Valószínűségszámítás és statisztika

9–10. évfolyam

Szerkesztette:
Hraskó András

2018. május 20.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2017

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

A statisztika alapjai

A témához tartozó legfontosabb definíciók az 1.3. feladat megoldásában olvashatók.

1.1. (M)
a) Menjünk az ablakhoz és becsüljük meg a templom (vagy a szemközti ház, vagy egy nagy fa stb.) magasságát!
b) Adjunk a magasságnak egy értéket az összes diák becslése alapján! (Képzeljük el, hogy a vizsgálandó épület többé nem érhető el a számunkra, és a diákok becslésén kívül más információhoz nem juthatunk hozzá!)

1.2. (M) Adott az $\{1;3;8\}$ számsokaság. Határozzuk meg azt az x számot, amelynek a számsokaságtól való
a) átlagos négyzetes eltérése;
b) átlagos abszolút eltérése
minimális!

1.3. (M) Adott az

$$\{1;3;8;12\}, \qquad \{x_1;x_2;x_3;\ldots;x_n\}$$

számsokaság.
Határozzuk meg azt az x számot, amelynek a számsokaságtól való
a) átlagos négyzetes eltérése;
b) átlagos abszolút eltérése
minimális!

1.4. (M) Adjunk meg olyan számsokaságot, amelynek
a) átlaga 3, mediánja 2;
b) átlaga 3, mediánja 2, szórása 5;
c) átlaga 3, mediánja 2, módusza 1!

1.5. (M) [16] Egy osztályba 21 lány és 9 fiú jár. A lányok átlagmagassága 171 cm, a fiúké 182 cm. Mekkora az egész osztályra vonatkozó átlagmagasság?

1.6. (M) [15] Egy 72 megfigyelés eredményét rögzítő számsokaság módusza 54, mediánja 54,5, átlaga 55,7. A 73. megfigyelés eredménye 56.
a) Megadható-e az új, 73 egyedből álló számsokaság módusza, mediánja és átlaga?
b) Gondoljuk végig a feladatot abban az esetben is, amikor feltételezzük, hogy a számsokaság elemei egész számok!

1.7. [15] Adjunk meg 13 darab pozitív egész számot úgy, hogy a mediánja 2, az átlaga 1999 legyen! Létezik-e ilyen sokaság, ha azt is megköveteljük, hogy egyetlen módusza legyen, és annak értéke
a) 1, **b)** 2, **c)** 2000, **d)** 6000
legyen?
e)Mennyi lehet maximum a módusz?

1.8. [15] Egy 16 fős csoportban a kémia átlag 3,81 volt. (Két tizedesre kerekítve.) Tudjuk, hogy senki sem bukott meg.

a) Legfeljebb hányan kaphattak kettest?

b) Biztos-e, hogy volt valakinek ötöse?

c)* Igaz-e, hogy ha a módusz 4, akkor a medián is 4?

1.9. [15] Egy nyolc elemű számsokaság mediánja $M = 3{,}8$. Mi mondható a mediánról, ha kilencedik számelemként hozzávesszük a 4-et?

1.10. (M)

a) Adottak a síkon az $A(1;5)$, $B(7;10)$, $C(4;12)$ pontok. Határozzuk meg a sík azon P pontjának koordinátáit, amelyre a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ kifejezés értéke minimális!

b) Oldjuk meg a feladatot az $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$ általános ponthármassal is!

1.11. Határozzuk meg ebben a tanévben a matematikából kapott jegyeink átlagát, móduszát, mediánját és szórását!

1.12. (M) Egy H számsokaság átlaga $\overline{x} = 3$, szórása $D = 5$. Meghatározható-e ezekből az adatokból az $y = 11$ számnak a H sokaságtól való átlagos négyzetes eltérése?

1.13. (M) Tekintsünk egy számsokaságot! Hogyan változik a számsokaság mediánja, módusza, átlaga, terjedelme és szórása, ha a számsokaság minden elemét

a) 3-mal megnöveljük? **b)** 3-mal megszorozzuk?

1.14. (M) Mit mondhatunk arról a számsokaságról, amelynek szórása 0?

1.15. (M) [11] A megadott osztályzatok alapján számítsuk ki az alábbi három tanuló jegyeinek átlagát, móduszát, mediánját és szórását!

1. tanuló	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3,	3
2. tanuló	2,	2,	2,	3,	3,	3,	3,	3,	4,	4,	4
3. tanuló	1,	1,	2,	2,	3,	3,	3,	4,	4,	5,	5

1.16. (M)

a) Határozzuk meg a $\{3;7\}$ számsokaság szórását!

b) Az elemeket ötször vesszük, így kapjuk a $\{3;3;3;3;3;7;7;7;7;7\}$ számsokaságot. Hogyan változik a szórás?

c) Veszünk még két hetest: $\{3;3;3;3;3;7;7;7;7;7;7;7\}$. Hogyan változik a szórás? Nő, csökken vagy változatlan marad? Előbb tippeljünk, azután számoljunk!

1.17. (M) [13]

Azt mondjuk, hogy az a sárajobb b-nél (jelben: $a \lhd_s b$), ha a számsokaságban a és b átlagától a felé több elem van, mint b felé. Azt mondjuk, hogy az a szám a $\{x_1;x_2;x_3;\ldots x_n\}$ számsokaságra vonatkozóan sáralegjobb, ha nem létezik olyan $b \neq a$ szám, amelyre $b \lhd_s a$. Van-e sáralegjobb elem az 1.2-1.3. feladatok számsokaságaihoz?

2. FEJEZET

Kísérletek

2.1. Három kockát dobunk fel. Mindenki 20-szor dob, összesen tehát $20n$-szer, ahol n a csoport létszáma. Alább $n = 15$-tel számolunk, tehát összesen 300 dobással.

a) A kísérlet elvégzése előtt tippelni kell, hogy az alábbi események hányszor fognak bekövetkezni:

	esemény	$20n = 300$**-ból hányszor**
1.	Mindhárom egyforma	
2.	Mind különböző	
3.	Két egyforma, a harmadik különböző	
4.	Van köztük hatos	
5.	Se ötös, se hatos nincs köztük	
6.	A három szám összege legalább 11	
7.	A három közül a legkisebb(ek) egyes(ek)	
8.	A három közül a legkisebb(ek) kettes(ek)	
9.	A három közül a legkisebb(ek) hármas(ok)	
10.	A három közül a legkisebb(ek) négyes(ek)	
11.	A három közül a legkisebb(ek) ötös(ök)	
12.	A három közül a legkisebb(ek) hatos(ok)	

b) Hogyan döntsük el a végén, hogy ki tippelt a legjobban?

c) Kezdjük el a kockadobást, töltsük ki az alábbi adatlapot!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
kockák:											
1. $\forall =$											
2. $\forall$ kül.											
3. $2+1$											
4. $\exists 6$											
5. $\nexists 5,6$											
6. $\sum \geq 11$											
7. $\min = 1$											
8. $\min = 2$											
9. $\min = 3$											
10. $\min = 4$											
11. $\min = 5$											
12. $\min = 6$											

	12	13	14	15	16	17	18	19	20	**összesen**
kockák:										
1. $\forall =$										
2. $\forall$ kül.										
3. $2+1$										
4. $\exists 6$										
5. $\nexists 5{,}6$										
6. $\sum \geq 11$										
7. $\min = 1$										
8. $\min = 2$										
9. $\min = 3$										
10. $\min = 4$										
11. $\min = 5$										
12. $\min = 6$										

A fölső üres sorba kell beírni a három kockán látható számot, a többi rubrikába $\times$ írandó, ha az az esemény bekövetkezett, üresen hagyandó, ha nem következett be. A legutolsó oszlopba a megfelelő sorban található $\times$–ek számát kell írni. Az utolsó oszlopba írt számokat a táblán összesíthetjük hogy megkapjuk a teljes, $20n$, azaz 300 elemből álló minta adatait.

d) Számoljuk ki az egyes események matematikai esélyét!

2.2. Feldobunk öt pénzérmét és felírjuk a fejek számát. Végezze el minden diák a kísérletet 30-szor, összesen tehát $30n$-szer, ahol n a csoport létszáma!

Tippeljük meg előre

a) a kapott számok ($30n$ db szám) átlagát és

b) szórását, valamint

c) rendre azt is, hogy hányszor kaptunk a $30n$-ből 0, 1, 2, 3, 4 ill. 5 fejet!

a $30n$ szám		a fejek számának eloszlása					
átlaga	szórása	0 fej	1 fej	2 fej	3 fej	4 fej	5 fej

d) Most végezzük is el a kísérletet!

sorszám:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
fejek száma:															

e) Számítsuk ki adatsorunk átlagát és szórását!

f) Összesítsük saját eredményeinket!

Fejek száma:	0	1	2	3	4	5	Σ
Gyakoriság:							30

g) Készítsünk egy nagy táblázatot a táblára, amelybe mindenki beírja saját eredményeit! Összesítsük a csoport eredményét!

Diák	fejek száma							a 30 szám	
	0	1	2	3	4	5	Σ	átlaga	szórása
1. (gyakoriságok):							30		
2. (gyakoriságok):							30		
3. (gyakoriságok):							30		
⋮ n. (gyakoriságok):							30		
Összesen:							$30n$		

h) Határozzuk meg a $30n$ szám átlagát és szórását, valamint az egyes kimenetelek – 0 fej, 1 fej, ... 5 fej – relatív gyakoriságait!

i) Igaz-e, hogy az egyes diákok által kapott átlagok átlaga megegyezik a csoport által kapott $30n$ szám átlagával?

j) Igaz-e, hogy az egyes diákok által kapott szórások átlaga vagy összege megegyezik a csoport által kapott $30n$ szám szórásának átlagával vagy összegével?

k) Hogyan lehetett volna hatékonyan előzetesen megtippelni az egyes kimenetelek relatív gyakoriságait?

l) Hogyan lehetett volna hatékonyan előzetesen megtippelni a $30n$ szám átlagát és szórását?

2.3. Egy pénzérmét addig dobunk fel, amíg fejet nem dobunk és felírjuk az ehhez szükséges dobások számát. A kísérletet minden diák 30-szor végzi el, összesen tehát $30n$-szer, ahol n a csoport létszáma. Alább egy $n = 15$ fős csoportlétszámmal dolgozunk, tehát összesen 450 kísérlettel.

a) A kísérlet elvégzése előtt tippelni kell, hogy az alábbi események hányszor fognak bekövetkezni a $30n = 450$ kísérlet közül (töltsük ki az alábbi táblázat harmadik – első üres – oszlopát!)

	esemény	**$30n$-ből hányszor**	**30-ból én hányszor**
1.	1-szer kellett dobni		
2.	2-szer kellett dobni		
3.	3-szor kellett dobni		
4.	4-szer kellett dobni		
5.	5-ször kellett dobni		
6.	6-szor kellett dobni		
7.	7-szer kellett dobni		
8.	8-szor kellett dobni		
9.	9-szer kellett dobni		
10.	legalább 10-szer		

b) Arra is tippeljünk, hogy átlagosan hányadikra jön ki az első fej!

c) Végezzük el a kísérletet (töltsük ki a fenti táblázat negyedik oszlopát!), majd a táblán készítsünk összesítést a $30n$ kísérletről!

d) Számoljuk ki az egyes események matematikai esélyét!

e) Számoljuk ki, hogy a valószínűségek alapját átlagosan hányadikra jön ki az első fej (az első fejig tartó dobássorozat hosszának várható értéke)!

2.4. [19] Egy kétlépéses kísérlet első lépéseként egy játékvezető három megadott kísérlet egyikét választja ki, mégpedig bármelyiket azonos valószínűséggel. A kiválasztott kísérletet ezután hússzor végrehajtja, és a kísérlet kimeneteit leírja. Ezekből az adatokból kell arra következtetni, hogy a három kísérlet közül melyiket hajtotta végre a játékvezető. A három kísérlet a következő:

A változat: Feldob egy kockát, és 0-t ír le, ha a dobott szám 1 vagy 2; 1-et, ha 3 vagy 4; és 2-t, ha 5 vagy 6.

B változat: Feldob egy kockát, és 0-t ír le, ha a dobott szám 1,2 vagy 3; 1-et, ha 4 vagy 5; és 2-t, ha a dobott szám 6.

C változat: Feldob két szabályos érmét, és a dobott fejek számát írja le.

A kísérlet egyik elvégzése során a következő sorozat adódott:

$$2,2,1,1,0,0,0,1,0,1,1,1,1,2,2,1,1,2,0,0.$$

Melyik változat eredményezte a sorozatot?

2.5. [19] Ez is egy „melyik az igazi” típusú feladat, mint a 2.4. Most mindhárom változatban egy olyan dobozból húzunk golyót, amelyben 7 fehér és 3 piros golyó van.

A változat: Háromszor húzunk egy golyót úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót.

B változat: Háromszor húzunk egy golyót úgy, hogy a kihúzott golyót nem tesszük vissza.

C változat: Mindaddig húzunk golyókat egymás után visszatevés nélkül, amíg az első fehér golyót ki nem húzzuk.

Mindhárom változatban a kísérlet kimenetele a kihúzott piros golyók száma.

A választott változat 20 egymás utáni végrehajtása után a következő minta adódott:

$$2,0,1,0,1,2,0,2,2,0,0,1,0,1,0,2,3,1,1,0.$$

Melyik változat eredményezte a sorozatot?

3. FEJEZET
Statisztikák

3.1. (M) Készítsünk el Arany János „Toldi” című művének betűstatisztikáját
a) a magyar karakterek szerint (a „ty”-ben t és y külön karakter);
b) a magyar hangok szerint (az „sz”, „ty” stb önálló hangok);
c) az angol karakterek szerint („é”-t „e”-vel, „ó”-t, „ö”-t, „ő”-t „o”-val helyettesítjük)!
A Toldi szövegét tartalmazó fájlok:

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/toldi.doc`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/toldi.txt`

3.2. (M) Készítsünk el Ottlik Géza „Iskola a határon” című művének betűstatisztikáját
a) a magyar karakterek szerint (a „ty”-ben t és y külön karakter);
b) a magyar hangok szerint (az „sz”, „ty” stb önálló hangok);
c) az angol karakterek szerint („é”-t „e”-vel, „ó”-t, „ö”-t, „ő”-t „o”-val helyettesítjük)!
Az „Iskola a határon” megtalálható a

http://mek.oszk.hu/02200/02285/

weboldalon illetve letölthető a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/ottlikiskolaahataron.doc`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/ottlikiskolaahataron.txt`

fájlokban. fájlokból.

3.3. (MS) *Betűhelyettesítéses titkosírás dekódolása*
Dekódoljuk a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsa110723ha.doc`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsa110723ha.txt`

fájlokban megadott titkosított szöveget, amelyet egy magyar nyelvű könyvből vettünk, de karaktereit (a betűket, az ékezetes betűket és a szóközt) összekevertük. A titkosított szöveg így kezdődik:
FVQXWDÜQYDGXVQYFBZQCBFVŐMBQDVQFQWDBYFBZHAAQ
CBFVŐMBHEQDBZCEDQÉXBKDÖCBQFVXŰÜQÉDŰÜQGFQUFWN
AFYQADWMÜÜSEQFEEHŰQÉMŰ

3.4. (M) Fejtsük meg a különböző nyelveken írt, majd titkosított szövegeket! A

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsamelynyelven01titkos.doc`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsamelynyelven02titkos.doc`

illetve

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsamelynyelven01titkos.txt`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsamelynyelven02titkos.txt`

fájlokban egy-egy vers található titkosítva. Vagy az 1-es vagy a 2-es végű fájlban egy magyar, a másikban pedig egy angol nyelvű irodalmi mű van kódolva egyszerű betűhelyettesítéses titkosírással.

Tehát vettünk egy-egy magyar és egy angol nyelvű verset, az ékezetekes betűket az ugyanolyan ékezet nélküli betűkkel helyettesítettük, a vesszőket, pontokat, kérdő- és felkiáltójeleket, aposztrófokat, gondolatjeleket egyszerűen töröltük, a kötőjeleket szóközre cseréltük egészen addig míg a szövegben már csak az

$$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$$

karakterek és szóköz szerepelt. A versszak szerinti tagolást meghagytuk. Ezután a karaktereket és a szóközt más karakterekkel (nagybetűkkel) helyettesítettük a két különböző szövegben különböző módon. Az első versszakok:

Az 1. titkosított szöveg (az elválasztás nem követi a nyelvtani szabályt):
WQFGOQDNZWDMXBSDNZWDWBSHXUZDMXBSDORQWDRBDGD
QGLLHWDSOWJDVZGOSWODXDFXUZDNRDMBRFDNZWDFRONZ
DUGXQDZWDRCDYJDFWHUZDHGBQUDRTWODNZWDAROQWO

A 2. titkosított szöveg (az elválasztás nem követi a nyelvtani szabályt):
LJFRWFLCDLFDAMRUVACKRFGBLSNWELUFBJRCFKLYLVKFYRW
ORVXWFURYFWEAUWRFJASAWAKKFLFKRUWRTFQLUESAVAFQ
NCCLYLFLFJNWAFZRTWRKRWFSATHLGBACLBLTL

Melyik a magyar és melyik az angol nyelvű titkosított szöveg? Dekódoljuk a titkosírásokat!

4. FEJEZET

Esélyek

4.1. (M) *Érettségi, 2010 május, emelt szint*

Felmérések szerint az internetes kapcsolattal rendelkezők 17%-a vásárol az interneten, 33%-a tölt le szoftvert az internetről. A statisztika szerint az internetezők 14%-a mindkét szolgáltatást igénybe veszi. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

a) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy nem vásárol az interneten.

b) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy vásárol az interneten, vagy szoftvert tölt le. (Megengedve, hogy esetleg mindkét szolgáltatást igénybe veszi.)

c) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy nem vásárol az interneten és szoftvert sem tölt le az internetről.

d) Három véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy közül egyik sem vásárol az interneten. (A kiválasztást visszatevéses módszerrel végzik el.)

4.2. (M) *Érettségi, 2010 május, emelt szint*

A 12.a osztály öt belépőjegyet kapott a vízilabda bajnokság döntőjére. Az osztály mind a harminc tanulója szívesen menne, bár közülük 12 tanulónak akkor különórája lenne. A választást a véletlenre bízzák: felírják a 30 nevet egy-egy cédulára, és ötöt kihúznak közülük.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kisorsolt tanulók közül pontosan 2 olyan lesz, akinek különórája lenne? Az eredményt tizedestört alakban adja meg!

b) Tudjuk, hogy a kiválasztott öt tanuló között biztosan van olyan, akinek van különórája. Mennyi ekkor a valószínűsége annak, hogy pontosan két kisorsolt tanulónak van különórája?

4.3. (M) Két érmét feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a két dobás közül

a) pontosan az egyik fej?

b) legalább az egyik fej?

c) mindegyik fej?

4.4. (M) Három érmét feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a három dobás közül pontosan az egyik fej?

4.5. (M) Öt érmét feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy közülük pontosan kettő fej?

4.6. (M) Két kockával dobunk. Két dologra lehet fogadni.

A: Mindkét dobás páros lesz. B: Az egyik dobás 1-es.

Melyiknek nagyobb a valószínűsége?

4.7. (M) Két kockával dobunk. Két dologra lehet fogadni a két dobott számmal kapcsolatban. Melyikre fogadnál inkább?

a) A: Összegük legalább 10. B: Mindketten kisebbek 4-nél.

b) A: Mindketten párosak. B: Mindketten kisebbek 4-nél.

4.8. (M) Valaki azt állítja, hogy a kártyák színét tapintással felismeri.

Állításának igazát próbának vetettük alá. Egy, csak a babás (alsó, felső, király és ász) lapokat tartalmazó, jól megkevert magyar kártya csomagból (összesen 16 lap) bekötött szemmel kellett neki a négy pirosat kiválasztania. Ezzel szemben a négy kiválasztott kártya között csak két piros volt.

Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy egy különleges képességekkel nem rendelkező személy, aki véletlenszerűen választja ki a négy lapot, ugyanilyen jól választ!

4.9. (M) Egy kockával néhányszor dobunk. Melyiknek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy az első dobás lesz az első hatos, vagy annak, hogy a második dobásnál dobunk először hatost?

4.10. (M) Véletlenszerűen kiválasztunk egy hatjegyű számot. Minek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy a szám előállítható két háromjegyű szám szorzataként, vagy annak, hogy nem állítható elő?

4.11. (M) Hány dobókocka esetén a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy azokkal egyszerre dobva pontosan egy hatost dobunk?

4.12. (M) Egy fiút akkor engednek el játszani, ha három egymás utáni sakkparti közül legalább két egymás utánit megnyer. Partnerei: Apa és Papa, mégpedig vagy Apa-Papa-Apa, vagy Papa-Apa-Papa sorrendben. Apa jobban játszik, mint Papa. Melyik sorrend kedvezőbb a fiú számára?

a) Legyen pld. Apa nyerési esélye a fiú ellen $\frac{2}{3}$, míg Papáé csak $\frac{1}{2}$.

b) Oldjuk meg a feladatot az általános esetben is.

4.13. (M) [6] Egy sötét helyiségben 4

a) egyforma; **b)** különböző

pár cipő össze van keverve. Kiválasztunk ezekből négy darab cipőt. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább egy összetartozó pár lesz a kivettek között?

4.14. (M) [4] Egy vizsgán az A és B tételek elméleti, a C tételek gyakorlati jellegűek. Mindhárom tételsor 10 feladatból áll, s a vizsgázónak mindegyik sorból egy-egy tételt kell húznia. Ha a vizsgázó bármelyik tételét nem tudja, akkor megbukik. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy diáknak 80%-os felkészültséggel nem sikerül a vizsgája? (A 80%-os felkészültség ez esetben azt jelenti, hogy minden tételsorból nyolc tételt tanult meg, kettőt nem.)

4.15. (M) Az eredeti lottón 90 számból húznak ki 5-öt, és két találatért már nyeremény jár. Mi az esélyünk arra, hogy egy számötössel nyerjünk valamit?

4.16. (M) Egy kockával

a) kétszer; **b)** háromszor

dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok között lesz hatos?

4.17. (M) A számegyenes origójába leteszünk egy korongot, majd egy szabályos dobókockát feldobunk nyolcszor. Minden alkalommal, ha összetett számot dobtunk, akkor a korongot eggyel balra mozdítjuk, ha nem összetett számot (prímet vagy 1-et), akkor jobbra. Mekkora valószínűséggel lesz a korong a 8. dobás után ismét az origóban?

4.18. (M) A Skandináv lottón 7 számot húznak ki 35-ből és egy héten (tehát egy szelvényre vonatkozólag) két húzás is van (egy kézi és egy gépi). Mi az esélye, hogy a 8-as nyerő szám lesz egy adott héten (tehát az egyik vagy a másik vagy mindkét húzásnál)?

4.19. (M) [19] Az ötös lottón minden héten egyetlen szelvénnyel megjátsszuk az 1, 2, 3, 4 és 5 számokat.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első héten nyerünk?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy év alatt (52 hét) egyszer sem nyerünk?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy év alatt (52 hét alatt) egyszer sem lesz hármas találatunk?

d) Melyiknek nagyobb a valószínűsége: az első héten lesz ötösünk, vagy annak, hogy 100 év alatt egyszer sem lesz ötösünk?

5. FEJEZET

Hipergeometrikus eloszlás

5.1. (M) Az 52 lapos kártyacsomagból kiválasztunk 13-at. Adjuk meg a köztük levő
a) ászok, **b)** kárók
számának eloszlását!

5.2. (M) A 32 lapos magyar kártyából egyszerre három lapot húzunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között van legalább egy zöld?

5.3. (M) Egy ládában 90 jó és 10 selejtes alkatrész van. Véletlenszerűen kiválasztunk 10 alkatrészt. Jelölje χ a kiválasztott alkatrészek között a selejtesek számát ($\chi \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$). Adjuk meg χ valószínűségeloszlását!

Használhatunk matematikai programot (pl Axiom, Derive, Maple, Mathematica) vagy táblázatkezelőt (pl Excel, OpenOffice.org Calc)

5.4. [3] Egy tóból kifognak 1000 halat, mindegyiket megjelölik piros ponttal, majd visszadobják a tóba. Bizonyos idő elteltével ismét kifognak a tóból 1000 halat, és közülük 100-on piros pontot találnak.

Milyen következtetés vonható le ebből?

Ennek a reális és gyakran használt eljárásnak az egyik elemző módszere az úgynevezett *maximum likelyhood-becslés.* Ez a következőt jelenti: tegyük fel, hogy a tóban n hal van (mindkét halászat idején ugyanaz az n hal) és számítsuk ki erre az n-re alapozva az első bekezdésben megfogalmazott jelenség valószínűségét. Határozzuk meg, hogy mely n esetén lesz a legnagyobb a valószínűség, és becsüljük a halak számát ezzel az értékkel!

6. FEJEZET
Binomiális eloszlás

6.1. Legyen A egy véletlen kísérlet p valószínűségű eseménye. Ha a kísérletet végrehajtjuk n-szer, mennyi az esélye, hogy az A esemény pontosan k-szor következik be?

6.2. *Összefüggések a Pascal háromszögben*
a) Igazoljuk, hogy $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
Adjuk meg zárt alakban az alábbi összegeket!
b) A Pascal háromszög n-edik sorában az elemek összege: $p_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Pl $n = 7$-re:

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$$

c) $e_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Pl $n = 7$-re:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 35 + 4 \cdot 35 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 1 =?$$

d) $d_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$. Pl $n = 7$-re:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 21 + 9 \cdot 35 + 16 \cdot 35 + 25 \cdot 21 + 36 \cdot 7 + 49 \cdot 1 =?$$

6.3. [3] Adjuk meg a következő összeget explicit alakban!

$$2 \cdot 1 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot 2 \cdot \binom{n}{3} + 4 \cdot 3 \cdot \binom{n}{4} + \ldots$$

6.4. (MS) [19]
Egy repülőgéptársaság nyilvántartásában szereplő utolsó 16222 helyfoglalásból 2357-et lemondtak. Ezért a társaság kis rátartással több helyet enged lefoglalni, mint ahány elfoglalható hely van.
a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 125 ülőhelyre 135 helyfoglalás mellett lesz valaki, akinek nem jut hely?
b) 125 hely esetén mekkora túlfoglalást tartunk ésszerűnek?
c) Hasonló adatok mellett egy másik repülőtársaság 21 fős várólistát fogad el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a teljes várólista az utaslistára kerül?

6.5. [3] *Oltóanyag vizsgálata*
Ha egészséges szarvasmarhákat valamely betegségnek teszünk ki, akkor az állatok 25%-a betegszik meg. Egy újonnan felfedezett oltóanyag vizsgálata céljából n egészséges állatnak védőoltást adnak, majd fertőzésnek teszik ki őket. Hogyan lehet értékelni a kísérlet eredményét? Az alábbi három eset közül melyik mutatja leginkább a vakcina hatékonyságát?
a) 10 beoltott állatból egy sem fertőződött meg;
b) 17 beoltott állatból egy fertőzödött meg;
c) 23 beoltott állatból kettő fertőzödött meg.

6.6. *Energiaellátási feladat*

Tegyük fel, hogy $n = 10$ munkás időről időre valamilyen villamos készüléket használ. Meg akarjuk becsülni mennyi a teljes terhelés. Első közelítésként tegyük fel, hogy egymástól függetlenül dolgoznak és mindegyikük bármely időpillanatban egyforma p valószínűséggel igényel egységnyi villamos teljesítményt. Ha egy munkás óránként átlagosan 12 percen át használ áramot, akkor $p = \frac{1}{5}$. Ha a rendszer hat egységnyi energiát szolgáltat, akkor mekkora valószínűséggel lép fel túlterhelés?

6.7. (M) [19] *USA érettségi, 1984*

Egy dobozban 11 golyó van, 1-től 11-ig megszámozva. Kihúzunk közülük visszatevés nélkül hatot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számok összege páratlan?

6.8. Az $n = 7$, $p = 1/3$, $q = 2/3$ paraméterű binomiális eloszlás tagjai:

$P(X = 0) \approx 0.058527663465935$ $\quad P(X = 1) \approx 0.204846822130773$
$P(X = 2) \approx 0.307270233196159$ $\quad P(X = 3) \approx 0.256058527663466$
$P(X = 4) \approx 0.128029263831733$ $\quad P(X = 5) \approx 0.038408779149520$
$P(X = 6) \approx 0.006401463191587$ $\quad P(X = 7) \approx 0.000457247370828$

Tehát a legutóbbi szám annak valószínűségét adja meg, hogy hét kísérletből mind a hétszer a p valószínűségű esemény következik be.

Adjuk meg az $n = 8$, $p = 1/3$, $q = 2/3$ paraméterű binomiális eloszlást (6 tizedesjegy pontossággal)!

6.9. Legyen $0 \le p \le 1$ tetszőleges rögzített szám és $q = 1 - p$. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $P_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$; **b)** $E_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
c) $D_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

6.10. Határozzuk meg az (n, p, q) paraméterű binomiális eloszlás

a) mediánját; **b)** móduszát; **c)** várható értékét; **d)** szórását!

7. FEJEZET

Geometriai eloszlás

7.1. (M) Egy motor bekapcsoláskor 0,02 valószínűséggel kiég.

a) Mi a valószínűsége, hogy 10-nél kevesebb bekapcsolás után kiég?

b) Mi a valószínűsége, hogy épp a 10. bekapcsoláskor ég ki?

c) Átlagosan hány bekapcsolás után ég ki?

7.2. Egy kockával dobunk. Hány dobás után lesz nagyobb a valószínűsége annak, hogy már dobtunk hatost, mint annak, hogy még nem dobtunk?

7.3. Egy pénzdarabot addig dobálunk, ameddig másodszorra kapunk fejet.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak négy vagy több dobásból álló sorozattal érjük ezt el?

b) Adjuk meg a dobások számának valószínűség-eloszlását!

7.4. Egy kockát addig dobunk fel, amíg másodszorra is hatost dobunk. Adjuk meg a szükséges dobások számának várható értékét!

7.5. Egy dobozban p piros és k kék, összesen $p + k = n$ golyó van. Kezdő és Második felváltva húznak, az nyer, aki előbb húz pirosat. Határozzuk meg Kezdő nyerési esélyét!

7.6. Módosítunk a 7.5. feladaton. Kezdőnek két piros húzás kell a győzelemhez (Másodiknak elég 1). Így kindek kedvező a játék?

7.7. Egy kockával dobunk, amíg sikerül hatost dobnunk. Mennyi az esélye, hogy dobtunk ötöst?

7.8. (M) Egy kockával addig dobunk, míg egymás után 2011-szer hatost dobunk. Mennyi az esélye, hogy ez sohasem következik be?

7.9. (M) [10] Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg legalább egyszer kapunk fejet is és írást is.

Mennyi a dobások számának

a) legvalószínűbb értéke?

b) várható értéke?

7.10. (M) [18] Emma, Fanni, Gitta és Hanna társasjátékhoz készülődik. Sorban egymás után dobnak egyet egy szabályos dobókockával – akár több körben is –, mert az lesz közülük a kezdő, aki elsőként dob hatost.

a) Mekkora valószínűséggel lesznek kezdők egy-egy kockadobás után az egyes résztvevők?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem tudják elkezdeni a játékot egy kör után?

c) Számítsuk ki mind a négy résztvevő esetében annak a valószínűségét, hogy négyük közül éppen ő kezdhet!

8. FEJEZET
Genetika

Először kissé rövidítve idézünk Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba című könyvének 136. oldaláról: „Az ember és általában az élőlények örökölhető tulajdonságai a génektől függnek. Az emberi test minden sejtjében, a reprodukáló sejtek (gaméták) kivételével, ugyanazon génstruktúra pontos mása jelenik meg. Alapvető, hogy a gének párokban jelennek meg. Valójában a kromoszómák jelennek meg párokban, és az egy párt alkotó gének egy kromoszómapár azonos pozícióit foglalják el.

Minden génpár egy öröklődő tényezőt határoz meg, de valamely szervezet megfigyelhető tulajdonságainak nagy része több tulajdonságtól függ. Egyes tulajdonságokra azonban (mint pl. a szem színe vagy a balkezesség) egy bizonyos génpár hatása a döntő. Más tulajdonságot, mint pl. a magasságot is, igen sok gén együttes hatása határozza meg.

A legegyszerűbb esetben a génpár mindkét génje két különböző formát ölthet. Ha ezeket A és a jelöli , akkor a szervezet az AA, Aa, aa genotípusok valamelyikéhez tartozik (Aa és aA között nincs különbség). Mi csak ezt az esetet vizsgáljuk.

Vannak olyan génpárok, amelyekre a különböző genotípusok mindegyike különböző megjelenési formát ölthet, tehát így könnyen megkülönböztethetők. Például a borsónak van egy olyan génpárja, hogy A hatására a borsóvirág piros elszíneződést kap, a hatására fehéret. A három genotípus ebben az esetben megkülönböztethető: a virág színe lehet piros (AA), fehér (aa) és rózsaszín (Aa).

Vannak azonban olyan génpárok is, amelyekben A domináns, a recesszív. Ez azt jelenti, hogy az Aa egyedeknek ugyanaz a megjelenési formája, mint az AA egyedeknek és így csak a tiszta aa típus különíthető el a közvetlen megfigyelés alapján. A természetben a részleges dominancia minden árnyalata előfordul. Tipikus részlegesen recesszív tulajdonság a kékszeműség, ill. a balkezesség stb.

A reprodukáló sejtek vagy gaméták osztódási folyamat során képződnek, és csak egyetlen génjük van. A tiszta AA, ill. aa genotípusú organizmusok (ún. homozygóták) ezért csak egyfajta gamétákat hoznak létre, míg az Aa típusú organizmusok (ún. hibridek vagy heterozygóták) egyenlő számú A, ill. a gamétát hoznak létre. Az új organizmusok két szülői gamétából származnak, és ezekből kapják génjeiket. Ezért minden génpár egy apai és egy anyai gént tartalmaz, és minden gén minden előző generációban – akárhány generációig visszamenőleg – egy bizonyos őstől származik.

Az utód (vagy ivadék) genotípusa véletlen eredménye: a szülő génpárjának mindkét génje $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ valószínűséggel adódik át, és az egymást követő utódokra ezek kiválasztása független. Más szóval n ivadék genotípusa egy n elemű független kísérletsorozat eredménye; a kísérletek mindegyike két érme feldobásának felel meg. Például az Aa, Aa genotípusú szülői pár ivadékainak genotípusa AA, Aa és aa lehet rendre $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Az AA, aa genotípusú szülői pár utóda csak Aa genotípusú lehet stb.

Ha egy populációt teljes egészében vizsgálunk, akkor a szülők kereszteződése egy második véletlen folyamat eredményének tekinthető. Mi elsősorban ennek az ún. véletlen kereszteződésnek a vizsgálatára fogunk szorítkozni, melyet az alábbi feltétel definiál. Ha az első leszármazott generációban r ivadékot véletlenszerűen kiválasztunk, akkor ezek szülei a lehetséges szülői párok összességéből vett r elemű véletlen mintát alkotnak, ahol esetleges ismétlődések is előfordulhatnak. Más szóval, minden ivadékról feltételezzük, hogy a szülők véletlenül és egymástól függetlenül, és a különböző utódok szülei teljesen függetlenül lettek kiválasztva. A véletlen kereszteződések modellje kielégítő idealizált modell a természetben előforduló igen sok populációra, és a mezőgazdasági kísérletek során gyakran érvényesülő feltételekre. Ha azonban pl. a szántóföld egyik sarkában piros virágú, másik sarkában fehér virágú borsót vetünk, akkor az azonos színű virágot hordozó egyedek gyakrabban kereszteződnek, mint véletlen kereszteződés esetében. Az előnyben részesítő kiválasztás (mint pl. a szőkék előnyben részesítik a szőkéket) szintén nem tesz eleget a véletlen kereszteződés feltételének. A szélsőségesen nem véletlen kereszteződést jól példázzák az önmegtermékenyítő növények ill. a mesterséges megtermékenyítés. . . ”

Az ivadék genotípusa eszerint négy független véletlen kiválasztás eredménye (külön-külön a szülők, majd külön-külön a szülői gének kiválasztása). Szerencsére ez a négy kiválasztás – Hardy alább ismertetett elmélete szerint – helyettesíthető egyetlen kettős kiválasztással: az apai és az anyai gént egymástól függetlenül és véletlenszerűen választjuk ki a szülői generáció teljes génállományából.

Jelöljük a szülőgeneráció genotipikus összetételét a következőképpen:

genotípus:	AA	aA	aa
egyedek aránya:	u	$2v$	w

ahol tehát $u + 2v + w = 1$. Ha a szülői generációban az A és az a allél aránya p/q, akkor:

$$p/q = (2u + 2v)/(2v + 2w) = (u + v)/(v + w),$$

azaz

$$p = u + v, q = v + w.$$

Az első utódnemzedékben AA genotípusú ivadék két AA genotípusú szülő találkozásából (u^2 esélyű randevú) vagy egy AA típusú és egy aA típusú szülő találkozásakor ($4uv$ esélyű randevú, mert AA az apa és az anya is lehet) a születések felében vagy két aA típusú szülő találkozásakor ($4v^2$ esély) az esetek negyedében fordul elő. Hasonló okoskodással az első utódnemzedék genotipikus összetételére véletlen kereszteződési modell esetén az alábbi értékeket kapjuk:

genotípus:	AA	aA	aa
egyedek aránya:	$u^2 + 2uv + v^2$	$2uv + 2uw + 2vw + 2v^2$	$w^2 + 2wv + v^2$
egyszerűbben:	$(u + v)^2$	$2(u + v)(v + w)$	$(v + w)^2$
tömören:	p^2	$2pq$	q^2

Tehát az első utódgeneráció genotipikus összetételét már meghatározza a szülői generáció génösszetétele, a szülői generáció genotipikus összetételének ismeretére nincs szükség. Az utódnemzedékben az A és az a allél előfordulásának aránya:

$$\frac{2p^2 + 2pq}{2q^2 + 2pq} = \frac{2p(p + q)}{2q(p + q)} = \frac{p}{q},$$

azaz a génösszetétel nem változik.

A következő utódnemzedék génjeinek és genotípusainak összetételét a megelőző nemzedék adataiból mindig úgy számíthatjuk ki, mint ahogy előbb kiszámoltuk az első utódnemzedék eloszlását a szülői generációéból. Ennek alapján kimondhatjuk a Hardy-Weinberg szabályt: *a véletlen kereszteződési modellben a második nemzedéktől (az első utódnemzedéktől) kezdve minden nemzedék genotipikus összetétele ugyanaz ($p^2, 2pq, q^2$) és egyértelműen meghatározható az első nemzedék génösszetételéből (p, q).* A ($p^2, 2pq, q^2$) alakban írható eloszlásokat *stacionárius eloszlás*oknak is nevezzük, mert állandóan átörökítik magukat.

8.1. [19] Ha a csodatölcsér nevű virág színéért felelős gén mindkét allélje azonos, akkor ettől az alléltől függően a virág vagy piros lesz, vagy fehér. Ha a két allél különböző, akkor a virág rózsaszínű lsez. Két rózsaszínű virág keresztezéséből 30 palántát nevelünk.

a) Adjuk meg a keletkező piros színű virágok eloszlását!

b) Mekkora valószínűséggel lesz több piros virág, mint fehér?

c) Mekkora valószínűséggel lesz több rózsaszínű virág, mint piros és fehér együtt?

8.2. [19] Egy házaspár mindkét tagja AB vércsoportú. Adjuk meg annak valószínűségét, hogy 5 gyermekük között

a) pontosan ketten lesznek A vércsoportúak!

b) pontosan hárman lesznek AB vércsoportúak!

c) pontosan ketten lesznek A és pontosan hárman lesznek AB vércsoportúak!

d) pontosan ketten lesznek A és pontosan ketten lesznek AB vércsoportúak!

9. FEJEZET

A várható érték

9.1. (M) Képezzük az n–n elemből álló

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \qquad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

számsokaságokból a szintén n–n elemből álló

$$X + Y = \{(x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \dots, (x_n + y_n)\},$$
$$X \cdot Y = \{(x_1 \cdot y_1), (x_2 \cdot y_2), \dots, (x_n \cdot y_n)\},$$

valamint az n^2–n^2 elemből álló

$$X \oplus Y = \{(x_1 + y_1), (x_1 + y_2), \dots, (x_1 + y_n), (x_2 + y_1), (x_2 + y_2), \dots (x_n + y_n)\},$$
$$X \otimes Y = \{(x_1 \cdot y_1), (x_1 \cdot y_2), \dots, (x_1 \cdot y_n), (x_2 \cdot y_1), (x_2 \cdot y_2), \dots (x_n \cdot y_n)\},$$

számsokaságokat! Kifejezhetőek-e ezek átlagai az X, Y sokaságok átlagai – M_X és M_Y – segítségével?

9.2. (M) Egy kockát addig dobunk fel, amíg a dobott számok mind különbözőek, tehát akkor állunk meg, amikor olyat dobtunk, amilyet már egyszer dobtunk.

a) Adjuk meg a szükséges dobások számának eloszlását
b) és várható értékét!
c) Melyik dobásszám a legvalószínűbb?

9.3. (S) Szabályos dobókockával dobhatunk. Előre el kell döntenünk, hogy hányszor dobunk. Ha 6-osnál kisebbet dobunk, akkor annyiszor 1000 Ft-ot kapunk, amennyit dobtunk és nyereményünk a dobásoknál összeadódik. Ha viszont 6-ost dobunk, akkor minden addigi nyereményünket elveszítjük, és nem is dobhatunk többször.

Hány dobást érdemes vállalni?

9.4. (M) Egy 35 fős osztályban a karácsonyi ajándékozáshoz mindenki felírja a nevét egy cédulára, egy sapkába teszi, összerázzuk, majd mindenki húz egy nevet. Határozzuk meg azok számának a várható értékét, akik a saját nevüket húzták!

9.5. (M) [14] *IMO 1982 Belgium feladatjavaslat*

A „Híres Matematikusok Csokoládé” csomagolásában található egy kis kép, 20 híres matematikus portréja közül az egyik. Mindegyik híresség képe egyenlő, tehát $\frac{1}{20}$ eséllyel található mindegyik csokiban. Átlagosan hány csokoládé vásárlásával gyűjthető össze mind a 20 kép?

9.6. (M) [19] Egymillió szám közül egyenletes eloszlással, egymástól függetlenül választunk ki számokat egészen addig, amíg N különbözőt ki nem húzunk. Az i-edik különböző számot jelöljük $X(i)$-vel. Ezt rekordnak nevezzük, ha minden eddiginél nagyobb. Határozzuk meg az $X(1), X(2), \dots, X(N)$ sorozatban található rekordok számának a várható értékét!

9.7. (M) [12] Az osztály tanulóiból 15-en – hét lány és nyolc fiú – színházba mennek. A jegyek egy sorba, egymás mellé szólnak. Ha a tanárnő véletlenszerűen osztja ki a jegyeket, akkor átlagosan hány vegyes (tehát fiú-lány) szomszédos pár lesz a diákok között? (Tehát meghatározandó az ilyen párok számának várható értéke.)

Pl. a $FFLLLFLFFFLLFFL$ elrendezésben (F fiút, L lányt jelöl) a vegyes párok száma 7.

10. FEJEZET

Feltételes valószínűség

10.1. (M) Tíz azonos alakú doboz közül az első 9-ben 4-4 golyó van, mégpedig 2 fehér és 2 kék. A tizedik dobozban 5 fehér és 1 kék golyó van. Az egyik találomra választott dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy fehér lesz?

b) A kivett golyó fehér lett. Mennyi a valószínűsége, hogy a tizedik dobozból való?

10.2. (M) Van egy-egy szabályos „dobótetraéderünk”, dobókockánk és „dobóoktaéderünk”. Mindegyik test lapjaira egytől kezdve felírtuk az első néhány pozitív egészt, tehát a tetraéderre 1-től 4-ig, a kockára 1-től 6-ig, az oktaéderre 1-től 8-ig.

Feldobunk két szabályos érmét. Ha mindkettő fej, akkor a kockával, ha pontosan egyikük fej, akkor a tetraéderrel, ha mindkettő írás, akkor az oktaéderrel dobunk.

a) Mennyi az esélye, hogy 1-est dobunk?

b) 1-est dobtunk. Mennyi az esélye, hogy pontosan egy fejet dobtunk?

10.3. Tegyük fel, hogy a férfiak 5%-a és a nők 0,25%-a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiból álló csoportból 1 személyt találomra kiválasztunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy nőt választottunk ki?

10.4. **a)** Azokban a kétgyermekes családokban, ahol az egyik gyermek fiú, minek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy a másik is fiú, vagy hogy a másik lány? Esetleg egyformán valószínű? (Feltételezzük, hogy fiú és lány születésének azonos a valószínűsége.)

b) Azokban a kétgyermekes családokban, ahol a kisebb gyermek fiú, minek nagyobb a valószínűsége hogy a másik is fiú, vagy hogy a másik lány? Esetleg egyformán gyakori?

10.5. Vetélkedő végén a győztes három ajtó közül választhat, az egyik mögött ott a Porsche, a másik kettő mögött apró ajándék van. A győztes választ egy ajtót. Ezek után a nem választott ajtók közül kinyitják neki az egyiket (vagy az egyetlent), ami mögött nem a Porsche van, és választást ajánlanak neki. Marad az ajtónál, másikat választ, vagy elviszi a látható kis ajándékot. Mit csináljon a győztes, ha a Porschéra hajt?

10.6. (M) [19] (*Török érettségi, 1997*)

Az A dobozban 3 fehér és 4 piros, a B dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Véletlenszerűen (egyenlő valószínűséggel) kiválasztjuk az egyik dobozt, és abból visszatevés nélkül kihúzunk két golyót. Mi a valószínűsége, hogy az egyik fehér, a másik piros lesz?

10.7. (M) [2]

A tébécé korai felismerésére alkalmazott röntgenszűrésnél a tapasztalatok szerint hibák is előfordulnak. A kezdeti állapotban a betegek körülbelül 10%-át nem veszi észre a teszt, míg körülbelül 20%-ban egyébként egészséges embernél is pozitív eredmény (azaz valami gyanús folt a tüdőn) adódik. Tudjuk, hogy hazánkban a tébécé előfordulása 0,3%.

a) Egy pozitív teszteredmény után mi az esélye, hogy tényleg tébécés az illető?

b) Ha negatív az eredmény, akkor mi az esélye, hogy tébécés?

c) Mindezek fényében vajon mire való ez a teszt?

10.8. (M) [6] Tudjuk, hogy egy gyakorlatban résztevevő 18 lövész négy csoportba sorolható úgy, hogy közülük öten 0,8, heten 0,7, négyen 0,6, ketten 0,5 valószínűséggel találnak a céltáblára. Véletlenül meglátunk közülük egy lövészt, aki egy lövést ad le, de ez nem talál a céltáblára. Melyik csoporthoz tartozik a legnagyobb valószínűséggel ez a lövész és mennyi ez a valószínűség?

10.9. [6] Két város közötti távíróösszeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok 2/5-e vonallá torzul, a vonalak 1/3-a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és a vonalak aránya 5:3. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy ha a vevőoldalon pontot kapnak, akkor az adó pontot továbbított!

10.10. (M) [18] Tételezzük fel, hogy egy gyermek születésekor ugyanakkora a valószínűsége annak, hogy az újszülött fiú vagy lány! Tudjuk, hogy egy háromgyermekes családban van leány. Mennyi annak a valószínűsége, hogy valamelyik testvére fiú?

10.11. [6] Minőségellenőrzés során sorban egymás után több terméket vizsgálnak meg. Ha egy megvizsgált termék jó, akkor +1-et, ha selejtes, akkor -1-et írnak le, és ezeket a számokat mindig összeadják. (Feltesszük, hogy a megvizsgált termékek egymástól függetlenül lehetnek jók vagy selejtesek.) Mindaddig új terméket vizsgálnak meg, amíg a részletösszegek -3 és +5 között maradnak. Ha a részletösszeg eléri a +5-öt, akkor befejezik a vizsgálatot és átveszik a tételt, ha a -3-at, akkor visszautasítják a tételt. Mekkora az átvétel valószínűsége, ha a termékeknek 80%-a jó?

11. FEJEZET
Játékok

11.1. (M) Egy társaság tagjai saját szórakozásukra helyi lottót szerveznek. 21 szám közül húznak ki kettőt, és ezekre lehet fogadni. Tippelni 100 forintért lehet. Ha valaki mindkét számot eltalálja, 2000 forintot kap, ha csak az egyik számot találja el, akkor 200 forintot kap.

a) Vajon ha sokáig játszom ezen a lottón, akkor mi a valószínűbb, az, hogy összességében nyereségem lesz, vagy az, hogy vesztek?

b) Legfeljebb hány szám (21 helyett) esetén érdemes játszani ezt a játékot ugyanezekkel a szabályokkal?

11.2. (M) [18] Anna és Balázs felváltva dob egy szabályos dobókockával. Megegyeznek, hogy az nyer, aki nagyobbat dob. Ha egyenlőt dobnak, akkor Anna nyer, Balázs viszont újra dobhat, ha egyest dob, ha ekkor is egyest, akkor ismét, egészen addig, amíg egyestől különbözőt nem dob. Ez az érték számít az ő dobásának. Kinek nagyobb a nyerési esélye?

11.3. (M) [18] Egy szerencsejáték-automata három hengerén 20-20 kép van:

	I.henger	**II.henger**	**III.henger**
szív	3	1	1
csillag	0	3	4
háromszög	2	2	4
kör	2	4	4
négyzet	7	7	0
lóhere	6	3	7

Egy zseton bedobása után az automata megpörgeti, majd megállítja a hengereket úgy, hogy mindegyiken egy–egy kép válik láthatóvá. 500 nyereményzsetont ad ki a gép, ha három szív látható. 8 zseton a nyeremény bármely másik három egyforma kép esetén.

a) Mennyi a főnyeremény elérésének valószínűsége egy-egy játékban?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nyeremény 8 zseton?

11.4. András és Béla a következő kockajátékot játsszák. András dobókockáján a 4, 6, 10, 18, 20, 22; Béla kockáján a 3, 9, 13, 15, 17, 25 számok vannak. Mindkét játékos feldobja saját kockáját, s az nyer, aki nagyobbat dobott. Kinek előnyös a játék?

11.5. András és Béla kockajátékot játszanak. Mindkettejük dobókockájának oldalain egy pozitív egész szám olvasható. Mindkét játékos feldobja saját kockáját, s az nyer, aki nagyobbat dobott. Igaz-e, hogy ha András kockáján nagyobb a hat szám átlaga, mint Béla kockáján, akkor nagyobb András nyerési esélye, mint Béláé?

11.6. (MS) András és Béla kockajátékot játszanak. Az asztalon van három „csupasz” dobókocka. András felírja a számokat 1-től 18-ig a kockákra úgy, hogy mindegyik számot pontosan egyszer írja fel. Ezután Béla megvizsgálja a kockákat és választ közülük egyet. A maradék két kocka közül András választhat magának egyet. Mindkét játékos feldobja saját kockáját, s az nyer, aki nagyobbat dob (a harmadik kocka már nem kap szerepet).

Kinek kedvezőbb a játék, Andrásnak, vagy Bélának?

11.7. Ketten az alábbi táblán játszanak „autóversenyt”. Kockával dobnak. Az egyik „autó” vezetője mindig annyit lép előre, ahányast dob; a másik pedig 6-ot lép, ha páros számot dob, és nem lép, ha páratlan számot dob. Az nyer, aki előbb ér célba. Te melyik versenyző szeretnél lenni? Miért?

11.7.1. ábra.

11.8. (M) Ketten (A és B) a következő játékot játsszák. Egy kalapból, melyben tapintásra egyforma piros és fehér golyók vannak, kihúznak két golyót. Ha a két golyó egyforma színű, akkor A nyer, ha különbözőek, akkor pedig B. Tudjuk, hogy a kalapban 10 piros golyó van. Hány fehér golyónak kell ott lennie ahhoz, hogy igazságos legyen a játék?

11.9. (M) Általánosítsuk a 11.8. feladatot! Adjuk meg az összes olyan nemnegatív egészekből álló p, f párt, amelyre igazságos az ott leírt játék p piros és f fehér golyóval!

11.10. (M) [12] Ketten (A és B) a következő játékot játsszák. Egy kalapból, melyben tapintásra egyforma piros és fehér golyók vannak, kihúznak két golyót. Ha mindkét golyó piros, akkor A nyer, minden más esetben pedig B.

a) Legkevesebb hány golyó esetén lehet igazságos a játék?

b) Legkevesebb hány golyó esetén lehet igazságos a játék, ha a fehér golyók száma páros?

11.11. (M) *Póker esélyek*

52 lapos francia kártyával játszunk. Határozzuk meg a kézbe kapott

a) pár – két egyforma alakzat, pl. két 3-as vagy két király és három különböző lap

b) két pár

c) drill – három egyforma alakzat, pl. három 3-as vagy három király és még két különböző lap

d) sor – pl. $\heartsuit 4, \spadesuit 5, \heartsuit 6, \clubsuit 7, \diamondsuit 8$

e) flush – öt egyforma színű lap, pl. $\clubsuit K, \clubsuit A, \clubsuit 6, \clubsuit 8, \clubsuit 10$

f) full – három + kettő egyforma alakzat, pl. $\spadesuit K, \heartsuit K, \clubsuit K, \clubsuit 5, \diamondsuit 5$

g) póker – négy egyforma alakzat – pl. $\spadesuit K, \heartsuit K, \clubsuit K, \diamondsuit K, \diamondsuit 5$

h) straight flush – négy egyforma színű lap sorban, pl. $\heartsuit 4, \heartsuit 5, \heartsuit 6, \heartsuit 7, \heartsuit 8$

esélyét!

11.12. (M) A kockapókerben 5 dobókockával dob a játékos. Határozzuk meg az alábbi dobások esélyét!

a) drill (pl. három 2-es, egy-egy 5-ös és 6-os)

b) sor (öt egymást követő szám)

11.13. (M) [1] Első dobozában 1 piros, 1 fehér, 6 zöld golyó van,

Másodikében 2 piros, 1 fehér és 4 zöld.

Mindkét játékos addig húz a saját dobozából visszatevés nélkül, amíg zöldet nem húz.

Piros húzásért Első 10, Második 4 pontot kap, fehérért Első 4, Második 6 pontot kap (zöld: 0 pont). Pontjaikat összegyűjtik, és ha elsőnek van több pontja, akkor ő nyer Másodiktól 100 Ft-ot, különben ő fizet Másodiknak x egységet.

Melyik x-re igazságos a játék?

11.14. (M) Ketten – A és B – a következő játékot játsszák.

Egy dobozban 2 piros, 1 fehér és 4 zöld golyó van. Az A játékos addig húzhat a dobozból *visszatevéssel*, amíg zöldet nem húz. Piros húzásért 50, fehérért 20 Ft-ot kap B-től, de a játék elkezdésekor egy x összeget kell adnia B-nek.

a) Átlagosan hány húzásból áll a játék?

b) Mely x esetén igazságos a játék?

11.15. (MS) [14] *IMO, 1982 Ausztrália, javaslat*

Anna n-szer, Balázs csak $(n-1)$-szer dob fel egy (szabályos) pénzérmét. Mennyi az esélye, hogy Anna többször dobott fejet, mint Balázs?

11.16. (M) [19] A Monte-Belloi kaszinóba belépőknek először egy fura játékban kell kipróbálni szerencséjüket. Ez a játék a következő: egy dobozba két nyerő és három vesztő golyót tesznek, amelyek külső formájukban teljesen megegyeznek. Ebből a dobozból visszatevés nélkül húznak ki golyókat. Nyerő golyó húzása után a kaszinó fizet a játékosnak 10 pénzt, vesztő golyó húzása esetén pedig a játékos fizet a kaszinónak 10 pénzt. A játékosnak joga van bármelyik húzás előtt a játékot abbahagyni, akár már az első húzás előtt is.

Kinek kedvez ez a játék? Érdemes-e kérni egyáltalán húzást? Hogyan érdemes játszani?

12. FEJEZET

Markov láncok

Orosz Gyula „Markov láncok” című írása alaposabban tárgyalja ezt a témát és a neten szabadon elérhető[5].

12.1. (M) A juhászfiúból lett mesebeli vitéznek három próbát kell kiállnia. Az egyes próbákon a többitől függetlenül 2/3 valószínűséggel jut túl. A falujából indul és ha egy próbát teljesít, mehet a következőre. Ha az nem sikerül, akkor vissza kell fordulnia, és újra neki kell vágnia az előző, korábban már teljesített próbának. Ha bármikor befuccsol a legelső próbán, akkor vége a mesének, kulloghat haza.

Mennyi az esélye, hogy a vitéz teljesíti mind a három próbát?

12.2. (M) *Ferde foci*

Két játékos – A és B – a $[0;6]$ intervallumon focizik, a 0 az A játékos kapuja, míg a 6 a B játékosé. A labda kezdetben a 2-n áll. Egy lépés abból áll, hogy feldobnak egy szabályos érmét, és ha „Fej” lesz, akkor eggyel jobbra (nagyobb számra), ha „Írás”. akkor eggyel balra (kisebb számra) teszik a „labdát”. A nyer, ha B kapujába – azaz 6-ra – ér a labda, míg B nyer, ha A kapujába, a 0-ba kerül a labda.

a) Melyik játékosnak mennyi a nyerési esélye?

b) Mennyi a döntetlen esélye, tehát mennyi a valószínűsége, hogy sose kerül egyik kapuba se a labda?

c) Hogyan változik a válasz az a), b) kérdésekre, ha nem pénzérmével, hanem szabályos dobókockával dobnak, és 1 valamint 2 esetén balra, 3, 4, 5 és 6 esetén jobbra tolják a labdát?

12.3. (M) Eufrozina és Fülöpke a büfében kártyáznak: a játék a hagyományos Fekete Leves. A ravasz Fülöpkénél három lap maradt, egy kőr, egy káró és egy treff, Eufrozinának még négy lapja van, minden színből egy-egy. Fülöpke következik, húz egy lapot Eufrozinától és ha ezzel lesz két egyfoma színű (a francia kártyában négy „szín” van) lapja, azokat lerakhatja, ha nem, akkor a kezében lévő négy lappal játszik tovább. Most Eufrozina jön, aki Fülöpke lapjai közül húz egyet hasonló feltételekkel és így tovább. A játékot az nyeri, aki valamennyi lapját le tudja rakni. Hány százalék a valószínűsége, hogy Fülöpke nyer?

12.4. (M) Egy bolyongó pont kezdetben a $3 \times 3 \times 3$-as kocka középső egységkockájában van. Minden lépésében a hat lehetséges oldallap közül véletlenszerűen választ egyet, s a lapon keresztül átmegy a szomszéd egységkockába vagy kijut a kocka felszínére.

a) Mennyi az esélye, hogy kijut a kocka felszínére?

b) Mennyi az esélye, hogy mielőtt kijutna a felszínre, előbb még visszajut a középső kiskockába?

12.5. (M) Egy bolha a drótból készült $ABCDA'B'C'D'$ kocka élein mozog. Minden csúcsból egyenlő – azaz $\frac{1}{3}$ – valószínűséggel megy át valamelyik szomszédos csúcsba.

a) Mennyi az esélye, hogy nem jut el sem a B' sem a C' pontba?

b) Mennyi az esélye, hogy előbb jut el B'-be, mint C'-be?

13. FEJEZET

A szórás

13.1. (M) Egy H számsokaság átlaga $\overline{x}$, szórása D. A számsokaság elemeinek legfeljebb hány százaléka lehet az $[\overline{x}-2D;\overline{x}+2D]$ intervallumon kívül?

13.2. (M) Egy H számsokaság átlaga $\overline{x}$, szórása D. A számsokaság elemeinek legfeljebb hány százaléka lehet az $[\overline{x}-3D;\overline{x}+3D]$ intervallumon kívül?

13.3. (M) Általánosítsuk a 13.1-13.2. feladatok eredményét!

13.4. (M) Adott a $H=\{x_1;x_2;\ldots;x_n\}$ számsokaság, amelynek átlaga $\overline{x}$, szórása D. Határozzuk meg a

$$\{\frac{x_1-\overline{x}}{D};\frac{x_2-\overline{x}}{D};\ldots;\frac{x_n-\overline{x}}{D}\}=\frac{H-\overline{x}}{D}$$

számsokaság átlagát és szórását!

13.5. Adott a $\{3;7\}$ számsokaság. Bővítsük ki egy elemmel, hogy ne változzon a szórása!

13.6. Határozzuk meg a $H_n=\{0;\frac{1}{n};\frac{2}{n};\ldots;\frac{n-1}{n};1\}$ halmaz szórását és a szórás határértékét, ha n tart a végtelenhez (az egyenletes eloszlás szórása)!

13.7. [9]

a) Bizonyítsuk be, hogy ha n szám összege 0, abszolút értékeik összege a, akkor a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége legalább $\frac{2a}{n}$.

b) Az $A_1A_2\ldots A_n$ konvex n-szög belsejében úgy választottuk ki az O pontot, hogy az $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}$ vektorösszeg a nullvektor, míg a vektorok hosszának összege d. Igazoljuk, hogy az n-szög kerülete legalább $4d/n$.

c) Éles-e ez a korlát minden n esetén?

14. FEJEZET

Vegyes feladatok

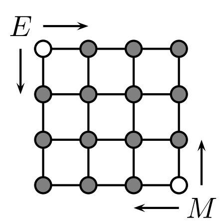
14.1. (M) [18] Nyolc egyforma bábut találomra elhelyezünk egy sakktáblán. Meny-nyi annak a valószínűsége, hogy mind a nyolc sorban és mind a nyolc oszlopban pontosan egy-egy bábu lesz?

14.2. Legalább hány pénzdarab kell ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb esélye legyen annak, hogy feldobva van köztük fej?

14.3. (M) A könyvespolc alsó polcáról a kétéves Pisti leszedte a könyveket, majd „saját ízlése szerint” visszarakta mind a 25-öt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a köztük levő három idegen nyelvű könyv egymás mellé került?

14.4. Egy halálraítéltnek némi esélyt kívánnak adni az életben maradásra. Adnak neki 50 fehér és 50 fekete golyót és két urnát. A golyókat eloszthatja a két urnába. A hóhér másnap reggel találomra kiválaszt egyet a két urna közül, majd a kiválasztottból kihúz egy golyót. Ha az fekete, akkor kivégzik az elítéltet, ha fehér, akkor szabadon engedik. Hogyan célszerű elosztani golyókat, hogy a legnagyobb valószínűséggel életben maradjon?

14.5. (M) [4] Egy 4×4-es négyzetrács alakú labirintus két átellenes csúcsában – a kijáratoknál – egy egér és egy macska van. Mindketten adott jelre, ugyanakkora sebességgel elindulnak a szemköztes kijárat felé úgy, hogy minden lépésben közelednek céljukhoz (lásd a 14.0.1. ábrát). Egymást nem látják, útválasztásuk az elágazásokban véletlenszerű. (Ez azt jelenti, hogy amikor elágazáshoz érnek, a lehetséges két irány közül egyforma valószínűséggel választanak.)

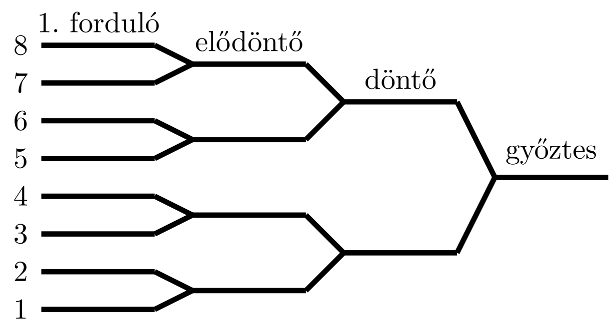


14.5.1. ábra.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy találkoznak?
b) Általánosítsuk a feladatot!

14.6. (M) [6] Egy futballklub edzésének megkezdése előtt az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi a valószínűsége annak, hogy ha találomra történik a szétosztás két 11-es csoportba, a két legjobb játékos egymás ellen játszik?

14.7. [12] *Bejut-e a második a döntőbe?*
A nyolc résztvevős kieséses teniszbajnokságot az alábbi ábrán látható rendszerben bonyolítják le. Ehhez a játékosok között véletlenszerűen osztják ki az 1, 2, ..., 8 sorszámokat.
Tegyük fel, hogy a játékosok képességük szerint egyértelműen rakhatók sorrendbe és a jobb mindig legyőzi a kevésbé jót!
a) Mennyi az esélye a második legjobb játékosnak, hogy bejusson a döntőbe?



14.7.1. ábra.

b) Mennyi annak az esélye, hogy a második és a harmadik legjobb játékos összeméri tudását ezen a versenyen?

c) Válaszoljunk az előző kérdésekre a 2^n résztvevős fenti rendszerű kieséses bajnokság esetén is!

14.8. (M) [4] Három herceg, A, B és C egyaránt szerelmes Bergengócia királylányába. Elhatározzák, hogy egyetlen pisztolypárbajban eldöntik, melyikük legyen a kérő. Egyszerre körbeállnak és bármelyikük lőhet bármelyikükre. Tudják egymásról, hogy ha lő, A 1, B 0,8 és C 0,5 valószínűséggel talál, ezért abban állapodnak meg, hogy először lő C, utána (ha életben van) B, végül A. Ha nincs vége a párbajnak, akkor még egy kört lőnek azonos sorrendben.

Mikor a királylány meghallotta a feltételeket, a párbaj előtti este titokban kicserélte C első golyóját vaktöltényre.

a) Kibe szerelmes a királylány?

b) Hogyan változnak meg a párbaj valószínűségei, ha most a felek nemcsak kettő, hanem tetszőleges számú lövést adhatnak le? (A királylány most is csak az első golyót cseréli ki vaktöltényre.)

14.9. (M) [19] *USA érettségi, 1988*

Legyen p annak a valószínűsége, hogy egy szabálytalan érme fejre esik, és w annak a valószínűsége, hogy öt dobásból három lesz fej. Tegyük fel, hogy $w = 144/625$. Melyik helyes az alábbi állítások közül:

a) $p = 2/5$, **b)** $p = 3/5$, **c)** p nagyobb, mint $3/5$,
d) több ilyen p érték létezik, **e)** ilyen p érték nem létezik.

14.10. [19, 3] Egy jegypénztárhoz $2n$ számú vásárló érkezik. Közülük n vásárlónak csak ezrese, a többinek csak ötszázasa van. Egy jegy ára ötszáz forint, és nyitáskor a pénztárban nem volt pénz. Feltesszük, hogy a $2n$ vevő egymástól függetlenül érkezik, bármely sorrendnek ugyanakkora a valószínűsége. Mekkora a valószínűsége, hogy egyetlen vevőnek se kelljen várnia?

14.11. A községi polgármester-választáson az A jelölt a, a B jelölt b szavazatot kapott $0 \le b < a$. Mennyi az esélye, hogy a szavazatszámlálás során a B jelölt sohasem vezetett A előtt?

14.1. Hézag

14.1. (M) [19] *USA érettségi, 1984*

Véletlenszerűen lerakunk 3 piros, 4 zöld, 5 fehér golyót egy sorba úgy, hogy bármelyik lehetséges sorrend egyenlő valószínűségű. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy nem kerül egymás mellé két zöld golyó!

14.2. (M) [10] Egy főútvonalon végighaladva nyolc helyen van közlekedési lámpa. Annak valószínűsége, hogy egy lámpa éppen pirosat jelez, amikor odaérünk, 0,4. Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem találkozunk közvetlenül egymás után két tilos jelzéssel?

14.2. Nagyságrendi sorrend

14.1. Az interneten elérhető

http://www.szerencsejatek.hu/xls/otos.xls

fájl tartalmazza az eddigi ötöslottó (az 1-90 számok közül húznak ki ötöt) nyerőszámokat. A táblázatban a kihúzott számok mindegyik húzásnál növekvő sorrendben vannak felsorolva, tehát pl. a legkisebb számok egy oszlopban egymás alatt olvashatók.

a) Tippeljük meg az eddigi – több mint 2800 – húzásban a legkisebb szám átlagos értékét!

b) Ellenőrizzük tippünket az említett fájl letöltésével és az átlag kiszámolásával! Ki tippelt a legjobban?

14.2. (M) A Bergengóc Lottóban az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ számok közül húznak ki kettőt (visszatevés nélkül).

a) Melyik a kisebbik szám legvalószínűbb értéke?

b) Határozzuk meg a kisebbik szám várható értékét!

c) Határozzuk meg a kisebbik szám várható értékét, ha az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ számok közül húznak ki kettőt!

d) Mennyi a kisebbik szám legvalószínűbb értéke, ha az $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ számok közül húznak ki kettőt?

14.3. (M) A Bergengóc Lottót megreformálják! Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ számok közül mostantól négyet húznak ki (visszatevés nélkül).

a) Melyik a második legkisebb szám legvalószínűbb értéke?

b) Határozzuk meg a második legkisebb szám várható értékét!

c) Határozzuk meg a második legkisebb szám várható értékét, ha az

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

számok közül húznak ki négyet!

d) Határozzuk meg a második legkisebb szám legvalószínűbb értékét!

14.3. Permutációk

14.1. (M) Bergengóciában a sakkversenyzők között 9 nagymester van. Élő-pontjuk mind különböző (a sakkversenyzők korábbi mérkőzéseik eredménye alapján kapják az Élő Árpádról elnevezett pontszámot, lásd http://hu.wikipedia.org/wiki/Élő-pontrendszer)

A 9 nagymester részt vesz az ország csapatbajnokságán, amely három háromfős csapatból, azaz éppen belőlük áll. Amikor két csapat játszik, akkor három táblán csapnak össze a versenyzők, az első táblán a két csapat legtöbb Élő-ponttal rendelkező játékosa, a második táblán az Élő-pont szerinti másodikak, a harmadikon az utolsók.

A bajnokságban minden csapat mindegyikkel pontosan egyszer játszik. Előfordulhat-e, hogy mindegyik mérkőzésen mindegyik táblán a nagyobb Élő-pontú játékos legyőzi a kevesebb Élővel rendelkezőt, a három csapat mégis körbeveri egymást?

14.2. [18] Vettünk öt darab egyforma Blend-a-med Complete és egy Blend-a-med Soda Bicarbonate fogkrémet. A szatyorban kicsúsztak a dobozukból. Hazaérve találomra beletettünk mindegyik dobozba egy-egy tubus fogkrémet.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy mindegyik dobozban a feliratnak megfelelő fogkrém van?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy pontosan öt dobozban van a feliratnak megfelelő fogkrém?

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy pontosan négy dobozban van a feliratnak megfelelő fogkrém?

14.3. Öten kihúzzák egymás nevét egy kalapból. Mi az esélye annak, hogy senki sem húzza ki a saját nevét?

14.4. Öten kihúzzák egymás nevét egy kalapból ajándékozás céljából. Mi az esélye annak, hogy körbe ajándékozzák egymást, tehát hogy egyetlen ciklus alakul ki?

14.5. Egy embernek n kulcsa van, ezek közül csak az egyik nyitja az ajtaját. Egymás után próbálja ki a kulcsokat (visszatevés nélkül). Határozzuk meg a próbálkozások számának eloszlását!

14.6. (M) *Kürschák verseny 1971*

Van 30 perselyünk és mindegyikhez egy-egy kulcs, amely a többi perselyt nem nyitja. Valaki találomra bedobja a kulcsokat a zárt perselyekbe. Két perselyt feltörünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a többi perselyt feltörés nélkül ki tudjuk nyitni?

14.7. (M) [14] *IMO 1989. New York, javaslat*

Határozzuk meg az 1, 2, ..., n számok véletlen permutációjában az inverziók számának várható értékét! Az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutáció inverziói mindazok az $1 \leq k \neq m \leq n$ számpárok, amelyekre $k < m$, de $i_k > i_m$ (tehát mindazon számpárok száma, amelyek nagyságrendjükkel ellentétes sorrendben állnak a permutációban). Az 1, 2, 3, 4 számok (2413) permutációjában az alábbi párok állnak inverzióban: (21), (41), (43), tehát az inverziók száma itt 3.

14.8. [8] *Véletlen permutáció generálása*

Az alábbi program az 1, 2, ..., n számok egy véletlen permutációját állítja elő.

A π_0 permutáció legyen identikus, azaz minden szám marad a helyén: $\pi_0(i) = i$, tehát $\pi_0 = (1,2,\ldots,n)$. Futtassuk a k változót 1-től $(n-1)$-ig és minden lépésben képezzük a π_{k-1} permutációból a π_k permutációt úgy, hogy cseréljük ki a benne k-adik helyen álló $\pi_{k-1}(k)$ számot az l-edik helyen álló $\pi_{k-1}(l)$ számmal, ahol l-et minden lépésben egyenletes eloszlással véletlenszerűen választjuk az $\{1,2,\ldots k\}$ halmazból. A program:

1. $\pi = (1,2,\ldots,n)$;
2. for $k = 1$ to $(n-1)$;
3. válasszunk egy l véletlen számot az $\{1,2,\ldots,k\}$ halmazból;
4. cseréljük ki $\pi(k)$-t és $\pi(l)$-t.

Mutassuk meg, hogy ez az eljárás „jó véletlent” ad, azaz a 1, 2, ..., n számok minden permutációját egyenlő eséllyel állítja elő a program!

14.9. (M) Határozzuk meg az 1, 2, ..., n számok véletlen permutációjában a fixpontok számának várható értékét!

14.10. (M) Az osztály 35 tanulója kihúzza egymás nevét egy kalapból ajándékozás céljából. Az osztálykarácsonykor a legfiatalabb diák kezdi az ajándékozást. Láncban ajándékozzák egymást a gyerekek, aki ajándékot kapott, a következő lépésben ő adja át ajándékát annak akit húzott, míg az egyik diák a sort elindító legfiatalabbnak adja ajándékát. Határozzuk meg az így kialakuló első kör hosszának eloszlását!

14.11. (M) Határozzuk meg az 1, 2, ..., n számok véletlen permutációjában a ciklusok számának várható értékét!

14.12. (M) Adott 10 darab tojás: 2 fehér, 2 zöld, 2 sárga, 2 kék és 2 piros, tehát mindegyik színből kettő van. Véletlenszerűen 5 párt készítünk belőlük. Mi az esélye, hogy pontosan k párban vannak azonos színű tojások? Adjuk meg a kérdezett valószínűséget $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és 5 esetén!

14.4. Idegen nyelven

14.1. *angol nyelvű matematika érettségi 2008 május*

There were 100 students from the $9-12^{\text{th}}$ grades of a Hungarian high school subject to an international survey on math education. Each student took the same test and the maximal score was 150 points. The average score of the students was 100 points. The number of students from the grades $9-10^{\text{th}}$ was one and a half times of the number of students from the grades $11-12^{\text{th}}$ and, at the same time, the mean score of the students from the grades $11-12^{\text{th}}$ was one and a half times of the mean score of the students from the grades $9-10^{\text{th}}$.

a) Calculate the mean score of the students from the grades $11-12^{\text{th}}$.

Having run the survey the organizers were also interested about how did the students judge the diffuculty of the questions. There were three students out of the 100 chosen randomly and they were asked to fill a questionaire.

b) What is the probability that there were 2 students chosen from the grades $9-10^{\text{th}}$ and 1 student from the grades $11-12^{\text{th}}$?

14.2. (M) *http://stattrek.com/Lesson1/Bayes.aspx*

Marie is getting married tomorrow, at an outdoor ceremony in the desert. In recent years, it has rained only 5 days each year. Unfortunately, the weatherman has predicted rain for tomorrow. When it actually rains, the weatherman correctly forecasts rain 90% of the time. When it doesn't rain, he incorrectly forecasts rain 10% of the time. What is the probability that it will rain on the day of Marie's wedding?

14.5. Paradoxonok

14.1. [7] Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból vett számok kéttagú összegeiként a 9 és a 10 is kétféleképpen áll elő:

$$9 = 3 + 6 = 4 + 5;$$

$$10 = 4 + 6 = 5 + 5;$$

Háromtagú összegként pedig mindkét számnak hatféle előállítása van:

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3;$$

$$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$$

Ennek alapján sokáig azt gondolták, hogy a dobott számok összege ugyanakkora eséllyel lesz 9-es, mint 10-es. Melyiknek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy 9 vagy annak, hogy 10 lesz az összeg, ha

a) két **b)** három

dobókockával dobunk?

14.2. [7] *De Méré lovag paradoxona*

a) Egy kockát dobunk fel sokszor egymás után. Átlagosan hányadikra dobjuk az első hatost?

b) Két kockát dobunk fel sokszor egymás után. Átlagosan hányadikra dobjuk az első dupla hatost?

c) Hányszor kell feldobni egy kockát ahhoz, hogy valószínűbb legyen, hogy dobtunk már hatost, mint hogy nem dobtunk?

d) Hányszor kell feldobni két kockát ahhoz, hogy valószínűbb legyen, hogy dobtunk már dupla hatost, mint hogy nem dobtunk? Először 1 perc alatt tippeljünk, utána számoljunk!

14.3. [7] *Az osztozkodás paradoxona*

Két játékos egy igazságos játékot játszik (ugyanolyan eséllyel nyer mindegyik), és abban állapodnak meg, hogy az nyeri az egész kitűzött pénzösszeget, aki először nyer 6 játszmát. A játékosok valamilyen okból abbahagyják a játékot, mikor az első 5, a második 3 játszmát nyert. Hogyan méltányos osztozkodni a téten?

14.4. [7] (*születésnap-paradoxon*)

Megközelítőleg hány ember esetén valószínűbb, hogy lesz közöttük kettő, akiknek az év ugyanazon napjára esik a születésnapjuk, mint az, hogy nincs két ilyen ember? (Számoljunk 366 nappal.)

14.5. [7] *Az adulehívás paradoxona*

A bridzset 52 lapos francia kártyával játsszák. A négy játékos mindegyikénél 13-13 lap van. Az asztalnál szemközt ülő játékosok (akik hidat, bridge-et alkotnak) együtt vannak. Sőt, a lejátszás elején az egyik játékos kiteríti lapjait az asztalra, és a vele szemközt ülő partnere játszik az ő lapjaival is. Ez a játékos azt látja, hogy nála és az asztalon összesen 7 adu van, tehát az ellenfeleknél összesen 6.

a) Melyik az esélyesebb, hogy az ellenfeleknél $3-3$ adu van, vagy az, hogy az egyiknél 2, a másiknál 4?

A játékos egymás után kétszer adut hív, és mindenki adut tesz rá mind a két alkalommal.

b) Ha 22 lapot – melyek közt 2 adu van – kiosztunk két 11-es csoportba, akkor melyik az esélyesebb, hogy mindkettőben 1 adu lesz, vagy az, hogy az egyikben 0, a másikban 2?

14.6. [7] *Schrödinger paradoxona*

Két borítékban ismeretlen mennyiségű pénz van. Nem tudni, melyikben van több, de azt tudjuk, hogy amelyikben több van, abban kétszer annyi van, mint a másikban. Az egyiket kinyitjuk, és megnézzük, mennyi van benne, majd ezek után el kell dönteni, hogy elfogadjuk-e ezt a pénzösszeget, vagy inkább az ismeretlen, második borítékot választjuk.

Hogyan érdemes dönteni?

14.6. Valószínűség és geometria

14.1. (M) [14] IMO 1983, USA, javaslat

A szabályos n-szög ($n \geq 6$) csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk két közös pont nélküli ponthármast. Mennyi az esélye, hogy a két ponthármas – mint csúcsok – által meghatározott két háromszög nem metszi egymást?

14.2. (M) [14] IMO 1978, NDK, javaslat

A szabályos n-szög csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat. Meny-nyi az esélye, hogy az általuk – mint csúcsok által – meghatározott háromszög hegyesszögű?

14.7. Nehéz versenypéldák

14.1. Tekintsük a koordinátarendszer következő hat pontját: $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(2;0)$, $(2;1)$! Egy bolha ugrál ezen a hat ponton a következő szabály szerint. Minden lépésben véletlenszerűen kiválaszt egy szomszédos pontot és arra átugrik. A szomszédos pontok között egyenlő valószínűséggel választ. Mi a valószínűsége annak, hogy a $(0;0)$ pontból indulva 23 lépés után az $(1;0)$ pontra ér? Két pontot akkor nevezünk szomszédosnak, ha az egyik koordinátájuk azonos, a másik eggyel tér el.

14.2. [10] Kömal, B. 3441., 2001. feb.

Pinokkiónak 9-féle akadályon kell sikerrel túljutnia, hogy hús-vér gyerek lehessen. Nehéz dolga van; ha egy akadályon elbukik, akkor vissza kell térnie az előzőhöz, és ott újra kell próbálkoznia. Ha a legelső akadályon bukik el, akkor fabábu marad örökre. Pinokkió nem tanul a kudarcokból, ezért az egyes akadályokon a siker valószínűsége mindig 1/10, 2/10, 3/10, ..., 9/10, akárhányadszor is próbálkozik. Milyen sorrendben rendezze el a Kékhajú Tündér a Pinokkióra váró akadályokat ahhoz, hogy Pinokkió a legnagyobb eséllyel változzék át igazi gyerekké, és mekkora ebben az esetben a siker valószínűsége?

14.3. *OKTV, 1997/98, III. kat. 1. ford. 4. fel.*

Egy-egy cédulára felírtuk az 1, 2, 3, illetve 4 számokat. Anna kihúz egy cédulát a négy közül, majd visszateszi a többi közé. Ezután Zsófi húz ki egy cédulát, utána visszateszi, majd ismét Anna következik stb. A kihúzott számot mindig hozzáadják az addig kihúzott számok összegéhez. Az nyer, akinek a húzása után először lesz az összeg 3-mal osztható. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna nyer?

14.4. *OKTV, 1991/92, III. kat. 1. ford. 3. fel.*

Bergengóciában háromféle fémpénz van forgalomban, ezek - növekvő értéksorrendben - az alig, a bagó és a csenevész. Márton és Nándor a következő játékot játsszák. Márton elővesz egy általa választott érmét, erre Nándor köteles a másik két fajtából egyet-egyet elővenni. A három érmét egyszerre feldobják, és azé lesz mindhárom érme, akinek az írásra esett érméje vagy érméi nagyobb összértéket képviselnek. Ha csupa fej jön ki, akkor mindenki megtartja a saját pénzét (más esetben nem fordulhat elő döntetlen). A fiúk észreveszik, hogy a játék mindig igazságos, akármelyik érmét is veszi elő Márton. Kérdés: hány aligot ér egy csenevész?

14.5. *Kürschák verseny, 1990.*

100 gyerek között egy nem szabályos érme többszöri feldobásával szeretnénk egy ajándékot kisorsolni. A pénzdarabot k-szor feldobjuk, miután a dobássorozat minden egyes kimenetelére meghatároztuk, hogy az adott esetben ki nyer. Bizonyítsuk be, hogy a „fej” dobás p valószínűségét és a k értékét alkalmasan megválasztva a 2^k kimenetelt fel lehet osztani a gyerekek közt úgy, hogy mindenki egyforma valószínűséggel nyerjen!

14.6. *Kürschák verseny, 1986.*

A és B a következő játékot játssza: az első 100 pozitív egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot, és ha ezek összege páros, akkor A nyer, egyébként pedig B. A k milyen értékeire lesz egyenlő A és B nyerési esélye?

Segítség, útmutatás

1. A statisztika alapjai

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

2. Kísérletek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Statisztikák

3.3. A Winword Edit/Replace azaz Szerkesztés/Csere utasítása végrehajtáskor kiírja a lecserélt betűk számát.

4. Esélyek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

5. Hipergeometrikus eloszlás

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

6. Binomiális eloszlás

6.4.

1. segítség, útmutatás. Tekintsük úgy, hogy a lemondás valószínűsége megegyezik a korábbi lemondások relatív gyakoriságával.

2. segítség, útmutatás. A számoláshoz használhatunk szoftvert, pl táblázatkezelő programot (Excel, OpenOffice.Calc)

7. Geometriai eloszlás

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

8. Genetika

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

9. A várható érték

9.3. Fogalmazzuk meg a kérdést matematikailag!

Van, aki így fogalmazza: *melyik az a legnagyobb n, amelyre nagyobb az esélye, hogy addig még nem dobtunk hatost, mint annak, hogy dobtunk?*

Ez egy nagyon jó kérdés, de nem illeszkedik a feladathoz. Ha pl a k számot dobva k millió Ft-ot nyernénk, míg hatos dobás esetén a tanár azt mondaná nekünk szúrós szemmel, hogy „ejnye bejnye”, akkor is ez lenne a matematikai kérdés?

Logikus ezzel a matematikai kérdéssel foglalkozni: *Legyen n vállalt dobásra kiszámolva várható nyereményünk $E(n)$. Mely nemnegatív egész n esetén van az E függvénynek maximuma?*

Határozzuk meg először $E(1)$ és $E(2)$ értékét!

10. Feltételes valószínűség

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

11. Játékok

11.6.

1. segítség, útmutatás. A 11.4. feladatban láttuk hogyan kell összehasonlítani két kockát. Feltételezzük, hogy ezzel András és Béla is tisztában van.

Andrásnak csak akkor van esélye, ha fel tudja úgy írni a kockákra a számokat, hogy a három kocka „körbeverje” egymást: ha az I-es és II-es kockát összehasonlítjuk, akkor legyen pl. I-es esélyesebb a II-esnél, a II-es és a III egymás közti csatájában II-es legyen jobb a III-asnál, míg a III-as legyen jobb az I-esnél.

Próbálkozzunk meg így számozni a kockákat!

2. segítség, útmutatás. Lásd a 14.1. feladatot!

11.15. Oldjuk meg a feladatot $n = 1$ és $n = 2$ esetén! Fogalmazzunk meg sejtést, igazoljuk!

12. Markov láncok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

13. A szórás

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

14. Vegyes feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

Megoldások

1. A statisztika alapjai

1.1. A tippek halmaza: $H = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ adatsokaság. Nem halmaz, mert ugyanaz az elem többször is lehet.

Néhány eljárási ötlet diákoktól:

1. Építsünk különböző magasságú mintatornyokat és mindegyik torony magasságát tippeltessük meg hasonló jellegű társasággal. Ahol a tipphalmaz hasonló az adott tipphalmazhoz, azt a magasságot válasszuk!

2. Vegyük az adatok valamilyen közepét, esetleg előzőleg dobjuk ki a legkisebb és legnagyobb elemet vagy elemeket vagy azok bizonyos százalékát.

3. Vegyük az adatok átlagát, az attól leginkább eltérő néhányat dobjuk ki és vegyük a maradék átlagát.

4. Az y, z jelöltek közül kiválaszthatjuk a jobbikat az alább eljárással:

– Számoljuk ki y és z átlagát: $\frac{y+z}{2}$.

– Számoljuk meg a H adatsokaság elemei közül hány nagyobb $\frac{y+z}{2}$-nél és hány kisebb nála.

– Ha több nagyobb van, akkor y és z közül a nagyobb a jobb jelölt, ha pedig több kisebb van, akkor y és z közül a kisebbik a jobb.

5. Egy adott x jelölthöz rendeljünk egy hibaértéket. Erre két szokásos eljárás van:

– Az x szám átlagos abszolút eltérése a H adatsokaságtól:

$$\frac{|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|}{n}.$$

– Az x szám átlagos négyzetes eltérése a H adatsokaságtól:

$$\frac{(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2}{n}.$$

Az a jelölt a legjobb, amelyre a hibaérték a legkisebb.

1.2. Erdemények: a) 4, **b)** 3.

1.3. a) Az x szám átlagos négyzetes eltérése az $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ számsokaságtól:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2}{n} = x^2 - 2x\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} =$$

$$= \left(x - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2.$$

Látható, hogy a kifejezés a minimumát az $x = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ számnál, a sokaság átlagánál veszi fel. Az átlag négyzetes eltérése a számsokaságtól a

$$D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

szórásnégyzet.

Definíció: számsokaság *szórásnégyzete* az átlag átlagos négyzetes eltérése a számsokaságtól.

$$D^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

Ez az átlagos négyzetes eltérés minimális értéke. A számsokaság *szórása* a szórásnégyzet gyöke: D.

A levezetés és az elnevezések alapján az x szám átlagos négyzetes eltérése a számsokaságtól így is írható:

$$(x - \overline{x})^2 + D^2.$$

b) Az x szám átlagos abszolút eltérése az $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ számsokaságtól:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x - x_i|}{n} = \frac{|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|}{n}.$$

A további magyarázat egyszerűsége kedvéért tegyük fel, hogy az adatsokaság elemeinek nagyságrendi sorrendje megegyezik az indexek sorrendjével:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n.$$

Ha $x < x_1$ és x-et Δx-szel mozgatjuk x_1 felé, akkor mindegyik $|x - x_i|$ „távolság" csökken, az átlagos négyzetes eltérés értéke $n\Delta x$-szel csökken. Ugyanígy, ha $x_n < x$, akkor $x_n$felé mozgatásával csökken az átlagos abszolút eltérés. Ha $x_1 \leq x \leq x_n$, akkor a két szélső elemtől való távolság összege fix:

$$|x - x_1| + |x - x_n| = x - x_1 + x_n - x = x_n - x_1.$$

így az adatsokság két szélső elemét levehetjük, majd újrakezdhetjük a gondolatmenetet. Kiderül, hogy – amennyiben legalább négy elem van a sokaságban – az átlagos négyzetes eltérés értéke akkor a legkisebb, ha x_2 és x_{n-1} között vesszük fel x-et, de az x_2-től és x_{n-1}-től való távolságösszeg értéke független attól, hogy ezen belül hol van x. Így haladhatunk tovább, míg csak egy vagy két elem marad a sokaságban. Egy elemtől való távolság akkor a legkisebb, ha x megegyezik azzal az elemmel, míg két elemtől való távolság a minimumát a két elemen és azok között bárhol felveszi.

Igazoltuk, hogy az x számnak a $H = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ adatsokaságtól való átlagos abszolút eltérése akkor minimális, ha x a H nagyságrendben középső eleme (ha H elemszáma páratlan), illetve ha H középső két eleme között lévő tetszőleges szám (H elemszáma páros).

Definíció: Számsokaság *medián*ja a nagyságrendben középső eleme, illetve a középső kettő átlaga H elemszámának paritása szerint.

Definíció: Számsokaság *módusz*a az az elem, amely a legtöbbször fordul elő a halmazban. Ha több elem is ugyanolyan sokszor, legtöbbször fordul elő a halmazban, akkor a móduszok halmazáról beszélünk.

A számsokaság szóródásának mérőszáma még a szóráson kívül:

Definíció: számsokaság *terjedelme* a legnagyobb és legkisebb elemének különbsége.

1.4. a) Pl. $\{1;2;6\}$.

b) Háromelemű halmazt keresünk: $\{x;2;7-x\}$. Ennek a várható értéke 3, és $x \le 2 \le 7-x$ esetén a mediánja 2. A szórása akkor 5, ha

$$(x-3)^2 + 1 + (4-x)^2 = 2x^2 - 14x + 26 = 75$$

Az egyenlet gyökei:

$$\frac{7 \pm 7\sqrt{3}}{2}.$$

Tehát a halmaz:

$$\left\{\frac{7-7\sqrt{3}}{2};\quad 2;\quad \frac{7+7\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

c) $\{1;1;3;7\}$

1.5. $\frac{21\cdot 171+9\cdot 182}{21+9} = \frac{5229}{30} = 174{,}3.$

1.6. a) Az átlagot meg lehet határozni, ha vesszük az eredeti számsokaság elemeinek összegét, és ebből megállapíthatjuk az új sokaság összegét és így átlagát is:

$$\frac{55{,}7\cdot 72+56}{73} = \frac{20332}{365} \approx 55{,}70.$$

Mást azonban nem lehet megadni.

b) Az átlag ebben az esetben is ugyanannyi, viszont a mediánja mindenképpen 55, hiszen az eredeti halmaz két (nagyság szerint) középső elemének az átlaga 54,5, vagyis mivel 54 van, ez a két elem közül a kisebbik, vagyis az 55 a nagyobbik, így az 56 hozzáadásával az 55 lesz a középső. A módusz viszont nem egyértelmű, ugyanis lehet csak 54 vagy 54 és 56.

1.10. a) A $P(x;y)$ pontra

$$\begin{array}{rcccl} PA^2 & = & ((x-1)^2+(y-5)^2) & = & x^2-2x+y^2-10y+26 \\ PB^2 & = & ((x-7)^2+(y-10)^2) & = & x^2-14x+y^2-20y+149 \\ PC^2 & = & ((x-4)^2+(y-12)^2) & = & x^2-8x+y^2-24y+160, \end{array}$$

azaz

$$PA^2+PB^2+PC^2 = 3x^2-24x+3y^2-54y+335 = 3\cdot(x^2-8x+y^2-18y+111\frac{2}{3}) =$$

$$= 3\cdot\left((x-4)^2+(y-9)^2+14\frac{2}{3}\right).$$

Tehát a négyzetösszeg akkor minimális, ha $x=4$ és $y=9$, azaz P a $(4;9)$ pont.

b) Most

$$PA^2+PB^2+PC^2 = 3x^2-2(a_1+b_1+c_1)x+3y^2-2(a_2+b_2+c_2)y+(a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2) =$$

$$\begin{aligned} &= 3\cdot\left[\left(x-\tfrac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2+\left(y-\tfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)^2\right]+ \\ &+3\cdot\left[\tfrac{a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2}{3}-\left(\tfrac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2-\left(\tfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)^2\right], \end{aligned}$$

azaz $P\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

1.12. Felelevenítjük annak levezetését, hogy az átlagos négyzetes eltérés az átlagnál minimális. Az x szám átlagos négyzetes eltérése az $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ számsokaságtól:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x-x_i)^2}{n} = x^2 - 2x\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} =$$
$$= \left(x - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2.$$

Látható, hogy a kifejezés a minimumát az $x = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ számnál, a sokaság átlagánál veszi fel. Az átlag négyzetes eltérése a számsokaságtól a

$$D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2$$

szórásnégyzet. A levezetés és az elnevezések alapján az x szám átlagos négyzetes eltérése a számsokaságtól így is írható:

$$(x-\overline{x})^2 + D^2.$$

Válasz a 13. feladatra: igen megadható, $(11-3)^2 + D^2 = 64 + 25 = 89$.

1.13. **a)** A medián, a módusz és az átlag 3-mal nő. A terjedelem és a szórás nem változik.
b) Minden hárommal szorzódik.

1.14. Minden eleme egyenlő.

1.15. A módusz, a medián és az átlag mind a három esetben 3. Az 1., 2., és a 3. tanuló jegyeinek szórása rendre 0, $\sqrt{\frac{6}{11}} \approx 0{,}7385489459$, $\sqrt{\frac{20}{11}} \approx 1{,}3483997249$.

1.16. **a)** 2.
b) Nem változik.
c) Csökken,

$$\sqrt{\frac{140}{36}} \approx 1{,}972026594$$

lesz.

1.17. Az 1.2. feladat számsokaságához a 3, az 1.3.-hoz az összes szám 3 és 8 között a széleket is beleértve.

2. Kísérletek

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

3. Statisztikák

3.1. A megoldást táblázatkezelő program segítségével a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/toldibetustatisztika.xls`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/toldibetustatisztika.ods`

Excel illetve OpenOffice.Calc fájlokban végeztük el.

a)	**magyar karakter**	**gyakoriság**	**relatív gyakoriság**
1.	E	5204	0,098242435
2.	A	4764	0,089936003
3.	T	4244	0,080119311
4.	N	3326	0,062789073
5.	L	3223	0,060844613
6.	S	3090	0,058333805
7.	K	2329	0,043967454
8.	R	2168	0,040928055
9.	M	2132	0,040248438
10.	O	2128	0,040172925
11.	I	2071	0,039096864
12.	G	2063	0,038945838
13.	Á	1846	0,034849257
14.	Z	1807	0,034113005
15.	É	1686	0,031828736
16.	Y	1507	0,028449529
17.	D	1366	0,025787695
18.	V	1110	0,020954862
19.	B	1010	0,019067037
20.	H	1001	0,018897132
21.	J	831	0,015687829
22.	Ö	683	0,012893848
23.	F	550	0,01038304
24.	C	482	0,009099318
25.	P	459	0,008665119
26.	Ó	426	0,008042136
27.	U	424	0,00800438
28.	Ő	329	0,006210946
29.	Í	226	0,004266485
30.	Ú	212	0,00400219
31.	Ü	195	0,00368126
32.	Ű	79	0,001491382
	össz:	52971	1

b)	**magyar hang**	**gyakoriság**	**relatív gyakoriság**
1.	E	5204	0,103721125
2.	A	4764	0,094951468
3.	T	4198	0,0836705
4.	L	3027	0,060331254
5.	N	2946	0,05871684
6.	K	2329	0,046419389
7.	R	2168	0,043210492
8.	M	2132	0,042492974
9.	O	2128	0,04241325
10.	I	2071	0,041277181
11.	Á	1846	0,036792697
12.	S	1803	0,035935663
13.	É	1686	0,033603731
14.	D	1363	0,027166006
15.	G	1178	0,023478763
16.	V	1110	0,022123453
17.	B	1010	0,020130349
18.	H	1001	0,01995097
19.	SZ	920	0,018336556
20.	GY	885	0,017638969
21.	Z	858	0,017100831
22.	J	831	0,016562693
23.	Ö	683	0,013612899
24.	F	550	0,010962071
25.	P	459	0,009148347
26.	Ó	426	0,008490622
27.	U	424	0,00845076
28.	NY	380	0,007573795
29.	CS	341	0,006796484
30.	Ő	329	0,006557312
31.	Í	226	0,004504415
32.	Ú	212	0,00422538
33.	LY	196	0,003906484
34.	Ü	195	0,003886553
35.	C	141	0,002810276
36.	Ű	79	0,001574552
37.	TY	46	0,000916828
38.	ZS	25	0,000498276
39.	DZ	2	0,0000398621
40.	DZS	1	0,000019931
	össz:	50173	1

c)	angol abc	gyakoriság	relatív gyakoriság
1.	E	6890	0,130071171
2.	A	6610	0,12478526
3.	T	4244	0,080119311
4.	O	3566	0,067319854
5.	N	3326	0,062789073
6.	L	3223	0,060844613
7.	S	3090	0,058333805
8.	K	2329	0,043967454
9.	I	2297	0,04336335
10.	R	2168	0,040928055
11.	M	2132	0,040248438
12.	G	2063	0,038945838
13.	Z	1807	0,034113005
14.	Y	1507	0,028449529
15.	D	1366	0,025787695
16.	V	1110	0,020954862
17.	B	1010	0,019067037
18.	H	1001	0,018897132
19.	U	910	0,017179211
20.	J	831	0,015687829
21.	F	550	0,01038304
22.	C	482	0,009099318
23.	P	459	0,008665119
	össz:	52971	1

3.2. A megoldást táblázatkezelő program segítségével a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/ottlikiskolaahataronstatisztika.xls`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/ottlikiskolaahataronstatisztika.ods`

Excel illetve OpenOffice.Calc fájlokban végeztük el. Az eredmény is ott látható.

3.3. A titkosított szöveg karakterstatisztikáját lásd a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsa110723hameg01.xls`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsa110723hameg01.ods`

fájlok bármelyikében, a dekódolt szöveg elérhető a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsa110723hameg01.doc`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsa110723hameg01.txt`

fájlok bármelyikében, míg a központozott teljes megoldás a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsa110723hamegteljes.doc`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsa110723hamegteljes.pdf`

fájlokban olvasható.

3.4. Táblázatkezelővel készíthetünk a kódolt szövegekről statisztikát. A rövidebb szavakat használó angolban arányaiban több a szóköz, ennek alapján különböztethetjük meg a két nyelvet. A statisztika és a betűhelyettesítés megfejtése a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsamelynyelvenmeg.xls`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsamelynyelvenmeg.ods`

fájlokban olvasható. A versek központozva a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsamelynyelven01megteljes.doc`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/halandzsamelynyelven01megteljes.pdf`

fájlokban olvashatók el.

4. Esélyek

4.1. **a)** $100\% - 17\% = 83\%$.
b) $17\%+33\%-14\% = 36\%$, ha összeadjuk az események valószínűségét, majd kivonjuk annak a valószínűségét, ha mindkettő bekövetkezik.
c) $100\% - 36\% = 64\%$.
d) $(83\%)^3 = 0{,}83^3 = 0{,}571787 = 57{,}1787\%$.

4.2. **a)**

$$\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{18}{3}}{\binom{30}{5}} = \frac{2992}{7917} \approx 0{,}377920929.$$

b)

$$\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{18}{3}}{\binom{30}{5}-\binom{18}{5}} = \frac{2992}{7441} \approx 0{,}402096492.$$

4.3. A tapasztalat szerint (lásd pl a 2.2. feladatot) a két érmét érdemes megkülönböztetni. Az egyiket Elsőnek, a másikat Másodiknak nevezzük és dobásuk eredményét is eszerint soroljuk fel. A lehetséges – egyenlő esélyű – esetek: FF, FI, IF, II. Összesen tehát négy eset van. A kedvező – a megadott események megfelelő – esetek:
a) FI, IF; **b)** FF, FI, IF; **c)** FF.
Tehát a valószínűségek:
a) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; **b)** $\frac{3}{4}$; **c)** $\frac{1}{4}$.

4.4. Az egyenlő esélyű esetek most

$$FFF,\quad FFI,\quad FIF,\quad FII,\quad IFF,\quad IFI,\quad IIF,\quad III.$$

Ebből a nyolcból háromra – FII-re, IFI-re, IIF-re – igaz, hogy pontosan egy fej van a három közül, így a valószínűség $\frac{3}{8}$.

4.5. A pénzérméket érdemes megkülönböztetni (lásd pl a 2.2. feladatot). Így az öt érmét összesen $2^5 = 32$-féleképpen dobhatjuk. Ezek mind egyenlő esélyű esetek és közülük $\binom{5}{2} = 10$-féle olyan eset van, amelyben pontosan két érme fej, hiszen ennyiféleképpen választhatjuk ki ezt a két érmét az ötből. Az esély tehát

$$\frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

4.6.

1. megoldás. Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket! Az oszlopok az 1. kockával dobott számot (1. □), a sorok a 2. kockával dobottat (2. □) mutatják. A 36 mező felel meg a 36 lehetséges esetnek, fekete pöttyöt tettünk a vizsgált eseménynek megfelelő esethez tartozó mezőkbe.

A		1. □					
		1	2	3	4	5	6
	1						
	2		●		●		●
	3						
2. □	4		●		●		●
	5						
	6		●		●		●

B		1. □					
		1	2	3	4	5	6
	1	●	●	●	●	●	●
	2	●					
	3	●					
2. □	4	●					
	5	●					
	6	●					

Látható, hogy az A esemény a 36 elemi esemény közül 9-ben, a B esemény pedig 11 eseben valósul meg, tehát a B esemény valószínűsége nagyobb.

2. megoldás. Az A esemény valószínűsége $P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

A B esemény valószínűsége komplementer módszerrel számolható. Bármelyik dobásunk $\frac{5}{6}$ eséllyel nem 1-es, így $P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Tehát a B esemény valószínűsége nagyobb.

4.7. **a)** Az eseteket táblázatban gyűjtjük össze. Az „1. □” felirat alatt az első kockadobás lehetséges eredményeit, a „2. □” felirat mellett a második kockadobás lehetséges eredményét soroltuk fel.

A		1. □					
		1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
2. □	4						●
	5					●	●
	6				●	●	●

B		1. □					
		1	2	3	4	5	6
	1	●	●	●			
	2	●	●	●			
	3	●	●	●			
2. □	4						
	5						
	6						

Látható, hogy az A esemény kevésbé valószínű, mint a B esemény, előbbinek $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ az esélye, utóbbinak pedig $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

b) Az a) feladatrészből és a valszambev20110329ha20 feladat megoldásából látható, hogy ez a két esemény egyenlő – nevezetesen $\frac{1}{4}$ – valószínűségű.

4.8.

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{16}{4}} = \frac{99}{455} \approx 0{,}217582417.$$

4.9.

1. megoldás. A feladat kérdésének eldöntéséhez elég összesen kettőt dobni. Az előforduló 36 esetből az alábbiakban lesz az első dobás hatos:

$$61,\quad 62,\quad 63,\quad 64,\quad 65,\quad 66.$$

Ez összesen 6 eset a 36-ból, tehát $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ annak az esélye, hogy az első dobás hatos.

Az alábbi esetekben lesz a második dobás hatos:

$$16,\quad 26,\quad 36,\quad 46,\quad 56,\quad 66.$$

Ez is 6 eset, így $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ annak az esélye, hogy a második dobás hatos. Az utolsó vizsgált esetben, 66 esetén azonban ez a hatos nem az első hatos. Tehát annak az esélye, hogy először a második dobásnél kapunk hatost csak $\frac{5}{36}$.

Az a valószínűbb, hogy az első dobásra dobjuk az első hatost.

2. megoldás. Az első dobás az esetek átlagosan $\frac{1}{6}$-od részében hatos míg az esetek $\frac{5}{6}$ részében nem hatos. A második dobás is az esetek átlagosan $\frac{1}{6}$-od részében hatos, így másodikra az esetek $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$ részében dobjuk az első hatost (elsőre nem hatos és másodikra hatos).

Tehát az a valószínűbb, hogy elsőre dobjuk az első hatost.

4.10. Annak valószínűsége nagyobb, hogy a hatjegyű szám nem állítható elő két háromjegyű szám szorzataként. Látni fogjuk, hogy a szorzatok száma kevés, még akkor is, ha a szorzatok értékét nem is vesszük tekintetbe, csak a tényezők értékét vizsgáljuk.

Hatjegyű számból $9\cdot 10^5$ van, háromjegyűből $9\cdot 10^2$. Ha a szorzatnak két különböző tényezője van, akkor ezeket

$$\binom{9\cdot 10^2}{2}-$$

féleképpen választhatjuk ki. Mivel

$$\binom{9\cdot 10^2}{2}<\frac{(9\cdot 10^2)^2}{2}=\frac{8{,}1}{2}\cdot 10^5<4{,}1\cdot 10^5,$$

így ezen lehetőségek száma $4{,}1\cdot 10^5$-nál kevesebb.

$9\cdot 10^2$ olyan szorzat van, amelynek két tényezője azonos és háromjegyű. Mivel

$$9\cdot 10^2<0{,}4\cdot 10^5,$$

összesen $4{,}5\cdot 10^5$-nél kevesebb olyan hatjegyű szám van, amely két háromjegyű szám szorzata, így valóban annak esélye nagyobb, hogy egy hatjegyű szám nem ilyen alakú.

4.11. n kocka esetén

$$f(n)=n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

a vizsgált valószínűség. Vizsgáljuk ezen értékek arányát! Két egymást követő érték hányadosa:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{5}{6}.$$

Ezeknek a hányadosoknak a konkrét értéke:

$$\frac{f(2)}{f(1)}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{3},\qquad \frac{f(3)}{f(2)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{4},$$

$$\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{9}, \qquad \frac{f(5)}{f(4)} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24},$$
$$\frac{f(6)}{f(5)} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1, \qquad \frac{f(7)}{f(6)} = \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{36},$$

és innentől kezdve mindegyik arány kisebb 1-nél hiszen az $\frac{5}{6}$-ot egy $\frac{6}{5}$-nél kisebb számmal szorozzuk.

Amíg az arány 1-nél nagyobb, addig a kifejezés értéke nő, ha 1 az arány, akkor nem változik az érték, míg 1-nél kisebb arány esetén csökken. A maximális értéket tehát $f(5)$ és $f(6)$ adja, tehát 5 és 6 kocka esetén lesz a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy pontosan egy hatos van a dobott számok között.

4.12. Legyen a fiú nyerési esélye Apa ellen p, míg Papa ellen $q > p$, tehát Apa illetve Papa nyerési esélye $(1-p)$ illetve $(1-q)$ (döntetlennel nem számolunk). Az a) feladatban $(1-p) = \frac{2}{3}$, $(1-q) = \frac{1}{2}$, azaz $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{2}$.

A fiú háromféleképpen lehet sikeres:

NyerNyerNyer, NyerNyerVeszt, VesztNyerNyer.

Az Apa-Papa-Apa felosztásnál ezek esélye rendre

$$pqp, \qquad pq(1-p), \qquad (1-p)qp,$$

ami összesen

$$pqp + pq(1-p) + (1-p)qp = pq\,(p + (1-p) + (1-p)) = qp(2-p),$$

míg Papa-Apa-Papa esetben

$$qpq, \qquad qp(1-q), \qquad (1-q)pq,$$

azaz összesen

$$qpq + qp(1-q) + (1-q)pq = qp\,(q + (1-q) + (1-q)) = qp(2-q).$$

Mivel $q > p$, így az elsőnek kapott valószínűség a nagyobb, az Apa-Papa-Apa felosztás jobb a fiúnak.

4.13. a)

$$\frac{\binom{8}{4} - 2}{\binom{8}{4}} = \frac{34}{35}.$$

b)

$$\frac{\binom{8}{4} - 2^4}{\binom{8}{4}} = \frac{27}{35}.$$

4.14. $1 - 0{,}8^3 = 0{,}488$.

4.15. Jelölje χ a találatok számát, tehát $\chi \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Annak esélye, hogy épp k találatunk legyen:

$$P(\chi = k) = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}},$$

hiszen a k számot – a találatokat – az 5 nyerő szám közül kell választani, míg a maradék $5-k$ számot a 85 nem nyerő számból kell venni.

Tehát a keresett valószínűség:

$$P(\chi = 2) + P(\chi = 3) + P(\chi = 4) + P(\chi = 5) =$$

$$= \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} + \binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} + \binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} + \binom{5}{5} \cdot \binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} =$$

$$= \frac{\frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{85 \cdot 84 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} + 85 \cdot 5 + 1}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} =$$

$$\frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10 + 85 \cdot 84 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 30 + 85 \cdot 5 \cdot 120 + 120}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} =$$

$$= \frac{122859120}{5273912160} \approx \frac{1}{42{,}92650118281817418} \approx 0{,}02329563259165090076$$

Vagy ugyanez komplementer módszerrel:

$$1 - P(\chi = 0) - P(\chi = 1) = 1 - \frac{\binom{85}{5} + \binom{85}{4} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{90}{5}} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} =$$

$$= 1 - \frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81 + 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 25}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} \approx 0{,}02329563259165090076$$

4.16. a)

$$1 - \frac{5^2}{6^2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}3055555556.$$

b)

$$1 - \frac{5^3}{6^3} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}4212962963.$$

4.17. $p = \frac{1}{3}$ valószínűséggel dobunk összetett számot és $1 - p = q = \frac{2}{3}$ valószínűséggel nem összettet. Pontosan akkor jutunk az origóba, ha négyet lépünk jobbra és ugyanannyit balra. Ennek esélye:

$$\binom{8}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^8} = \frac{1120}{6561} \approx 0{,}1707056851$$

4.18.

1. megoldás. *Szita*

Annak az esélye, hogy a 8-as nyerőszám egy húzásnál:

$$q = \frac{\binom{34}{6}}{\binom{35}{7}} = \frac{\frac{34\cdot 33\cdot \ldots \cdot 29}{6!}}{\frac{35\cdot 34\cdot \ldots \cdot 29}{7!}} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}.$$

Így $q^2 = \frac{1}{25}$ Annak esélye, hogy a 8-as két különböző húzásnál is nyerő szám. Legyen A az az esemény, hogy a 8 nyerő szám a kézi húzásnál, B az az esemény, hogy a gépinél nyerő, tehát AB az az esemény, hogy mindkettőnél nyerő, míg $A + B$ az az esemény, hogy legalább az egyiknél nyerő. A halmazokra vonatkozó szita formulának megfelelően:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB) = q + q - q^2 = q(2 - q) = \frac{9}{25} = 0{,}36.$$

2. megoldás. *Esetek*

A 4.18M1. megoldásban kapott $q = \frac{1}{5}$ annak esélye, hogy egy adott húzásnál a 8-as nyerő szám, így $1 - q = \frac{4}{5}$ annak az esélye, hogy a 8-as nem nyerő szám egy adott húzás esetén.

Három eset van: 8-as csak a kézi, vagy csak a gépi, vagy mindkét húzásnál nyerő. Ezek esélye rendre $q \cdot (1 - q)$, $(1 - q) \cdot q$, $q \cdot q$, tehát a kérdezett valószínűség

$$q \cdot (1 - q) + (1 - q) \cdot q + q \cdot q = 2q - q^2 = \frac{9}{25} = 0{,}36.$$

3. megoldás. *Komplementer módszer*

A 4.18M1. megoldásban kapott q-val számolva $(1 - q)^2$ annak esélye, hogy a 8-as az egyik húzásnál sem nyerő, tehát

$$1 - (1 - q)^2 = 2q - q^2 = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

annak az esélye, hogy a 8-as legalább az egyik húzásnál nyerő.

4.19. a)

$$1 - \frac{\binom{85}{5} + \binom{85}{4} \cdot 5}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}023295632.$$

b)

$$\left(\frac{\binom{85}{5} + \binom{85}{4} \cdot 5}{\binom{90}{5}}\right)^{52} \approx 0{,}293550446.$$

c) Annak az esélye, hogy sosem lesz hármas találatunk,

$$\left(1 - \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\right)^{52} \approx 0{,}958623597.$$

Annak a valószínűsége, hogy hármas vagy nagyobb találatunk nem lesz,

$$\left(1 - \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} - \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} - \frac{\binom{5}{5} \cdot \binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}\right)^{52} \approx 0{,}958130143.$$

d)

$$\frac{1}{\binom{90}{5}} \approx 0{,}000000022 \ll 0{,}999881691 \approx \left(1 - \frac{1}{\binom{90}{5}}\right)^{5200},$$

tehát annak, hogy száz év alatt egyszer sem lesz ötösünk, jóval nagyobb a valószínűsége, mint annak, hogy az első héten ötösünk lesz.

5. Hipergeometrikus eloszlás

5.1. Jelölje a kiválasztott 13 lap között az ászok számát χ_A, a kárók számát $\chi_\diamondsuit$ ($\chi_A \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $\chi_\diamondsuit \in \{0; 1; 2; \ldots; 13\}$). Az 52 lapos pakliból összesen $\binom{52}{13}$-féleképpen választható ki 13 lap (a kiválasztás sorrendjét nem vesszük figyelembe).

a) A pakliban az ászok száma 4, a nem ászoké 48, így

$$p(\chi_A = 0) = \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot \ldots \cdot 40} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0{,}3038175270;$$

$$p(\chi_A = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{4 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0{,}4388475390;$$

$$p(\chi_A = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 13 \cdot 12}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0{,}2134933974;$$

$$p(\chi_A = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{10}}{\binom{52}{13}} = \frac{4 \cdot 39 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0{,}0412004802;$$

$$p(\chi_A = 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0{,}0026410564,$$

tehát általában:

$$p(\chi_A = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{13-k}}{\binom{52}{13}}.$$

b) A pakliban a kárók száma 13, a nem káróké 39, így az előzőekhez hasonlóan:

$$p(\chi_\diamondsuit = k) = \frac{\binom{13}{k}\binom{39}{13-k}}{\binom{52}{13}}.$$

Ezeket az értékeket kiszámolhatjuk táblázatkezelővel, lásd a

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/valszambridzseloszlashipgeo20110404ha10felb.xls`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/valszambridzseloszlashipgeo20110404ha10felb.ods`

Excel illetve OpenOffice.Calc fájlok bármelyikét vagyaz alábbi táblázatot:

0	0,012790948
1	0,08006186
2	0,205873354
3	0,286329607
4	0,238608006
5	0,124691926
6	0,041563975
7	0,008816601
8	0,001166903
9	$9{,}26114 \cdot 10^{-5}$
10	$4{,}11606 \cdot 10^{-6}$
11	$9{,}10185 \cdot 10^{-8}$
12	$7{,}98408 \cdot 10^{-10}$
13	$1{,}57477 \cdot 10^{-12}$

5.2. Először kiszámoljuk annak valószínűségét, hogy nincs zöld a kiválasztott lapok között. Ehhez az kell, hogy mind a három kihúzott lap a nem zöld 24 lap közül kerüljön ki. Ennek esélye

$$\frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{32 \cdot 31 \cdot 30} \approx 0{,}4080645161.$$

tehát a kérdezett valószínűség $1 - 0{,}4080645161 \approx 0{,}5919354839$.

5.3. A keresett eloszlás: $p(\chi = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{10-k}}{\binom{100}{10}}$. Ennek értékei:

k	$p(\chi = k)$
0	0,330476211
1	0,407995322
2	0,201509885
3	0,051793705
4	0,007553249
5	0,000639805
6	$3{,}09983 \cdot 10^{-5}$
7	$8{,}14405 \cdot 10^{-7}$
8	$1{,}04114 \cdot 10^{-8}$
9	$5{,}19921 \cdot 10^{-11}$
10	$5{,}7769 \cdot 10^{-14}$

6. Binomiális eloszlás

6.4. a) A lemondások száma $p = \frac{2357}{16222} \approx 0{,}1452965110$, $m = 135$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó (χ). Tehát annak valószínűsége, hogy épp k ember mondja le a jegyét

$$p(\chi = k) = \binom{135}{k} p^k (1-p)^{135-k}.$$

Ezt a $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$ értékekre gyorsan kiszámolhatjuk táblázatkezelő szoftverrel, lásd

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/nwvalstat5fej4felrep01ha110721.xls`

vagy

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/nwvalstat5fej4felrep01ha110721.ods`

k	$p(\chi = k)$
0	0,0000000006
1	0,0000000143
2	0,0000001631
3	0,0000012290
4	0,0000068945
5	0,0000307073
6	0,0001131029
7	0,0003543279
8	0,0009637513
9	0,0023118833

Pontosan akkor nem fér fel mindenki a gépre, ha a lemondók száma kevesebb 10-nél. Tehát a fenti táblázat második oszlopában álló számok összege ad választ az a) feladat kérdésére: 0,0037820742-annak az esélye, hogy valakinek nem jut hely.

b,c) Az

`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/nwvalstat5fej4felrep01ha110721bc.xls`,
`http://matek.fazekas.hu/matkonyv/public/nwvalstat5fej4felrep01ha110721bc.ods`

fájlokban (Excel ill. OpenOffice.Calc) kiszámoltuk n túlfoglalás (tehát $125+n$ foglalás) esetén annak esélyét, hogy éppen k-en mondják le az utazást minden olyan n-re és k-ra, amelyre $n \in \in \{1,2,\ldots,21\}$ és $0 \le k \le n-1$. Minden egyes n-re összegeztük az értékeket $k=0$-tól $n-1$-ig, tehát kiszámoltuk annak valószínűségét, hogy n túlfoglalás esetén lesz olyan jegytulajdonos, aki nem fér fel a gépre. Az alábbi táblázatban ezeket az értékeket $n=21$-től $n=7$-ig soroljuk fel:

n	$p(\chi=0)+\ldots+p(\chi=n-1)$
21	0,444279576
20	0,365095602
19	0,28992568
18	0,22166352
17	0,162526245
16	0,113799578
15	0,075744521
14	0,047682404
13	0,028229768
12	0,015617663
11	0,008014522
10	0,003782074
9	0,001624316
8	0,00062688
7	0,000213958

Látható, hogy 21 túlfoglalásnál már a gépek közel felében gond lenne a túlfoglalás miatt, 15 túlfoglalásnál a probléma a gépek kevesebb mint tizedét, míg 11 túlfoglalásnál kevesebb, mint századát érintené. Az utóbbi már bizonyára jó érték, de nehéz egyéb adatok nélkül eldönteni mi elfogadható: pl egészen más a helyzet ha naponta több járat is megy az adott irányba vagy ha hetente csak egy.

6.7. Pontosan akkor páratlan az összeg, ha a hat kihúzott szám paritása az alábbi esetek valamelyikének felel meg:

A eset: 1 páratlan és 5 páros;
B eset: 3 páratlan és 3 páros;
C eset: 5 páratlan és 1 páros.

A 11 szám között 6 páratlan és 5 páros van. Az egyes esetek valószínűségét az ezen adatoknak megfelelő hipergeometrikus eloszlás írja le:

$$P(A)=\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{5}}{\binom{11}{6}},\qquad P(B)=\frac{\binom{6}{3}\binom{5}{3}}{\binom{11}{6}},\qquad P(C)=\frac{\binom{6}{5}\binom{5}{1}}{\binom{11}{6}}.$$

Mivel $\binom{11}{6}=462$, így a keresett valószínűség a fenti valószínűségek összegeként

$$\frac{6+20\cdot 10+6\cdot 5}{462}=\frac{236}{462}=\frac{118}{231}\approx= 0{,}5108225108$$

-nek adódik.

7. Geometriai eloszlás

7.1. Geometriai eloszlásról van szó, melynek paraméterei: $p=0{,}02$, $q=1-p=0{,}98$.

a) $1-q^9 \approx 0{,}1662522379$.
b) $q^9 p \approx 0{,}0166749552$.
c) $\frac{1}{p} = 50$.

7.8. Egy Annak esélye, hogy $n = 2011$ egymás utáni dobás mindegyike 6-os: $p = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ez a p szám egy nagyon piciny pozitív szám. A $q = 1-p$ szám csak egy kicsit kisebb 1-nél, ez azt adja meg, mennyi az esélye, hogy n egymást követő dobás nem mindegyike 6-os.

Osszuk a dobássorozatot $n = 2011$-es blokkokba. Az első blokkba tartozik az első n dobás, a második blokkba az $(n+1)$. dobás és az azt követő további $(n-1)$ dobás, stb. Megmutatjuk, hogy 1 valószínűséggel már az egyik ilyen blokk is csupa hatosból áll és figyelembe sem vesszük a többi n-es blokkot.

Annak esélye, hogy az első k blokk egyike sem áll csupa 6-os dobásból q^k. Ez a mennyiség k növelésével bármely pozitív számnál kisebb lesz, így 0 az esélye, hogy soha sem lesz csupa hatosból álló blokk.

7.9. **a)** 2 **b)** 3.

7.10. **a)** Emma, Fanni, Gitta és Hanna rendre

$$\frac{1}{6} \approx 0{,}1666666667, \qquad \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} \approx 0{,}1388888889,$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} \approx 0{,}1157407407, \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} \approx 0{,}0964506173$$

valószínűséggel lesz kezdő az első körben.

b) Átfogalmazva: „mekkora annak a valószínűsége, hogy az első négy dobás egyike sem hatos?”. Ennek valószínűsége

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0{,}4822530864.$$

c) Jelölje Emma nyerési esélyét p. Levezethető, hogy ekkor Fanni, Gitta és Hanna nyerési esélye rendre

$$\frac{5}{6}p, \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^2 p, \qquad \left(\frac{5}{6}\right)^3 p. \tag{1}$$

Mivel 0 annak az esélye, hogy soha sem lesz hatos, tehát 1 valószínűséggel lesz nyertes, így

$$p + \frac{5}{6}p + \left(\frac{5}{6}\right)^2 p + \left(\frac{5}{6}\right)^3 p = 1,$$

azaz

$$p = \frac{1}{1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{1-\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^4} =$$

$$= \frac{6^3}{6^4-5^4} = \frac{216}{671} \approx 0{,}3219076006.$$

Tehát Fanni, Gitta és Hanna nyerési esélyének közelítő értéke (1) alapján rendre

$$0{,}2682563338301043219, \qquad 0{,}2235469449, \qquad 0{,}1862891207.$$

8. Genetika

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

9. A várható érték

9.1.

$$M_{X+Y} = \frac{(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_n+y_n)}{n} =$$
$$= \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} =$$
$$= \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} + \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n} = M_X + M_Y,$$

tehát $M_{X+Y} = M_X + M_Y$. Az $X \oplus Y$ számsokaság átlaga:

$$M_{X\oplus Y} =$$
$$= \frac{(x_1+y_1)+\ldots+(x_1+y_n)+(x_2+y_1)+\ldots+(x_2+y_n)+\ldots+(x_n+y_n)}{n^2} =$$
$$= \frac{\frac{(x_1+y_1)+\ldots+(x_1+y_n)}{n} + \frac{(x_2+y_1)+\ldots+(x_2+y_n)}{n} + \ldots + \frac{(x_n+y_1)+\ldots+(x_n+y_n)}{n}}{n} =$$
$$= \frac{\frac{nx_1+(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} + \frac{nx_2+(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} + \ldots + \frac{nx_n+(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n}}{n} =$$
$$= \frac{x_1+M_Y+x_2+M_Y+\ldots+x_n+M_Y}{n} = \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)+nM_Y}{n} = M_X+M_Y,$$

azaz $M_{X\oplus Y} = M_X + M_Y$. Ehhez hasonlóan

$$M_{X\otimes Y} =$$
$$= \frac{(x_1\cdot y_1)+\ldots+(x_1\cdot y_n)+(x_2\cdot y_1)+\ldots+(x_2\cdot y_n)+\ldots+(x_n\cdot y_n)}{n^2} =$$
$$= \frac{\frac{(x_1\cdot y_1)+\ldots+(x_1\cdot y_n)}{n} + \frac{(x_2\cdot y_1)+\ldots+(x_2\cdot y_n)}{n} + \ldots + \frac{(x_n\cdot y_1)+\ldots+(x_n\cdot y_n)}{n}}{n} =$$
$$= \frac{\frac{x_1\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} + \frac{x_2\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} + \ldots + \frac{x_n\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n}}{n} =$$
$$= \frac{x_1M_Y+x_2M_Y+\ldots+x_nM_Y}{n} = M_Y\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = M_Y\cdot M_X,$$

azaz $M_{X\oplus Y} = M_X \cdot M_Y$.

Az $X\cdot Y$ számsokaságot még nem vizsgáltuk. Ennek átlagát nem határozzák meg az X, Y számsokaságok átlagai. Ha pl

$$X = \{1, \quad 2, \quad 3\}, \qquad Y = \{1, \quad 2, \quad 3\},$$

akkor X és Y átlaga is 2, míg az

$$X\cdot Y = \{1^2, \quad 2^2, \quad 3^2\}$$

számsokaság átlaga $M_{X\cdot Y} = \frac{1+4+9}{3} = \frac{14}{3}$, de ha változtatunk a sorrenden, pl

$$X = \{1, \quad 2, \quad 3\}, \qquad Y = \{3, \quad 2, \quad 1\},$$

akkor ugyan X és Y átlaga továbbra is 2, az

$$X\cdot Y = \{3, \quad 4, \quad 3\}$$

számsokaság átlaga viszont most $M_{X\cdot Y} = \frac{10}{3}$.

Nem csak a sorrenddel van gond. Ha pl

$$X = \{1, \quad 2, \quad 3\}, \qquad Y = \{0, \quad 2, \quad 4\},$$

akkor X és Y átlaga még mindig 2, de az

$$X \cdot Y = \{0, \quad 4, \quad 12\}$$

számsokaság átlaga $M_{X \cdot Y} = \frac{0+4+12}{3} = \frac{16}{3}$.

9.2. A feladatban definiált valószínűségi változó (a továbbiakban χ) értéke a $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmazban van.

a) A dobások számának eloszlása leolvasható a táblázatból:

n	$p(\chi = n)$		
2	$\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$= \frac{1}{6}$	
3	$\left(\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{2}{6}$	$= \frac{10}{36}$	$= \frac{5}{18}$
4	$\left(\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6}\right) \cdot \frac{3}{6}$	$= \frac{60}{216}$	$= \frac{5}{18}$
5	$\left(\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6}\right) \cdot \frac{4}{6}$	$= \frac{240}{1296}$	$= \frac{5}{27}$
6	$\left(\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}\right) \cdot \frac{5}{6}$	$= \frac{600}{7776}$	$= \frac{25}{324}$
7	$\left(\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{6}{6}$	$= \frac{120}{7776}$	$= \frac{5}{324}$

b) A dobások számának várható értéke:

$$E(\chi) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{5}{18} + 4 \cdot \frac{5}{18} + 5 \cdot \frac{5}{27} + 6 \cdot \frac{25}{324} + 7 \cdot \frac{5}{324} \approx 3{,}774691358023$$

9.4. A χ_i valószínűségi változó értéke legyen 1, ha az i-edik diák önmagát húzta és legyen az érték 0, ha nem önmagát húzta. A χ_i várható értéke, $E_i = \frac{1}{35}$. A keresett várható érték

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_{35} = 35 \cdot \frac{1}{35} = 1.$$

9.5. Ha k szín van és azok közül l rögzített szín előfordulására várunk, akkor az első előfordulás $\frac{l}{k}$ paraméterű geometriai eloszlású, így annak várható értéke, az l szín első megjelenésének átlagos ideje $\frac{k}{l}$.

Először várunk a 20 közül bármelyik szín megjelenésére ($k = 20$, $l = 20$). Ez természetesen az első húzásnál bekövetkezik: $\frac{k}{l} = \frac{20}{20} = 1$. Ezután a 20-ból már csak a maradék 19 bekövetkezésére várunk: most $k = 20$ és $l = 19$, tehát átlagosan $\frac{20}{19}$ lépést kell várnunk. És így tovább, ha már megjelent $(i - 1)$ szín, akkor az i-edik megjelenésére átlagosan $\frac{20}{21-i}$ lépést kell várni. A várható értékek összeadódnak:

$$E = 20 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{19} + \frac{1}{18} + \ldots + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{2} + 1\right).$$

9.6. Észrevételek:

1. Az egymillió szám közül mindegyik szám-N-est ugyanakkora valószínűséggel kapjuk meg.

2. Egy rögzített szám-N-es bármely permutációját ugyanakkora valószínűséggel kapjuk meg.

Az észrevételek miatt a következő feladat ekvivalens az eredetivel:

Új feladat *Legyen az $1, 2, \ldots N$ számok egy véletlen permutációjában (minden permutáció azonos valószínűségű) a rekordok számának várható értéke E_N. Határozzuk meg E_N értékét!*

A megoldás az $N = 1, 2, 3, 4$ esetekben a permutációk egyszerű felsorolásával meghatározható. Az eredmények alapján megsejthető, hogy a feladat kérdésére a válasz:

$$E_N = 1/1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/N.$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Mint mondottuk, az állítás az $N = 1, 2, 3, 4$ esetekben igaz. Tegyük fel, hogy igaz $N = k$-ra, próbáljuk meg igazolni $N = k + 1$-re is!

A $(k + 1)$ szám közül a véletlen permutáció első k eleme között a rekordok számának várható értéke E_k. Az utolsó elem pontosan akkor rekord, ha az összes szám közül a legnagyobb, azaz a $(k + 1)$-edik. Annak az esélye, hogy a véletlen permutációban utolsónak jön a legnagyobb szám $\frac{1}{k+1}$. Ebben az esetben nő csak eggyel a rekordok száma, azaz

$$E_{k+1} = E_k + 1 \cdot \frac{1}{k+1}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

9.7. Próbálkozzunk először kisebb csapattal! Jelölje f fiú és l lány esetén egy véletlen sorrendben a vegyes párok számát $\chi_{f,l}$ és a keresett mennyiséget, a $\chi_{f,l}$ valószínűségi változó várható értékét $E_{f,l}$. Ha csak lányok, vagy csak fiúk vannak, akkor ez a várható érték zérus, ha pedig egy-egy fiú és lány van, akkor 1, tehát $E_{0,l} = E_{f,0} = 0$, $E_{1,1} = 1$. Alábbi táblázatban gyűjtöttünk össze néhány további esetet.

f/l	$\sum$ **vegyes**	**f/l**	$\sum$ **vegyes**	**f/l**	$\sum$ **vegyes**
2/1	4	3/2	24	4/2	40
FFL	1	$FFFLL$	1	$FFFFLL$	1
FLF	2	$FFLFL$	3	$FFFLFL$	3
LFF	1	$FLFFL$	3	$FFLFFL$	3
		$LFFFL$	2	$FLFFFL$	3
		$FFLLF$	2	$LFFFFL$	2
		$FLFLF$	4	$FFFLLF$	2
		$LFFLF$	3	$FFLFLF$	4
		$FLLFF$	2	$FLFFLF$	4
		$LFLFF$	3	$LFFFLF$	3
		$LLFFF$	1	$FFLLFF$	2
				$FLFLFF$	4
				$LFFLFF$	3
				$FLLFFF$	2
				$LFLFFF$	3
				$LLFFFF$	1
$E_{2,1} = \frac{4}{3}$		$E_{3,2} = \frac{12}{5}$		$E_{4,2} = \frac{8}{3}$	

Az eredmények alapján sejthető, hogy $E_{f,l} = \frac{2fl}{f+l}$, tehát a keresett érték $E_{8,7} = \frac{112}{15}$. Alább megmagyarázzuk az általános esetre adott formulát.

Számozzuk a diákok által foglalt üléseket sorban 1-től $(f + l)$-ig! Legyen

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } i,(i+1)\text{-en vegyes pár ül} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

és jelölje χ_i várható értékét E_i, azaz E_i megadja, hogy az i-edik és az $(i+1)$-edik ülésen átlagosan hányszor ül „vegyes pár”. Ezt az értéket könnyen kiszámolhatjuk. Az i-edik helyen $\frac{f}{f+l}$ eséllyel ül fiú, és ha ott fiú van, akkor az $(i+1)$-edik helyen $\frac{l}{f+l-1}$ eséllyel van lány, tehát $\frac{f\cdot l}{(f+l)\cdot(f+l-1)}$ annak az esélye, hogy az i-edik helyen fiú és ugyanakkor az $(i+1)$-edik helyen lány ül. A fordított vegyes elrendezés esélye ugyanennyi, tehát $E_i = \frac{2fl}{(f+l)\cdot(f+l-1)}$.

Ismeretes, hogy valószínűségi változók összegének várható értéke a valószínűségi változók várható értékeinek összege. Itt $\chi = \sum_{i=1}^{f+l-1} \chi_i$, így

$$E_{f,l} = \sum_{i=1}^{f+l-1} E_i = (f+l-1)\frac{2fl}{(f+l)\cdot(f+l-1)} = \frac{2fl}{f+l}.$$

10. Feltételes valószínűség

10.1.

1. megoldás. a) *Hibás megoldás*

Összesen 42 golyó van és ezekből 23 fehér, tehát $\frac{23}{42}$ a kérdezett valószínűség.

Ez a megoldás hibás. Módosítsuk a feladatot! Képzeljük el, hogy az első 9 dobozban egy-egy kék golyó van és fehér golyó egyáltalán nincs bennük, míg a 10. dobozban 81 fehér golyó van és nincs kék! A fenti gondolatmenettel ebben az esetben azt kapnánk, hogy $\frac{81}{90} = \frac{9}{10}$ a fehér golyó húzásának esélye és $\frac{1}{10}$ a kék golyó húzásáé, holott épp fordított a helyzet: $\frac{9}{10}$ az esélye, hogy az első 9 doboz valamelyikét választjuk, azaz kéket húzunk és csak $\frac{1}{10}$ a valószínűsége, hogy az utolsó dobozt választjuk, azaz fehéret húzunk.

2. megoldás. a) Mindegyik doboz választása egyforma, mindegyiké $\frac{1}{10}$. Annak esélye, hogy az első dobozból húzunk, és az fehér lesz $\frac{1}{20}$. Tehát ha F jelöli azt az eseményt, hogy fehéret húzunk, A_k $k \in \{1,2,\ldots,10\}$ pedig azt, hogy az k. dobozból húzunk, akkor

$$p(FA_1) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{20},$$

és általában $k \in \{1,2,\ldots,9\}$ esetén $p(FA_k) = \frac{1}{20}$, míg

$$p(FA_{10}) = \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{12}.$$

Így annak esélye, hogy fehéret húzunk:

$$p(F) = p(FA_1) + p(FA_2) + \ldots + p(FA_{10}) = 9\cdot\frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{8}{15}.$$

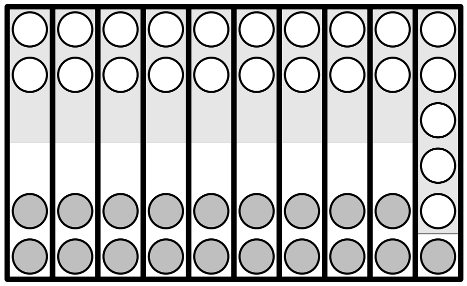
A 10.1. ábrán úgy rajzoltuk a dobozokat, hogy egyenlő nagyságúak legyenek és minden egyes doboznak annyiad részét festettük halványszürkére amennyi a dobozban a fehér golyók aránya. A kérdés az, hogy a teljes területnek – a dobozok összterületének – hányad része a szürke terület.

b)

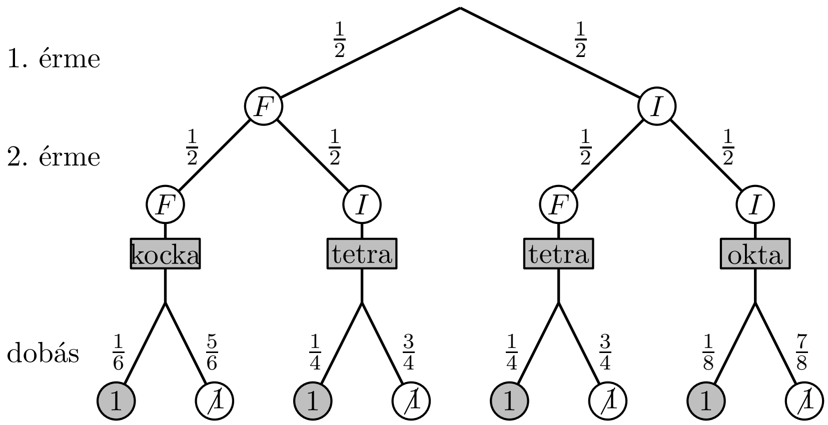
Most az a kérdés, hogy a fenti szürke területnek hányad része esik a 10. dobozba. A szürke terület aránya az egészhez $p(F) = \frac{8}{15}$, a 10. doboz szürke részének aránya az egészhez $p(FA_{10}) = \frac{1}{12}$, így a kérdezett valószínűség:

$$\frac{p(FA_{10})}{p(F)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{32} = 0{,}15625.$$

10.2.



10.1M2.1. ábra.



10.2M1.1. ábra.

1. megoldás. A 10.1. ábrán felrajzoltuk az eljáráshoz tartozó, az elágazó eseteket szimbolizáló „fát”, és az egyes valószínűségeket is feltüntettük.

Az ábrán szürkével jelöltük azokat a végállapotokat, amelyekben 1-est dobtunk.

a) A keresett valószínűség leolvasható az ábráról, ha a megfelelő végállapotokhoz tartozó utakon képezzük a valószínűségek szorzatát, majd azok összegét:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{19}{96}\approx 0{,}1979166667.$$

b) Másként: az 1-eshez vezető

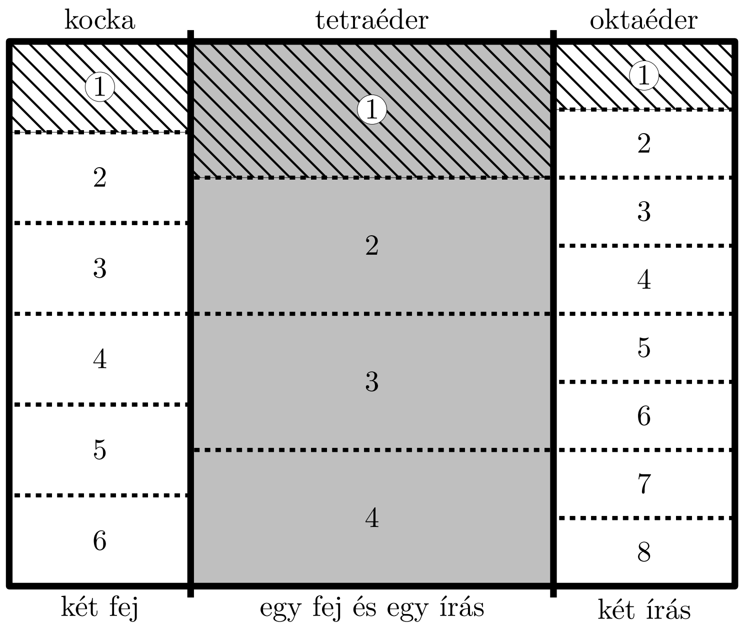
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6},\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}$$

„súlyú” szálak között milyen arányú a két középső szál súlya?

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{19}{96}}=\frac{12}{19}\approx 0{,}631578947.$$

2. megoldás. Ábrázoljuk az eseteket a valószínűségekkel területarányos ábrán!



10.2M2.1. ábra.

A középső szürke sáv egy fej és egy írás dobásának felel meg, ez kétszer akkor, mint akár a két fejnek megfelelő bal oldali sáv, akár a két írásnak megfelelő jobb oldali. Mindegyik függőleges sávot annyi egyforma részre osztottunk, ahány oldala van a neki megfelelő poliédernek és beleírtuk a dobható számokat. Az 1-eseknek megfelelő részt bevonalkáztuk mind a három sávban

a) A kérdés az ábrának megfelelően: *határozzuk meg a vonalkázott rész területét a teljes területhez képest!* A válasz:

$$\frac{1}{4}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{8}=\frac{19}{96}\approx 0{,}1979166667.$$

b) A kérdés az ábrának megfelelően: *határozzuk meg a vonalkázott szürke rész területét a teljes vonalkázott területhez képest!* A válasz:

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{8}}=\frac{12}{19}\approx 0{,}631578947.$$

3. megoldás. *Ez a megoldás csak nyelvezetében új az előző megoldásokhoz képest.*

Vizsgáljuk az alábbi eseményeket: az érmékkel két fejet (FF), két írást(FF), illetve egy-egy fejet és írást dobtunk (FI); 1-est dobtunk ($D1$). Ismertek az alábbi valószínűségek:

$$p(FF)=\frac{1}{4};\qquad p(FI)=\frac{1}{2};\qquad p(II)=\frac{1}{4};$$

és feltételes valószínűségek:

$$p(D1|FF)=\frac{1}{6};\qquad p(D1|FI)=\frac{1}{4};\qquad p(D1|II)=\frac{1}{8}.$$

Meghatározandó az $p(FI|D1)$ feltételes valószínűség. Az ilyen típusú kérdéseket oldja meg a Bayes-tétel, amelyet az FF, FI, II teljes eseményrendszerre és a $D1$ eseményre így írhatunk fel:

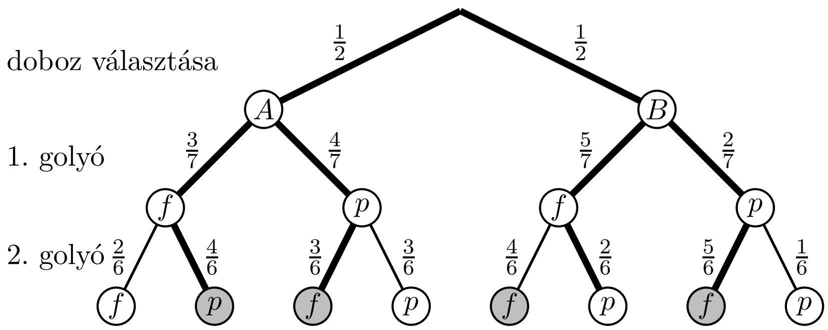
$$p(FI|D1) = \frac{p(D1|FI)p(FI)}{p(D1|FF)p(FF) + p(D1|FI)p(FI) + p(D1|II)p(II)},$$

azaz

$$p(FI|D1) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{12}{19} \approx 0{,}631578947.$$

10.6.

1. megoldás. Dobozt választunk, utána kihúzunk a választott dobozból egy golyót, majd egy másodikat. Alább felrajzoljuk az eljáráshoz tartozó „döntési fát”, ahol a döntés helyett a véletlen szerepel. Az egyes valószínűségeket is feltüntettük.



10.6M1.1. ábra.

Az ábrán szürkével jelöltük azokat a végállapotokat, amelyekben a két kihúzott golyó színe különböző. A keresett valószínűség is leolvasható az ábráról, ha a megfelelő végpgállapotokhoz tartozó utakon képezzük a valószínűségek szorzatát, majd azok összegét:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6} = \frac{2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 5\cdot 2}{2\cdot 7\cdot 6} = \frac{11}{21} \approx 0{,}5238095238.$$

2. megoldás. Vizsgáljuk a következő eseményeket:

A_h: az A dobozból húzunk;

B_h: a B dobozból húzunk;

V: vegyesen húzunk, tehát egy fehéret és egy pirosat húzunk.

Mivel

$$P(A_h) = \frac{1}{2}, \qquad P(B_h) = \frac{1}{2}, \qquad P(V|A_h) = \frac{3\cdot 4}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{7\cdot 6} = \frac{4}{7}$$

és

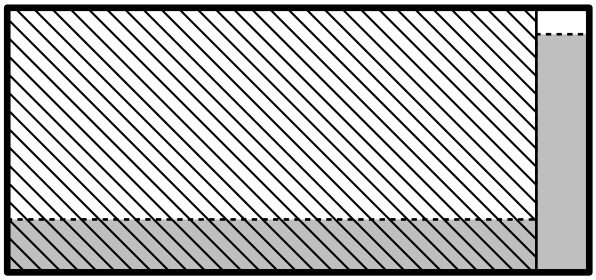
$$P(V|B_h) = \frac{5\cdot 2}{\binom{7}{2}} = \frac{2\cdot 5\cdot 2}{7\cdot 6} = \frac{10}{21},$$

ahol A_h és B_h komplementer események, így alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét, miszerint

$$P(V) = P(V|A_h)P(A_h) + P(V|B_h)P(B_h) = \frac{4}{7}\frac{1}{2} + \frac{10}{21}\frac{1}{2} = \frac{11}{21} \approx 0{,}5238095238.$$

10.7.

1. megoldás. Ábrázoljuk a hazai lakosságot, benne a tébécések és a nem tébécések valamint a pozitív illetve negatív teszteredményt produkálók halmazát az elemszámokkal területarányos ábrán.



10.7M1.1. ábra.

A vastagvonalú alaphalmaz jelképeti hazánk lakosságát. A bal oldali vonalkázott rész az egészségeseket (azaz a nem tébécések részhalmazát), a jobb oldali „sima” rész a tébécéseket. A szürke terület a pozitív tesztet produkálók részhalmaza.

Az egyes tartományok területe az egészhez képest:

fehér vonalkázott: $0{,}997 \cdot 0{,}8 = 0{,}7976$; szürke vonalkázott: $0{,}997 \cdot 0{,}2 = 0{,}1994$; fehér sima: $0{,}003 \cdot 0{,}1 = 0{,}0003$; szürke sima: $0.003 \cdot 0{,}9 = 0{,}0027$;

Az egyes kérdések megfelelői az ábrán:

a) A szürke rész hanyad része sima? $\frac{0{,}0027}{0{,}0027+0{,}1994} \approx 0{,}0133597229$. Tehát pozitív teszt esetén 1,33597229% a betegség esélye.

b) A fehér rész hanyad része sima? $\frac{0{,}0003}{0{,}0003+0{,}7976} \approx 0{,}0003759870$. Tehát negatív teszt esetén csak 0,03759870% a betegség esélye.

c) A pozitív teszt több mint négyzseresére növelte a betegség esélyét, a negatív teszt a kilencedére csökkentette. Csak pozitív teszt esetén érdemes az alaposabb (és feltehetően drágább) vizsgálatokat elvégezni.

2. megoldás. Jelölje „B” és „$+$” azt az eseményt, hogy egy véletlenül választott ember beteg (tébécés), illetve azt, hogy pozitív a tesztje. „$\neg B$” és „$-$” ezek komplementer eseményét jelöli, tehát azt, hogy az ember nem tébécés, illetve azt, hogy teszteredménye negatív.

A megadott adatok a valószínűségek nyelvén:

$$p(+|B) = 0{,}9, \quad p(+|\neg B) = 0{,}2, \quad p(B) = 0{,}003 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad p(-|B) = 0{,}1, \quad p(-|\neg B) = 0{,}8, \quad p(\neg B) = 0{,}997.$$

Az a) feladat a $p(B|+)$, a b) feladat pedig a $p(B|-)$ feltételes valószínűség kiszámítása. Ezek Bayes tételével adódnak:

$$p(B|+) = \frac{p(+|B)p(B)}{p(+|B)p(B) + p(+|\neg B)p(\neg B)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}003}{0{,}9 \cdot 0{,}003 + 0{,}2 \cdot 0{,}997} =$$

$$= \frac{27}{2021} \approx 0{,}0133597229,$$

$$p(B|-) = \frac{p(-|B)p(B)}{p(-|B)p(B) + p(-|\neg B)p(\neg B)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}003}{0{,}1 \cdot 0{,}003 + 0{,}8 \cdot 0{,}997} =$$

$$= \frac{3}{1979} \approx 0{,}0003759870$$

A c) kérdésre a 10.7M1. megoldásban olvasható a válasz.

10.8. Tekintsük az alábbi eseményeket:

a lövész az első (ötfős) csoportba tartozik (C_5), a második (hétfős) csoportba (C_7), a harmadik (négyfős) csoportba (C_4), a negyedik (kétfős) csoportba (C_2), a lövész nem találja el a céltáblát ($\not T$). A lövészek száma $5+7+4+2=18$, így a megadott adatok szerint:

$$p(C_5) = \frac{5}{18}; \qquad p(C_7) = \frac{7}{18}; \qquad p(C_4) = \frac{4}{18}; \qquad p(C_2) = \frac{2}{18},$$

és

$$p(\not T|C_5) = 1-0{,}8 = \frac{2}{10}; \qquad p(\not T|C_7) = 1-0{,}7 = \frac{3}{10};$$
$$p(\not T|C_4) = 1-0{,}6 = \frac{4}{10}; \qquad p(\not T|C_2) = 1-0{,}5 = \frac{5}{10}.$$

Alkalmazzuk a Bayes-tételt a C_5, C_7, C_4, C_2 teljes eseményrendszerre és a $\not T$ eseményre:

$$p(C_5|\not T) = \frac{p(\not T|C_5)p(C_5)}{p(\not T|C_5)p(C_5)+p(\not T|C_7)p(C_7)+p(\not T|C_4)p(C_4)+p(\not T|C_2)p(C_2)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{18}}{\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{18}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{18}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{18}+\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{18}} = \frac{10}{10+21+16+10} = \frac{10}{57} \approx 0{,}17543859649;$$

és ehhez hasonlóan

$$p(C_7|\not T) = \frac{21}{57} \approx 0{,}3684210526; \qquad p(C_4|\not T) = \frac{16}{57} \approx 0{,}2807017544;$$

$$p(C_2|\not T) = \frac{10}{57} \approx 0{,}17543859649.$$

Tehát a második (hétfős) csoporthoz tartozik a lövész a legnagyobb valószínűséggel. Ez a valószínűség $\frac{21}{57} \approx 0{,}3684210526$.

10.10. $\frac{6}{7}$.

11. Játékok

11.1. a) Összesen $\binom{21}{2} = \frac{21\cdot 20}{2} = 210$ különböző egyenlő esélyű esetet érdemes megkülönböztetni. Ebből 1 esetben van telitalálatunk és $\binom{19}{2} = \frac{19\cdot 18}{2} = 171$ esetben fordul elő, hogy nincs egyáltalán találatunk, tehát $210-1-171=38$ eset felel meg 1-találatos szelvénynek. Átlagos nyereményünk tehát

$$\frac{1\cdot 2000 + 38\cdot 200}{210} = \frac{9600}{210} \approx 45{,}7142857143.$$

Ezt a játékot nem érdemes játszani, hiszen húzásonként átlagosan $100 - 45{,}7142857143 \approx$ $\approx 54{,}2857142857$ Ft veszteségünk lesz rajta.

b) n szám esetén összesen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ eset van, ebből 1 telitalálatos és $\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ nulla találatos, tehát

$$\frac{n(n-1)}{2} - 1 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 2n-4$$

egy találatos. Átlagos nyereményünk

$$\frac{1\cdot 2000 + (2n-4)\cdot 200}{\frac{n(n-1)}{2}} = 100\cdot\frac{24+8n}{n(n-1)}.$$

az a kérdés, hogy ez a nyeremény mikor nagyobb vagy egyenlő a befizetett összegnél, 100-nál, tehát mely n-re teljesül az

$$1 \le \frac{24+8n}{n(n-1)}$$

egyenlőtlenség. A pozitív nevezővel átszorozva és rendezve az

$$n^2 - 9n - 24 \le 0$$

másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk. A bal oldali polinom gyökei

$$n_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{177}}{2} \approx \begin{cases} 11{,}152 & \text{és} \\ -2{,}152 \end{cases}$$

tehát a bal oldali polinom, melynek grafikonja fölfelé nyíló parabola a $(-2{,}152; 11{,}152)$ intervallumban negatív, azaz 1-től 11 számig érdemes a játékot játszani. pl. 11 szám esetén átlagos nyereményünk húzásonként

$$100 \cdot \frac{24 + 8 \cdot 11}{11 \cdot 10} - 100 = \frac{200}{110}$$

Ft.

11.2. Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket! Az oszlopok az A játékos lehetséges dobásainak (A □), a sorok a B játékos lehetséges dobásainak (B □) felelnek meg. A 36 mező felel meg a 36 lehetséges esetnek. A „–” jelet tettünk azoknak az eseteknek a helyére, amelyeknél újat kell dobni, az „A” jeletttettük oda, ahol az A, a „B” jelet ahol a B játékos a nyerő.

		A □					
		1	2	3	4	5	6
B □	1	–	–	–	–	–	–
	2	B	A	A	A	A	A
	3	B	B	A	A	A	A
	4	B	B	B	A	A	A
	5	B	B	B	B	A	A
	6	B	B	B	B	B	A

A 36 mezőből 30-nál nincs új dobás és ezeknél $15 - 15$ nyerő az A illetve a B játékosnak, így igazságos a játék, a két játékos nyerési esélye megegyezik.

11.3. **a)** 0,0375%, **b)** 2,175%.

11.6. A 11.6S1. segítség szellemében András felírhatja pl. így a számokat a kockákra:

I. kocka:	1	2	13	14	15	16
II. kocka:	7	8	9	10	11	12
III. kocka:	3	4	5	6	17	18

Hasonlítsuk össze ezeket a kockákat! Táblázatokat készítünk a kockapárok összehasonlítására, az egyes mezőkbe annak a kockának a kódját írjuk, amelyik a mező sorának és oszlopának megfelelő értékek közül a nagyobbikhoz tartozik.

$I-II.$		$I.\square$					
		1	2	13	14	15	16
	7	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	8	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	9	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
$II.\square$	10	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	11	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	12	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$

Tehát az I. kocka $24:12$ arányban legyőzi a II. kockát, azaz kettejük csatájában $\frac{2}{3}$ valószínűséggel az I-es nyer.

$II-III.$		$II.\square$					
		7	8	9	10	11	12
	3	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$
	4	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$
	5	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$
$III.\square$	6	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$
	17	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	18	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$

Tehát a II. kocka $24:12$ arányban legyőzi a III. kockát, azaz kettejük csatájában $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a II-es nyer.

$III-I.$		$III.\square$					
		3	4	5	6	17	18
	1	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$
	2	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$
	13	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$III.$	$III.$
$I.\square$	14	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$III.$	$III.$
	15	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$III.$	$III.$
	16	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$III.$	$III.$

Tehát a III. kocka $20:16$ arányban legyőzi az I. kockát, azaz kettejük csatájában $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$ valószínűséggel a III-as nyer.

A három kocka körbeveri egymást, bármelyiket választja B annál tud jobbat választani A.

11.8. Jelölje a fehér golyók számát f, a pirosakét p. A jelen feladatban tehát $p=10$.

Két golyó összesen $\binom{p+f}{2}=\frac{(p+f)(p+f-1)}{2}$-féleképpen választható ki és ebből pf esetben különböző színű a két golyó. Akkor igazságos a játék, ha ez fele az összes esetnek:

$$(p+f)(p+f-1)=4pf. \tag{1}$$

A $p=10$ esetben ebből az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk f-re:

$$f^2-21f+90=0.$$

A másodfokú egyenlet mindkét gyöke pozitív egész: $f_1=6$, $f_2=15$. Alább táblázatban ellenőrizzük a két megoldás helyességét:

	$\binom{f}{2}$	$\binom{p}{2}$	pf
$f=6$	15	45	60
$f=15$	105	45	150

Az utolsó oszlopban álló szám az előző két oszlopban álló két szám összege, ami mutatja a megoldások helyességét.

11.9. A 11.8M. megoldásban felírt

$$(p+f)(p+f-1)=4pf.$$

egyenletet az általános esetben is kezelhetjük f-re vonatkozó másodfokú egyenletként:

$$f^2-(2p+1)f+p(p-1)=0. \tag{1}$$

Ennek diszkriminánsa:

$$D_f=(2p+1)^2-4p(p-1)=8p+1. \tag{2}$$

Az f ismeretlen értéke csak akkor lesz egész, ha ez a diszkrimináns négyzetszám. A (2) alak szerint ez páratlan is, tehát D_f egy pozitív páratlan szám négyzete:

$$D_f=(2n-1)^2, \tag{3}$$

ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A (2-3) összefüggésekből

$$p=\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}, \tag{4}$$

míg az 1 másodfokú egyenletre vonatkozó megoldóképletből

$$f=\frac{2p+1\pm\sqrt{D_f}}{2}=\frac{n(n-1)+1\pm(2n-1)}{2}$$

azaz

$$f=\begin{cases}\frac{n^2+n}{2} & = & \frac{n(n+1)}{2} & = & \binom{n+1}{2}\\ \frac{n^2-3n+2}{2} & = & \frac{(n-1)(n-2)}{2} & = & \binom{n-1}{2}\end{cases} \tag{5}$$

azaz pontosan akkor igazságos a játék, ha a piros és a fehér golyók száma két szomszédos háromszögszám.

11.10.

1. megoldás. Jelölje a fehér golyók számát f, a pirosakét p. A játék pontosan akkor igazságos, ha

$$2\binom{p}{2}=\binom{p+f}{2},$$

azaz ha

$$2=\frac{p+f}{p}\cdot\frac{p+f-1}{p-1}. \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy a (1) összefüggés bal oldalán álló törtek egynél nagyobbak. Könnyen megmutatható, hogy ilyen törtek számlálóját és nevezőjét eggyel-eggyel növelve a tört értéke csökken:

$$\frac{p+f}{p}<\frac{p+f-1}{p-1},$$

azaz

$$\frac{p+f}{p}<\sqrt{2}<\frac{p+f-1}{p-1}. \tag{2}$$

A két oldalt külön-külön p-re rendezve kapjuk, hogy

$$(\sqrt{2}+1)f<p<1+(\sqrt{2}+1)f. \tag{3}$$

A (3) relációknak minden f egész számhoz csak egyetlen p egész szám felel meg. Az első hét eset összevetve a (1) egyenlettel:

f	becslés	p	$\frac{p+f}{p}\cdot\frac{p+f-1}{p-1}$
$f=1$	$2{,}4142 < p < 3{,}4143$	$p=3$	2
$f=2$	$4{,}8284 < p < 5{,}8285$	$p=5$	21/10
$f=3$	$7{,}2426 < p < 8{,}2427$	$p=8$	55/28
$f=4$	$9{,}6568 < p < 10{,}6569$	$p=10$	91/45
$f=5$	$12{,}0710 < p < 13{,}0711$	$p=13$	51/26
$f=6$	$14{,}4852 < p < 15{,}4853$	$p=15$	2
$f=7$	$16{,}8994 < p < 17{,}8995$	$p=17$	69/34

Ebből látható, hogy az $f=1$, $p=3$ pár a legkisebb megoldás, míg a következő az $f=6$, $p=15$ pár és itt f páros.

2. megoldás. Jelölje a fehér golyók számát f, a pirosakét p. A játék pontosan akkor igazságos, ha

$$2\binom{p}{2}=\binom{p+f}{2},$$

azaz ha

$$2p(p-1)=(p+f)(p+f-1). \tag{1}$$

Ez az egyenlet p-ben másodfokú:

$$p^2-(2f+1)p-f(f-1)=0, \tag{2}$$

amiből

$$p=\frac{2f+1\pm\sqrt{8f^2+1}}{2},$$

tehát a $2f=F$ rövidítő jelöléssel

$$p=\frac{F+1\pm\sqrt{2F^2+1}}{2}.$$

Itt p pontosan akkor egész, ha F olyan egész szám, amelyre $2F^2+1$ négyzetszám. Ha viszont $2F^2+1$ négyzetszám, akkor páratlan, sőt nyolcas maradéka 1, így F páros és így f is egész. Tehát a feladat a

$$2F^2+1=N^2 \tag{3}$$

egyenletre, egy *Pell egyenlet*re vezet. Erről a konkrét egyenletről olvashatunk a Bergengóc Példatárban is (LÁSDDDDD!!!!). A (3) Pell egyenlet és feladatunk (pozitív) változóit a

$$p=\frac{F+N+1}{2},\qquad f=\frac{F}{2} \tag{4}$$

összefüggések kapcsolják össze.

A legkisebb megoldásokat próbálkozással vagy Excellel is megtalálhatjuk:

a) $F=2,\quad N=3 \quad\Longleftrightarrow\quad p=3,\quad f=1;$

b) $F=12,\quad N=17 \quad\Longleftrightarrow\quad p=15,\quad f=6$, ez tényleg jó b)-re, hiszen f páros.

11.11. A lehetséges leosztások száma $\binom{52}{5} = 2598960$

a) pár: $\frac{13\cdot\binom{4}{2}\binom{12}{3}\cdot 4^3}{\binom{52}{5}} = \frac{1098240}{2598960} \approx 0{,}4225690276$, hiszen 13-féleképpen választható ki az a figura vagy szám,amelyből kettő lesz a kézben, annak négy színéből $\binom{4}{2}$-féleképpen választható ki a pár, míg a maradék három lap $\binom{12}{3}\cdot 4^3$-féleképpen választható meg, hiszen nem lehet köztük pár, így formájukat a maradék 12 figura ill. szám közül úgy kell választani, hogy különbözőek legyenek ($\binom{12}{3}$), a színűket pedig ezek után tetszőlegesen (4^3).

b) két pár: $\frac{\binom{13}{2}\cdot\left(\binom{4}{2}\right)^2\cdot 44}{\binom{52}{5}} = \frac{123552}{2598960} \approx 0{,}0475390156$, hiszen $\binom{13}{2}$-féleképpen választható ki az a két figura vagy szám, amelyekből pár lesz a kézben, azok négy színéből rendre $\binom{4}{2}$-féleképpen választható ki a pár, míg az ötödik lap az ezektől a figuráktól különböző 44 lap közül tetszőlegesen választható.

c) drill: $\frac{13\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{2}\cdot 4^2}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} \approx 0{,}0211284514$.

d) sor: Az összes sorból le kell vonni a színsorok (straight flush, a h feladatrészben) számát. Az összes sor száma: $10\cdot 4^5$, hiszen a sor legkisebb lapja tízféleképpen választható meg (lásd a h feladat megoldását) és a sor minden tagjának színe 4–4-féleképpen adható meg. A valószínűség: $\frac{10\cdot 4^5 - 40}{\binom{52}{5}} = \frac{10200}{2598960} \approx 0{,}0039246468$.

e) flush: Az összes egyszínű ötösből le kell vonni a színsorok (straight flush, a h feladatrészben) számát. Az összes egyszínű ötös száma: $4\cdot\binom{13}{5} = 5148$, mert a négy szín valamelyikéből kell 5 lapot kiválasztani. A valószínűség: $\frac{4\cdot\binom{13}{5} - 40}{\binom{52}{5}} = \frac{5108}{2598960} \approx 0{,}0019654015$.

f) full: $\frac{13\cdot\binom{4}{3}\cdot 12\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{2598960} \approx 0{,}0014405762$.

g) póker: $\frac{13\cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} \approx 0{,}0002400960$.

h) straight flush: $\frac{4\cdot 10}{\binom{52}{5}} = \frac{40}{2598960} = 0{,}0000153908$, mert négyféleképpen választható ki a szín és a sor legalacsonyabb lapja lehet Ász, 2, 3, ..., 10. (Az Ász, 2, 3, 4, 5 lapok sort alkotnak, és 10-estől Ászig is mehet sor, de körbe nem mehet sor, pl. Király nem lehet sor legkisebb lapja.)

11.12. a) Legyen a kockák színe piros (P), kék (K), zöld (Z), sárga (S) és fehér (F)! Alább elkezdjük összegyűjteni az eseteket:

	P	K	Z	S	F
1.	1	1	1	2	3
2.	1	1	1	3	2
3.	1	1	2	1	3
4.	1	1	2	3	1
5.	1	1	3	1	2
⋮					

A drillt adó lehetőségek száma $\binom{5}{3}\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 1200$, hiszen az öt kocka közül $\binom{5}{3}$-féleképpen választhatjuk ki azt a hármat, amelyeken egyforma számok vannak, ennek értéke hatféle lehet, a balról első kimaradó kockán az ettől különböző ötféle szám bármelyike állhat, míg a még nem említett kockára négyféle lehetőség van.

A kérdezett valószínűség tehát

$$\frac{1200}{6^5} = \frac{1200}{7776} = \frac{25}{162} =\approx 0{,}1543209877.$$

b) kétfajta sor van: a kissor 1-től 5-ig, a nagysor 2-től 6-ig megy. Az egyes számokat mindkét esetben $5! = 120$-féleképpen oszthatjuk ki a kockák között, tehát a kérdezett valószínűség:

$$\frac{240}{7776} = \frac{5}{162} =\approx 0{,}0308641975.$$

11.13. Vázlatosan: Nem elég a két játékos pontjának várható értékét összehasonlítani. Az egyes pontpárokkal, azaz a lehetséges meccsekkel kell számolni.

Tehát jelölje E_{00}, E_{04}, E_{10}, E_{14} rendre azt az eseményt, hogy az Első játékosnak 0, 4, 10 illetve 14 pontja van, míg M_{00}, M_{04}, M_{06}, M_{08}, M_{10}, M_{14} rendre azt az eseményt, hogy Másodiknak 0, 4, 6, 8, 10 illetve 14 pontja van, valamint legyen E az az esemény, hogy Első nyer. A szabályok szerint

$$E = E_{04}M_{00} + E_{10}(M_{00} + M_{04} + M_{06} + M_{08}) + E_{14}(M_{00} + M_{04} + M_{06} + M_{08} + M_{10}),$$

így a $p(E)$ valószínűség is e képlet alapján számolandó. Végül az x összeg értéke a

$$\frac{p(E)}{1 - p(E)} = \frac{x}{100}$$

arányosságból számítható ki.

11.14. a) A húzások száma szepontjából egy $p = \frac{4}{7}$ paraméterű geometriai eloszlásról van szó. Ennek várható értéke, azaz a játék átlagos hossza $\frac{1}{p} = \frac{7}{4} = 1{,}75$.

b) Ha nem fizet előzetesen semmit, akkor A várható nyereménye, az E_A mennyiség kielégíti az alábbi összefüggést:

$$E_A = \frac{4}{7} \cdot 0 + \frac{2}{7} \cdot (50 + E_A) + \frac{1}{7} \cdot (20 + E_A),$$

hiszen az esetek $\frac{4}{7}$ részében A azonnal zöldet húz és így nem nyer semmit, az esetek $\frac{2}{7}$ részében pirosat húz, amivel 50 Ft-ot nyer és újrakezdi a játékot – a továbbiakban átlagosan E_A összeget nyer –, végül az esetek $\frac{1}{7}$ részében fehéret húz, 20 Ft-ot kap és kezdi előlről a játékot. A fenti egyenletből $E_A = 30$, tehát átlagosan 30 Ft-ot nyerne A, akkor igazságos a játék, ha ezt az x összeget fizeti ki előre B-nek.

11.15. A válasz $\frac{1}{2}$, ezt alább indokoljuk.

Képzeljük el Anna és Balázs összes lehetséges $(n-1)$ dobásból álló sorozatait (ez $2^{n-1} \cdot 2^{n-1}$ egyenlő esélyű sorozatpár). Ezek közül a esetben Anna dobott több fejet d esetben ugyannyi fejet dobtak, míg b esetben Balázs dobott többet. Nyilvánvaló, hogy $a = b$.

Anna most még egyet dob. Ha már eddig is több fejet dobott, mint Balázs, akkor akár fejet, akár írást dob nála lesz több fej. Ha eddig ugyanannyi fejet dobtak, akkor pontosan akkor lesz nála több fej, ha új dobása fej. Ha pedig Balázs dobott az első $(n-1)$ dobásban több fejez, akkor bármit dob, nm tudja megelőzni Balázst.

Tehát $(2a+d)$ esetben lesz Annánál több fej, és $(d+2b)$ esetben nem lesz nála több fej. Mivel $a = b$, így $(2a+d) = (d+2b)$, azaz ugyanannyi esetben dobb több fejet Anna, mint amennyiben nem dob többet, a fent megadott válasz igazolást nyert.

11.16.

1. megoldás. Összesen $\binom{5}{2} = 10$ sorrendben lehet kihúzni mind az öt golyót. Az alábbi táblázatban a nyerő golyókat N-nel, a vesztőket V-vel jelöltük és a bal oldali oszlopban összegyűjtöttük a lehetséges kihúzási sorrendeket.

sorrend	megállás	nyereség
NNVVV	N	10
NVNVV	N	10
NVVNV	N	10
NVVVN	N	10
VNNVV	VN	0
VNVNV	VN	0
VNVVN	VN	0
VVNNV	VVNN	0
VVNVN	VVNVN	-10
VVVNN	VVVNN	-10

A táblázat második oszlopában azt írtuk le, hogy hol javasoljuk a játék befejezését. Röviden összefoglalva: *játsszunk, de álljunk meg azonnal, ha már nem veszteséges nekünk az adott játék, illetve ha nem jutunk ilyen helyzetbe, akkor húzzuk ki az összes golyót.*

A harmadik oszlopba írtuk az adott esethez tartozó nyereményünket. A tíz eset egyenlő esélyű, így az ebben az oszlopban található számok átlaga, a 2, az átlagos nyereményt adja meg, ha a fenti stratégiával játsszuk mindig a játékot. Mivel az átlagos nyeremény pozitív, így érdemes játszani a játékot ezzel a stratégiával.

I. megjegyzés

Ha az 1 pénz egy aranyrudat jelent, akkor erősen meggondolandó, hogy játsszunk, hiszen komoly esélye van, hogy vesztünk és így tönkremegyünk. Tehát az „érdemes-e játszani" kérdésre a válasz nem csak a nyeremény várható értékén múlik.

II. megjegyzés

Általában a „stratégia" a táblázat második, a „megállás" oszlopában található sorozatok megadását jelenti. Nem írhatunk ide 10 tetszőleges sorozatot. Ha egyszer úgy döntöttünk, hogy valahol befejezzük a játékot, akkor egy másik esetben nem folytathatjuk ugyanonnan tovább vagy nem állhatunk meg hamarabb: pl. nem lehet az NNVVV esetben a megállás NN-nél 20-as nyereménnyel, míg NVNVV esetén N-nél 10-es nyereménnyel. A megállás oszlopában tehát egyik sorozat sem lehet egy másik kezdőszelete. Ugyanakkor mind a 10 sorozatnak kell legyen ebben az oszlopban kezdőszelete (ami lehet maga az öttagú sorozat is), hiszen minden esetben el kell tudnunk dönteni mikor állunk meg.

Megmutatható, hogy a lehetséges stratégiák között nincs a fentinél jobb, azaz olyan, amelynél a nyeremény átlagos értéke 2-nél nagyobb lenne.

2. megoldás. Kezeljük a feladatot általánosan! Az egyszerűség kedvéért legyen most a nyerő golyó húzásáért kapott illetve a vesztőért befizetendő összeg 10 helyett csak 1 egységnyi pénz és jelölje n a nyerő golyók számát, v pedig a vesztőkét. A játékos optimális stratégia melletti várható nyereményét jelölje ebben az általános esetben $E_{n,v}$.

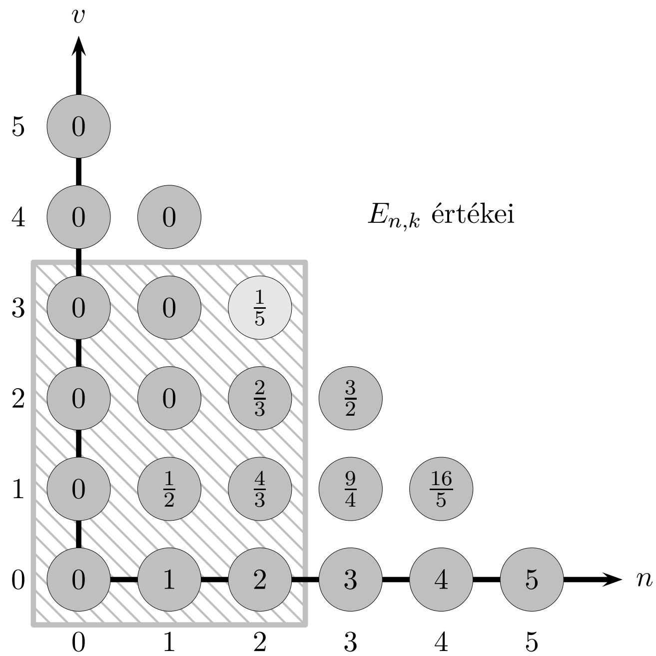
$E_{n,v} \geq 0$, hiszen ha a játékos nem játszik, akkor 0 a várható nyereménye, és a „nem játszás" is egy lehetséges stratégia, ennél egy optimális stratégia nem lehet rosszabb.

Minden nemnegatív n és v értékhez tartozik egy-egy egyértelműen meghatározott $E_{n,v}$ szám, melynek alább meg is adjuk a rekurzív előállítását. Ehhez először is vegyük észre, hogy $E_{0,v} = 0$ azaz ha nincs nyerő golyó, akkor nem érdemes játszani, míg $E_{n,0} = n$, tehát ha csak nyerő golyók vannak, akkor azokat mind érdemes kihúzni. Tehát az $E_{n,v}$ számok meghatározásakor a Pascal háromszöghöz hasonlóan egy számháromszöget kell kitöltenünk, amelynek már látjuk a „szélét".

Az $n \geq 1$, $v \geq 1$ esetben az $E_{n,v}$ kifejezést rekurzívan állíthatjuk elő az alábbi gondolatmenettel. Ha n nyerő és v vesztő golyó van és húzunk, akkor $\frac{n}{n+v}$ eséllyel nyerő golyót húzunk, tehát nyerünk 1 pénzt és a létrejött állapotban $(n-1)$ nyerő és v vesztő golyó marad az urnában, míg $\frac{v}{n+v}$ eséllyel vesztő golyót húzunk, tehát vesztünk 1 pénzt és a létrejött állapotban n nyerő és

$(v-1)$ vesztő golyó marad az urnában. Persze lehet, hogy nem is érdemes húzni. Ennek alapján:

$$E(n,v) = \begin{cases} \frac{n}{n+v}\left(1+E_{n-1,v}\right)+\frac{v}{n+v}\left(-1+E_{n,v-1}\right) & \text{ha ez pozitív} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{1}$$



11.16M2.1. ábra.

A fenti ábrán leolvashatók a rekurzió alapján kiszámolt $E_{n,k}$-értékek.

A konkrét feladat megoldásához csak a szürkén csíkozott téglalapba eső értékeket kell sorban meghatározni, hogy eljussunk a vizsgált $E_{2,3} = \frac{1}{5}$ értékhez. Ez pozitív, tehát a „Kinek kedvez ez a játék? Érdemes-e kérni egyáltalán húzást?" kérdésekre az a válasz, hogy a játékosnak kedvez a játék, érdemes húznia. A stratégia is leolvasható, hiszen ahol 0 van a táblázatban, ott nem érdemes húzni, azzal biztosan nem járunk jobban. Így a táblázat alapján az első húzást követően pontosan akkor állunk meg és nem játsszuk végig a játékot, ha olyan állapotot érünk el, amelyben több vesztő golyó van a dobozban, mint nyerő.

12. Markov láncok

12.1.

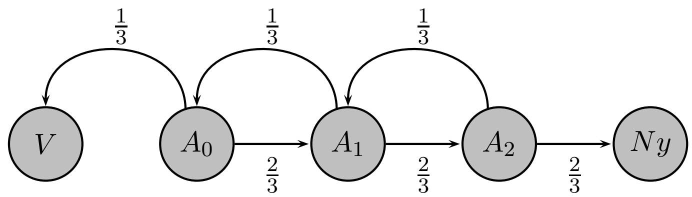
1. megoldás. A próbának öt állapota van: V – a vitéz vesztett, A_0 – még három-, A_1 – még két-, A_2 – még egy próba van a vitéz előtt, Ny – a vitéz nyert. Jelölje az egyes állapotokból indulva a vitéz nyerési esélyét p_V, p_0, p_1, p_2 és p_{Ny}. Értelemszerűen $p_V = 0$ és $p_{Ny} = 1$, míg a többi ismeretlen valószínűségre felírható egy egyenletrendszer.

A 12.1. ábra alapján:

$$p_0 = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot p_1, \qquad p_1 = \frac{1}{3}\cdot p_0 + \frac{2}{3}\cdot p_2, \qquad p_2 = \frac{1}{3}\cdot p_1 + \frac{2}{3}\cdot 1.$$

Az első és utolsó egyenletből kifejezzük p_1-gyel p_0-t illetve p_2-t és ezeket a középső egyenletbe helyettesítjük:

$$p_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot p_1\right) + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot p_1 + \frac{2}{3}\cdot 1\right),$$



12.1M1.1. ábra.

azaz

$$p_1 = \frac{4}{9}p_1 + \frac{4}{9}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{9}p_1 = \frac{4}{9}, \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \frac{4}{5},$$

és ebből a keresett valószínűség $p_0 = \frac{2}{3} \cdot p_1 = \frac{8}{15}$.

2. megoldás. $\frac{8}{15}$. A feladat a 12.2. feladatban vizsgált Ferde foci egyik változata, a vitéz a $[0, 4]$ pályán „focizik”, $b = \frac{1}{3}$ eséllyel balra, $j = \frac{2}{3}$ eséllyel jobbra lép, 1-ről indul és 4-be szeretne jutni.

12.2. b) A keresett valószínűség 0. A valszamgeomeloszlas110ha. feladat alapján ugyanis világos, hogy 1 valószínűséggel lesz $n = 6$ egymás utáni dobás, amelyik mind fej. Ennyi egymást követő fej dobás biztos beviszi az egyik kapuba a labdát.

a) Jelölje az A játékos nyerési esélyét – tehát azt, hogy a 6-os kapuba kerül a labda – p_i, ha kezdetben az i számnál áll a bőrgolyó. Az értelmezés szerint tehát $p_0 = 0$ és $p_6 = 1$. Ha a labda b valószínűséggel megy balra és $1 - b = j$ valószínűséggel jobbra, akkor

$$p_k = b \cdot p_{k-1} + j \cdot p_{k+1}, \text{ ha } k \in \{1,2,3,4,5\}, \tag{1}$$

az a) feladatban tehát

$$p_k = \frac{p_{k-1} + p_{k+1}}{2}. \tag{2}$$

A $\{p_k\}$ sorozat bármelyik tagja a szomszédainak számtani közepe, tehát ez a sorozat számtani sorozat. A sorozat 0. tagja 0, a 6. tagja 1, közötte egyenletesen oszlik el:

$$p_1 = \frac{1}{6}, \qquad p_2 = \frac{2}{6}, \qquad p_3 = \frac{3}{6}, \qquad p_4 = \frac{4}{6}, \qquad p_5 = \frac{5}{6}$$

A kérdezett valószínűség tehát $p_2 = \frac{1}{3}$.

c) A fenti (1) képletet most a $b = \frac{1}{3}$, $j = \frac{2}{3}$ paraméterekkel kell alkalmazni, tehát (2) analogonjaként a

$$p_k = \frac{1 \cdot p_{k-1} + 2 \cdot p_{k+1}}{3} \tag{3}$$

összefüggéshez jutunk. Képzeljük el a

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad p_4, \quad p_5, \quad p_6$$

számokat a számegyenesen. A (3) formula a vektorgeometriából ismert: gondoljunk az osztópont helyvektorára. Ha így nézünk rá, akkor (3) elárulja, hogy a p_k számnak megfelelő pont a számegyenesen a p_{k-1}, p_{k+1} számoknak megfelelő pontok harmadolópontja, méghozzá a p_{k+1}-hez közelebbi harmadolópont.

Ha $p_6 - p_5 = 1 - p_5 = x$, akkor $p_5 - p_4 = 2x$, $p_4 - p_3 = 4x$, $p_3 - p_2 = 8x$, $p_2 - p_1 = 16x$, végül $p_1 - p_0 = p_1 = 32x$. Mivel

$$1 = p_6 - p_0 = (p_6 - p_5) + (p_5 - p_4) + \ldots + (p_1 - p_0) = x + 2x + \ldots + 32x,$$

így $x = \frac{1}{1+2+4+8+16+32} = \frac{1}{63}$ és

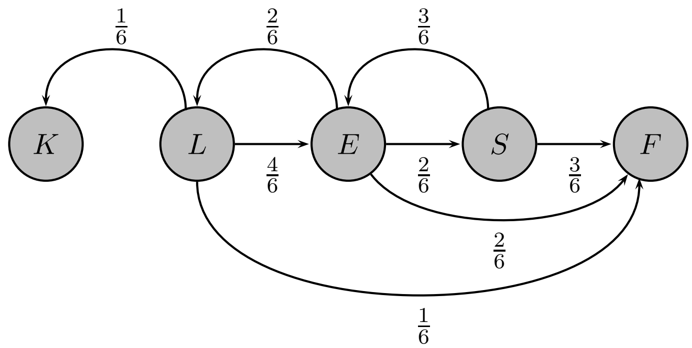
$$p_1 = \frac{32}{63}, \qquad p_2 = \frac{48}{63}, \qquad p_3 = \frac{56}{63}, \qquad p_4 = \frac{60}{63}, \qquad p_5 = \frac{62}{63}.$$

A kérdezett valószínűség tehát $p_2 = \frac{48}{63}$.

12.3. 60%.

12.4. a) Akárhol is van a kockában a pont, ha ötször egymás után felfelé lép, akkor biztosan kijut a felszínre. Így 1 valószínűséggel kijut a felszínre, hiszen az is igaz, hogy a térbeli négyzetrácsban véletlenszerűen vándorló pont egy valószínűséggel fog egymás után ötször felfelép lépni. Valóban, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel felfelé lép és így „csak” $1 > p = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{7775}{7776}$ valószínűséggel nem lesz öt egymást követő lépésének mindegyike felfelé irányú... (innen lásd a 7.8. feladatot).

b) A rendszernek most öt állapota van: a pont lehet a kocka közepén (K), a lap közepén (L), az él közepén (E), a csúcsnál azaz a sarkon (S), illetve lehet kint a felszínen (F). A 12.1. ábrán láthatók az egyes állapotok közti átmeneti valószínűségek.



12.4M.1. ábra.

Mivel a kocka közepéből (K) indulva rögtön a lap közepére (L) érkezünk, így úgy tekintjük, mintha onnan kezdődne a menet és az a kérdés, hogy melyik állapotba jutunk el hamarabb, F-be vagy K-ba. Jelölje rendre

$$p_K, \qquad p_L, \qquad p_E, \qquad p_S, \qquad p_F$$

annak valószínűségét, hogy a K, L, E, S, F állapotból indulva előbb jutok F-be, mint K-ba. A feladat $(1 - p_L)$ értékére kérdez rá, és tudjuk, hogy $p_K = 0$, $p_F = 1$. A 12.1. ábra alapján az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:

$$p_L = \frac{4}{6}p_E + \frac{1}{6}, \qquad p_E = \frac{2}{6}p_L + \frac{2}{6}p_S + \frac{2}{6}, \qquad p_S = \frac{3}{6}p_E + \frac{3}{6}.$$

A két szélső egyenletből kifejezzük p_E-vel p_L-t és p_S-t és a középsőbe helyettesítünk:

$$p_E = \frac{2}{6}\left(\frac{4}{6}p_E + \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{6}\left(\frac{3}{6}p_E + \frac{3}{6}\right) + \frac{2}{6},$$

azaz

$$p_E = \frac{14}{36}p_E + \frac{20}{36}, \qquad \Longrightarrow \qquad p_E = \frac{10}{11},$$

és így $p_L = \frac{17}{22}$, tehát a kérdezett valószínűség: $(1 - p_L) = \frac{5}{22}$.

12.5. a) 0 (lásd pld a 12.4. feladatot). **b)** $\frac{4}{7}$.

13. A szórás

13.1. Ha n tagból áll a számsokaság, akkor szórásnégyzetének – azaz tagjainak az átlagól való eltérésének átlagos négyzetes eltérésének – n-szerese így írható:

$$nD^2 = (x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2.$$

Azok az x_i elemek, amelyek kívül vannak az $[x-2D;x+2D]$ intervallumon egy-egy $4D^2$-nél nagyobb tagot hoznak be a fenti egyenlet jobb oldalára, így biztos, hogy $\frac{n}{4}$-nél kevesebben vannak (hiszen a többi tag is nemnegatív). Tehát az adott intervallumon kívül az elemeknek kevesebb, mint 25%-a van, több mint 75% az intervallumban van.

Annak az adatsokaságnak, melyben a tagok $\frac{3}{4}$-ed része megegyezik az átlaggal, míg a maradék $\frac{1}{4}$-ed rész az átlagtól $2D$-vel tér el – a fele felfelé, a fele lefelé, hogy „kijöjjön" az átlag – a szórása éppen D, így az állítás nem javítható.

13.2. Az $\frac{1}{9}$-ed résznél kevesebb. Tehát az elemek legalább $\frac{8}{9}$-ed része, azaz kb. 88.89%-a az intervallumon belül van.

13.3. *Csebisev tulajdonság*

Állítjuk, hogy ha egy H számsokaság átlaga $\overline{x}$, szórása D és $B>1$ tetszőleges szám, akkor a számsokaság elemeinek $\frac{1}{B^2}$-nél kisebb része van az $[x-BD;x+BD]$ intervallumon kívül. Ha ugyanis legalább ennyi elem kívül lenne, akkor azok átlagtól való távolságának négyzetösszege $\frac{n}{B^2}(BD)^2=nD^2$-nél több lenne, így a szórásnégyzet is több lenne D^2-nél.

13.4. Az 1.13. feladatban láttuk, hogy ha egy számsokaság minden eleméhez hozzáadunk a-t, akkor a számsokaság átlaga a-val nő, szórása változatlan, míg ha λ-val szorzunk minden elemet, akkor az átlag és a szórás is λ-val szorzódik. Ebből következik, hogy a $\frac{H-\overline{x}}{D}$ számsokaság átlaga 0, szórása 1.

Definíció A $\frac{H-\overline{x}}{D}$ számsokaságot a H számsokaság *standardizált*jának nevezzük.

14. Vegyes feladatok

14.1. A nyolc bábu helyét összesen $\binom{64}{8}$-féleképpen jelölhetjük ki.

Azok a kijelölések felelnek meg a vizsgált eseménynek, amelyekben az első sor valamelyik mezőjén van az egyik bábu (ez 8 lehetőség), a második sor valamelyikén az előző bábu oszlopától különböző helyen van egy másik bábu (ez 7, összesen eddig $8\cdot 7$ lehetőség) stb. A megfelelő lehetőségek száma tehát 8!. A kérdezett valószínűség:

$$\frac{8!}{\binom{64}{8}}=\frac{8!}{\frac{64\cdot63\cdot62\cdot61\cdot60\cdot59\cdot58\cdot57}{8!}}=$$

$$=\frac{(8!)^2}{64\cdot63\cdot62\cdot61\cdot60\cdot59\cdot58\cdot57}\approx 9.10946533799\cdot10^{-6}.$$

14.3. $\frac{1}{100}$.

14.5.

1. megoldás. a) A két állat csak az átlón találkozhat, miután mindkettő négyet lépett. Négy lépését mindketten $2^4=16$-féleképpen tehetik meg. Az átló egyes mezőire mindkét álat rendre

$$1,\qquad 4,\qquad 6,\qquad 4,\qquad 1$$

-féleképpen, tehát

$$\frac{1}{2^4},\qquad \frac{4}{2^4},\qquad \frac{6}{2^4},\qquad \frac{4}{2^4},\qquad \frac{1}{2^4}$$

valószínűséggel juthat el. Így annak valószínűsége, hogy az átló egyik konkrét mezőjén találkozzanak rendre

$$\left(\frac{1}{2^4}\right)^2,\qquad \left(\frac{4}{2^4}\right)^2,\qquad \left(\frac{6}{2^4}\right)^2,\qquad \left(\frac{4}{2^4}\right)^2,\qquad \left(\frac{1}{2^4}\right)^2,$$

azaz összesen

$$\frac{1+16+36+16+1}{2^8} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128} = 0{,}2734375.$$

b) az a) esethez hasonlóan az $n \times n$-es táblán a keresett valószínűség

$$\frac{\left(\binom{n}{0}\right)^2 + \left(\binom{n}{1}\right)^2 + \left(\binom{n}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\binom{n}{n}\right)^2}{2^{2n}}.$$

2. megoldás. a) Képzeljük el, hogy a macska és az egér találkoznak, majd a macska az egér nyomán visszafelé végighaladva elmegy az egérlukig. Ilymódon a macska a tábla egyik sarkából az azzal átellenes sarkáig jut el. Az ilyen utaknak a számát adják meg a Pascal háromszög számai: ez most $\binom{8}{4} = 70$.

A (macskának) kedvező esetek száma tehát $\binom{8}{4}$, míg összesen $(2^4)^2$ eset van, így a kérdezett valószínűség:

$$\frac{\binom{8}{4}}{2^8} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128} = 0{,}2734375.$$

b) az a) esethez hasonlóan az $n \times n$-es táblán a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

14.6.

1. megoldás. Két csapatot választunk, egy Elsőt és egy Másodikat. Ehhez azonban elég az Első csapatot kiválasztani, a maradék lesz a Második. A kérdés így is fogalmazható: *Mennyi az esélye, hogy az Első csapatba a két legjobb játékos közül pontosan egy kerül?.*

A 22 játékosból az Első csapatban játszó 11-et összesen $\binom{22}{11}$-féleképpen választhatjuk ki. Az a kedvező, ha ebbe a 11-be a 2 legjobb közül 1-et, a maradék 20-ból pedig 10-et választunk. Erre $\binom{2}{1} \cdot \binom{20}{10}$ lehetőség van. Az eredmény:

$$p = \frac{\binom{2}{1}\binom{20}{10}}{\binom{22}{11}} = \frac{2 \cdot 11}{\frac{22 \cdot 21}{11}} = \frac{11}{21} \approx 0{,}5238095238.$$

2. megoldás. [17]

Képzeljük el úgy, hogy egy sorban van egymás mellett 22 hely, az első 11 helyre kerülőkből fog állni az 1. csapat, a $12-22$. helyre kerülőkből pedig a 2. csapat. A két legjobb játékos helyét összesen $\binom{22}{2}$-féleképpen választhatjuk ki a 22 helyből. Az a kedvező, ha egy-egy hely kerül az első 11 illetve a második 11 helyre, erre $\binom{11}{1} \cdot \binom{11}{1}$ lehetőség van. A kérdezett valószínűség értéke:

$$\frac{\binom{11}{1}\binom{11}{1}}{\binom{22}{2}} = \frac{11 \cdot 11}{\frac{22 \cdot 21}{2}} = \frac{11}{21}.$$

3. megoldás. Az első legjobb játékost bármelyik csapatba rakjuk, a második legjobb játékosnak mellé – az első csapatába – még 10 helyre kerülhet, míg a másik csapatba 11 helyre. Így $\frac{11}{21} \approx$ $\approx 0{,}5238095238$ az esélye, hogy különböző csapatba kerülnek.

14.8. Lásd [4]:

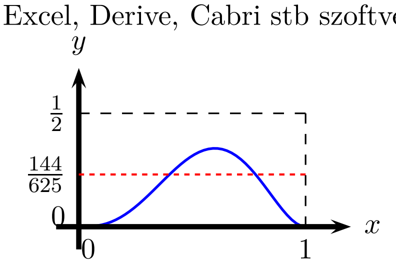
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/OroszGyula/Val/v4.html

14.9.

1. megoldás. Annak valószínűsége, hogy öt dobásból három fej lesz (binomiális eloszlás):

$$w = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2.$$

Ábrázoljuk a fenti képlet jobb oldalán álló kifejezést, mint p függvényét a $[0;1]$ intervallumban! (Használhatjuk pl. a GeoGebra, Excel, Derive, Cabri stb szoftvert.)



14.9M1.1. ábra.

A grafikonról leolvasható, hogy két megoldás van, a d) válasz a helyes.

2. megoldás. Helyettesítsünk a w értékét megadó $f(p) = 10p^3(1-p)^2$ függvénybe a $p_1 = \frac{2}{5}$ $p_2 = \frac{3}{5}$, $p_3 = 1$ értékeket!

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{144}{625}, \qquad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{216}{625}, \qquad f(1) = 0.$$

Tehát $p_1 = \frac{2}{5}$ jó megoldás, de $p_2 = \frac{3}{5}$ túl nagy, míg $p_3 = 1$ túl kis értéket ad $f(p) = w$-re. Az f függvény folytonos, így e két érték között föl fogja venni a $\frac{144}{625}$ értéket, tehát lesz egy olyan p a $[\frac{3}{5}, 1]$ intervallumban, amelyre $f(p) = \frac{144}{625}$. Ezért a d) válasz a helyes.

14.1.

1. megoldás. Számoljuk össze a rossz eseteket, azokat, amelyekben egymás mellé kerül legalább két zöld golyó. Csoportosítsuk a lehetőségeket az alábbiak szerint:

A: két szomszédos zöld van, a másik kettő nincs ezek mellett és egymás mellett sem;

B: három szomszédos zöld van, a negyedik nincs ezek mellett;

C: két-két szomszédos zöld van, de a két pár nem szomszédos;

D: mind a négy zöld szomszédos.

A D esetben az 1 darab zöld blokkot, a 3 piros és az 5 fehér golyót kell elrendeznünk, erre $\frac{9!}{3!5!} = 504$ lehetőség van.

A C esetnek megfelelő 2 egyforma zöld blokkot, a 3 piros és az 5 fehér golyót $\frac{10!}{2!3!5!} = 2520$-féleképpen rendezhetjük el, de ebben benne vannak azok a lehetőségek is, amikor a két zöld blokk is szomszédos. A rossz esetek épp a D esetet adják, tehát a C-nek megfelelő elrendezések száma $2520 - 504 = 2016$.

A B esetben 2 különböző méretű zöld blokk van a 3 piros és az 5 fehér golyó mellett, így az elrendezések száma $\frac{10!}{3!5!} = 5040$, de ebben minden D-beli elrendezés is benne van kétszer: a négy szomszédos zöldből a bal oldali három egy blokk, vagy a jobb oldali három. A ténylegesen B-hez tartozó esetek száma tehát $5040 - 2 \cdot 504 = 4032$.

Az A esetben 1 hosszú zöld blokkot, 2 zöld, 3 piros és 5 fehér golyót kell elrendeznünk, amire $\frac{11!}{2!3!5!} = 27720$ lehetőség van. Ebben benne vannak a D-hez tartozó esetek háromszor (a négy szomszédos zöld között a kettes blokk balra, középen vagy jobbra van), a C-hez tartozók kétszer (a két kettes közül melyik a valóban kettes blokk), és a B-hez tartozók is kétszer (a három szomszédos zöld között melyik két szomszédos a kettes blokk). A valóban A-hoz tartozó esetk száma tehát

$$27720 - 3 \cdot 504 - 2 \cdot 2016 - 2 \cdot 4032 = 14112.$$

A „rossz" esetek száma összesen:

$$504 + 2016 + 4032 + 14112 = 20664.$$

Az összes eset száma $\frac{12!}{4!3!5!} = 27720$, tehát azoknak az eseteknek a száma, amelyekben nincsenek szomszédos zöldek $27720 - 20664 = 7056$.

Annak valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé zöld golyó

$$\frac{7056}{27720} = \frac{14}{55} \approx 0{,}2545454545.$$

2. megoldás. Helyezzük el először a fehér és piros golyókat! Mindegyik sorrendjük egyformán valószínű. A zöld golyókat, ha nem akarjuk, hogy legyenek köztük szomszédosak, akkor ezek közé a golyók közé kell elhelyeznünk, mindegyik „közbe" legfeljebb egyet. Tehát ki kell választanunk a 8 már lerakott golyó közti és melletti helyek – összesen 9 hely – közül azt a 4-et, amelybe teszünk egy-egy zöld golyót. A lehetőségek száma tehát $\binom{9}{4}$.

Most számoljuk össze az összes esetet! 12 helyre kell leraknunk golyókat. A 12 helyből a zöldek helyét $\binom{12}{4}$-féleképpen választhatjuk meg. A maradék 8 helyre kerülnek a pirosak és a fehérek, amelyeket már fent sem különböztettünk meg egymástól (mindegyik elrendezésük ugyanannyiszor számítana az előző bekezdésben is, mint itt). A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{9}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55} \approx 0{,}2545454545.$$

14.2.

1. megoldás. Lásd http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B3858&l=hu

2. megoldás. Jelölje n közlekedési lámpa esetén annak esélyét, hogy nem találkozunk közvetlenül egymás után két tilos jelzéssel p_n. Tehát $p_1 = 1$ és $p_2 = 1 - 0{,}4^2 = 0{,}84$. Tekintsünk most n lámpa esetét, ahol $2 < n$.

Ha az utolsó lámpa piros (ennek esélye 0,4), akkor az előtte levőnek zöldnek kell lennie (ennek esélye 0,6) és az első $(n-2)$ lámpa tetszőleges, csak ne legyen két egymást követő piros (ennek esélye p_{n-2}).

Ha viszont az utolsó lámpa zöld (ennek esélye 0,6), akkor az előtte levő $(n-1)$ lámpa tetszőleges, csak ne legyen köztük két egymást követő piros (ennek esélye p_{n-1}).

Ennek alapján a rekurzió:

$$p_n = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot p_{n-2} + 0{,}6 p_{n-1}.$$

A sorozat tagjait Excel vagy OpenOffice Calc programmal is kiszámíthatjuk:

$$p_1 = 1; \qquad p_2 = 0{,}84; \qquad p_3 = 0{,}744; \qquad p_4 = 0{,}648;$$
$$p_5 = 0{,}56736; \qquad p_6 = 0{,}495936; \qquad p_7 = 0{,}433728; \qquad p_8 = 0{,}37926144.$$

Tehát a kérdezett valószínűség 0,37926144.

14.2. Egy adott szám akkor lesz a kisebbik kihúzott szám, ha őt kihúzták, és a másik kihúzott szám a nála nagyobb számok közül került ki. Így a kedvező esetek száma könnyen kiszámolható. Alább figyelembe vesszük, hogy összesen $\binom{n}{2} = \binom{10}{2} = 45$ eset van.

Jelölje χ a legkisebb számot! Ekkor

$$p(\chi = 1) = \frac{9}{45}; \qquad p(\chi = 2) = \frac{8}{45}; \qquad p(\chi = 3) = \frac{7}{45}; \qquad \ldots;$$

$$\ldots; \qquad p(\chi = 8) = \frac{2}{45}, \qquad p(\chi = 9) = \frac{1}{45}, \qquad p(\chi = 10) = 0,$$

általában tehát $p(\chi = i) = \frac{10-i}{45}$, ahol $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

a) A kisebbik szám legvalószínűbb értéke tehát 1.

b) A kisebbik szám várható értéke:

$$E = \sum_{i=1}^{10} i \cdot p(\chi = i) = \frac{1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + \ldots + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1}{45} =$$

$$= \frac{165}{45} = \frac{11}{3} \approx 3{,}6666666667.$$

c) Mivel most $p(\chi = i) = \frac{n-i}{\binom{n}{2}}$, így a várható értékre vonatkozó formula ebben az esetben

$$E = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p(\chi = i) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i \cdot (n - i).$$

A fenti képlet végén egy összeg áll, amelynek tagjai olyan szorzatok, amelyben a két tényező összege n. Tehát a szorzótábla $(n-1)$-edik átlójában álló számokról van szó. A K.I.20.79. feladatból tudjuk, hogy ennek az összegnek az értéke $\binom{n+1}{3}$, azaz

$$E = \frac{2}{n(n-1)} \binom{n+1}{3} = \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \cdot 2} = \frac{n+1}{3}.$$

Ez az eredmény összhangban van a b) feladatra kapott speciális esetre vonatkozó eredménnyel.

d) A

$$\frac{p(\chi = i+1)}{p(\chi = i)} = \frac{n-i-1}{n-i}$$

hányados értéke mindig kisebb 1-nél, tehát i növekedtével $p(\chi = i)$ értéke is nő, azaz a kisebbik szám legvalószínűbb értéke az 1.

14.3. Jelölje χ a második legkisebb számot! Ekkor általában

$$p(\chi = i) = \frac{\binom{i-1}{1} \cdot \binom{10-i}{2}}{\binom{10}{4}},$$

míg konkrétan (az Excel vagy az OpenOffice Calc programmal számolva:

$$\begin{aligned}
&p(\chi = 1) = 0, && p(\chi = 2) = \tfrac{1 \cdot \binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} \approx 0{,}1333333333,\\
&p(\chi = 3) = \tfrac{\binom{2}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = 0{,}2 && p(\chi = 4) = \tfrac{\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} \approx 0{,}2142857143,\\
&p(\chi = 5) = \tfrac{\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} \approx 0{,}1904761905 && p(\chi = 6) = \tfrac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} \approx 0{,}1428571429,\\
&p(\chi = 7) = \tfrac{\binom{6}{1} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{10}{4}} \approx 0{,}0857142857 && p(\chi = 8) = \tfrac{\binom{7}{1} \cdot 1}{\binom{10}{4}} \approx 0{,}0333333333,\\
&p(\chi = 9) = 0, && p(\chi = 10) = 0.
\end{aligned}$$

a) A fenti adatok alapján a második legkisebb szám legvalószínűbb értéke a 4.

b) A fenti adatokkal az

$$E = \sum_{i=2}^{8} i \cdot p(\chi = i) = \frac{1}{\binom{10}{4}} \sum_{i=2}^{8} i \cdot \binom{i-1}{1} \cdot \binom{10-i}{2}$$

összeget az Excel vagy az OpenOffice Calc programmal kiszámolva az $E \approx 4{,}4$ közelítő értékhet jutunk. Valójában ez a pontos eredmény, mint ahogy az általános eset levezetéséből alább kiderül.

c) Az általános esetben a várható érték összeg alakja:

$$E = \sum_{i=2}^{n-2} i \cdot p(\chi = i) = \frac{1}{\binom{n}{4}} \sum_{i=2}^{n-2} i \cdot \binom{i-1}{1} \cdot \binom{n-i}{2} =$$

$$= \frac{2}{\binom{n}{4}} \sum_{i=2}^{n-2} \frac{i(i-1)}{2} \cdot \binom{n-i}{2}$$

azaz

$$E = \frac{2}{\binom{n}{4}} \sum_{i=2}^{n-2} \binom{i}{2} \cdot \binom{n-i}{2}. \tag{1}$$

A K.I.20.79M3 példamegoldáshoz hasonlóan kombinatorikai értelmezést adunk a $\binom{i}{2} \cdot \binom{n-i}{2}$ kifejezésnek és a belőle felépülő összegnek. Ha az

$$\{1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad (n-1), \quad n, \quad (n+1)\}$$

halmaz elemeiből kiválasztunk ötöt, akkor az $(i+1)$ szám épp ennyiféleképpen lehet a középső. Valóban, az

$$\{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots, \quad (i-1), \quad i\}$$

számok közül kell kiválasztani kettőt, a két legkisebb számot – ez $\binom{i}{2}$ lehetőség – és az

$$\{(i+2), \quad (i+3), \quad \ldots, \quad (n-1), \quad n, \quad (n+1)\}$$

számok közül – tehát $(n-i)$ szám közül – is kettőt, a két legnagyobbat – ez $\binom{n-i}{2}$ lehetőség. Az 1 jobb oldalán található összegben, ahogy haladunk i-vel sorra vesszük a lehetőségeket a középső számra, tehát az összeg értéke $\binom{n+1}{5}$. Így

$$E = \frac{2}{\binom{n}{4}} \cdot \binom{n+1}{5} = \frac{2 \cdot \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{5\cdot4\cdot3\cdot2}}{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot3\cdot2}} = 2\frac{n+1}{5}.$$

Pl. $n = 10$ esetén $E = \frac{22}{5} = 4{,}4$ összhangban a b) feladat eredményével.

d) Mivel

$$p(\chi = i) = \frac{\binom{i-1}{1} \cdot \binom{n-i}{2}}{\binom{n}{4}},$$

így

$$\frac{p(\chi = i+1)}{p(\chi = i)} = \frac{i \cdot \frac{(n-i-1)(n-i-2)}{2}}{(i-1) \cdot \frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} = \frac{i \cdot (n-i-2)}{(i-1) \cdot (n-i)} \tag{2}$$

Az i növekedtével meddig nő $p(\chi = i)$ értéke, tehát meddig nagyobb 1-nél a (2) tört értéke? A

$$\frac{i \cdot (n-i-2)}{(i-1) \cdot (n-i)} > 1 \iff i \cdot (n-i-2) > (i-1)(n-i) \iff$$

$$\iff in - i^2 - 2i > in - i^2 - n + i \iff n > 3i$$

levezetés szerint ha $i < \frac{n}{3}$, akkor még érdemes növelni i-t, tehát az $\frac{n}{3}$ tört felső egészrészénél van a maximum (az $\frac{n}{3}$-nál nem kisebb legkisebb egésznél) illetve, ha $\frac{n}{3}$ egész, akkor az ennél eggyel nagyobb számnál is maximális a valószínűség. pl. $n = 10$ esetén $\frac{n}{3} = 3{,}3\ldots$, így 4-nél van a maximum, ahogy az a) feladatbaan láttuk is. De $n = 12$ esetén 4 és 5 egyaránt maximális.

14.1. Igen, lehetséges. Jelöljük a játékosokat Élő-pontjuk szerinti erősorrendben az 1, 2, 3, ..., 9 számokkal! Az alábbi táblázat az $I.$, $II.$, $III.$ csapatok egy olyan összeállítását tartalmazza, amelynél a csapatok körbeverik egymást.

	$I.$ csapat	$II.$ csapat	$II.$ csapat
1. tábla:	1	2	3
2. tábla:	6	4	5
3. tábla:	8	9	7

Az erősorrendek szerint az $I.$ csapat 2 : 1-re veri a $II.$ csapatot, a $II.$ csapat ugyanilyen arányban győz a $III.$ ellenében, végül a $III.$ csapat is 2 : 1-re az I-t.

14.6.

1. megoldás. Számozzuk meg a perselyeket 1-től 30-ig, az 1-est és a 2-est törjük össze. $i = 1, 2, \ldots, 30$−ra legyen $\pi(i)$ az i. perselyben lévő kulcshoz tartozó persely száma. Ez egy permutáció, ennek ciklikus szerkezetét vizsgáljuk. Ha az i. perselyt kinyitottuk, akkor a $\pi(i)$-ediket is ki tudjuk nyitni, vagyis pontosan akkor tudunk kinyitni minden perselyt, ha az eredeti 2 feltört persely között minden ciklusnak van legalább egy eleme. Ezek szerint ekkor csak 1 vagy 2 ciklus lehet. Ezen esetek számát külön-külön leszámláljuk.

1 ciklus: Egy ciklus így írható fel az 1-estől kezdve: $(1a_2a_3\ldots a_{30})$, ez összesen 29!-féle lehet.

2 ciklus: Ekkor az 1. és a 2. persely különböző ciklusokban vannak, ezek

$$(1a_3a_4\ldots a_k), \qquad \text{és} \qquad (2a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{30}).$$

Az $a_3a_4\ldots a_{30}$ sorozat 28!-féle lehet, k pedig lehet 2, 3, ..., 30, vagyis 29-féle, így az esetek száma itt is 29! A kérdéses valószínűség tehát $\frac{29!+29!}{30!} = \frac{1+1}{30} = \frac{1}{15}$.

2. megoldás. Mielőtt a felnyitáshoz kezdenénk, rakjuk sorba a perselyeket azzal a kettővel kezdve, amelyeket majd feltörünk, és írjuk rájuk a sorszámukat. Miután találomra dobtuk be a kulcsokat, és találomra választottuk ki a két feltörni szánt perselyt, ezért minden eset, így minden elrendezés egyenlő valószínűséggel fog létrejönni.

Most feltörjük az első perselyt. Ha a saját kulcsa volt benne, akkor félretesszük, és a másodikat törjük fel. Ha nem a saját kulcsát tartalmazza, akkor ezek után mindig azt nyitjuk ki, amelyiknek a kulcsát megtaláltuk az előző ládában. Ha közben előkerül a második persely kulcsa is, akkor azt fel sem kell törni, hanem csak ki kell venni és folytatni a sort. Ebben az esetben akkor akad meg a sor, ha az első persely kulcsa kerül elő. Ha az első persely kulcsa kerül elő előbb, akkor a másodikban található kulccsal folytatjuk a sort. Ilyenkor akkor akadunk el, ha a második kulcs kerül elő. Más olyan kulcs nem kerülhet elő, ami egy már felnyitott ládához tartozik, hiszen minden kulcsból pontosan egy van, ezért egy felnyitott ládának kulcsa már korábban előkerült (kivéve az első két ládát, amit feltörünk). Ha előkerült már az első és a második láda kulcsa is, de nem nyitottunk még ki minden ládát (ezek a számunkra kedvezőtlen esetek), akkor a legkisebb sorszámú fel nem bontott ládát törjük fel és így fejezzük be a perselyek kinyitását. Ilyen módon a perselyekbe dobott kulcsok minden elrendezéséhez hozzárendeltük a felnyitott perselyek sorrendjét.

A felnyitott ládák sorrendje alapján vissza is tudjuk rakni a kulcsokat az eredeti ládákba. Akkor jó egy a felnyitott ládák egy sorrendje, ha az utolsó helyen az első, vagy a második láda áll. Bármelyik persely előtt a többi láda bármely sorrendje ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, tehát az utolsó helyen minden persely ugyanolyan valószínűséggel áll. A 30 ládából 2 jó, tehát a keresett valószínűség 2/30, azaz 1/15.

14.7. Párosítsuk a permutációkat! Az $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n)$ permutáció párja legyen az $(i_n, i_{n-1}, \ldots, i_2, i_1)$ permutáció. Minden számpár e két permutáció közül pontosan az egyikben áll inverzióban, tehát a kettőben együtt összesen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ inverzió van. Így egy permutációban átlagosan ennek a fele, azaz $\frac{n(n-1)}{4}$ inverzió van.

14.9. 1 (lásd a 9.4. feladatot)

14.10. A ciklus hossza egyenletes eloszlású, mindegyik hossznak ugyanannyi – $\frac{1}{35}$ – az esélye.

14.11. Legyen a χ_k valószínűségi változó értéke $\frac{1}{m}$, ha a k szám olyan ciklusban van, amelynek hossza m. Így mindegyik ciklus valószínűségi változói értékeinek összege 1, tehát az összes valószínűségi változó értékének összege a véletlen permutáció ciklusainak száma.

Elegendő a χ_k valószínűségi változó várható értékét kiszámolni, tehát azt, hogy egy rögzített szám – pl. $k = 1$ – ciklushosszának reciproka átlagosan mekkora. Tehát

$$E_1 = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} p(\text{az 1 ciklusának hossza} m).$$

A **valszam9evfjatek110701haperm150egycikhossz** feladatból tudjuk, hogy adott elem ciklusának hossza egyenletes eloszlású, tehát

$$E_1 = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

azaz a keresett várható érték

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = n \cdot E_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

14.12. Általánosan kezeljük a kérdést $2n$ tojással. Tekintsük a tojásokat különbözőknek! A $2n$ különböző tojás összes párosításainak számát kétféleképpen is kiszámoljuk.

I. módszer az összes párosításra

Rögzítsük a tojások egy sorrendjét. A sorban első tojásnak $(2n-1)$-féleképpen választhatunk párt. A sorban következő első olyan tojásnak, amelynek még nincs párja $(2n-3)$-féleképpen választhatunk párt. Így továbbhaladva a párosítások számára

$$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$$

adódik.

II. módszer az összes párosításra

A párokat így is kialakíthatjuk: rendezzük sorba a $2n$ tojást, és a sorban elsőnek legyen a párja a második, a harmadiknak a negyedik, stb. A $2n$ tojásnak összesen $(2n)!$ különböző sorrendje lehetséges, de ezek számbavételekor sokszorosan számoljuk a párosításokat. Minden párosítást

$n! \cdot 2n$-szer számolunk meg, mert a párokat egymás között $n!$-féleképpen rendezhetjük át, és mindegyik pár két elemét kétféleképpen rakhatjuk sorba. Ezért a párosítások száma:

$$\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}.$$

Jelölje A_n^k a $2n$ különböző golyó olyan párosításainak számát, amelyekben pontosan k egyszínű pár van. (Vigyázat, a k itt nem kitevő, hanem egy felülre helyezett index!) Az alábbi speciális értékek értelemszerűen adódnak a jelölésből:

$$A_n^{n-1} = 0, \qquad A_n^n = 1, \qquad A_n^m = 0, \quad \text{ha } m > n.$$

Rekurziót írunk fel a többi szimbólum értékének meghatározására. Ehhez először is rögzítsük az egyik fehér tojást. Vegyük sorba az összes olyan párosítást, amelyben pontosan k egyszínű pár van. Bármely ilyen párosításnál nézzük meg, hogy milyen színű a rögzített fehér golyó párja. Ha fehér, akkor a maradék $(2n-2)$ tojást úgy kell párba állítani, hogy $(k-1)$ egyszínű párt kapjunk. Ha nem fehér a pár, akkor $2 \cdot (n-1)$ másik tojás lehet. Nézzük meg a rögzített fehér tojás párjával egyszínű másik tojás párját. Ha ez fehér, akkor a maradék $(2n-4)$ tojást úgy kell párba állítani, hogy pontosan k egyszínű párt kapjunk. Ha nem fehér ez a tojás, akkor nézzük meg a vele egyszínű másik tojás párját … Valahány lépésben bezárul a kör, a fehér tojáshoz jutunk. Ha nem azonnali a záródás, akkor a ciklusban nem volt azonos színű pár, így a maradék tojások párosításában kell pontosan k egyszínű párnak lennie. Így a maradék tojások száma legalább $2k$. Képletben:

$$A_n^k = A_{n-1}^{k-1} + 2 \cdot (n-1) \cdot A_{n-2}^k + 2^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot A_{n-3}^k + \ldots$$
$$\ldots + 2^{n-k-1} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot A_k^k.$$

Az első néhány értéket az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

A_n^k		n					
		0	1	2	3	4	5
k	0	1	0	2	8	60	544
	1	0	1	0	6	32	300
	2	0	0	1	0	12	80
	3	0	0	0	1	0	20
	4	0	0	0	0	1	0
	5	0	0	0	0	0	1
összes párosítás:			1	3	15	105	945

A táblázatból a valószínűségek is megkaphatók, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és 5 esetén rendre a

$$\frac{544}{945} \approx 0{,}5756613757, \qquad \frac{300}{945} \approx 0{,}3174603175, \qquad \frac{80}{945} \approx 0{,}0846560847,$$
$$\frac{20}{945} \approx 0{,}0211640212, \qquad 0, \qquad \frac{1}{945} \approx 0{,}0010582011$$

értékeket kapjuk.

14.2.

$$\frac{\frac{5}{365} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{5}{365} \cdot \frac{9}{10} + \frac{360}{365} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111111111.$$

Részletesebben lásd http://stattrek.com/Lesson1/Bayes.aspx.

14.1. Vizsgáljuk azt a hat csúcsot, amelyet a két ponthármas lefoglal! Nézzük meg, hogy ez a hat pont hányféleképpen bontható két ponthármasra és azok közül hány esetben metszi illetve nem metszi egymást a két háromszög!

A hat csúcsból három $\binom{6}{3} = 20$-félekéépen választható ki, de mindegy hogy az hármast vagy a komplementerét választjuk ki, így csak 10 eset van. A körön a hat pont úgy helyezkedik el, hogy konvex burkuk hatszög, így pontosan akkor nem metszi egymást a két háromszög, ha az egyik és a másik hármas is három, a körön haladva egymást követő pontból áll. Ez 3 eset mindegyik lehetséges ponthatosra.

A kérdezett valószínűség $\frac{3}{10}$.

14.2. Válasz: Páros n esetén $\frac{1}{4} - \frac{3}{4(n-1)}$, míg páratlan n esetén $\frac{1}{4} + \frac{3}{4(k-2)}$.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Tusnády Gábor Bognár Jánosné, Nemetz Tibor: *Ismerkedés a véletlennel.* Középiskolai szakköri füzetek sorozat. Budapest, 1980, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 4813 8.

[2] Lukács Judit Major Éva Székely Péter Dr. Vancsó Ödön Bárd Ágnes, Frigyesi Miklós: *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest, 2005, Műszaki Könyvkiadó Kft. ISBN 963 1627888.

[3] W. Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba.* Budapest, 1978, Műszaki Könyvkiadó. ISBN 963 10 2070 3.

[4] Orosz Gyula: Valószínűségszámítási érdekességek. 2004., *Fazekas matematika portál.* Olvasható a http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Val/val.html weboldalon.

[5] Orosz Gyula: Markov-láncok. 2008., *Fazekas matematika portál.* Olvasható a http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Mar/markov.html weboldalon.

[6] Solt György: *Valószínűségszámítás példatár.* Bolyai sorozat sorozat. Budapest, 2000, Műszaki Könyvkiadó Kft. ISBN 978 963 1630374.

[7] Székely J. Gábor: *Paradoxonok a véletlen matematikájában.* 2. átdolgozott kiadás. kiad. Budapest, 2004, Typotex. ISBN 978 963 2790 89 3. http://books.google.com/books/?id=0So4I9CIVW0C.

[8] John Canny's home page. URL `http://www.cs.berkeley.edu/~jfc/cs174/lecs/`. A Berkeley Egyetem professzorának weboldala.

[9] Kvant, fizikai és matematikai tudományos népszerűsítő folyóirat. A Szovjet, majd az Orosz Tudományos Akadémia és a Pedagógiai Tudományok Akadémiájának lapja. URL `http://kvant.mirror0.mccme.ru/`.

[10] Középiskolai matematikai és fizikai lapok. A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata. URL `http://www.komal.hu`.

[11] Számadó László: A statisztika alapjai. 2003?, *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok internetes változata.* Olvasható a http://www.komal.hu/cikkek/statszaml/statisztika.h.shtml weboldalon.

[12] Frederick Mosteller: *50 különleges valószínűségszámítási feladat megoldásokkal.* Moszkva, 1971, Izdatyelsztvo Nauka. ISBN 978 5 94057 262 6. (az eredeti kiadás angol: Fifty challenging problems in probability with solutions, Courier Dover Publications, http://books.google.com/books?id=QiuqPejnweEC).

[13] Sára Tamás diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[14] N. N. Szergejeva (szerk.): *Nemzetközi Matematikai Olimpiák.* Bibliotecska Matematicseszkovo kruzska, vüpuszk 17 sorozat. Moszkva, 1987, Nauka.

[15] Szászné Simon Judit közlése.

[16] Nemetz Tibor: *Valószínűségszámítás*. Speciális matematika-tankönyvek sorozat sorozat. Budapest, 1998???, Typotex. ISBN 963 9132 27 6.

[17] Tossenberger Tamás, 2014c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[18] Csatár Katalin Harró Ágota Hegyi Györgyné Lövey Éva Morvai Éva Széplaki Györgyné Ratkó Éva: Valószínűségszámítás feladatok kezdőknek. 2003?, *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok internetes változata*. Olvasható a http://www.komal.hu/cikkek/valszam/valszam.h.shtml weboldalon.

[19] Nemetz Tibor és Wintsche Gergely: *Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek*. Polygon könyvtár sorozat sorozat. Szeged, 1999, Polygon.