van) x_j-be mutat az él i minimalitása miatt. Másrészt x_i-ből x_{j+1}-be mutat az él (ha x_{j+1} létezik) j maximalitása miatt. Vagyis találtunk még egy Hamilton-utat, ami ellentmond a feltevésünknek.

Ez az ellentmondás bizonyítja a feladat állításának helyességét.

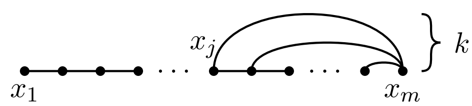
12.6. Könnyebb gyakorló feladat. Ezért feladhatjuk házi feladatnak, vagy később, ismétlésnél, emlékeztetőül.

12.7. Erősen épít a K.II.12.2. feladatra, jó gyakorlás lehet akár ismétlésnél, akár házi feladatnak.

12.9. Ha a „környéken” szereplő feladatokat megbeszéltük órán, ez nyugodtan adható nehezebb dolgozat feladatnak.

12.10. A lehető leghosszabb kört keressük. Mégsem a leghosszabb *kört* érdemes venni, mert ezt elég nehézkes volna nagyobb körré bővíteni, ha nem volna megfelelő számú pontja. Viszont az előző (=K.II.12.1.) feladat megoldása szinte szóról szóra átvihető.

Vegyük tehát ismét a gráf (egyik) leghosszabb útját, legyen ez $P = x_1x_2\dots x_m$, $(m \geq 3)$. Az x_m pontból csak P pontjaiba indulhat él, különben nem P volna a(z egyik) leghosszabb út. Másrészt x_m foka legalább k, tehát indul belőle legalább k pontba él. Ezek a pontok mind a P úton vannak, tehát az x_m-től legtávolabbi (azaz legkisebb indexű) pont – legyen ez ismét x_j – és x_m pont között még legalább $k-1$ pont van. Az $x_jx_{j+1}\dots x_mx_j$ kör most tehát egy legalább $k+1$ hosszú kör. Lásd 12.12.1. ábrát.



12.10T.1. ábra.

A feladat második részében foglalt kérdésre viszont nemleges a válasz. Ha k páros, akkor az ellenpélda egyszerű: vegyünk egy olyan páros gráfot, amelynek mindkét osztályában k pont van. Ebben a gráfban minden pont foka k, ám $k+1$ pontú kör nem lehet benne, mert csak páros hosszúságú körök vannak benne.

Páratlan k-ra általában nehezebb ellenpéldát konstruálni. Például $k = 3$-ra jó ellenpélda a K.II.8.4. feladat megoldásában talált gráf, az úgynevezett Petersen-gráf. Lásd még a GR.II.2.13. feladatot.

2. megjegyzés. Ha szerencsénk van, akkor lesz olyan diák, aki kört keres és azt akarja majd nagyítani. Ebben az esetben ugyanis maguktól is látják, hogy nem mindig magától értetődő, hogy *miből* vegyük a szélsőt, a legnagyobbat, stb. Ha rögtön a „leghosszabb utas” megoldással jönnek, akkor is érdemes rákérdezni, hogy mit szuggerál a feladat és ezzel szemben mit maximalizálunk a megoldásban.

12.11. A meglepő tapasztalatom az, hogy értelmes diákok is megtorpannak ez előtt a feladat előtt, hiába csinálták meg előtte a számos előkészítő feladatot, és így a K.II.12.6. feladatot is. Tehát érdemes feladni házi feladatnak.

12.13. Érdemes a diákoktól megkérdezni, hogy milyen kombinatorikus elveket használtunk, akár rejtettebb formában is.

12.14. A feladat a K.II.9.2. és a K.II.12.2. feladat összevonásával bizonyítható, e kettő gyakorlására jó. A gráfnak az adott feltétel mellett van teljes párosítása, ezt elhagyva még mindig igaz, hogy minden pont foka legalább n, s így van Hamilton-köre.

12.18. A gondolatmenettel az általános Turán-tétel is kijön. A tapasztalat azonban az, hogy nem szabad túl korán erőltetni az általánosítást, mert „elvesznek” benne. Inkább későbbi osztályban érdemes visszatérni rá, hogy hogyan is lehetne általánosítani és hogy melyik megy a már ismert bizonyítások közül (mindegyik).

12.19. Nyilvánvalóan egyszerűbb a második megoldás. Érdemes megkérdezni a diákokat, hogy mit gondolnak, van-e előnye az első megoldásnak, például algoritmizálás szempontjából.

13. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt!

Számelmélet és geometria

13.1. a) Ha véges sok $4k-1$ alakú prímszám volna, s ezek közül a legnagyobb P volna, akkor az $L=P!-1$ szám relatív prím volna minden P-nél nem nagyobb prímhez, így az összes $4k-1$ alakú prímszámhoz is. Másrészt L páratlan, tehát csak $4k+1$ alakú prímosztói lehetnek, ám akárhány $4k+1$ alakú prím szorzata maga is $4k+1$ alakú, míg $P!-1$ nyilván $4k-1$ alakú. $(P>4.)$

b) Hasonlóan látható be, mert L maga $6k-1$ alakú, így nem osztható sem kettővel, sem hárommal, és ha P a legnagyobb $6k-1$ alakú prím, akkor nem osztható egyetlen $6k-1$ alakú prímmel sem. Tehát csak $6k+1$ alakú prímosztói vannak, az ilyenek szorzata pedig maga is $6k+1$ alakú.

13.2. A következő segédtélelen múlik a bizonyítás:

Egy x^2+1 alakú számnak nincs $4k-1$ alakú pozitív (prím)osztója.

Megjegyezzük, hogy ha nincs $4k-1$ alakú prímosztója, akkor $4k-1$ alakú pozitív osztója sem lehet, hiszen $4k-1$ alakú pozitív szám nem állhat elő $4k-1$ alakú prímek szorzataként. (Ezt már a K.II.13.1. feladat megoldásában is használtuk.) A segédtétel bizonyítását lásd a **??**. feladat megoldásánál.

Ha véges sok $4k+1$ alakú prím volna, akkor ezek közül a legnagyobbat ismét P-vel jelölve a P^2+1 szám ismét relatív prím minden P-nél nem nagyobb számhoz, így az összes $4k+1$ alakú prímhez is. Viszont $4k-1$ alakú prímosztója a segédtétel szerint nem lehet, és kettővel sem osztható. Tehát ennek a számnak egyáltalán nem volna prímosztója, holott nagyobb egynél.

2. megjegyzés. Érdeklődőbb diákoknak feladhatjuk, hogy a $8k+1$, $8k+3$, $8k+5$ és $8k-1$ alakú prímekből is végtelen sok van. Ennek a használt segédtétel segítségével elérhető bizonyításához a segítő lökést l. [**?**] 98. oldalán.

13.3. a) bizonyítása átszorzással triviális. b)-hez írjunk az egyenlőség jobb oldalán $\sqrt{2}$ helyett mindenütt u/v-t és bővítsük az így kapott emeletes törtet v-vel. Ekkor a

$\sqrt{2}=\frac{2v-u}{u-v}$

egyenlőséghez jutunk. Itt $u>v$, mert $\sqrt{2}>1$, tehát a nevező pozitív. Másrészt $u-v<v$, tehát a nevező kisebb v-nél. Ha tehát feltételezzük, hogy u/v a $\sqrt{2}$-t előlállító törtek közül a legkisebb nevezőjű, akkor máris ellentmondásra jutottunk.

13.4. A K.II.13.3. feladat azonosságát általánosíthatjuk úgy, hogy 2 helyére egyszerűen c-t írunk:

$\sqrt{c}=\frac{c-\sqrt{c}}{\sqrt{c}-1}$.

Ha itt $\sqrt{c}$ helyébe u/v-t írunk, akkor a jobb oldalon v-vel való bővítés után a $\frac{cv-u}{u-v}$ törtet kapjuk. Azt szeretnénk, hogy a nevező kisebb legyen v-nél. Ehhez arra lenne szükségünk, hogy $u-v<v$ teljesüljön, vagyis u/v kettőnél kisebb legyen. Ez ugyan nem minden c-re teljesül, de azt mindenesetre megállapíthatjuk, hogy a $c=3$ esetben is kész vagyunk a bizonyítással. De ha utánagondolunk, hogy miért működik a bizonyításunk kettőre és háromra, és miért nem működik ötre, vagy nagyobb egészekre, akkor rájöhetünk, hogy azért, mert csak e két szám

négyzetgyökének egész része egy. Ebből kapunk egy ötletet: próbáljunk meg az „1” helyére az egyenlőségünkben $k = \sqrt{c}$-t írni:

$\sqrt{c} = \frac{c-k\sqrt{c}}{\sqrt{c}-k}$.

Nyilvánvaló, hogy az egyenlőség így is érvényben marad. Most $\sqrt{c}$ helyett a jobb oldalon u/v-t írva és v-vel bővítve azt kapjuk, hogy

$\sqrt{c} = \frac{cv-ku}{u-kv}$,

és itt már teljesül, hogy $u-kv < v$, vagyis $u < (k+1)v$, mert $u = \sqrt{c}v < (\lfloor\sqrt{c}\rfloor+1)v = (k+1)v$. Most is ellentmondásra jutottunk tehát azzal a feltevésünkkel, hogy u/v a legkisebb nevezőjű, $\sqrt{c}$-t előállító tört.

13.9. A megoldás nyilván elmondható teljes indukcióval is. Ez jól mutatja, hogy a teljes indukció valójában annak az egyszerű elvnek a technikai megfogalmazása, hogy pozitív egészek között mindig van legkisebb. Ismeretes, hogy ez utóbbi állítás nem fogalmazható meg azon a nyelven, amelyen csak számokról lehet beszélni, de számok halmazairól nem, a teljes indukció viszont megfogalmazható. Ez talán mutat valamit a teljes indukció gondolatának megértési nehézségeiről.

13.11. Talán nem árt megemlíteni, hogy maga a „konvex burok” is egy „vegyük a legkisebbet” gondolatból született fogalom. Egy alakzat konvex burka ugyanis az alakzatot tartalmazó legkisebb konvex halmaz.

13.12. Ha találunk *egy* olyan átlót, amely a sokszög belsejében fut, ez két kisebb sokszögre pontja a sokszögünket, s akkor a sokszög oldalszámára vonatkozó teljes indukcióval már következik a feladat állítása.

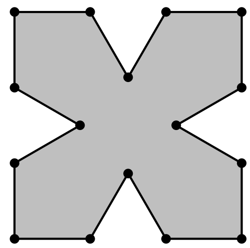
Ilyen átlót viszont nem olyan könnyű találni. Ha például azt akarnánk bebizonyítani, hogy két egymáshoz legközelebbi csúcs közötti átló megfelel, erre könnyű ellenpéldát rajzolni. Ha két másodszomszédot akarunk összekötni, ez sem feltétlenül lesz megfelelő, még abban az esetben sem, ha a köztük levő csúcsnál konvex szög van. Mégis ez a második eset javítható.

Legyen tehát P a sokszög egy csúcsa, amelynél konvex szög van. (A sokszög konvex burkának bármely csúcsa ilyen, ld. a K.II.13.1. feladatot.) Legyen a P csúcs két szomszédja A és B, és húzzuk be az AB átlót. Ha ezt az átlót a sokszög határvonala nem metszi, akkor kész vagyunk. Ha metszi, akkor az APB háromszögbe esik csúcsa a sokszögnek. Sajnos most sem jó gondolat az, hogy vegyük ezek közül a P csúcshoz legközelebbit, mert az őt P-vel összekötő szakaszba is belemetszhet a sokszög! Viszont mondhatjuk azt, hogy kezdjük el tolni felfelé az AB egyenest önmagával párhuzamosan. Ez sorban érinteni fogja az APB háromszög belsejében fekvő sokszögcsúcsokat. Legyen az utolsónak elért (*ilyen* értelemben P-hez legközelebbi) csúcs Q, a rajta átmenő, AB-vel párhuzamos egyenes messe PA oldalt A'-ben, PB oldalt B'-ben. Nyilvánvaló, hogy az $A'PB'$ háromszög belsejében már nem lehet pontja a sokszögnek, hiszen akkor az azt tartalmazó oldal legalább egyik végpontja még csak ezután kerülne sorra AB párhuzamos eltolása során.

Ebből viszont következik, hogy a PQ átló a sokszög belsejében fut. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

13.13. Vegyünk egy négyzetet, és minden oldalának középső harmadára állítsunk befelé egy-egy szabályos háromszöget, a két új oldallal helyettesítsük a négyzet oldalának középső harmadát. L. a 13.13.1. ábrát. Könnyen ellenőrízhető, hogy a négyzet középpontjának egyetlen oldalegyenesre vett merőleges vetülete sem esik az oldalra. (Ennek igazolásához a szimmetria miatt elég egy „régi” és egy „új” oldalt ellenőrizni.)

2. megjegyzés. A feladat attól nehéz, hogy a konvex sokszögek között nincs ilyen. Ennek és a K.II.13.4. feladatnak tehát érdemes együtt szerepelnie.



13.13T.1. ábra.

Ha nem boldogulnak a diákok a feladattal, érdemes valami ilyesmit mondani könnyítésül:

Vegyünk két egybevágó szabályos háromszöget, az ABC és ADE szabályos háromszögeket, ahol BC és DE párhuzamos. Ha a két háromszöget kicsit "széttoljuk" BC-re merőlegesen, akkor a kapott $A'B'C'$ háromszögekre igaz,hogy az eredeti A pontnak $B'A'$, $C'A'$, $D'A'$ és $E'A'$ oldalegyenesre eső merőleges vetülete nem magára az oldalra esik.

13.15. A K.II.13.4. feladat megoldása után ez egyszerű gyakorló házi feladat lehet. Érdemes a fizikai bizonyítást is szóba hozni: ha minden vetület pont a síkon kívülre esne, akkor készíthetünk olyan fizikai teste, amelynek pont ez a pont a súlypontja, s akkor bármelyik lapjára is fordítanánk, átbillenne valamelyik másik lapjára, s ezt örökké folytatná, tehát eljutnánk az örökmozgóhoz. Lásd az idézett [**?**]. 117. oldalát.

13.17. Ha egy egységnégyzetet eltolunk az oldallal párhuzamosan két egységgel, majd középpontja körül 45°-kal elforgatjuk, akkor az elforgatott négyzet egyik csúcsa és a másik négyzet egyik oldalának középpontja közötti távolság adja a minimumot.

Az azonban igaz, hogy a minimális távolság valamelyik sokszög egyik csúcsának a hozzá legközelebbi oldaltól vett távolsága lesz. Természetesen a minimális távolság megjelenhet másutt is (ha például az előbbi példában nem forgatjuk el az eltolt négyzetet). De az biztos, hogy ha A és B a két legközelebbi pont a két sokszögben, akkor a) mindkettő a kerületen van és b) a kettő közül legalább az egyik csúcspont, vagy ha A is, B is egy-egy oldal belső pontja, akkor e két oldal párhuzamos.

Ennek alapján már belátható, hogy ha vesszük mindkét sokszög összes csúcsának távolságát a másik sokszög minden oldalától, akkor e távolságok közül a(z egyik) legkisebb biztos a két sokszög pontjai közötti minimális távolságot adja. Hiszen bármelyik két másik ponthoz találtunk a távolságok között nem nagyobbat.

13.20. Természetesen, ha egészen egzaktok akarunk lenni, akkor a K.II.13.10M1. megoldást csak azután tárgyalhatnánk, amikor már a zárt halmaz topológiai fogalmát definiáltuk. De a feladat elég szemléletes ahhoz, hogy anélkül is feladjuk és a megoldás, amit első helyen ismertettünk, végülis egzakt anélkül is, hogy a zártság fogalmát bevezetnénk és bebizonyítanánk, hogy zárt halmaznak van átmérője. Ha nem akarunk támaszkodni erre a – csak később bizonyítandó – tételre, akkor is adható egzakt bizonyítás, ezt ismerteti K.II.13.10M2. Ez, és egy másik, hasonló megoldás olvasható [**?**]. 163. oldalán.

14. Tetszőlegesen sok és végtelen sok

A fejezet témájába vágó feladatok még: K.II.20.15.-K.II.20.16.; K.II.20.17, K.II.20.18. és K.II.20.19.; valamint K.II.20.20.

14.1. Vegyük az összes olyan természetes számot, amely hárommal nem osztható, és képezzük belőlük az

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots, 3k+1, 3k+2, \ldots$$

végtelen sorozatot. Ez a sorozat nyilván nem számtani sorozat, hiszen felváltva 1 és 2 a szomszédos tagok különbsége. Másrészt ha például egy 10 hosszú számtani sorozatot keresünk, akkor vegyük például az $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28$ sorozatot. Ugyanígy ha tetszőleges n hosszú számtani sorozatot keresünk, akkor vehetjük az 1-ből induló, 3 differenciájú számtani sorozat első n elemét. Ez a sorozat tehát megfelel a feladat feltételeinek.

2. megjegyzés. A megadott sorozatnak azt a tulajdonságát használtuk, hogy két *végtelen* számtani sorozatnak (a $3k+1$ alakú számok sorozatának és a $3k+2$ alakú számok sorozatának) az uniója.

Tehát azt az egyszerű állítást használtuk, hogy *végtelen* számtani sorozatban van *akármilyen* hosszú számtani sorozat. Ezt, bár magától értetődő, mégis érdemes hangsúlyozni

14.2. A feladat kérdésére természetesen igenlő a válasz: például a természetes számok halmaza végtelen halmaz, és minden eleme véges szám. De az a tapasztalat, hogy ha megkérdezzük, mégis elgondolkodnak rajta, annak ellenére, hogy „tudják” a választ. Van, aki azért, mert nem érti, hogyan lehet ilyen magától értetődő dolgot megkérdezni, de van aki azért, mert hirtelen elcsodálkozik. Talán van is miért.

Talán kézenfekvő feladni a kérdés fordítottját is, l. a K.II.14.3. feladatot.

14.3. Talán ez is túl egyszerűnek tűnik, de nem árt tisztázni: az egyenes mint ponthalmaz végtelen, tehát ha veszünk egy halmazt, amely két egyenesből áll, akkor ez egy véges halmaz, ám minden eleme végtelen halmaz.

14.4. A következő bizonyítást nem árt kirészletezni:

A feltétel szerint az S halmaznak van egy 1-nél nagyobb eleme, ezek egyikét nevezzük a_1-nek. Most keressünk egy egész számot, ami nagyobb a_1-nél. Ilyen szám például az $[a_1]+1$ szám. A feltétel szerint S-nek ennél az egész számnál is van nagyobb eleme, ez(ek egyiké)t nevezzük a_2-nek. Így már találtunk két elemet S-ben: $a_1 < a_2$.

Az eljárást tetszőleges n-re folytathatjuk. Tegyük fel, hogy már kiválasztottuk S-ben az $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ számokat. Keressünk egy egész számot, amely nagyobb mindegyiküknél, azaz nagyobb a_n-nél. Ilyen egész szám például $[a_n]+1$. A feladat feltétele szerint S halmazban van olyan elem, amely nagyobb ennél az egész számnál, így az összes eddig kiválasztott számnál is. Válasszuk ki az egyik ilyen számot a_{n+1}-nek. Így már sikerült $n+1$ számot találnunk S-ben, az $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1}$ számokat.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az S halmaz minden n pozitív egész számra *több* mint n elemű. Ez pedig azt jelenti, hogy végtelen sok eleme van.

Az eljárást azért is érdemes végigvenni, hogy kiemelhessük, hogy közben a valós számok következő fontos tulajdonságát használtuk, az úgynevezett *arkhimédeszi axiómát*:

Minden valós számnál van nagyobb egész szám.

Persze ezt csak akkor érdemes nagyon hangsúlyozni, ha rákérdeznek. Elvégre azt, hogy minden számnak van egészrésze, a diákok általában magától értetődőnek tekintik. A kérdésbe ráérünk a valós számok topológiájának vizsgálatakor, tehát a határértékszámítás környékén alaposabban belemenni.

14.5. A kérdésre biztosan érkezik rossz válasz, ráadásul remélhetőleg bizonyítással, de ha nem, akkor is próbáljuk meg rábírni a rossz választ adókat, hogy a lényegében a következő bizonyítást prezentálják: Ha számhalmazon csak egész számokból álló halmazt értenénk, akkor az állítás igaz volna, hiszen a legnagyobb és a legkisebb elem is egész szám volna, s e két egész szám között csak véges sok szám van, a számhalmazunk tehát csak ezt a véges sok számot, vagy ezek egy részét tartalmazhatná.

Ezután figyelmeztessünk – ha más diákok ezt nem teszik meg –, hogy számhalmazon ennél bővebb halmazt is érthetünk. Elég, ha a racionális számokat is számoknak tekintjük, és máris könnyű ellenpéldát mutatni. Legyen az S halmaz például a $[0, 1]$ zárt intervallum racionális számaiból álló halmaz. Ennek az S halmaznak van legnagyobb eleme (az 1) és legkisebb eleme (a 0), ám e két szám között végtelen sok racionális szám van. (Például az összes pozitív egész szám reciproka eleme S-nek.)

14.6. Megmutatjuk, hogy a kérdésre nemleges a válasz. Mutatunk ugyanis olyan (természetes számokból álló) sorozatot, amelyben van akármilyen hosszú számtani sorozat, de nincs végtelen hosszú számtani sorozat. Ehhez csak annyit kell csinálnunk, hogy veszünk egyre több egymás utáni természetes számot, de mindig egyre többet hagyunk is ki két ilyen „tömb” között.

Pontosabban: a sorozat legyen például a következő:

$$1, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, \dots$$

.

Vagyis vesszük az 1-et, utána kihagyjuk a következő számot. Aztán vesszük a következő két számot (a 3-at és a 4-et), majd kihagyjuk az utána következő kettőt. Aztán vesszük a következő három számot (7, 8, 9), majd kihagyjuk a rákövetkező hármat. Tehát az „n-edik lépésben” vesszük a sorra jövő n számot, majd kihagyjuk az utána sorra jövő n számot.

Világos, hogy ebben a sorozatban minden n-re van n hosszú számtani sorozat (épp az n-edik lépésben veszünk be a sorozatba egy n hosszú számtani sorozatot). Másrészt nem lehet benne végtelen hosszú számtani sorozat, hiszen egy számtani sorozat szomszédos tagjai között mindig ugyanakkora a távolság, itt viszont az n-edik lépésben beválasztott utolsó szám és az $n + 1$-edik lépésben beválasztott első szám között egyre nagyobb a távolság.

2. megjegyzés. A feladat megoldásához, ha a diákoknak nincs ötletük, a következő rávezető kérdést tehetjük fel:

Egy számtani sorozatban az egymást követő tagok távolsága mindig ugyanakkora. Meg lehet-e csinálni, hogy úgy veszünk fel egyre hosszabb számtani sorozatokat, hogy a köztük levő távolság is egyre nagyobb legyen?

Megjegyezzük, hogy ha egy diáknak van rá megoldása, akkor ahelyett, hogy rögtön elmondatnánk vele, megpróbálhatjuk rávenni, hogy tegyen fel ilyen rávezető kérdést ő maga.

14.7. A legegyszerűbb példa: az egyik sorozat a páros számok sorozata, a másik a páratlan számoké. Mindkettőben van *végtelen* hosszú számtani sorozat is.

A feladatot nyilván átmenő feladatként adjuk fel. És figyelmeztethetünk is, hogy a feladat „becsapós, nagyon egyszerű a válasz.

14.8. Megmutatjuk, hogy a K.II.14.1. feladat megoldásában talált sorozat és a kimaradt számokból képzett sorozat megfelel.

Ez a sorozat a következő volt:

$$1, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, \dots.$$

Vagyis vettük az 1-et, utána kihagytuk a következő számot. Általában pedig az „n-edik lépésben” vettük a sorra jövő n számot, majd kihagytuk az utána sorra jövő n számot.

Ez a sorozat azért volt jó, mert az n-edik lépésben vett n egymás utáni szám egy n hosszú számtani sorozatot alkotott, viszont utána kimaradt n szám, tehát tetszőlegesen nagy „luk” is volt a sorozatban. Vegyük észre, hogy szinte ugyanez teljesül a kimaradt számsorozatra is: az n-edik lépésben kihagyott számok egy n hosszú számtani sorozatot alkotnak, előttük viszont egy n hosszú „luk" van a kihagyott számok között.

Ezzel a feladat kérdésére igenlő választ adtunk.

2. megjegyzés. Ha a diákoknak nincs ötletük, akkor javasolhatjuk, hogy vizsgálják meg a K.II.14.1. feladat megoldásában talált sorozatot!

14.10. Érdemes talán megemlíteni, hogy ahogy a K.II.13.1. feladatnál azt használtuk, hogy $n! + 1$ nem osztható kis prímekkel, most épp fordítva, azt használjuk, hogy viszont $n! + i$ már osztható i-vel (ha $i \leq n$). Ez is egy példa arra, amikor majdnem ugyanabból a gondolatból – persze kis, ám lényeges változtatással – két ellentétes következtetést tudunk levonni.

14.11. Csakis közös órai megbeszélésre, s ekkor rávezetjük a diákokat arra, hogy a kínai maradéktételt használják – vagy kiadhatjuk egy vállalkozó diáknak kiselőadásra a K.II.14.7. feladattal együtt. Vagy alaposan megbeszéljük ezt a feladatot órán és a másikat feladjuk gondolkodtató házi feladatnak abból a célból, hogy a diákok jól megértsék az órai bizonyítást.

14.13. Ez mindenképp súlyos feladat, leginkább kiselőadás témájának jó, vagy számelmélet iránt érdeklődő csoportnál órai megbeszélésre. A megoldásnál és a segítő lökésnél jelezzük, hogy hogyan érdemes a bizonyítás „motívumát" közelebb hozni a diákokhoz.

14.14. A K.II.14.8. feladatnál mondottak erre is érvényesek.

14.20. A feladat azonos az K.II.1.4. feladattal. Itt az összefüggés kedvéért ismételjük. Ha emlékeznek rá a diákok, annál jobb.

14.30. Egyszerű gyakorló feladatról van szó, de azért valami „útközben" tisztázódik, lásd a megoldás a) részét.

2. megoldás. a): Ha a független pontok maximuma minden részgráfban egy k korlát alatt marad, akkor az egész gráfban sincs k-nál több független pont. Ez triviálisan NEM IGAZ, ha részgráfon *tetszőleges* véges részgráfot értünk: ebben az esetben minden n-re van végtelen üres részgráf. De ha *feszített részgráfokra* szorítkozunk – és ez az értelmes –, akkor triviálisan igaz az állítás. Ha ugyanis volna $k + 1$ pont, vegyük azt a részgráfot, amely ebből a $k + 1$ pontból áll és máris kész az ellentmondás.

b) Ha a független élek maximuma minden részgráfban egy k korlát alatt marad, akkor az egész gráfban sincs k-nál több független él. Ez is triviális: ha volna $k + 1$ független él, vegyük azt a részgráfot, amelyet ennek a $k + 1$ élnek a végpontjai feszítenek, máris kész az ellentmondás.

c) A gráf kromatikus számáról a K.II.14.5. feladatban láttuk be, hogy ilyen értelemben öröklődik.

d) viszont azt jelentené, hogy ha egy végtelen gráf minden részgráfjának pontjai lefedhetők k-nál nem több éllel, akkor az egész végtelen gráf minden pontja is lefedhető k-nál nem több éllel. Természetesen az utóbbi nem igaz. Viszont az is nyilvánvaló, hogy egy legalább $2k + 1$ pontú gráfban vagy van izolált pont, s akkor egyáltalán nem értelmeztük a lefedő élrendszerét, vagy nincs, és akkor biztosan nem fedhető le k-nál nem több éllel. Tehát a feltétel sem teljesül. Az állítás most tehát semmitmondóan igaz – feltéve, hogy értelmes, azaz a gráfnak nincs izolált pontja.

Megjegyzés. Sokkal nehezebb viszont annak eldöntése, hogy vajon a lefogó pontok minimális száma is öröklődik-e véges részgráfról a végtelenre gráfra. Lásd a K.II.14.7. feladatot.

15. Kombinatorikus geometria

15.2. Vegyük a pontok konvex burkát.

Ha a konvex burok csúcsain kívül is van eleme a ponthalmaznak, akkor egy ilyen elemet véve az egyik résznek, ez nyilván nem választható el a konvex burok egészétől, így még kevésbé az összes többi ponttól.

Ha a konvex burok legalább négy pontból áll, akkor vegyük az egyik résznek két másodszomszéd csúcsot, ezek nyilván nem választhatók el a konvex burok többi pontjától sem, így még kevésbé az összes többi ponttól.

Egyetlen eset maradt: ha a konvex burok három pontból áll, és a ponthalmaznak nincs több pontja. Vagyis csak a háromelemű ponthalmazokra nem igaz az állítás.

15.3. Természetesen a feladat egyszerű következménye a kétdimenziós Helly-tételnek, közelebbről a K.II.15.4. feladatnak. Érdemes ott visszatérni rá, vagy ezt bevezető feladatként feladni. A tapasztalat szerint itt hamarabb rájönnek az ott szereplő megoldásra. További megoldások is lehetségesek, ezeket lásd [**?**]. 146skk. oldalain.

15.7. Van ilyen színezés. Színezzük

– fehérre azokat a rácspontokat, amelyek abszcisszája páros, ordinátája páratlan,
– feketére azokat, amelyeknek abszcisszája páratlan, ordinátája páros,
– és tarkára azokat amelyek koordinátái azonos paritásuak.

Az a) tulajdonság nyilvánvalóan teljesül. Tarka színű pontból minden x-tengellyel párhuzamos egyenesen végtelen sok van, a fehérekből és feketékből pedig felváltva van végtelen sok.

Ami b)-t illeti, tekintsünk három különböző színű pontot, legyen (a, b) tarka, (c, d) fehér és (e, f) fekete. Ha ezek egy egyenesen volnának, akkor teljesülne, hogy

$$\frac{e-c}{f-d} = \frac{e-a}{f-b},$$

vagyis

$$(e-c)(f-b) = (e-a)(f-d).$$

Itt $e-c$ és $f-d$ páratlan, másrészt $f-b$ és $e-a$ ellentétes paritású, tehát az egyenlőség egyik oldalán páratlan, a másik oldalán páros szám állna, ami lehetetlen. Tehát b) is teljesül.

15.8. Ha csak egy egyenes van adva, akkor két tartomány van, az egyiket fehérre, a másikat feketére színezve kész vagyunk.

Ezután az egyenesek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk, hogy a színezés mindig lehetséges. Vegyünk el egy tetszőleges egyenest. A maradó egyenesek által határolt tartományokat színezzük ki – ez az indukciós feltevés szerint lehetséges. Ha visszahelyezzük az elhagyott egyenest, akkor ez némely tartományokat ketté vág, némelyeket változatlanul hagy. Az előbbieket mindenképp kétszínűvé kell tennünk, ami befolyásolhatja a többi színét is. A következőképp oldjuk ezt meg: az egyenes egyik oldalán megfordítjuk a tartományok színezését (így a kettévágott tartományoknak egyik fele kap új színt), a másik oldalon változatlanul marad a színezés. Ez nyilvánvalóan jó színezése lesz az egyenesek által kialakított összes tartománynak.

2. megjegyzés. A bizonyításra érdemes úgy rávezetni a diákokat, hogy kezdjék el először például a négy egyenes által határolt tartományok színezését. Aztán az öt egyenesét. Aztán kezdjék el a színezést „felépíteni”.

15.9. Rögtön az utolsó kérdésre válaszolunk, ebből a másik két kérdésre is könnyen adódik a válasz. Nyilvánvaló, hogy minden pontnak legalább egy a fokszáma, tehát legalább $\lceil n/2 \rceil$ élre szükség van. Páros n esetén ez például úgy érhető el, ha felveszünk egységnyi távolságra levő pontpárokat egymástól jó messze, akkor több élt nem is kell behúznunk, a pontok kölcsönösen a párjaikhoz lesznek a legközelebb. Itt még vannak azonos távolságra levő pontok, de minden pontpár egyik csúcsát „kis elcsúsztatatásával" ez kiküszöbölhető. Páratlan n esetén felveszünk még egy pontot, ami még távolabb van az összes ponttól, mint ők egymástól.

Másrészt a gráfban nem lehet kör. Tegyük fel ugyanis, hogy van egy $K = x_1x_2 \cdots x_m$ kör a gráfban. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy x_1x_2 él azért van behúzva, mert x_1-hez x_2 van a legközelebb. De akkor x_3 közelebb van x_2-höz, mint x_1, különben az x_2x_3 élt nem húztuk volna be. Tehát az x_1x_2 szakasz *hosszabb* az x_2x_3 szakasznál. Ugyanígy kapjuk, hogy az $x_{i-1}x_i$ szakasz hosszabb x_ix_{i+1} szakasznál, s végül az x_nx_1 szakasz hosszabb az x_1x_2 szakasznál. Ebből viszont következik, hogy az x_1x_2 szakasz hosszabb önmagánál, ami ellentmondás. Ebből következik a feltevés helytelensége, vagyis tényleg nincs kör a gráfban. Így a gráf erdő, tehát legfeljebb $n-1$ éle van. Ilyen elrendezést könnyen fel is rajzolhatunk, már egy egyenesen is: x_1 és x_2 távolsága legyen 1, x_2x_3 távolsága (ugyanabban az irányban) 2, és általában x_ix_{i+1} távolsága legyen i egység, $i = 1, \quad 2, \quad \cdots \quad n-1$.

15.10. A megoldás lényegében változtatás nélkül átvihető. Most is $\lceil n/2 \rceil$ és $n-1$ között lehet az élszám. A példák most változnak.

Az alsó becslést most például úgy érhetjük el, hogy két párhuzamos egyenesen felveszünk egymáshoz nagyon közeli pontokat, mindkettőn egyforma sokat, ha n páros, az egyiken eggyel többet, ha n páratlan.

A felső becslést egy csillaggal érhetjük el. Ennek telített pontja egy kör középpontja, a többi pontot a körívre helyezzük, egymáshoz a sugárnál nagyságrenddel közelebbre.

15.11. a) és c) nyilván ekvivalens, b) csak $n = 3$-ra ekvivalens velük. d) nyilván következik például a)-ból. Másrészt ha a konvex burok n-nél kevesebb pontból állna, akkor egy pontból húzott átlókkal háromszögelve a konvex burkot, a belsejében maradó P pont valamelyik ilyen háromszög belsejében lenne. Tehát d) sem lehetne igaz. Vagyis a), c) és d) ekvivalens, b) csak $n = 3$-ra ekvivalens velük.

15.12. a) Azt kell bebizonyítanunk, hogy az öt pont konvex burka ötszög. Tegyük fel, hogy a konvex buroknak kevesebb pontja van. Ha a konvex burok háromszög volna, akkor a két másik pont e háromszög belsejében volna. Vegyük az egyiket és a háromszög három csúcsát. Ezek minden sorrendben konkáv négyszöget határoznak meg, ami ellentmond a rájuk rótt kikötésnek. Ha a konvex burok négyszög, húzzuk be egyik átlóját. Ez két háromszögre bontja a négyszöget és az ötödik pont valamelyik belsejében van. Innentől kezdve a bizonyítás ugyanaz, mint előbb.

b) Azt kell bebizonyítanunk, hogy az n pont konvex burka tartalmazza mind az n pontot, azaz egy (konvex) n-szög. Valóban, ha a konvex buroknak kevesebb pontja volna, akkor van a belsejében legalább egy megadott pont, jelöljük A-val. Bontsuk egymást nem metsző (pl. egy csúcsból induló) átlókkal háromszögektre a konvex burkot. Az A pont valamelyik ilyen háromszög belsejében van, s akkor A és e háromszög három csúcsa olyan négy pont, amelyek nem alkotnak konvex négyszöget.

15.13. Vegyük az öt pont konvex burkát. Ha a konvex buroknak van négy csúcsa, akkor ezek egy konvex négyszöget alkotnak. Ha a konvex burok háromszög, akkor további két pont, A és B a konvex burok belsejében fekszik. Az AB egyenes a konvex burok egyik oldalát nem metszi. Legyen ez az oldal az ST oldal. Ekkor az $ABST$ négyszög konvex.

15.14. Akárhogyan választunk ki öt pontot, ezek közül négy konvex négyszöget alkot K.II.15.3. szerint. Így legalább $\binom{n}{5}$ konvex négyszöget kapunk, de ezek között nyilván lehetnek azonosak. Meg kell számolnunk, egyet hányszor számolhattunk. Nyilván legfeljebb annyiszor, ahány „ötösben" benne van mind a négy pont, vagyis legfeljebb $n-4$-szer. Azt kapjuk, hogy legalább

$$\frac{\binom{n}{5}}{n-4} = \frac{\binom{n}{4}}{5}.$$

Ezzel beláttuk, hogy a pontokból alkotható négyeseknek legalább minden ötödik négyes konvex négyszöget alkot.

2. megjegyzés. Hasonló gondolatra épülő feladatok: K.II.17.7.-K.II.17.10.

15.15. Természetesen a K.II.15.5M. megoldás a K.II.15.4. feladat után nem tartalmaz új kombinatorikus geometriai meggondolást, átalakul egyenlőtlenség bizonyításává. Egyrészt érdemes ilyen feladatot is feladni, ahol különböző területről származó tudást kell alkalmazni. Másrészt érdemes elgondolkodni, hogy vajon milyen megoldásra gondoltak az olimpiai feladat kitűzői.

15.16. $k = 1$-re az állítás nyilván semmitmondóan nem igaz. $k = 2$-re azonban következik az egydimenziós Helly-tételből (l. K.II.11.4.).

Tekintsük ugyanis a téglalapok vetületeit az x-tengelyen. Ezek egy-egy zárt intervallumot alkotnak. Azt is tudjuk hogy közülük bármelyik kettőnek van közös pontja, hiszen a két téglalap közös pontjának vetülete mindkettőben benne van. Az egydimenziós Helly-tételből következik, hogy akkor az összes vetületnek is van egy közös pontja. Húzzunk párhuzamost az y tengellyel a közös ponton keresztül. Ez az egyenes e minden téglalapot metsz. Az e egyenes és a téglalapok metszete egy-egy szakasz. Ezek a szakaszok felfoghatók úgy, mint a téglalapok e-re eső vetületei. Az előbb mondottak szerint ezeknek is van egy közös pontjuk, s ez az összes téglalapnak közös pontja.

15.17. A megoldás lényegében azonos a K.II.15.1. feladat megoldásával, de most a K.II.11.4. helyett magát a K.II.15.1. feladatot kell használni.

15.20. Húzzunk minden adott pont köré egy egységsugarú kört. Ezek közül bármelyik háromnak van közös pontja a feltétel szerint. De akkor Helly tétele szerint az összes ilyen körnek is van egy K közös pontja. A K középpontú egységsugarú kör tehát az összes pontot lefedi. Így $a \leq 1$, s mivel kisebb nyilván nem mindig elég, ezért $a = 1$.

15.21. A bizonyításban csak annyit használtunk, hogy bármely három pont lefedhető egy legfeljebb egységsugarú körrel. Tompaszögű háromszög esetén ez lényegesen gyengébb feltétel.

15.22. Felhasználjuk, hogy *ha egy háromszög mindhárom oldala legfeljebb egységnyi, akkor lefedhetők egy legfeljebb* $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *sugarú körrel.* A **??**. feladat megoldásában láttuk, hogy ebből következik, hogy az összes is lefedhető egy ilyen sugarú körrel. Kisebb nyilván nem elég, már akkor sem, ha az egységoldalú szabályos háromszög három csúcsa van adva.

A felhasznált segédtétel a következőképpen bizonyítható:

Ha a háromszög hegyesszögű, akkor legnagyobb szöge 60°és 90°közé esik. Ha R a köréírt kör sugara, akkor ennek az oldalnak a hossza $a = 2R\sin\alpha \geq 2R\sin 60° = R\sqrt{3}$, amiből következik, hogy $R \leq \frac{a}{\sqrt{3}}$. Mivel $a \leq 1$, ezért az állítás hegyesszögű háromszögre következik.

Ha a háromszög derék- vagy tompaszögű, akkor a legnagyobb oldala mint átmérő fölé írt kör lefedi, s ennek sugara az oldal fele, ami legfeljebb $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. megjegyzés. Jaglom és Boltyanszkij idézett könyvükben ([**?**], 26.) így „illusztrálják” ezt a tételt, illetve ennek végtelen ponthalmazra vonatkozó általánosítását: ha az asztalon egy d átmérőjű folt van, az biztosan lefedhető egy $d/\sqrt{3}$ sugarú kör alakú szalvétával, de kisebbel nem mindig. Nem ismeretes, hogy melyik az a *legkisebb* területű alakzat, amelybe *minden* d átmérőjű alakzat belefér. Ismeretes, hogy minden d átmérőjű alakzat lefedhető már egy olyan szabályos hatszöggel is, amely köré írt kör sugara $d/\sqrt{3}$, de ez a hatszög sem minimális területű. Lásd Boltyanszkij és Gohberg könyvét, [**?**]. 9-11. oldal.

16. Az egyszerű skatulyaelv

16.8. Használható akár előkészítő, akár gyakorló feladatnak a **??**.feladathoz.

16.9. A feladat azért is különösen szép, mert egyszerre több alapötletet kell használni a megoldásában: a periodicitást és a skatulyaelvet.

16.10. Minden faváznak kilenc éle van. Így biztosan van közös élük. Ha k közös élük van, akkor a gráfnak legalább $2(9-k)+k=18-k$ éle van. Tehát k legalább három.

16.11. a) A gráfnak legalább $2n-2$ éle van.
b) Ha l közös élük van, akkor a gráfnak legalább $2(n-l-1)+l=2n-l$ éle van. Tehát $2n-l-2 \le n+k$. Innen $l \ge n-k-2$.

16.12. Bár tisztában vagyunk vele, hogy ez meglehetősen szubjektív marad, de megpróbáltuk nehézségi sorrendbe állítani az itt következő versenyfeladatokat.

16.17. A feladat szoros kapcsolatban van a K.II.15.6. feladattal. Lásd ott.

17. A skatulyaelv a kombinatorikus geometriában

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

18. Skatulyaelv a kombinatorikus számelméletben

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

19. Leszámlálás

A kétszeres leszámolás egy aránylag egyszerű alkalmazását lásd a **??**. feladatban.

19.1. Az utolsó számjegye nem lehet nulla és öt, tehát nyolcféle lehet. Bármit írtunk oda, azt már nem írhatjuk az első helyre és ide sem írhatunk nullát. Mivel az utolsó helyre sem nullát írtunk, ez ismét minden esetben két jegyet zár ki, tehát az első helyre is nyolcfélét írhatunk. A második helyre a maradó nyolc szám bármelyikét írhatjuk és a harmadik helyre a maradó hét szám bármelyikét. Tehát az összes lehetőség $8\cdot 8\cdot 8\cdot 7=3584$.

19.7. Tegyük le egy sorba az n forintot, jelöljük meg, hogy meddig lesz az első gyereké a pénz, onnan meddig a másodiké, stb. Egy elosztás azt jelenti, hogy az $n-1$ lehetséges elválasztó helyből kiválasztunk k darabot. Az eredmény $\binom{n-1}{k-1}$.

19.8. Kölcsönkérünk még k forintot, így „igazságosan” osztunk, majd mindenki visszaad 1 forintot. Tehát $\binom{n+k-1}{k-1}$

19.12. A K.II.19.12M2. megoldásban feltett kérdés miatt is érdemes a két megoldást végigcsinálni. Nyilván az első megoldás adja a feladat kérdésére a választ, a második magukat a Hamilton-utakat számolja össze, vagyis megkülönbözteti a kezdő- és a végpontjukat. Az első megoldás nem – és a feladat szövege sem!!

19.13. Ez valójában a K.I.4.7. feladat ismétlése. De az a tapasztalat, hogy ezt az azonosságot, vagyis a szumma szemléletes jelentését külön észre kell vétetni, és még akkor sem válik rögtön készség szintűvé. Az eredményt $\binom{n+1}{3}$ megkaphatják számolással is. De rájöhetnek a kezdőértékek kiszámolásával is, és utána beláthatják teljes indukcióval. Ez utóbbi adhat alkalmat annak felelevenítésére, hogy a feladat már szerepelt „szemléletes formájában". Ez aztán megnyitja az utat a K.II.19.2. feladat általánosításához.

19.14. Mint a K.II.19.1. feladatnál már említettük, az általánosítás tkp. megvolt már a K.I.4.7. feladatban, de a $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ „szummás alakjának" a felírása mindenképp egy újabb absztrakciós szintet jelent.

Itt jegyezzük meg azt is, hogy erre az összefüggésre szükségünk lesz például akkor, amikor polinomoknak az első n természetes számon vett helyettesítési értékeit összegezzük, így a k-adik hatványok összegének kiszámolásánál.

19.16. Ha akarunk generátorfüggvényt tanítani, ez jó alkalom a bevezetésére: az $(1+x)^n$ és az $(1+x)^m$ polinomot kell összeszoroznunk kétféleképpen, hogy az eredményt megkapjuk.

19.17. Bebizonyítjuk, hogy az n-edik sor középső oszlopában álló szám megegyezik azzal, ahányféleképpen a nullát felírhatjuk olyan n tagú összegként, amelyben minden tag 1, -1 vagy 0. A középső oszloptól k hellyel arrébb álló szám pedig azzal a számmal egyenlő, ahányféleképpen k-t előállíthatjuk ilyen összegként. Az összeadandók sorrendje mindkét esetben számít.

Az általános tétel bizonyítása teljes indukcióval szinte triviális. A kezdő lépést ellenőrizni kell, utána az $n+1$ tagú összegeket három részre bontjuk a szerint, hogy az $n+1$-edik tag nulla, egy vagy -1. Az ilyen összegek száma legyen rendre S_0, S_1 és S_{-1}. Ekkor az indukciós feltétel szerint S_0 egy sorral feljebb (azaz az n-edik sorban) álló szám, S_1 az ettől eggyel balra, S_{-1} pedig az eggyel jobbra álló szám. (Ha nincs ilyen szám, akkor az összegek száma is nulla.)

19.18. Tekintsük a 19.17T. megoldásban kapott eredményt. Eszerint az n-edik sor középső oszlopában álló szám megegyezik azoknak az n tagú nulla-összegeknek a számával, amelyekben minden tag 1, -1 vagy nulla. Az egyeseknek feleljen meg a fehér szín, a -1-eseknek a fekete, a tarkáknak a nulla.

19.19. Azt állítjuk, hogy az n-edik sor középső oszlopában álló szám az $\binom{n}{2i}\binom{2i}{i}$ alakú számok összege, ahol az összegzés minden szóba jövő i-re (vagyis $0 \le i \le \lfloor n/2 \rfloor$-re) történik. A 19.17T. megoldásra támaszkodunk: i jelöli az összegben szereplő -1–1 párok számát. Ezeket $2i$ helyre kell elhelyezni, majd a $2i$ helyből még ki kell választani az i darab egyes helyét.

19.28. Az {1,2,4,8} halmaz mindhárom esetben megfelel. Többet nem lehet kiválasztani, ezt esetszétválasztással láthatjuk be. De a c) esetben ez már nagyon bonyodalmas, inkább célszerű rávezetni a diákokat először a K.II.19.2. feladat, majd a K.II.19.3. feladat megoldására.

20. Vegyes feladatok

20.1. Ezt a feladatot nem érdemes addig feladni, amíg az GR.II.1.11. feladatot meg nem beszéltük. Itt ugyanis a Mycielski-konstrukció még meglehetősen „légből kapott" konstrukciónak tűnik, igazából csak ott érthető, hogy hogyan jöttt elő. Elég könnyítésnek és rávezetésnek, hogy az ötszöghöz tartozó Mycielski-gráf már előkerült a K.II.8.3. feladatnál.

Speciális gráfelméleti témák

1. A skatulyaelv a gráfelméletben, I.

1.7. E feladat szinte azonos a **??**. feladattal. Az ottani ismeretségnek az itteni kelmék felelnek meg. Gráfelméleti nyelven megfogalmazva a különbséget: ott azt mondtuk, hogy minden pont foka három, itt azt mondjuk, hogy minden pont foka legalább három. A feladat folytatása a K.II.9.2. feladat (ahol szintén használtuk a skatulyaelvet).

A két feladat közötti különbséget ki lehet aknázni, amennyiben megkérdezzük: *következik-e* a szigorúbb feltételű **??**. feladatból ez a feladat? Vagyis rákérdezünk arra, hogy igaz-e, hogy ha egy állítás igaz például minden 3-reguláris gráfra, akkor igaz minden olyan gráfra is, amelyben minden pont foka legalább három. Három helyett négyre már mutattunk ellenpéldát: a K.II.10.4. feladatot. Talán még egyszerűbb ellenpélda, hogy minden 4-reguláris gráfban van zárt Euler-séta, de ha csak egy további élt berajzolunk, már nincsen. Mint a K.II.10.4. feladatnál szereplő megjegyzésben is említettük, ezt azért érdemes hangsúlyozni, mert később, amikor azt fogjuk bizonyítani, hogy minden k-reguláris páros gráfban van k éldiszjunkt teljes párosítás, sokan azt hiszik, hogy ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy ha minden pont foka legalább k, már akkor is van. L. a K.II.10.4. feladatnál szereplő megjegyzést is.

2. A skatulyaelv gráfelméleti élesítései, II.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. A skatulyaelv gráfelméleti élesítése, I.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Szimmetria és aszimmetria, I.

4.20. Lásd még a **??**. feladatot.

5. Szimmetria és aszimmetria, II.

5.1. Igen.

6. Szimmetria és aszimmetria, III.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Számelmélet

1. Oszthatóság

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Valószínűségszámítás és statisztika

1. A statisztika alapjai

1.10. Érdemes lerajzoltatni a diákokkal az a) feladatrész háromszögét, utánakérdezni, hogy megegyezik-e valamelyik nevezetes ponttal, vagy a b) képlet alapján megsejtik-e, illetve felismerik-e, melyik pontról van szó.

2. Kísérletek

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Statisztikák

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Esélyek

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Hipergeometrikus eloszlás

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. Binomiális eloszlás

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. Geometriai eloszlás

7.6. Megkérdezhetjük azt is, hogy mennyi a kezdő nyerési esélye.

8. Genetika

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. A várható érték

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Feltételes valószínűség

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

11. Játékok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Markov láncok

12.2. Érdemes előzetesen megtippeltetni a diákokkal, hogy a c) esetben igazságos-e a játék. Mivel kétszer akkora eséllyel megyünk jobbra, mint balra, és jobbra épp kétszer akkora az út, mint balra, így hajlamosak vagyunk igazságosnak tippelni a játékot.

13. A szórás

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

14. Vegyes feladatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.