Városok Viadala kísérlet

11–12. évfolyam

Szerkesztette:
Dobos Sándor, Nagy János, Nagy Zoltán,
Paulin Roland, Tomon István

2018. május 20.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2017

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Városok Viadala, 1980–1989

1.1. 1980 Senior

1.1. (M) Egy kör kerületén piros és kék pontok vannak. Kijelölhetünk egy új piros pontot, miközben két szomszédja színt vált. Ki is vehetünk egy meglévő piros pontot, szomszédai ekkor is átszíneződnek. Igazoljuk, hogy ha kezdetben két piros pont volt, akkor nem juthatunk a fenti lépésekkel olyan helyzetbe, hogy két kék legyen.

1.2. 1981 Senior

1.1. (M) Két testet felületszomszédosnak nevezünk, ha nincs közös belső pontjuk és van egy-egy lapjuk, melyek közös része egy sokszög. Lehetséges-e, hogy 8 tetraéder közül bármely kettő felületszomszédos?

1.2. (M) A végtelen síkon két játékos a következőt játssza. Van $k+1$ bábu: k darab bárány és egy farkas. Az X játékos a farkassal lép, az Y a bárányok közül valamelyikkel. Minden lépés iránya tetszőlegesen választható,de hossza legfeljebb egy méter lehet. A játékosok felváltva lépnek. Igaz-e, hogy k minden értékéhez létezik olyan kezdő elrendezés, melyből indulva a farkas sohasem kaphat el bárányt, ha X kezd.

1.3. (M) Igazoljuk, hogy minden pozitív valós szám felírható 9 olyan szám összegeként, melyeknek (tizes számrendszerbeli alakjában) csak kétfajta jegy lehet, 0 és 7.

1.3. 1983–1984 Senior, ősz

1.1. (M)

1.2. (M)

1.3. (M) Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O, a háromszögön belül helyezkedik el. O-ból merőlegeseket bocsátunk az oldalakra, ezek meghosszabbítva a köréírt kört a K, M, P pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy
$\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OI}$
ahol I a háromszög beírt körének középpontja.

1.4. 1983-84 Senior, 2. forduló, tavasz

1.1. (M)

1.2. (M)

1.3. (M) Egy mindkét irányban végtelen hosszú folyosó egyik oldalán végtelen sok szoba helyezkedik el. A szobák egymást követő egész számokkal vannak megszámozva, és minden szobában van egy zongora. A szobákban véges sok zongorista él. (Egy szobában akár több is.) Minden nap két szomszédos szobában lakó zongorista (pl. a k-adik és a $k+1$-edik) megelégeli a másik gyakorlását, és a $k-1$-edik illetve $k+2$-edik szobába költöznek át. Igazoljuk, hogy véges számú nap elteltével abbahagyják a költözködèst.

2. FEJEZET
Városok Viadala, 1990–1999

2.1. 1997 Junior, 1. forduló ősz

2.1. Egy nem működő mozgólépcsőn egy illető gyorsabban megy lefele, mint felfele. Mi a gyorsabb, egy felfele mozgó lépcsőn le- és felmennie, vagy egy lefele mozgó lépcsőn fel és lemennie? (Feltételezzük, hogy minden említett sebesség állandó, a mozgólépcső ugyanolyan gyorsan mozog lefele és felfele, továbbá emberünk mindkét irányba haladva gyorsabb, mint a mozgólépcső.)
3 pont

2.2. Igazoljuk, hogy végtelen sok egész megoldása van a következő egyenletnek:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997.$$

N. Vasziljev 3 pont

2.3. Az $ABCD$ négyzet BC oldalának pontja K. A $KAD\angle$ szögfelezője a CD oldalt M-ben metszi. Igazoljuk, hogy $AK = DM + BK$.
4 pont

2.4. Legkevesebb hány egyenest kell megadnunk, ha el szeretnénk érni, hogy egy sakktábla minden mezőjén legyen egy belső pont, melyen áthalad egy egyenes. Ábrával szemléltesd, hogy ennyi egyenes elég és bizonyítsd, hogy kevesebb viszont nem elég. A sakktábla mérete legyen: (a) 3×3; (b) 4×4.
M. Vyalyi 2+4 pont

2.2. 1997 Senior, 1. forduló ősz

2.1. Legkevesebb hány egyenest kell megadnunk, ha el szeretnénk érni, hogy egy sakktábla minden mezőjén legyen egy belső pont, melyen áthalad egy egyenes. Ábrával szemléltesd, hogy ennyi egyenes elég és bizonyítsd, hogy kevesebb viszont nem elég. A sakktábla mérete legyen: (a) 3×3; (b)4×4 .
M. Vyalyi 2+3 pont

2.2. Adott egy háromszög a és b oldala. Mekkorának válasszuk a harmadik oldalt, hogy azon a beírt és hozzáírt körök érintési pontjai éppen harmadolópontok legyenek?
3 pont

2.3. Igazoljuk, hogy végtelen sok egész megoldása van a következő egyenletnek:

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6.$$

N. Vasziljev 4 pont

2.4. Legfeljebb hány huszár helyezhető el egy 5×5-ös sakktáblán úgy, hogy semely kettő nem üti egymást? Igazoljuk, hogy a maximum egyetlen elrendezéssel érhető el.
A. Kanel 4 pont

2.3. 1997 Junior, 2. forduló ősz

2.1. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatnak tagja a 0 és állapítsuk meg, hányadik.

$$x_1 = 19, \quad x_2 = 97, \quad x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}} \quad (n = 1,2,\ldots).$$

A. Berzins 3 pont

2.2. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja M. Szerkesszünk BC-vel párhuzamos olyan egyenest, amelynek az AB és AC oldalak közé eső szakasza M-ből derékszögben látszik.

3 pont

2.3. Egy $1 \times n$-es tábla minden mezőjén van egy korong. Első lépésben megfogunk egy korongot és valamely szomszédos mező korongjának tetejére helyezzük, így keletkezett egy korongtorony. A továbbiakban minden alkalommal egy korongtornyot helyezünk át, éppen annyi mezővel elmozdítva, ahány korongot tartalmazott a torony. Ha az áthelyezésnél nem üres mezőre tesszük a tornyot, akkor mindig a már ott lévő korong (vagy korongok közül a legfelső) tetejére rakjuk. Igazoljuk, hogy $n-1$ lépésben a korongok összegyűjthetők egyetlen korongtoronnyá.

A. Sapovalov 5 pont

2.4. Két kör metszi egymást az A és B pontokban. Egy közös érintőjük az elsőt C-ben, a másodikat D-ben érinti, $CBD\angle > CAD\angle$. A CB egyenes a második kört még E-ben is metszi. Igazoljuk, hogy $CAE\angle$ szögfelezője AD.

P. Kozevnyikov 5 pont

2.5. Egy kocka lapjait fehérre és feketére festettük. Van egy sakktáblánk, amelynek mezői éppen akkorák, mint a kocka egy lapja. A kockát a sakktábla egy mezőjére helyezzük, majd végiggörgetjük a táblán úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer kerüljön. Lehetséges-e, hogy minden alkalommal a kockán levő alsó mező színe megegyezzen a sakktábla éppen alatta levő mezőjének színével?

A. Sapovalov 8 pont

2.6. Egy szabályos háromszögre oldalaival párhuzamos egyeneseket rajzolunk, amelyek az oldalakat 10 egyenlő részre, a háromszöget pedig 100 egybevágó kis háromszögre osztják. Megrajzoljuk még a háromszög oldalegyeneseit is. Két szomszédos párhuzamos közötti részt sávnak nevezzük. Legfeljebb hány kis háromszög jelölhető ki úgy, hogy semely két kiválasztott se essen egy sávba?

R. Zenodarov 9 pont

2.4. 1997 Senior, 2. forduló ősz

2.1. Az ABC háromszög AB és AC oldalainak felezőpontjai rendre M és N. Az AB és AC oldalakon van P és Q úgy, hogy $ACB\angle$ szögfelezője egyben $MCP\angle$ szögfelezője, továbbá $ABC\angle$ szögfelezője egyben $NBQ\angle$ szögfelezője. Amennyiben $AP = AQ$, biztosan állíthatjuk-e, hogy ABC egyenlő szárú?

V. Senderov 4 pont

2.2. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

(a) Ha egy sokszög két egybevágó sokszögre vágható szét egy töröttvonallal, akkor szétvágható egy egyenessel is.

(b) Ha egy konvex sokszög két egybevágó sokszögre vágható szét egy töröttvonallal, akkor szétvágható egy egyenessel is.

(c) Ha egy konvex sokszög két egybevágó sokszögre vágható szét egy töröttvonallal úgy, hogy a két rész forgatások és eltolások segítségével fedésbe hozható, akkor szétvágható egy egyenessel is.

S. Markelov 1+2+4 pont

2.3. Összeszorozzuk az összes különböző olyan számot, melyet az alábbi kifejezésből kaphatunk, az előjelek lehetséges kiválasztásaival: $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\ldots\pm\sqrt{100}$. Bizonyítsuk be, hogy az eredmény (a) egész; (b) négyzetszám.

A. Kanel 3 pont

2.4. (a) Szabályos hatszög alakú, egybevágó szalvéták fekszenek egy asztalon. Átfedések is lehetnek. A szalvéták egyik oldala párhuzamos egy adott egyenessel. Szeretnénk beverni néhány szöget úgy, hogy minden szalvétát pontosan egyszer szögeljünk át. Sikerülni fog ez minden esetben?

(b) Oldjuk meg a feladatot, ha a szalvéták szabályos ötszög alakúak.

A Kanel 4 pont

2.5. Iván egy titkos kódot fejlesztett ki, minden betűt egy legfeljebb 10 betűs szóval helyettesít. A kódolás akkor jó, ha minden kódolt szó egyféleképpen dekódolható, fejthető vissza. Szergej egy számítógép segítségével ellenőrizte, hogy minden legfeljebb 10 000 betűs szó egyféleképpen dekódolható. Következik-e ebből, hogy Iván kódja jó? (Iván és Szergej oroszok, a cirill abc-t használják, melyben 33 betű van. Tetszőleges betűsorozatot szónak tekintünk.)

D. Pjontovszkij, S. Salumov 8 pont

2.6. Egy szabályos háromszögre oldalaival párhuzamos egyeneseket rajzolunk, amelyek az oldalakat n egyenlő részre, a háromszöget pedig n^2 egybevágó kis háromszögre osztják. Megrajzoljuk még a háromszög oldalegyeneseit is. Két szomszédos párhuzamos közötti részt nevezzük sávnak. Legfeljebb hány kis háromszög jelölhető ki úgy, hogy semely két kiválasztott se essen egy sávba, ha (a) $n = 10$; (b) $n = 9$?

R. Zenodarov 7+7 pont

2.5. 1998 Junior, 1. forduló, tavasz

2.1. Örzse, Erzsi és Rezső szavakat írtak a füzetükbe, Örzse írta a legtöbbet, Erzsi a legkevesebbet. A szavakért pontokat kaptak. Ha egy szót csak egy valaki írt, azért két pontot kapott. Ha egy szót ketten is leírtak, azért mindketten egy-egy pontot kaptak. A mindhármuk által leírt szavakért nem járt pont. Lehetséges-e, hogy Erzsinek lett a legtöbb pontja és Örzsének a legkevesebb?

A. Sapovalov 3 pont

2.2. Egy király bejárja a 8×8 -as sakktáblát, minden mezőre pontosan egyszer lép és végül a kiindulási mezőre jut vissza. Igazoljuk, hogy páros sok átlós lépést tesz útja során.

V. Proizvolov 3 pont

2.3. Egy O csúcsú szög egy-egy szárán találhatóak az AB és CD szakaszok, az A pont O és B között, a C pont O és D között van. Az AD és BC szakaszok felezőpontjain áthaladó egyenes AB-t M-ben, CD-t N-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{AB}{CD}$.

V. Senderov 3 pont

2.4. Minden háromjegyű számnál tekintsük számjegyeinek szorzatát. Mennyi ezeknek a szorzatoknak az összege?

G. Galperin 4 pont

2.5. Pinokkió azzal henceg, hogy egy egyenlő szárú háromszöget felvágott három háromszögre úgy, hogy közülük bármely kettő összeilleszthető egy egyenlő szárú háromszöggé. Szerinted Pinokkió lódít?

A. Sapovalov 5 pont

2.6. 1998 Senior, 1. forduló, tavasz

2.1. Pinokkió azzal kérkedik, hogy néhány hasonló, nem derékszögű háromszöget összeillesztve egy téglalapot készített. (A háromszögek között lehetnek egybevágók is.) Vajon Pinokkió csak lódít?

A. Fedorov 3 pont

2.2. Minden négyjegyű számnál tekintsük számjegyeinek szorzatát. Mennyi ezeknek a szorzatoknak az összege?

G. Galperin 3 pont

2.3. Egy 8×8-as sakktábla minden mezőjét valamilyen színnel kifestettük úgy, hogy minden mezőnek legalább két oldalszomszédja vele azonos színű. Legfeljebb hány színt használhattunk fel?

A. Sapovalov 3 pont

2.4. Legyenek A, B, C és D olyan pozitív egészek, hogy az (a) egyenletrendszernek m, a (b) egyenletrendszernek n megoldása van. Határozzuk meg m és n értékét, ha $m > n > 1$.

$$(a) \qquad x^2 + y^2 = A, \qquad |x| + |y| = B;$$

$$(b) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = C, \qquad |x| + |y| + |z| = D.$$

G. Galperin 4 pont

2.5. Egy szög szárait érinti az O középpontú kör. Az egyik szögszárra tükrözzük O-t, így kapjuk az A pontot. A körhöz A-ból húzott érintők a szög másik szárát B és C pontokban metszik. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög köréírt körének középpontja az eredetileg adott szög szögfelezőjén van.

I. Sharygin 5 pont

2.7. 1998 Junior, 2. forduló, tavasz

2.1. Megadható-e 10 pozitív egész úgy, hogy egyikük sem osztható valamely másik számmal, de mindegyik számnak a négyzete osztható a többi számmal?

2.2. Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja O. Az AB oldalegyenes M pontjára $MAD\angle = AMO\angle$. Bizonyítsuk be, hogy $MD = MC$.

M. Smurov 3 pont

2.3. Hat dobókockát kifúrtunk egy-egy szemköztes lapjuk középpontján át, majd egy rudat dugtunk a lyukakon át. Minden kocka szabadon forgatható a rúdon. Igazoljuk, hogy a kockákat beforgathatjuk úgy, hogy egy asztalra helyezve a legfelső lapok számai által alkotott hatjegyű szám osztható legyen héttel. (A kockák 1-től 6-ig számozottak, a szemköztes lapokon a számok összege 7.)

G. Galperin 4 pont

2.4. Az igazmondók és hazudósak falujába érkezett egy vándor. A falu lakói egy nagy körbe felálltak és mindenki megmondta, hogy a jobb oldali szomszédja igazmondó-e. Ezek után a vándor meg tudta állapítani, hogy a falu lakosságának hanyadrésze hazudós. A falu lakosságának hanyadrésze hazudós?

B. Frenkin 4 pont

2.5. Egy négyzetet 25 egybevágó kis négyzetre osztottunk. Néhány kis négyzetnek meghúzzuk valamely átlóját úgy, hogy semely két átlónak ne legyen közös pontja. (Még végpontja se!) Legfeljebb hány kis átlót húzhatunk be?

I. Rubanov 7 pont

2.6. 10 ember ül egy kerek asztal körül, mindegyikük előtt néhány dió, összesen 100 dió. Egy jelre mindenki néhány diót a jobb oldali szomszédjának ad. Ha páros sok diója volt, akkor a diók felét, egyébként egy diót és a maradék felét adják mindig át. Ez ismétlődik többször. Bizonyítsuk be, hogy véges sok lépés után mindenkinek 10 diója lesz.

A. Sapovalov 8 pont

2.8. 1998 Senior, 2. forduló, tavasz

2.1. Legyenek a, b, c valós számok. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

S. Tokarev 4 pont

2.2. Egy egységoldalú négyzetet téglalapokra vágtunk. Minden téglalapnak tekintjük a rövidebb oldalát, ha téglalapunk egy kis négyzet volt, annak az oldalát. Bizonyítsuk be, hogy ezek összege legalább 1.

4 pont

2.3. (a) A táblára felírták az 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 számokat. Bármely két szám letörölhető, ilyenkor viszont felírjuk a különbségük abszolút értékét. Ezt hétszer ismételve egyetlen szám marad a táblán. Lehet ez a 97? (b) A táblára felírták az 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 számokat. Bármely két szám letörölhető, ilyenkor viszont felírjuk a különbségük abszolút értékét. Ezt tízszer ismételve egyetlen szám marad a táblán. Mi lehet ez a szám?

A. Sapovalov 2+3 pont

2.4. Az $ABCD$ konvex négyszög belső pontja M, $AM=MB$ és $CM=MD$, továbbá $AMB\angle=$ $=CMD\angle=120^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan N pont, amelyre BNC és DNA szabályosak.

I. Sharygin 5 pont

2.5. Egy 8×8-as sakktábla "labirintust" képez, néhány szomszédos mező közé falakat helyezünk. Ha egy bástya be tudja járni az egész táblát falakon való áthaladás nélkül, akkor a labirintus jó, egyébként rossz. Jó, vagy rossz labirintusból van-e több?

A. Sapovalov 6 pont

2.6. (a) Két bűvész kártyatrükköt mutat be. A közönség egy önként jelentkező tagját megkérik, keverje meg az 52 lapos kártyapaklit. Ezek után egyikük találomra kihúz 5 lapot, megnézi őket. Ezek után egymás mellé helyezi a lapokat, egyiket (nem feltétlenül az elsőt) az asztal lapja felé fordítva, a többi négyet felfele. A második bűvész ezek után kitalálja, melyik lap van lefele fordítva. Bizonyítsuk be, hogy a bűvészeknek lehet biztos módszere ehhez a trükkhöz. (b) Biztosan bemutatható a mutatvány akkor is, ha az első négy kártyát látjuk, és az ötödik a kitalálandó?

G. Galperin 6+6 pont

2.9. 1998 Junior, 1. forduló ősz

2.1. Egy $20\times20\times20$-as kockát 8000 egységkockából építettünk fel. Minden kis kockában van egy szám. Tudjuk, hogy bármely 20 kockában, amelyek a nagy kocka valamelyik élével párhuzamos oszlopot alkotnak, a számok összege 1. Az egyik kis kockában a 10 van. Három olyan $1 \times 20 \times$ $\times$ 20-as téglatest alakú kockaszelet van, mely tartalmazza ezt a kis kockát és élei a nagy kocka éleivel párhuzamosak. Határozzuk meg azon kis kockákban levő számok összegét, amelyek nem tartoznak az említett három kockaszeletbe.

A. Belov, 3 pont

2.2. Egy négyzetszám egyes helyiértéken levő jegye a 9, tízes helyiértéken levő jegye a 0. Bizonyítsuk be, hogy a százas helyiértéken levő jegy páros.

3 pont

2.3. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalain vannak rendre a C', A', B' pontok. Tudjuk, hogy $AC'B'\angle = B'A'C\angle$, $CB'A'\angle = A'C'B\angle$ és $BA'C'\angle = C'B'A\angle$. Igazoljuk, hogy C', A', B' éppen az oldalfelezőpontok.

V. Proizvolov, 4 pont

2.4. A televízió választási vitaműsorában 12 ember vesz részt. A vita egyik pontján valaki megjegyezte: "Eddig egy hamis állítás volt." Erre egy másik felszólalt: "Eddig két hamis állítás volt." Egy újabb illető közbeszólt: "Eddig három hamis állítás volt." És ez így ment tovább, a tizenkettedik ember azt mondta: "Eddig tizenkét hamis állítás volt." A vitavezető ekkor lezárta a beszélgetést. Mint később kiderült, a 12 ember közül legalább az egyik helyesen állapította meg az előtte elhangzó hamis állítások számát. Összesen hány hamis állítás hangzott el?

A. Sapovalov, 4 pont

2.5. Adott két pozitív egész: m és n. Nevezzünk egy sakkfigurát (n, m)-krokodilnak, ez n mezőt lép vízszintesen, vagy függőlegesen, majd m mezőt erre merőleges irányban. Bizonyítsuk be, hogy egy végtelen sakktábla kiszínezhető fehérre és feketére úgy, hogy a figura minden lépése során az indulómezőtől különböző színű mezőre lép.

A. Gerko, 5 pont

2.10. 1998 Senior, 1. forduló ősz

2.1. Van 19 mérősúlyunk, sorban 1 grammostól a 19 grammosig. 9 acélból, kilenc bronzból és egy aranyból készült. Az acél súlyok összesen 90 grammal nehezebbek a bronzoknál. Milyen nehéz az arany mérősúly?

V. Proizvolov, 3 pont

2.2. A síkon adott n darab egységsugarú körlap, mindegyik határa áthalad egy P ponton, mely az összes körlap által letakart S síkidom belsejében van. Mekkora S kerülete?

P. Kozevnyikov, 3 pont

2.3. Egy 8×8-as sakktáblán 17 mezőt kijelöltek. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük kettő úgy, hogy egy huszár legalább három lépésben juthasson el egyikről a másikra.

R. Zenodarov, 4 pont

2.4. Mekkora a (0,1) intervallumból választott $x_1, x_2, ..., x_{20}$ számok szorzatának legnagyobb lehetséges értéke, ha

$$x_1 x_2 \cdots x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_{20}).$$

A. Csernatyev, 4 pont

2.5. Legyen egy ország IQ-ja a lakosság IQ átlaga. Tegyük fel, hogy a következőkben az országok népessége nem változik és az egyének IQ-ja is állandó marad.

(a.1) Néhány ember áttelepül az A országból a B országba. Bizonyítsuk be, hogy ez által emelkedhet mindkét ország IQ-ja.

(a.2) Ezek után néhány ember a B országból áttelepül az A országba. Köztük lehetnek visszatelepülők is. Előfordulhat, hogy ismét emelkedik mindkét ország IQ-ja?

(b) Néhány ember áttelepül A-ból B-be, valamint néhányan áttelepülnek B-ből C-be. Ez által mindhárom ország IQ-ja emelkedett. Később néhányan áttelepülnek C-ből B-be, illetve néhányan B-ből A-ba. Előfordulhat, hogy ismét emelkedik mindhárom ország IQ-ja?

A. Kanel, B. Begun, 1+3+2 pont

2.11. 1998 Junior, 2. forduló ősz

2.1. Legyenek a és b pozitív egészek, amelyekre $[a, a+5] = [b, b+5]$. Igazoljuk, hogy $a = b$.

A. Sapovalov, 3 pont

2.2. Jancsi és Juliska is kapott egy 8×8-as négyzetet, ezeken 64 kis egységnégyzet van. Mindketten ugyanannyi egységnégyzetet kékre festettek. Igazoljuk, hogy mindkét négyzet szétvágható 2×1-es dominókra úgy, hogy Jancsi is és Juliska is készíthessen dominóiból olyan négyzetet, amelyek színezése megegyező.

A. Sapovalov, 4 pont

2.3. Adott két ugyanakkora kör. Húzzunk a középpontjaikat összekötő egyenessel egy párhuzamos AB szakaszt úgy, hogy az A és B között messe a köröket. A-ből érintőket húzunk a hozzá közelebbi körhöz, ugyanígy B-ből érintőket húzunk a hozzá közelebbi körhöz. Kiderült, hogy a négy érintő alkotta négyszög tartalmazza mindkét kört. Igazoljuk, hogy az érintők alkotta négyszögbe kör írható.

P. Kozevnyikov, 5 pont

2.4. Meghúztuk egy szabályos 25 oldalú sokszög minden átlóját. Igazoljuk, hogy nincs olyan belső pont, amelyen 9 átló is áthalad.

A. Sapovalov, 6 pont

2.5. Van 20 gyöngyünk, 10 féle színben, minden színből éppen kettő van. Beletettük a gyöngyöket 10 dobozba kettesével úgy, hogy kiválasztható minden dobozból egy-egy gyöngy, hogy mind a tíz szín előforduljon a kiválasztottak között. Igazoljuk, hogy az ilyen kiválasztások száma 1-nél nagyobb kettőhatvány.

A. Grisin, 7 pont

2.12. 1998 Senior, 2. forduló ősz

2.1. (a) Legyenek a és b pozitív egészek, amelyekre $[a, a+5] = [b, b+5]$. Igazoljuk, hogy $a = b$.
(b) Legyenek a, b és c pozitív egészek. Lehetséges, hogy $[a, b] = [a+c, b+c]$?
A. Sapovalov, 2+3 pont

2.2. Adott két ugyanakkora kör. Húzunk a középpontjaikat összekötő egyenessel egy párhuzamos AB szakaszt úgy, hogy az A és B között messe a köröket. A-ből érintőket húzunk a hozzá közelebbi körhöz, ugyanígy B-ből érintőket húzunk a hozzá közelebbi körhöz. Kiderült, hogy a négy érintő alkotta négyszög tartalmazza mindkét kört. Igazoljuk, hogy az érintők alkotta négyszögbe kör írható.
P. Kozevnyikov, 4 pont

2.3. Egy 3×3-as táblázat mezőiben áll 9 szám:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3. \end{matrix}$$

Tudjuk, hogy minden sorban és oszlopban ugyanannyi a számok összege, azaz

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3.$$

Igazoljuk, hogy

$$a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 = a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3 + c_1 c_2 c_3.$$

V. Proizvolov, 5 pont

2.4. A 12 tagú zsűri számára egy kerek asztalt készítettek elő 12 székkel, mindenkinek egy névtábla jelzi a helyét. Elsőként Szórakozott Professzor érkezik meg a zsűritagok közül és véletlenül saját helye helyett a tőle jobbra levő szomszédos székre ül. Mostantól egyesével érkeznek a zsűritagok, mindenki leül a saját helyére, vagy ha az foglalt, akkor a sajátjától jobbra levők közül az első szabad székre. A kialakuló ülésrend a zsűritagok érkezési sorrendjétől függ. Hány különböző elrendezés lehetséges?
A. Sapovalov, 6 pont

2.5. Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek hosszát összeadjuk és ezt nevezzük a téglatest méretének. Lehetséges-e, hogy egy téglatest tartalmaz egy önmagánál nagyobb méretű téglatestet?
A. Sen, 7 pont

2.6. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}.$$

Tudjuk, hogy $x^2 + ax + b$ és $x^2 + cx + d$ nem lehet egyszerre 0. Bizonyítsuk be, hogy a következő két állítás ekvivalens:
(i) Van olyan intervallum, melynek nincs közös eleme $f(x)$ értékkészletével.
(ii) $f(x)$ kifejezhető az alábbi formában:

$$f(x) = f_1(f_2(\ldots f_{n-1}(f_n(x))\ldots)),$$

ahol minden f_j függvény $k_j x + b_j$, vagy $\dfrac{1}{x}$, vagy x^2 alakú.
A. Kanel, 8 pont

2.13. 1999 Junior, 1. forduló, tavasz

2.1. Apa és fia korcsolyáztak egy kör alakú jégpályán. Időnként az apa leelőzte a fiát. A fiú megfordult és elkezdett a másik irányba körözni. Ekkor a találkozások ötször olyan gyakoriak lettek. Határozzuk meg a korcsolyázók sebességének arányát.

Tairova, 3 pont

2.2. ABC egy derékszögű háromszög. Az AB átfogóra kifele rajzoljuk az $ABDE$ négyzetet. Az $ACB\angle$ szögfelezője DE-t F-ben metszi. Határozzuk meg DF és EF arányát, ha $AC = 1$ és $BC = 3$.

A. Blinkov, 4 pont

2.3. Egy táblára felírták az $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitív egészeket. Egy másik táblára felírtuk a $b_0, b_1, ..., b_i$ számokat; legyen b_j az első táblán levő j-nél nagyobb számok száma. A második táblára 0-t már nem írunk, amikor odaáig érkezünk, megállunk. Egy harmadik táblára írjuk a $c_0, c_1, c_2, ...$ számokat, melyeket ugyanilyen módon kapunk a második tábla számaiból. Igazoljuk, hogy az első és a harmadik táblán ugyanazok a számok szerepelnek.

H. Lebesgue, A. Kanel, 4 pont

2.4. Egy fekete egységoldalú szabályos háromszög van a síkon. Hogyan helyezhető el 9 egységoldalú szabályos háromszög úgy, hogy ezek ne fedjék egymást és mindegyik letakarja a fekete háromszög valamely belső pontját?

5 pont

2.5. Egy négyzetet 100 téglalapra vágtunk, 9-9 vágás történt mindkét oldalával párhuzamosan. Tudjuk, hogy a 100 téglalap között pontosan 9 négyzet van. Bizonyítsuk be, hogy a 9 négyzet között van két egybevágó.

V. Proizvolov, 5 pont

2.14. 1999 Senior, 1. forduló, tavasz

2.1. Egy sorban áll egymás mellett 1999 szám. Az első és az utolsó kivételével minden szám a mellette levő két szám összege. Az első szám az 1. Mi az utolsó szám?

V. Senderov, 3 pont

2.2. Legyen ABC egy derékszögű háromszög. Az AB átfogóra kifele rajzoljuk az $ABDE$ négyzetet. A háromszög C-ből induló szögfelezője DE-t F-ben metszi. Határozzuk meg $\frac{DF}{EF}$ értékét, ha $AC = 1$ és $BC = 3$.

A. Blinkov, 3 pont

2.3. Egy táblára felírták a $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitív egészeket. Egy másik táblára felírtuk a $b_0, b_1, ..., b_i$ számokat; legyen b_j az első táblán levő j-nél nagyobb számok száma. A második táblára 0-t már nem írunk, amikor odaáig érkezünk, megállunk. Egy harmadik táblára írjuk a $c_0, c_1, c_2, ...$ számokat, melyeket ugyanilyen módon kapunk a második tábla számaiból. Igazoljuk, hogy az első és a harmadik táblán ugyanazok a számok szerepelnek.

H. Lebesgue, A. Kanel, 3 pont

2.4. Egy fekete egységoldalú négyzet van a síkon. Hogyan helyezhető el 7 egységoldalú négyzet úgy, hogy ezek ne fedjék egymást és mindegyik letakarja a fekete négyzet valamely belső pontját?

5 pont

2.5. Egy 9×9-es táblázat mezőit egyesével felváltva foglalja el két játékos, X és Y. X kezd. Az elfoglalt mezőkbe beírják saját betűjüket. Miután az egész táblázat betelt megszámolják azon sorokat és oszlopokat, amelyekben több X van, mint Y, legyen ezek száma A. Legyen X nyereménye $B = A - (18 - A)$. Határozzuk meg azt a B értéket, amelyre X elérheti, hogy nyereménye legalább B legyen, Y pedig elérheti, hogy ez legfljebb B legyen.
A. Kanel, 5 pont

2.15. 1999 Junior, 2. forduló, tavasz

2.1. Egy bankszámlán 500 forint van. Kétféle műveletet végezhetünk: kiveszünk a számláról 300 forintot, vagy beteszünk 198 forintot. Ezeket a műveleteket akárhányszor elvégezhetjük, de a számlán eredetileg levő pénzen kívül nem rendelkezünk mással. Legfeljebb mennyi pénzt tudunk felvenni a számláról és hogyan?
AK. Tolpygo, 3 pont

2.2. Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja O. Igazoljuk, ha a BC egyenes érinti az ABO háromszög köré írt kört, akkor a CD egyenes érinti a BCO háromszög köré írt kört.
A. Zaszlavszkij, 4 pont

2.3. Két ember a következő játékot játsza. A kezdő felírja a 0-t, vagy az egyet, majd minden lépésében e két számjegy valamelyikét írja a már meglevő szám jobb végére, amíg a szám 1999 jegyű lesz. A kezdő minden lépése után -kivéve a legelsőt- a második játékos felcserél a leírt számok közül kettőt. Elérheti-e a második játékos, hogy az eredményben a jegyek szimmetrikusak legyenek a középsőre?
I. Izmesztjev, 4 pont

2.4. Egy körlapot n átmérője $2n$ egybevágó körcikkre oszt, ezek közül n piros, n pedig kék. A kékeket megszámoztuk valamely körcikktől kezdve az óra járásával ellenkező irányba indulva 1-től n-ig. Ugyanígy a pirosakat is megszámoztuk, de az óra járásával megegyező irányban. Igazoljuk, hogy van olyan félkör, amelynek cikkjein levő számok éppen $1, 2, ..., n$.
V. Proizvolov, 6 pont

2.5. Az ABC háromszög beírt köre az AB és AC oldalakat rendre a P, Q pontokban érinti. Az AC és BC oldalak felezőpontjai rendre R és S. A PQ és RS egyenesek metszéspontja T. Bizonyítsuk be, hogy BT felezi az $ABC\angle$ szöget.
M. Evdokimov, 6 pont

2.6. Egy bástya mozog a sakktáblán, egyszerre egyet léphet függőlegesen, vagy vízszintesen. 64 lépés után minden mezőn áthaladt és éppen visszaérkezett a kiindulási mezőre. Bizonyítsuk be, hogy útja során nem léphetett ugyanannyit vízszintesen, mint függőlegesen.
A. Sapovalov, R. Sadikov, 9 pont

2.16. 1999 Senior, 2. forduló, tavasz

2.1. Egy konvex poliéder úszik a tengerben. Előfordulhat-e, hogy térfogatának 90%-a a víz alatt van, de felszínének több, mint fele a víz felett?
A. Sapovalov, 4 pont

2.2. Az $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör középpontja O. Legyen az ABO és CDO háromszögek köré írt köreinek második metszéspontja F. Bizonyítsuk be, hogy az AFD köré írt kör átmegy AC és BD metszéspontján.
A. Zaszlavszkij, 4 pont

2.3. Határozzuk meg mindazon egész (x, y) számpárokat, amelyekre $x^2 + y^2$ osztója $x^3 + y$-nak is és $x + y^3$-nek is.
A. Zlobin, 5 pont

2.4. Egy körlapot n átmérője $2n$ egybevágó körcikkre oszt, ezek közül n piros, n pedig kék. A kékeket megszámoztuk valamely körcikktől kezdve az óra járásával ellenkező irányba indulva 1-től n-ig. Ugyanígy a pirosakat is megszámoztuk, de az óra járásával megegyező irányban. Igazoljuk, hogy van olyan félkör, amelynek cikkjein levő számok éppen 1, 2, ..., n.
V. Proizvolov, 5 pont

2.5. Minden nemnegatív egész i esetén legyen $M(i) = 0$, ha az i szám kettes számrendszerbeli alakjában páros sok 1-es van, különben legyen $M(i) = 1$. (Az $M(i)$ sorozat első néhány értéke 0,1,1,0,1,0,0,1,...)
(a) Tekintsünk egy véges sorozatot:

$$M(0), M(1), M(2), ..., M(1000).$$

Bizonyítsuk be, hogy a sorozat legalább 320 eleme azonos a jobb oldali szomszédjával, azaz $M(i) = M(i + 1)$.
(b) Tekintsünk egy véges sorozatot:

$$M(0), M(1), M(2), ..., M(1000000).$$

Bizonyítsuk be, hogy ebben a sorozatban legalább 450000 $M(i)$ esetén lesz $M(i) = M(i + 7)$.
A. Kanel, 2+5 pont

2.6. Egy bástya mozog a sakktáblán, egyszerre egyet léphet függőlegesen, vagy vízszintesen. 64 lépés után minden mezőn áthaladt és éppen visszaérkezett a kiindulási mezőre. Bizonyítsuk be, hogy útja során nem léphetett ugyanannyit vízszintesen, mint függőlegesen.
A. Sapovalov, R. Sadikov, 8 pont

2.17. 1999 Junior, 1. forduló ősz

2.1. Egy derékszögű háromszög alakú papírlapot összehajtottunk egy egyenes mentén úgy, hogy a derékszögű csúcs éppen egy másik csúcs fölé került. Így egy négyszöget kaptunk.
(a) A kapott négyszög átlói milyen arányban osztják egymást?
(b) Az összehajtott papírunkat elvágjuk a négyszög hosszabb átlójának mentén. Határozzuk meg a keletkezett papírdarabok közül a legkisebbnek a területét, ha az eredeti háromszög területe 1.
A. Sapovalov, 2+2 pont

2.2. Legyen $d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}$, ahol a, b és c egészek, $a + b + c = 0$.
(a) Lehet-e $d = 2$?
(b) Lehet-e d prím?
V. Senderov, 2+2 pont

2.3. Adott a síkon n egyenes, mindegyiket 1999 egyenes metszi. Határozzuk meg n lehetséges értékeit.
R. Zenodarov, 4 pont

2.4. Egy hagyományos órán 24 óra alatt a percmutató 24-szer fordul körbe, az óramutató pedig kétszer. Egy itáliai órásmester óráján a percmutató ugyanúgy 24-szer fordul körbe, de az óramutató csak egyszer 24 óra alatt. A percmutató hosszabb, mint az óramutató és a 0 óra az óralap legfelső pontjánál kezdődik. Hány olyan állapota van a mutatóknak az itáliai órásmester óráján, amit egy hagyományos óra is mutathat?
4 pont

2.5. Egy 6×6-os sakktáblát 1×2-es dominókkal fedünk. Minden egyes dominón behúzunk egy átlót. Előfordulhat-e, hogy az átlók közt nincs kettő, melyek végpontja közös?
A. Sapovalov, 4 pont

2.18. 1999 Senior, 1. forduló ősz

2.1. Egy háromszög beírt körének középpontját összekötöttük a csúcsokkal, így három kisebb háromszög keletkezett. Ezek egyike hasonló az eredeti háromszöghöz. Mekkorák a szögei?
A. Sapovalov, 4 pont

2.2. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok páratlan pozitív egész n szám létezik, amelyre $2^n + n$ összetett szám.
V. Senderov, 4 pont

2.3. Adott a térben n sík, mindegyik 1999 másik síkot metsz. Határozzuk meg n lehetséges értékeit.
R. Zenodarov, 4 pont

2.4. Az 1,2,...,100 számokat 50 párba rendezzük, a párokat megszámozzuk 1-től 50-ig. Lehetségese, hogy minden k esetén, $1 \leq k \leq 50$, a k-adik párt alkotó két szám különbsége osztható k-val?
V. Proizvolov, 4 pont

2.5. Egy 8×8-as sakktáblát 1×2-es dominókkal fedünk. Minden egyes dominón behúzunk egy átlót. Előfordulhat-e, hogy az átlók közt nincs kettő, melyek végpontja közös?
A. Sapovalov, 4 pont

2.19. 1999 Junior, 2. forduló ősz

2.1. Egymás mellé írtunk n szomszédos pozitív egészt valamilyen sorrendben úgy, hogy bármely egymás mellett elhelyezkedő három szám közül a bal szélső osztja a másik kettő összegét. Határozzuk meg n lehetséges legnagyobb értékét, ha a sorozat utolsó száma páratlan.
A. Sapovalov, 3 pont

2.2. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, A' és C' tetszőleges pontok rendre BC-n és AB-n, B' pedig AC felezőpontja.
(a) Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'C'$ háromszög legfeljebb fele akkora területű, mint az ABC háromszög.
(b) Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'C'$ háromszög területe akkor és csak akkor negyede az ABC háromszög területének, ha A' és C' legalább egyike oldalfelező pont.
E. Cserepanov, 2+2 pont

2.3. Az 1,2,3,...,100 számokat két csoportra osztottuk úgy, hogy minkettőben ugyanannyi a számok összege. Bizonyítsuk be, hogy elvehetünk mindkét csoportból két-két számot úgy, hogy továbbra is ugyanannyi legyen az összegük.

A. Sapovalov, 5 pont

2.4. (a) Egy 8×8-as sakktábla felső sorának minden mezőjén áll egy fekete figura, az alsó sor minden mezőjén pedig egy fehér figura. Egy lépésben egy figurát mozdíthatunk függőlegesen, vagy vizszintesen egy üres szomszédos mezőre. Legkevesebb hány lépéssel érhető el, hogy minden fekete figura az alsó sorban, minden fehér figura a felső sorban legyen?

(b) Oldjuk meg a feladatot, ha a tábla 7×7-es.

A. Sapovalov, 3+4 pont

2.5. Kitartó Kázmér és Fáradhatatlan Frigyes egy sorozatot gyártanak. Elindulnak egy pozitív egészből. Ezután felváltva készítik a sorozat következő elemét minig az utolsóból képezve: Kázmér valamely számjegyét hozzáadja, Frigyes valamely jegyét kivonja. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan szám, amely legalább 100-szor előfordul a sorozatban.

A. Sapovalov, 8 pont

2.6. Egy téglalap alakú lap belsejéből téglalap alakú lyukakat vágtunk ki, ezek oldalai az eredeti oldalaival párhuzamosak. Adjuk meg azt a legkisebb számot, ahány téglalapra minden esetben szétvágható a lyukas papírunk.

A. Sapovalov, 9 pont

2.20. 1999 Senior, 2. forduló ősz

2.1. Az 1,2,..., n számokat szeretnénk egy kör mentén elhelyezni valamilyen sorrendben úgy, hogy bármely két egymás mellé kerülő szám összege osztható legyen az óra járásával megegyező irányban következő számmal. Milyen n esetén lehetséges ez?

A. Sapovalov, 3 pont

2.2. Egy téglalap alakú papíron van

(a) néhány kijelölt pont egy egyenes mentén.

(b) három kijelölt pont, nem feltétlenül egy egyenesen.

A papírt többször összehajthatjuk egy-egy olyan egyenes mentén, amin nincs kijelölt pont. Ezek után egy tűvel átszúrjuk az összehajtogatott papírt. Bizonyítsuk be, hogy elérhető a következő: a papír széthajtogatása után azt látjuk, minden kijelölt pontot átszúrtunk, és máshol viszont nem keletkezett lyuk.

A. Sapovalov, 2+3 pont

2.3. Kitartó Kázmér és Fáradhatatlan Frigyes egy sorozatot gyártanak. Elindulnak egy pozitív egészből. Ezután felváltva készítik a sorozat következő elemét minig az utolsóból képezve: Kázmér valamely számjegyét hozzáadja, Frigyes valamely jegyét kivonja. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan szám, amely legalább 100-szor előfordul a sorozatban.

A. Sapovalov, 6 pont

2.4. Az ABC háromszög AC és CB oldalain a hozzáírt körök érintési pontjai legyenek rendre K és L. Bizonyítsuk be hogy az AB és KL szakaszok felezőpontjain áthaladó egyenesre teljesül:

(a) felezi az ABC háromszög kerületét.

(b) párhuzamos az $ACB\angle$ szögfelezőjével.

L. Emelianov, 3 pont

2.5. (a) Az 1,2,3,...,100 számokat két csoportra osztottuk úgy, hogy minkettőben ugyanannyi a számok összege. Bizonyítsuk be, hogy elvehetünk mindkét csoportból két-két számot úgy, hogy továbbra is ugyanannyi legyen az összegük.

(b) Az 1,2,3,...,n számokat két csoportra osztottuk úgy, hogy minkettőben ugyanannyi a számok összege. Igaz-e, hogy $n > 4$ esetén elvehetünk mindkét csoportból két-két számot úgy, hogy továbbra is ugyanannyi legyen az összegük?

A. Sapovalov, 4+4 pont

2.6. Egy nagy sakktáblán $2n$ mezőt kijelöltünk úgy, hogy egy bástya be tudja járni az összes kijelölt mezőt anélkül, hogy a többi mező fölött elhaladna. Bizonyítsuk be, hogy a kijelölt mezők által alkotott alakzat felvágható n téglalapra.

A. Sapovalov, 8 pont

2.7. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex $10n$ oldalú poliédernek legalább n oldalán ugyanannyi csúcs van.

A. Kanel, 8 pont

3. FEJEZET
Városok Viadala, 2000–2009

3.1. 2000 Junior, 1. forduló tavasz

3.1. Lehet-e két szomszédos pozitív egész szorzata egyenlő két szomszédos páros pozitív szám szorzatával?

V. Poizvolov, 3 pont

3.2. Az $ABCD$ négyszög területe 1, BC és AD párhuzamosak, arányuk 1:2. Legyen az AC átló felezőpontja K, a DK és AB egyenesek metszéspontja L. Határozzuk meg a $BCKL$ négyszög területét.

MG. Sonkin, 4 pont

3.3. Egy n-szög alapú hasáb csúcsait három színnel színezzük úgy, hogy minden csúcs esetén az onnan kiinduló három él végpontjai három különböző színűek legyenek.

(a) Igazoljuk, hogy ha n 3-mal osztható, akkor létezik ilyen színezés.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha létezik megfelelő színezés, akkor n osztható 3-mal.

A. Sapovalov, 2+3 pont

3.4. Egy kocka csúcsaihoz írhatunk-e olyan pozitív egészeket, hogy minden él két végén levő szám közül egyik osztója legyen a másiknak, de más számpár esetén ez a tulajdonság ne teljesüljön?

A. Sapovalov, 5 pont

3.2. 2000 Senior, 1. forduló tavasz

3.1. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja p. APAB és PCD háromszögek területének összege egyenlő a PAD és PCD háromszögek területének összegével. Bizonyítsuk be, hogy P az AC, vagy BD átló felezőpontja.

3 pont

3.2. Vegyünk egy kockát és két szemköztes oldalát jelöljük meg egy-egy pöttyel, másik két szemköztes oldalát jelöljük meg két-két pöttyel, a maradék két szemköztes oldalt jelöljük meg három-három pöttyel. Nyolc ilyen kockából építünk egy 2×2-es kockát. Az így kapott nagy kocka oldalain levő pöttyök száma lehet-e hat szomszédos szám?

A. Sapovalov, 4 pont

3.3. Legyenek n és k pozitív egészek. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$1^k + 2^k + .. + n^k \leq \frac{n^{2k} - (n-1)^k}{n^k - (n-1)^k}.$$

L. Emeljanov, 4 pont

3.4. (a) Létezik-e valós számoknak olyan végtelen sorozata, amelyben bármely 10 szomszédos elem összege pozitív, de minden n esetén az első $10n + 1$ szomszédos elem összege negatív?

(b) Létezik-e ugyanilyen sorozat, amelynek tagjai egészek?

AK. Tolpygo, 3+3 pont

3.3. 2000 Junior, 2. forduló tavasz

3.1. Határozzuk meg az alábbi egyenlet valós megoldásait:

$$(x+1)^{21} + (x+1)^{20}(x-1) + (x+1)^{19}(x-1)^2 + ... + (x-1)^{21} = 0.$$

RM. Kuznec, 3 pont

3.2. Egy négyszög két párhuzamos oldalának hossza egy-egy egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög egybevágó háromszögekre darabolható.
A. Sapovalov, 3 pont

3.3. Adott egy kör és a belsejében egy rögzített A pont. Határozzuk meg azon C pontok mértani helyét, amelyekre létezik $ABCD$ téglalap úgy, hogy B és D a körön vannak.
M. Panov, 6 pont

3.4. Adok és Veszek elosztanak egymás között 100 pénzérmét. Minden lépésben Adok kiválaszt néhány érmét, majd Veszek eldönti, hogy ezeket melyikőjük kapja. Ezt a lépést ismételgetik mindaddig, amíg elfogy mind a 100, vagy valamelyikőjük már 9-szer kapott. Ez utóbbi esetben a megmaradt érmék mind a másikhoz kerülnek. Legfeljebb hány pénzérmét tud Adok megszerezni?
A. Sapovalov, 7 pont

3.5. Legfeljebb hágy huszár helyezhető el egy 5×5-ös sakktáblán úgy, hogy mindegyik pontosan kettőt támadjon?
M. Gorelov, 7 pont

3.6. Egy körmérkőzéses sakkbajnokságon bármely két versenyző pontosan egyszer játszik egymás ellen. A győzelemért 1, a döntetlenért 0,5, a vereségért 0 pont jár. A bajnokság végén visszatekintve minden mérkőzés "meglepetés", amelynek nyertese összesen kevesebb pontot szerzett, mint ellenfele. Bizonyítsuk be, hogy a "meglepetés" partik száma biztosan kevesebb, mint a bajnokság összes mérkőzései számának háromnegyede.
S. Tokarev, 10 pont

3.4. 2000 Senior, 2. forduló tavasz

3.1. Legyenek m és n relatív prím pozitív egészek. Legfeljebb mekkora lehet $m + 2000n$ és $n + 2000m$ legnagyobb közös osztója?
S. Zlobin, 3 pont

3.2. Az O középpontú kör AC és BD húrjainak metszéspontja K. Az AKB és CKD háromszögek köré írt körök középpontjai rendre M és N. Bizonyítsuk be, hogy $OM = KN$.
A. Zaszlavszkij, 5 pont

3.3. Peter egyszemélyes játékot játszik egy pakli kártyával. Némelyik lap felfele, a többi lefele néz. Péter akkor veszít, ha minden lap lefele néz. Amíg van a pakliban felfele néző lap addig a következőt teszi: kivesz a pakliból néhány egymás után következő lapot, amelyek közül az első és az utolsó felfele néz (ez a két lap lehet azonos is), majd a pakliba ezt az egész részt megfordítva visszateszi az eredeti helyére. Bizonyítsuk be, hogy Péter mindig veszt.
A. Sapovalov, 5 pont

3.4. Egy konvex poliéder minden csúcsának koordinátái egész számok, egyik éle sem párhuzamos valamely koordinátatengellyel. Tekintjük az $x = m$ egyenletű egyeneseket, ahol m egész. Az ilyen egyeneseknek a poliéderrel vett metszeteit összeadjuk. Ugyanígy az $y = n$ egyeneseknél, ahol n egész. Bizonyítsuk be, hogy ez a két összeg egyenlő.

G. Galperin, 5 pont

3.5. Mi a legnagyobb N szám, amelyre létezik N szomszédos pozitív egész úgy, hogy a k-adik egész jegyeinek összege osztható k-val minden $1 \leq k \leq N$ esetén?

S. Tokarev, 7 pont

3.6. Egy körmérkőzéses sakkbajnokságon bármely két versenyző pontosan egyszer játszik egymás ellen. A győzelemért 1, a döntetlenért 0,5, a vereségért 0 pont jár. A bajnokság végén visszatekintve minden mérkőzés "meglepetés", amelynek nyertese összesen kevesebb pontot szerzett, mint ellenfele.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a "meglepetés" partik száma biztosan kevesebb, mint a bajnokság összes mérkőzései számának háromnegyede.

(b) Bizonyítsuk be, hogy háromnegyednél nem írhattunk volna kisebb számot.

S. Tokarev, 6+6 pont

3.5. 2000 Junior, 1. forduló, ősz

3.1. Egy 4×4-es táblázat minden mezőjében van egy szám. Tetszőleges mező oldalszomszédos mezőin levő számok összege 1. Határozzuk meg a táblázatban levő 16 szám összegét.

R. Zenodarov, 3 pont

3.2. Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalának felezőpontja M, B merőleges vetülete az AM egyenesen H. Bizonyítsuk be, hogy BCH egyenlőszárú háromszög.

M. Volcskevics, 3 pont

3.3. **a)** 100 különböző számot írtak fel egy táblára. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük 8 szám úgy, hogy átlaguk a táblán található számok közül választott bármely 9 szám átlagától különbözik.

b) 100 számot írtak fel egy táblára. Bármely 8 számhoz találunk a táblán 9 számot úgy, hogy a 8 szám átlaga és a 9 szám átlaga egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a táblán levő összes szám egyenlő.

A. Sapovalov, 2+4 pont

3.4. 32 látszólag egyforma érme közül 30 valódi, 2 hamis. A valódi érmék súlya azonos. A hamis érmék súlya egymással megegyező, de a valóditól különböző. Hogyan oszthatóak az érmék két egyenlő súlyú csoportba egy kétkarú mérleggel legfeljebb 4 méréssel?

A. Sapovalov, 5 pont

3.6. 2000 Senior, 1. forduló, ősz

3.1. Az ABC háromszög köréírt körének AM és AN húrjai BC-t rendre K és L pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy ha $KLMN$ húrnégyszög, akkor ABC egyenlőszárú háromszög.

V. Zhgun, 3 pont

3.2. Az a, b, c, d pozitív egészekre $ad - bc > 1$. Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c, d számok közül legalább egy nem osztható $(ad - bc)$-vel.

A. Spivak, 3 pont

3.3. Egy ötszög alapú, nem feltétlenül egyenes hasáb minden oldallapja bezár valamely szomszédos lapjával f nagyságú szöget. Mekkora lehet f?

A Sapovalov, 4 pont

3.4. $2N$ látszólag egyforma érme közül $2N-2$ valódi, 2 hamis. A valódi érmék súlya azonos. A hamis érmék súlya egymással megegyező, de a valóditól különböző. Hogyan oszthatóak az érmék két egyenlő súlyú csoportba egy kétkarú mérleggel legfeljebb 4 méréssel, ha (a) $N = 16$; (b) $N = 11$?

A. Sapovalov, 3+2 pont

3.7. 2000 Junior, 2. forduló, ősz

3.1. Egy $n \times n$-es táblázat mezőibe különböző számokat írtunk. Minden sorban aláhúztuk a legkisebb számot és ezek mind különböző oszlopokba kerültek. Bekarikáztuk minden oszlopban a legkisebb számot és a bekarikázott számok mind különböző sorokba kerültek. Bizonyítsuk be, hogy az aláhúzott számok éppen a bekarikázottak.

V. Klepcyn, 3 pont

3.2. Az ABC háromszögben $AB = AC$. Az A csúcson keresztül párhuzamost húztunk BC-vel. Az ABC háromszögön kívül rajzoltunk egy kört, amely érinti ezt az egyenest, BC és AB egyeneseket, továbbá az ABC háromszög beírt körét. Ennek a körnek a sugara 1. Határozzuk meg az ABC háromszög beírt körének sugarát.

RK. Gordin, 3 pont

3.3. Az a, b, c, d pozitív egészek legkisebb közös többese $a + b + c + d$. Bizonyítsuk be, hogy a 3 és 5 közül legalább az egyik osztja $abcd$-t.

V. Senderov, 4 pont

3.4. Hányféleképpen jelölhető ki egy 8×8-as sakktáblán 31 mező úgy, hogy nincs két oldalszomszédos kijelölt mező?

R. Zenodarov, 4 pont

3.5. Egy kétkarú mérleg bal serpenyőjébe helyeztünk 1111 grammot. Ezek után egyesével teszünk mérősúlyokat a serpenyők valamelyikébe; először egy 1 grammost, majd mindig az előzőnek a kétszeresét. Néhány súly elhelyezése után egyensúlyba kerül a mérleg. A bal, vagy a jobb serpenyőbe került a 16 grammos súly?

AV. Kalinin, 6 pont

3.6. A Városok Viadala idei tavaszi második fordulójában a senior kategóriában 6 feladatot tűztek ki. Valamelyik országban minden feladatot éppen 1000 diák oldotta meg, de közülük senki sem oldotta meg mind a 6 feladatot. Legaláb hány induló volt ebben az országban a Városok Viadala idei tavaszi második fordulójában a senior kategóriában?

R. Zenodarov, 7 pont

3.7. Egy diáknak van 100 kártyája, rajtuk a számok 1-től 100-ig, továbbá nagyon sok kártyája $+$ illetve $=$ jelekkel. A számkártyák legfeljebb egyszeri használatával legfeljebb hány igaz egyenlőség rakható ki a kártyákkal?

R. Zenodarov, 8 pont

3.8. 2000 Senior, 2. forduló, ősz

3.1. Az a, b, c, d pozitív egészek legkisebb közös többese $a+b+c+d$. Bizonyítsuk be, hogy a 3 és 5 közül legalább az egyik osztja $abcd$-t.

V. Senderov, 3 pont

3.2. Határozzuk meg a legnagyobb n számot, amelyre létezik olyan szabályos n-szög, melynek minden csúcsa egy kocka felületén helyezkedik el, de nem mind egy lapon.

A. Sapovalov, 4 pont

3.3. Az ABC háromszögben $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $a < b < c$. Kijelöljük a B' és A' pontokat rendre a B és A kezdőpontú BC és AC félegyeneseken úgy, hogy $BB' = AA' = c$. Kijelöljük a C" és B" pontokat rendre a C és B kezdőpontú CA és BA félegyeneseken úgy, hogy $CC" = BB" = a$. Mekkora az $A'B'$ és $C"B"$ szakaszok aránya?

R. Zenodarov, 4 pont

3.4. Legyenek $a_1, a_2, ..., a_n$ nem 0 egészek, amelyekre

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \cfrac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}} = x$$

teljesül mindazon x értékekre, amelyekre a bal oldal értelmezhető.

(a) Bizonyítsuk be, hogy n páros.

(b) Mi a legkisebb n, amelyhez léteznek ilyen $a_1, a_2, ..., a_n$ számok?

M. Skopenkov, 3+4 pont

3.5. Egy $m \times n$-es táblázat minden mezője fehér vagy fekete. Minden mezőre a sorában és oszlopában álló vele azonos színű mezők száma kisebb, mint a tőle különböző színű mezők száma. Bizonyítsuk be, hogy minden sorban és oszlopban a fehér és fekete mezők száma egyenlő.

A. Sapovalov, 6 pont

3.6. (a) Néhány 1 cm oldalú fekete négyzetet gombostűztünk rá egy fehér síkra egy tűvel, amelynek vastagsága 0,1 cm. A négyzetek együtt egyetlen fekete sokszöget alkotnak. Lehet-e ennek a sokszögnek a kerülete 1 km? (A tű nem érintheti egyetlen négyzetnek sem a kerületét.)

(b) Oldjuk meg az előző feladatot, ha a tű vastagsága 0. (Egyetlen pontnak képzeljük.)

(c) Néhány 1 cm oldalú fekete négyzetet helyeztünk egy fehér síkra. A négyzetek együtt fekete sokszöget alkotnak, de ebben lehet lyuk, vagy állhat több részből is. A fekete rész kerületének és területének aránya lehet-e több, mint 100000?

magyar feladat, 5 pont

3.9. 2000 Junior, ősz

3.1. Egy 4×4-es táblázat minden mezőjében van egy szám. Tetszőleges mező oldalszomszédos mezőin levő számok összege 1. Határozzuk meg a táblázatban levő 16 szám összegét.

R. Zenodarov, 3 pont

3.2. Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalának felezőpontja M, B merőleges vetülete az AM egyenesen H. Bizonyítsuk be, hogy BCH egyenlőszárú háromszög.

M. Volcskevics, 3 pont

3.3. **a)** 100 különböző számot írtak fel egy táblára. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük 8 szám úgy, hogy átlaguk a táblán található számok közül választott bármely 9 szám átlagától különbözik.

b) 100 számot írtak fel egy táblára. Bármely 8 számhoz találunk a táblán 9 számot úgy, hogy a 8 szám átlaga és a 9 szám átlaga egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a táblán levő összes szám egyenlő.

A. Sapovalov, 2+4 pont

3.4. 32 látszólag egyforma érme közül 30 valódi, 2 hamis. A valódi érmék súlya azonos. A hamis érmék súlya egymással megegyező, de a valóditól különböző. Hogyan oszthatóak az érmék két egyenlő súlyú csoportba egy kétkarú mérleggel legfeljebb 4 méréssel?

A. Sapovalov, 5 pont

3.10. 2001 Junior, 1. forduló, tavasz

3.1. A pozitív egész n szám helyettesíthető $a \times b$-vel, ahol a, b pozitív egészek, $a + b = n$. Megkaphatjuk-e néhány ilyen helyettesítést követően a 22-ből indulva a 2001-et?

V. Klepcyn, 3 pont

3.2. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalainak felezőpontjai rendre F, E és D. Ha a DE, EF és FD szakaszok valamelyike hosszabb, mint AD, BE és CF valamelyike, akkor bizonyítsuk be, hogy ABC tompaszögű háromszög.

A. Sapovalov, 4 pont

3.3. Egy boltban 20 kg sajt volt eladásra és a vevők sorban álltak sajtért. Az első tíz vevő mindegyikének vásárlása után a következőt kiáltotta az eladó: "Ha minden további ember az eddig vásárolt sajtok átlagát kéri, akkor még éppen 10 embert tudok kiszolgálni." Lehet, hogy minden alkalommal igazat mondott? Ha igen, akkor mennyi sajt maradt, miután az első tíz vevő már vásárolt?

IG. Rybnikov, 4 pont

3.4. Az asztalon van 5 egybevágó háromszög alakú papírlap. Mindegyiket eltolhatjuk önmagával párhuzamosan tetszőleges irányba, de nem forgathatjuk.

(a) Igaz-e, hogy bármelyik letakarható a többi négy segítségével?

(b) Bizonyítsuk be, hogy bármelyik lefedhető a többi négy segítségével, ha a háromszögek szabályosak.

A. Sapovalov, 3 pont

3.5. Egy 15×15-ös táblára 15 figurát helyeztünk úgy, hogy nincs kettő egy sorban vagy egy oszlopban. Minden figurát elmozdítunk: két mezőt vízszintesen és egy mezőt függőlegesen, vagy két mezőt függőlegesen és egy mezőt vízszintesen. Bizonyítsuk be, hogy ez után biztosan lesz olyan sor, vagy oszlop, amelyben két figura lesz.

S. Berlov, 5 pont

3.11. 2001 Senior, 1. forduló, tavasz

3.1. Egy busz 12 óra 20-kor indul 100 km-es útjára. A buszba helyezett számítógép 13, 14, 15, 16, 17 és 18 órakor a következőt jelzi: A busz egy óra múlva érkezik el céljához, feltéve, hogy az út hátra levő részében a busz átlagsebessége ugyanakkora lesz, mint az eddigi átlagsebesség. Lehetséges, hogy a számítógép nem téved? Ebben az esetben hány km-t tesz meg a busz 18 óráig?

IG. Rybnikov, 3 pont

3.2. Egy n jegyű szám köbe m jegyű. Lehet-e, hogy $n + m = 2001$?
G. Galperin, 4 pont

3.3. Az ABC háromszög AB és BC oldalain van rendre X és Y. Az AY és CX szakaszok metszéspontja Z, $AY = YC$, $AB = ZC$. Bizonyítsuk be, hogy $BXZY$ húrnégyszög.
R. Zenodarov, 4 pont

3.4. Egy 3×100-as táblára két játékos felváltva helyez el 2×1-es dominókat. Az első játékos mindig 1×2-es téglalapokra teszi, a második mindig 2×1-esekre. Az veszít, aki már nem tud tenni. Melyik játékos tud biztosan győzni? Mi a nyerő stratégia?
V. Truskov, 5 pont

3.5. Egy szabályos tetraéder éleinek hossza 1 centiméter. Felszínén 9 pontot jelöltünk ki. Bizonyítsuk be, hogy található ezen pontok között kettő, amelyek térbeli távolsága legfeljebb 5 milliméter.
V. Proizvolov, 5 pont

3.12. 2001 Junior, 2. forduló, tavasz

3.1. Egy vállalatnál az alkalmazottak 10%-a kapja a bérek 90%-át. A vállalat több ágazattal rendelkezik. Lehetséges-e, hogy minden ágazaton belül az alkalmazottak tetszőlegesen választott 10%-a legfeljebb az ágazatra jutó bérek 11%-át kapja?
M. Vyalyi, 3 pont

3.2. Három kupac kavicsunk van, ezekben 51, 49 és 5 kavics. Tetszőleges két kupacot egyesíthetünk. Ha egy kupacban páros sok kavics van, akkor két ugyanakkora kupacra bonthatjuk. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy 105 darab kupacunk legyen, mindegyikben 1 kavics?
V. Klepcyn, 5 pont

3.3. A $KMN\angle$ szögtartományban adott az A pont. KM és MN egy-egy pontja rendre B és C, $CBM\angle = ABK\angle$ és $BCM\angle = ACN\angle$. Bizonyítsuk be, hogy a BCM háromszög köré írt kör középpontja az AM egyenesen van.
A. Zaszlavszkij, 5 pont

3.4. Egy konvex sokszöget háromszögekre bontottunk egymást nem metsző átlóival. A sokszög minden csúcsához odaírjuk, hogy hány háromszögnek lett csúcsa. Az átlókat ezután letörlik, de a számokat látjuk. Ez alapján megállapítható-e, mely átlók szerepeltek a felbontásban?
S. Zajcev, 5 pont

3.5. Egy sakktáblán van egy fekete és egy fehér figura. Egy lépésben valamelyik figura átlép a saját mezőjével oldalszomszédos mezők közül az egyik üresre. A lépéseknek olyan sorozatát szeretnénk, hogy közben a két figurának a sakktáblán való összes lehetséges elhelyezkedése létrejöjjön.
(a) Lehetséges ez, ha a figuráknak felváltva kell lépni?
(b) Lehetséges ez, ha a figuráknak nem kell felváltva lépni?
A. Sapovalov, 3+4 pont

3.6. Az ABC háromszög magasságvonalai AD, BE és CF. Az AEF, BFD és CDE háromszögek magasságpontjai rendre K, M és N. Bizonyítsuk be, hogy KMN és DEF egybevágó háromszögek.
A. Akopjan, 7 pont

3.7. Aladár választ egy 9-nél nagyobb, 100-nál kisebb egész számot. Balambér szeretné ezt kitalálni, számokat tippelhet. Ha Balambér eltalálja Aladár számát, vagy az egyik jegyét eltalálja a másik jegyétől pedig csak egy számban tér el tippje, akkor Aladár azt mondja "forró", egyébként "hideg"-et mond. Például ha Aladár a 65-öt választotta, akkor forrót pontosan a következő tippek esetén mond: 65, 64, 66, 55, 75.

(a) Bizonyítsuk be, hogy Balambérnak nem lehet olyan stratégiája, amellyel legfeljebb 18 tipp után biztosan kitalálhatná Aladár számát.

(b) Keressünk olyan stratégiát, amivel legfeljebb 24 tippel mindig kitalálható Aladár száma.

(c) Van olyan stratégia, amelyhez legfeljebb 22 tipp kell?

2+3+3 pont

3.13. 2001 Senior, 2. forduló, tavasz

3.1. Keressünk olyan 2001 fokú $P(x)$ polinomot, amelyre minden valós x számra $P(x)+P(1-x)=1$.

3 pont

3.2. Egy legalább 5 fős osztályban minden tantárgyból vagy "elégtelen", vagy "megfelelt" minősítést kap a diák. A diákok közül választott legalább 5 fős csoportot véve, a csoportbeli elégtelenek legalább 80%-át a csoport legfeljebb 20%-a kapta. Bizonyítsuk be, hogy az osztálybeli elégtelenek legalább 75%-át egyetlen diák kapta.

M. Vyalyi, 5 pont

3.3. Az ABC háromszög magasságvonalai AD, BE és CF. Az AEF, BFD és CDE háromszögek magasságpontjai rendre K, M és N. Bizonyítsuk be, hogy KMN és DEF egybevágó háromszögek.

A. Akopjan, 7 pont

3.4. Legyenek A és B két darab $n \times m$-es táblázat, melyeknek minden mezőjében 0 vagy 1 áll. Mindkét táblázatban ugyanannyi 1-es található. Mindkét táblázat minden sorában a számok nem csökkennek balról jobbra és ugyanez igaz az oszlopokra fentről lefele. Minden $1 \leq k \leq m$ esetén, a felső k sorban álló számok összege nem kisebb az A táblázatban, mint a B-ben. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq l \leq n$ esetén, a bal szélső l oszlopban álló számok összege legalább annyi a B táblázatban, mint az A-ban.

A. Kanel, 5 pont

3.5. Egy körmérkőzéses sakkbajnokságon bármely két versenyző pontosan egyszer játszott egymással. Győzelemért 1, döntetlenért 0,5, vereségért 0 pont jár. Minden versenyző kiszámolja az általa legyőzött versenyzők pontjainak összegét és az őt legyőző versenyzők pontjainak összegét.

(a) Lehetséges-e, hogy minden versenyző esetén az első szám nagyobb, mint a második?

(b) Lehetséges-e, hogy minden versenyző esetén az első szám kisebb, mint a második?

AK. Tolpygo, 4+4 pont

3.6. Bizonyítsuk be, hogy megadható 2001 olyan poliéder, amelyekre teljesül:

- semely háromnak nincs közös pontja,
- bármely kettőnek van közös határpontja, viszont nincs közös belső pontja.

A. Kanel, 8 pont

3.7. Egy kör mentén van néhány doboz, bennük valahány kavics, akár 0 is lehet. Egy lépésben a következőt tehetjük: az egyik dobozból kivesszük az összes kavicsot és az óra járásával megegyező irányba indulva egyesével beletessszük őket a dobozokba.

(a) Tegyük fel, hogy az első lépés után mindig azt a dobozt kell kiürítenünk, amelyikbe a legutolsó lépés utolsó kavicsa került. Bizonyítsuk be, hogy néhány lépés után az eredeti helyzetet kapjuk vissza.

(b) Ha minden lépésben tetszőlegesen választhatunk dobozt, elérhető-e bármely kiindulási helyzetből az összes lehetséges elosztás valamilyen megfelelő lépéssorozattal?

V. Gurovic, 4 pont

3.14. 2001 Junior, 1. forduló, ősz

3.1. Az $ABCD$ négyszögben AD és BC párhuzamos, az AB szakasz egy pontja K. Párhuzamost húzunk A-n keresztül KC-vel és B-n keresztül KD-vel. Bizonyítsuk be, hogy ez a két vonal CD-n metszi egymást.

V. Bugajenko, 4 pont

3.2. Klotild összeszorozta az első n pozitív egész számot, Kázmér pedig összeszorozta az első m páros pozitív egész számot. Klotild és Kázmér így ugyanazt kapta eredményül. Bizonyítsuk be, hogy valamelyikük hibásan számolt.

V. Senderov 4 pont

3.3. Kolja megtudta, hogy négy azonosnak tűnő pénzérméje közül kettő hamis. Az is kiderült, hogy a valódi érmék súlya azonos, a hamisaké is egymással megegyező, viszont a hamisak könnyebbek. Egy kétkarú mérleggel, két méréssel megbizonyosodhat róla Kolja, hogy valóban két érméje hamis?

N. Konstantinov 4 pont

3.4. Egy kelet-nyugati hajózási útvonalon 10 vitorlás szeli a vizet. Közülük 5 indul keletről, 5 indul nyugatról. Minden hajó mindig ugyanazzal a sebességgel halad. Ha két hajó találkozik, akkor mindkettő megfordul és az ellenkező irányban folytatja útját. Hány ilyen forduló lesz mire az összes hajó kikötőbe ér?

A. Nyikolajev 4 pont

3.5. A síkon adott legalább négy pont. Ha a pontok bármelyikét letöröljük, a megmaradó ponthalmaz tengelyesen szimmetrikus. Következik-e ebből, hogy a kiindulási ponthalmaz is tengelyesen szimmetrikus?

A. Sapovalov 4 pont

3.15. 2001 Senior, 1. forduló, ősz

3.1. Egy ötszög valamely csúcsából merőlegest bocsátunk a szemközti oldalra, így kapjuk az ötszög magasságát. Ha egy csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával kötjük össze a mediánt kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben egy ötszög mind az öt magassága és mind az öt mediánja ugyanolyan hosszú, akkor az ötszög szabályos.

R. Zenodarov, 4 pont

3.2. Megadható 1000 szomszédos egész, amelyek között nincs prímszám, például: 1001!+2, 1001!+3, ..., 1001!+1001. Megadható 1000 szomszédos egész úgy, hogy köztük pontosan 5 prím legyen?

V. Galperin, 4 pont

3.3. Egy kelet-nyugati hajózási útvonalon 10 vitorlás szeli a vizet. Közülük 5 indul keletről, 5 indul nyugatról. Minden hajó mindig ugyanazzal a sebességgel halad, és eddig még nem találkozott szembe egymással semely két hajó. Ha két hajó találkozik, akkor mindkettő megfordul és az ellenkező irányban folytatja útját. Hány ilyen forduló lesz, mire az összes hajó kikötőbe ér?

A. Nyikolajev 4 pont

3.4. Egy torta teteje négyzet alakú és ezt olyan csokoládé háromszöglapok díszítik, amelyeknek páronként nincs közös pontja. Minden esetben felvágható a torta konvex darabokra úgy, hogy minden darabon pontosan egy csokiháromszög legyen?

A. Kanel-Belov, 4 pont

3.5. Egy 8×8-as sakktáblán három színes bástya áll. Bármely bástya elmozdítható a sorában és oszlopában egy üres mezőre, ha közben nem ugrik át másik bástyát. Kezdetben a bal alsó sarokban áll a fehér bástya, a közvetlenül fölötte és a jobb oldalán álló mezőn áll rendre a fekete és a vörös bástya. Célunk, hogy néhány lépés múlva a fehér bástya a jobb felső sarokban legyen, a közvetlenül bal oldalán álló és alatta levő mezőre kerüljön rendre a fekete és a vörös bástya. Eljuthatunk-e a célhoz, ha közben végig minden bástyát támadja valamelyik másik?

A. Sapovalov, 4 pont

3.16. 2001 Junior, 2. forduló, ősz

3.1. Megadható-e 100 pozitív egész $a_1 < a_2 < ... < a_{100}$ úgy, hogy minden $1 < k < 100$ esetén a_{k-1} és a_k legnagyobb közös osztója nagyobb legyen, mint a_k és a_{k+1} legnagyobb közös osztója?

A. Sapovalov 4 pont

3.2. Egy kört $2n$ ívre oszt $2n$ pontja, $n > 2$. Az ívek hossza három féle lehet, szomszédos ívek hossza különböző. A $2n$ pontot felváltva pirosra és kékre színeztük. Bizonyítsuk be, hogy az így kialakult kék és piros n-szögek kerülete és területe is ugyanakkora.

V. Proizvolov 5 pont

3.3. Egy $(n-2) \times n$ -es tábla minden sorában az 1, 2, ..., n számok állnak, $n > 2$. Minden oszlopon belül a számok különbözőek. Bizonyítsuk be, hogy ez a táblázat kiegészíthető egy $n \times n$ -es táblázattá úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban az $1, 2, ..., n$ számok szerepeljenek.

S. Mikhajlov 5 pont

3.4. Egy szabályos $(2n+1)$ szöget egymást nem metsző átlóival háromszögekre bontunk, $n > 1$. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett háromszögek közül legalább három egyenlő szárú.

R. Zenodarov 5 pont

3.5. Sándor egy 8×8-as sakktábla valamely mezőjére helyez egy bástyát. Ezek után egyesével helyez fel további bástyákat. Minden éppen elhelyezett bástya a korábbiak közül páratlan sokat támad közvetlenül. Legfeljebb hány bástyát tehet a táblára Sándor?

A. Sapovalov 6 pont

3.6. Néhány szám áll egymás után sorban. Róbert kiválaszt két olyan szomszédos számot, melyek közül a bal oldali a nagyobb, kicseréli őket és mindkettőt megszorozza kettővel. Bizonyítsuk be, hogy Róbert véges sok ilyen műveletet végezhet egymás után.

A. Sapovalov 8 pont

3.7. Tudjuk, hogy 2^{333} egy 101 jegyű szám, melynek első jegye 1. Hány olyan 2^k alakú szám van, amelynek az első jegye 4, ha $1 \leq k \leq 332$?

G. Galperin 8 pont

3.17. 2001 Senior, 2. forduló, ősz

3.1. Adott a síkon két háromszög, az egyik csúcsai pirosak, a másiké kékek. Az O pont mindkét háromszög belsejében van úgy, hogy az O pont távolsága a legtávolabbi piros ponttól is kisebb, mint a legközelebbi kék ponttól. Lehetséges-e, hogy a piros és kék pontok mind egy körön legyenek?

P. Kozelnyikov, 4 pont

3.2. Megadható-e 100 pozitív egész $a_1 < a_2 < ... < a_{100}$ úgy, hogy minden $1 < k < 100$ esetén a_{k-1} és a_k legkisebb közös többszöröse nagyobb legyen, mint a_k és a_{k+1} legkisebb közös többszöröse?

A. Sapovalov 4 pont

3.3. Egy 8×8-as táblázat mezőiben állnak az 1, 2, 3, ..., 64. Szomszédos számok oldalszomszédos mezőkön helyezkednek el. Az egy átlóban elhelyezkedő számok összegének mi a lehetséges legkisebb értéke?

A. Sapovalov, 6 pont

3.4. Legyen F_1 egy tetszőleges konvex négyszög. $k \geq 2$ esetén úgy kapjuk F_k-t F_{k-1}-ből, hogy szétvágjuk egy átlója mentén, majd az egyik részt megfordítjuk és újra összeragasztjuk a darabokat. Legfeljebb hány páronként nem hasonló négyszög lehet az $\{F_k\}$ sorozatban?

I. Tokareva, 6 pont

3.5. Legyenek a és d pozitív egészek. Tetszőleges pozitív egész n esetén $a + nd$ néhány egymás utáni jegye éppen n. Bizonyítsuk be, hogy d 10-nek valamely hatványa.

A. Sapovalov, 7 pont

3.6. Egy sorban egymás mellett áll 23 doboz. Minden $1 \leq k \leq 23$ esetén van olyan doboz, amelyben éppen k golyó van. Egy lépésben megduplázhatjuk egy dobozban a benne levő golyók számát úgy, hogy egy olyan dobozból vesszük ki a golyókat, amelyben több van. Bármely kezdő helyzetből indulva elérhető, hogy a k-dik dobozban éppen k golyó legyen?

R. Zenodarov, 7 pont

3.7. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Bármely h és k egészekre, nem lehet mindkettő 0, a háromszögnek nincs közös pontja az $(x_1 + h, y_1 + k)$, $(x_2 + h, y_2 + k)$, $(x_3 + h, y_3 + k)$ csúcsú háromszöggel.

(a) Lehet-e a háromszög területe $\frac{1}{2}$-nél nagyobb?

(b) Legfeljebb mekkora lehet a háromszög területe?

E. Cserepanov, 3+6 pont

3.18. 2002 Junior, 1. forduló, tavasz

3.1. Adott két pozitív egész $a < b$. Egyértelműen meghatározható-e a és b, ha tudjuk, hogy egy 49×51-es és egy 99×101-es tábla is lefedhető $a \times b$ méretű téglalapokkal?

S. Doricsenkó 4 pont

3.2. Van-e olyan háromszög, amely felvágható 4 konvex sokszögre: egy-egy 3, 4, 5, és 6 szögre?

A. Zaszlavszkij 5 pont

3.3. Legyenek x és y pozitív egészek. Tudjuk, hogy $x^2 + xy + y^2$ osztható 10-zel. Bizonyítsuk be, hogy osztható 100-zal is.

V. Proizvolov 5 pont

3.4. Az $ABCD$ négyszög minden oldala érint egy kört. Az érintési pontok az AB, BC, CD, DA oldalakon rendre K, L, M és N. Legyen S a KM és LN szakaszok metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy ha $SKBL$ húrnégyszög, akkor $SNDM$ is húrnégyszög.

A. Akopjan 5 pont

3.5. (a) Adott 128 érme, súlyuk kétféle lehet, mindkettő fajtából 64 van. Hogyan választható ki két különböző súlyú érme egy kétkarú mérleggel, ha legfeljebb 7-szer mérhetünk? (b) Adott 8 érme, súlyuk kétféle lehet, mindkettő fajtából 4 van. Hogyan választható ki két különböző súlyú érme egy kétkarú mérleggel, ha legfeljebb 2-szer mérhetünk?

A. Sapovalov 3+3 pont

3.19. 2002 Senior, 1. forduló, tavasz

3.1. Legyenek x és y pozitív egészek. Tudjuk, hogy $x^2 + xy + y^2$ osztható 10-zel. Bizonyítsuk be, hogy osztható 100-zal is.

V. Proizvolov 4 pont

3.2. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egybevágóak, de ellentétes körüljárásúak. Bizonyítsuk be, hogy az AA', BB' és CC' szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak.

V. Bugajenko, 5 pont

3.3. Van 6 különböző súlyú sajtunk. Bármely kettő közül tudjuk, melyik a könnyebb. Ismert, hogy valamely három sajt összesen ugyanolyan súlyú, mint a másik három. Hogyan választható ki ez a két hármas csoport, ha egy kétkarú mérleggel kétszer mérhetünk?

A. Sapovalov, 5 pont

3.4. Hányféleképpen írhatjuk az 1, 2, ..., 100 számokat egy 2×50-es táblázatba úgy, hogy bármely két szomszédos szám oldalszomszédos mezőkre kerüljön?

A. Sapovalov, 5 pont

3.5. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasábot szeretnénk egymást nem fedő, különböző méretű szabályos háromszögekkel becsomagolni. A hasáb élei mentén a háromszögeket meghajthatjuk.

L. Emelianov, 6 pont

3.20. 2002 Junior, 2. forduló, tavasz

3.1. Legyenek a, b, c egy háromszög oldalai. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

V. Senderov, 4 pont

3.2. Egy 23×23-as táblán a következő játékot játszuk. A kezdő játékosnak két fehér figurája van, amelyek kezdetben a bal alsó és jobb felső sarokban vannak. A második játékosnak két fekete figurája van, amelyek kezdetben a jobb alsó és bal felső sarokban vannak. A játékosok felváltva lépnek. Minden lépésben a soron következő játékos a saját figurái közül valamelyiket az éppen elfoglalt mezőjének valamely üres oldalszomszédjára tolhatja. A kezdő játékos nyer, ha két figurája oldalszomszédos mezőkre kerül. Megakadályozhatja-e a második játékos, hogy az első győzzön?

E. Zinin, P. Kozelnyikov, 4 pont

3.3. Az $ABCD$ konvex négyszög BC és CD oldalainak felezőpontjai rendre E és F. Az AE, AF és EF szakaszok $ABCD$-t négy háromszögre vágják, ezek területeinek mérőszámai szomszédos pozitív egészek. Határozzuk meg, legfeljebb mekkora lehet a BAD háromszög területe.
S. Sesztakov, 6 pont

3.4. Egymás mellett sorakozik n lámpa, néhány világít. Percenként a világító lámpák elalszanak és azok az eddig nem égő lámpák, amelyeknek pontosan egy szomszédjuk égett, kigyulladnak. Mely n esetén létezik olyan helyzet, ahonnan indulva mindig égni fog legalább egy lámpa?
A. Gorbacsov, 7 pont

3.5. Egy hegyesszögű háromszöget egy egyenes két részre vág, ezek nem feltétlenül háromszögek. Az egyik darabot újra szétvágjuk egy egyenes mentén és így tovább. Néháy vágás után észrevettük, hogy minden darabunk háromszög. Lehet-e mindegyik tompaszögű?
G. Galperin, 7 pont

3.6. Pozitív egészek szigorúan monoton növekedő sorozatában a 2002-dik elemtől kezdve minden elem osztója az előtte levő elemek összegének. Bizonyítsuk be, hogy valahonnan kezdve minden elem éppen az őt megelőző elemek összege.
A. Sapovalov, 7 pont

3.7. Néhány dominót láncban elhelyeztünk a szokásos szabályok szerint. Minden lépésben a lánc egy olyan részletét megfordíthatjuk, amelynek első és utolsó száma azonos. Bizonyítsuk be, hogy ha két lánc ugyanazokból a dominókból áll és a végeiken ugyanazok a számok vannak, akkor a fent leírt lépések sorozatával egyik a másikká alakítható.
A. Sapovalov, 8 pont

3.21. 2002 Senior, 2. forduló, tavasz

3.1. Az ABC háromszögben tgα, tgβ és tgγ egészek. Határozzuk meg, mekkora az értékük?
A. Zaszlavszkij, 4 pont

3.2. Az $y = x^3$ függvény grafikonján van az A pont, az $y = x^3 + |x| + 1$ függvény grafikonján van a B pont. Lehet-e $AB \leq \dfrac{1}{100}$?
A. Spivak, A. Hacsaturjan, 4 pont

3.3. Pozitív egészek szigorúan monoton növekedő sorozatában a 2002-dik elemtől kezdve minden elem osztója az előtte levő elemek összegének. Bizonyítsuk be, hogy valahonnan kezdve minden elem éppen az őt megelőző elemek összege.
A. Sapovalov, 5 pont

3.4. Egy előadás nézői egyetlen sorban ülnek, minden szék foglalt, de senki sem a saját helyén ül. Egy rendező megkérhet két egymás mellett ülő embert, hogy cseréljenek helyet, ha egyikőjük sem ül a saját helyén. Minden kiindulási helyzetből elérhető ilyen cserékkel, hogy a nézők a saját helyükre kerüljenek?
A. Sapovalov, 5 pont

3.5. A hegyesszögű ABC háromszög magasságai AA', BB' és CC'. Legyenek O_A, O_B és O_C rendre az $AB'C'$, $BA'C'$, és $CA'B'$ háromszögek beírt köreinek középpontjai. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC és CA oldalakat rendre a T_C, T_A és T_B pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy a $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ hatszög szabályos.
L. Emeljanov, 6 pont

3.6. Egy pakli kártya 52 lapját elrendeztük egy 13×4-es táblázatban. Bizonyítsuk be, hogy azonos figurák azonos sorban vannak, ha a táblázat bármely két oldalszomszédos mezőjében álló kártyák vagy színben, vagy figurában megegyeznek.

A. Sapovalov, 7 pont

3.7. Vannak-e olyan a és b irracionális számok, $a > 1$, $b > 1$, amelyekre $\lfloor a^m \rfloor = \lfloor b^n \rfloor$ nem teljesülhet pozitív egész m és n számok esetén?

V. Senderov, A. Spivak, 8 pont

Segítség, útmutatás

1. Városok Viadala, 1980–1989

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

2. Városok Viadala, 1990–1999

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Városok Viadala, 2000–2009

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

Megoldások

1. Városok Viadala, 1980–1989

1.1. Tételezzük fel, hogy valahogy eljutottunk két kékhez a feladat által említett lépésekkel. Nevezzük U-nak ahányszor egy piros és egy kék pont közül vettünk el, vagy közéjük tettük be egy piros pontot. Nevezzük P-nek ahányszor két piros pont közül vettünk el, vagy közéjük tettük be egy piros pontot, és ugyanígy legyen K, ahányszor két kék közül vettünk el, vagy közéjük tettünk egy pirosat. Nézzük most meg, hogy változik a kék pontok száma.

A lépések során $(K+P)$-szer 2-vel nő, vagy 2-el csökken, U-szor pedig nem változik. A $(K+P)$ db esetből n-szer nőjön a kékek száma, c-szer pedig csökkenjen. Tudjuk, hogy a végén kettővel több kék van, mint az elején, tehát felírhatjuk, hogy:

$$2n - 2c = 2 \tag{1}$$
$$2n - 2(K + P - n) = 2 \tag{2}$$
$$2n + 2n - 2(K + P) = 2 \tag{3}$$
$$2n - (K + P) = 1 \tag{4}$$
$$K + P = 2n - 1 \tag{5}$$

Összesen páros sok lépést hajtunk végre, mert egy lépésben vagy eggyel nő a pontok száma, vagy egyel csökken és végül ugyanannyi lesz, ezért U páratlan, mivel $K + P$ is páratlan. Most bebizonyítjuk, hogy U páros és megvan az ellentmondás. Írjunk a körre a pontok közé számokat, mégpedig úgy, hogy két kék közé 2 kerüljön, két piros közé 1, egy kék és egy piros közé 0,5. Megnézzük, hogy a lépések során mennyit változik a körre felírt számok összege. $(K+P)$-szer ez az összeg nem változik, U-szor pedig 0,5-ből $1 + 0{,}5$ lesz vagy fordítva, tehát itt egyel nő, vagy egyel csökken az összeg. Csökkenjen r-szer és növekedjen s-szer. Az elején az összeg 2, a végén, pedig 4, tehát felírhatjuk, hogy:

$$r - s = 2 \tag{6}$$
$$r + s = 2s + 2 \tag{7}$$
$$U = 2s + 2 \tag{8}$$

Látható, hogy U páros, ezért ellentmondásra jutottunk.

1.1. Megmutatom, hogy elhelyezhető így 8 tetraéder:
Vegyünk egy nem egyenlőszárú A, B, C háromszöget és a belsejében az X, Y, Z pontokat úgy, hogy X, Y, C, a Y, Z, A és a Z, X, B pontok egy egyenesen legyenek. Legyenek a P_1, P_2, P_3, P_4 háromszögek az ABZ, BCX, CAY, XYZ háromszögek. Legyen l egy egyenes, amely belemetsz mind a 4 háromszögbe, s tükrözzük az egész ábrát erre az egyenesre, így kapjuk a P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 háromszögeket. A képen látható elrendezésben ekkor az $i, j \in \{1{,}2{,}3{,}4\}$ esetén P_i metszi P'_j-t. Ezen háromszögek síkjai két részre osztják a teret, az egyikben legyen a T, a másikban az U pont. Ekkor a 8 tetraéder: P_i háromszögek plussz a T pont és a P'_i háromszögek plussz az U pont ($i = 1{,}2{,}3{,}4$). Ekkor ezen 8 tetraéder páronként felületszomszédos mivel nincs közös belső pontjuk, de bármely kettő egy sokszögben érinti egymást.

1.2. Nézzünk a síkon k darab párhuzamos egyenest úgy, hogy bármely kettő távolsága nagyobb, mint 2 méter, s mindegyik 1 méternél messzebb van a farkas kezdő helyzetétől. Tegyük fel, hogy a bárányok ezeken az egyeneseken mozoghatnak (mindegyik különbözőn), mégpedig úgy, hogy ha a farkas 1 méternél közelebb kerül az egyik A bárányhoz, akkor A a hozzá tartozó egyenesen abba az irányba lép, amerre messzebb kerül a farkastól. Ekkor Y lépése után a farkas az összes báránytól több, mint 1 méter távol lesz, tehát sosem kaphat el bárányt, így a feladatra a válasz igenlő.

1.3. Legyen p egy tetszőleges valós szám, s definiáljuk az $a_1, a_2, ..., a_9$ számokat a következő módon: a_i megfelelő helyiértéken vett számjegye 1-es, ha $\frac{p}{7}$ ezen a helyiértéken vett számjegye legalább i $(i = 1{,}2, ...{,}9)$, különben 0. Ekkor
$\frac{p}{7} = a_1 + a_2 + ... + a_9$
s mivel a_i minden számjegye 1, vagy 0, így $b_i = 7a_i$ minden számjegye 7, vagy 0 és
$p = b_1 + b_2 + ... + b_9$
tehát p felírható 9 olyan szám összegeként, amelynek az összes számjegye 0, vagy 7. S ezzel a feladat állítása be van bizonyítva.

1.3. Legyen a zongoristák száma m, ekkor $m = 2$ esetén egy nap után vége a költözködésnek. Ezután nézzük a feladatot m szerinti teljes indukcióval: megmutatom, hogy akárhogy is van elrendezve az m zongorista, létezik olyan $f(m)$ szám, hogy $f(m)$ napon belül vége a költözködésnek. $m = 2$-re igaz $(f(2) = 1)$, s tegyük fel, hogy $m = 1{,}2, ..., n$-re is igaz, ekkor megmutatom, hogy $n + 1$-re is:
Legyen egy A állapotban a zongoristák számai $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n+1}$ és rendeljük minden állapothoz a G állapotfüggvényt úgy, hogy
$G(A) = (a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_1)^2 + ... + (a_{n+1} - a_1)^2$
Ha az A-ból következik a B állapot, ahol $a_i + 1 = a_j$ számokból lesznek az $a_i - 1$ és $a_j + 1$ $(i \neq 1)$ számok, akkor
$G(B) = (a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_1)^2 + ... + (a_i - a_1 - 1)^2 + ... + (a_j - a_1 + 1)^2 + ... + (a_{n+1} - a_1)^2 =$
$= G(A) + 2 - 2(a_i - a_1) + 2(a_j - a_1) = G(A) + 2 + 2(a_j - a_i) \geq G(A) + 2$
ha $i = 1$ akkor
$G(B) = (a_2 - a_1 + 1)^2 + (a_3 - a_1 + 1)^2 + ... + (a_j - a_1 + 2)^2 + ... + (a_{n+1} - a_1 + 1)^2 > G(A) + n$
vagyis G szigorúan monoton nő és a végtelenbe tart. S ekkor a két legszélső zongorista távolsága akármekkora lehet, ugyanis tegyük fel indirekt módon, hogy akárhány nap is telik el, a távolság legfeljebb k, ám ez azt jelentené, hogy $G(A)$ tetszőleges A állapot esetèn legfeljebb nk^2, de ez ellentmond annak, hogy G a végtelenbe tart. Tehát ezek alapján, mivel G minden nap 1-gyel nő, így
$C = (2fn(n) + 2n)^2 n$
napon belül a két legszélső zongorista távolsága legalább $2nf(n) + 2n$, s ekkor lesz olyan l pozitív egész szám, hogy $a_{l+1} - a_l \geq 2f(n) + 2$. S ekkor nézzük külön az $a_1, a_2, ...a_l$ és $a_{l+1}, a_{l+2}, ..., a_{n+1}$ zongoristákat, ekkor $f(l), f(n + 1 - l) \leq f(n)$ miatt mindkét csoportban $f(n)$ nap alatt vége a költözködésnek, s $f(n)$ nap alatt a_l legfeljebb $f(n)$-et nőhetett, míg a_{l+1} legfeljebb $f(n)$-et csökkenhetett, tehát $a_{l+1} - a_l \geq 2f(n) + 2$ miatt nem kerülhettek egymás mellé. Tehát a

költözésnek $C + 2f(n)$ napon belül vége, így
$f(n+1) \leq C + 2f(n) = (f(n)+2)^2 n^2 + 2f(n)$
Tehát létezik az $f(n+1)$ szám is, s ezzel a feladat állítása be van bizonyítva.

2. Városok Viadala, 1990–1999

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

3. Városok Viadala, 2000–2009

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...