Algebra

9–10. évfolyam

Szerkesztette:
Hegedűs Pál, Hraskó András

2024. július 14.

A kötet létrehozását 2008-tól 2010-ig a
Fővárosi Közoktatásfejlesztési Közalapítvány
támogatta

Technikai munkák
(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2024

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Másodfokú függvények, polinomok

1.1. Ismétlés, bevezető feladatok

1.1. (MS) Alakítsuk teljes négyzetté, illetve teljes négyzet konstansszorosává az alábbiakat. A kérdőjelek helyére mit kell írni?

a) $a(x) = x^2 - 2x + 1$ **b)** $b(x) = -x^2 - 6x - 9$ **c)** $c(x) = 2x^2 - 6x + 4{,}5$

d) $d(x) = x^2 - 10x + ?$ **e)** $e(x) = -2x^2 + 8x + ?$ **f)** $f(x) = ?x^2 + 16x - 4$

g) $g(x) = 5x^2 + ?x + 100$.

1.2. (MS) Megfelelő szám hozzáadásával/kivonásával hozzuk teljes négyzet alakra:

a) $a(x) = x^2 - 2x + 2$ **b)** $b(x) = -x^2 - 6x - 10$ **c)** $c(x) = 2x^2 - 6x + 6{,}5$

d) $d(x) = x^2 - 10x + 1$ **e)** $e(x) = -2x^2 + 8x$ **f)** $f(x) = 2x^2 + 16x - 4$

g) $g(x) = 5x^2 + 15x + 100$.

1.3. (MS) Megfelelően megváltoztatva a konstanstagot hozzuk teljes négyzet alakra:

a) $a(x) = x^2 - 2x + c$ **b)** $b(x) = -x^2 - 6x + c$ **c)** $c(x) = 2x^2 - 6x + c$

d) $d(x) = ax^2 - 10x + c$ **e)** $e(x) = -2x^2 + bx + c$ **f)** $f(x) = ax^2 + 2ax + c$

g) $g(x) = ax^2 + bx + c$.

1.2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete

1.1. (MS) Igazoljuk, hogy az alábbi egyenleteknek csak a megadott esetekben van megoldásuk. Határozzuk is meg a megoldásokat: (A másodfokú tag együtthatójáról mindig feltesszük, hogy nem 0!)

a) $x^2 - 2x + c = 0 \qquad c \leq 1$ **b)** $-x^2 - 6x + c = 0 \qquad c \geq -9$

c) $ax^2 - 6x + c = 0 \qquad ac \leq 36$ **d)** $x^2 + bx + 1 = 0 \qquad b^2 \geq 4$

e) $-2x^2 + bx + c = 0 \qquad b^2 + 8c \geq 0$.

1.2. (MS) Fogalmazzuk meg, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ általános másodfokú egyenletnek mikor van megoldása és határozzuk is meg azt (azokat). (Feltesszük, hogy $a \neq 0$.)

1.3. A polinom gyöktényezős alakja (szorzattá-alakítás)

1.1. (MS) Próbáljumk meghatározni a megoldási módszer alapján egy olyan másofokú egyenletet, amelynek két megoldása (gyöke)

a) $\{-1; 1\}$ **b)** $\{1; 3\}$ **c)** $\{1; 2\}$

d) $\{1/2; 3/2\}$ **e)** $\{-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1\}$ **f)** $\{1/9; 1/8\}$

g) $\{1; \sqrt{2}\}$.

1.2. (MS) Alakítsuk elsőfokú tényezők szorzatává az alábbi kifejezéseket:
a) $x^2 + 2x + 1$ **b)** $-x^2 - 4x - 4$ **c)** $-2x^2 - 6x - 4{,}5$
d) $x^2 - 10x + 24$ **e)** $-2x^2 + 8x + 10$ **f)** $-12x^2 + 16x - 4$
g) $g(x) = 5x^2 + 51x + 10$.

1.3. (M) Az 1.1 feladatban kapott másodfokú kifejezéseket (polinomokat) alakítsuk szorzattá!

1.4. (M) Figyeljük meg, hogy az 1.1 feladatban előírt megoldások hogyan jelennek meg az 1.3 megoldás szorzatalakjában. Hozzuk összefüggésbe ezt azzal a törvényszerűséggel, hogy egy szorzat csak akkor lehet 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Igazoljuk, hogy ha egy másodfokú kifejezésnek (polinomnak) két megoldását (gyökét) előírjuk, akkor nem lehet más megoldása.

1.5. (MS) Alakítsuk szorzattá az $x^2 - 1$ kifejezést a modulo 8 maradékok körében. Keressünk egy másik szorzatalakot is. Hányféleképpen lehet szorzattá alakítani? Miért nem csak egyféleképpen?

1.6. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha a $f(x)$ és $g(x)$ másodfokú polinomok gyökei ugyanazok, akkor $f(x)$ és $g(x)$ egymás konstansszorosai. (Fordítva persze magától értetődően igaz.)

1.7. (MS) Igazoljuk Vieta formuláit: Ha egy másodfokú $ax^2 + bx + c$ polinom két gyöke p és q, akkor $p + q = -b/a$ és $pq = c/a$.

1.8. (MS) Mi a másodfokú $ax^2 + bx + c$ polinom szorzatalakja?

1.9. (MS) Milyen valós k esetén lesz az $x^2 - kx + a^2 - b^2 = 0$ egyenlet egyik gyöke $(a + b)$?

1.10. (MS) Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei az $x^2 - 3x - 9$ egyenlet
a) gyökeinek ellentettjei!
b) gyökeinek kétszeresei!
c) gyökeinél eggyel nagyobbak!
d) gyökeinek reciprokai!
e) gyökeinek négyzetei!
Az új egyenletek felírásához lehetőleg ne határozzuk meg az eredeti egyenlet gyökeit!

1.11. (MS) Tegyük fel, hogy a másofokú $ax^2 + bx + c$ polinomnak van két gyöke. Mi az a másodfokú polinom, amelynek a gyökei az előző gyökök
a) ellentettjei **b)** négyzetei
c) -nél egyel nagyobb számok **d)** reciprokai
e) különbsége (kétféle van!) **f)** hányadosa (kétféle van!)?

1.4. A másodfokú függvény és grafikonja

1.1. (MS) Ábrázoljuk az $f(x) = x^2 - 4x + c$ függvényt a derékszögű koordinátarendszerben a $c = 0$; 4; 8 paraméterértékek esetén. Határozzuk meg a tengelyekkel vett metszéspontjait, a szélsőértékhelyét és az itt felvett értékét.

1.2. (MS) Ábrázoljuk az alább megadott függvények grafikonját!
a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - 3 + x$ **b)** $g(x) = x^2 - 6|x| + 9$
c) $h(x) = |x^2 - 6x + 5|$.
d) Diszkutáljuk, hogy a p paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek!

1.3. (MS) Ebben a feladatban az $f_c(x) = x^2 + cx + 3$ függvényt vizsgáljuk (c valós paraméter).

a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját a c paraméter -2, -1, 0, 1, 2 értékei esetén!

b) Határozzuk meg c azon értékeit, amelyre f_c-nek $x = 2$-ben van a minimuma!

c) Határozzuk meg c azon értékeit, amelyre f_c-nek 2 a minimuma!

d) Határozzuk meg c azon értékeit, amelyre f_c-nek $x = 2$-ben zérushelye van!

e) Határozzuk meg c azon értékeit, amelyre az $f_c(x) > 0$ egyenlőtlenség minden valós x-re teljesül!

f) Határozzuk meg c azon értékeit, amelyre a $x^2 + cx + 3$ polinom felbomlik két elsőfokú egész együtthatós polinom szorzatára!

g) Jelöljük meg minden c-re az $f_c(x)$ függvény grafikonjának csúcspontját a kordinátasíkon! Milyen görbét alkotnak az így kapott pontok?

h) Van-e olyan pont a síkon, amely a c paraméter minden értéke esetén illeszkedik az $f_c(x)$ függvény grafikonjára?

i) A koordinátasík mely pontjai nem illeszkednek az $f_c(x)$ függvények egyikének grafikonjára sem?

1.4. (MS) **a)** Ábrázoljuk az $f(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény grafikonját!

Hajtsuk végre a grafikonon az alább megadott transzformációkat és írjuk fel a kapott grafikonnak megfelelő függvény képletét!

b) Eltolás az $\underline{v}(2; -1)$ vektorral.

c) Eltolás az $\underline{u}(u_1; u_2)$ vektorral.

d) Tükrözés az x-tengelyre.

e) Tükrözés az $y = a$ egyenletű egyenesre.

f) Tükrözés az y-tengelyre.

g) Tükrözés az $x = b$ egyenletű egyenesre.

h) Középpontos tükrözés az origóra.

i) Középpontos tükrözés az $O(c; d)$ pontra.

1.5. (M) **a)** Ábrázoljuk az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját!

Hajtsuk végre a grafikonon az alább megadott transzformációkat és írjuk fel a kapott grafikonnak megfelelő függvény képletét!

b) $\lambda = 3$ arányú tengelyes affinitás, melynek tengelye a koordinátarendszer x-tengelye.

c) $\lambda = 3$ arányú tengelyes affinitás, melynek tengelye a koordinátarendszer y-tengelye.

d) $\lambda = 3$ arányú origó centrumú középpontos nagyítás.

1.6. (MS) Adott az $f(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény grafikonja.

Hajtsuk végre a grafikonon az alább megadott transzformációkat és írjuk fel a kapott grafikonnak megfelelő függvény képletét!

b) $\lambda = 3$ arányú tengelyes affinitás, melynek tengelye a koordinátarendszer x-tengelye.

c) $\lambda = 3$ arányú tengelyes affinitás, melynek tengelye a koordinátarendszer y-tengelye.

d) $\lambda = 3$ arányú origó centrumú középpontos nagyítás.

1.7. (MS) Adott a derékszögű koordinátarendszerben az $f(x) = x^2 + 6x - 4$ függvény grafikonja! Toljuk el a koordinátarendszert az

a) $\underline{u}(3; 0)$ **b)** $\underline{v}(0; 2)$ **c)** $\underline{w}(3; 2)$

vektorral és írjuk fel, hogy az új koordinátarendszerben mely függvénynek felel meg az eredeti grafikon!

1.8. (M) Adott a derékszögű koordinátarendszerben az $f(x) = x^2 + 6x - 4$ függvény grafikonja! A koordinátarendszer

a) x tengelyén **b)** y-tengelyén **c)** mindkét tengelyén

háromszor akkora egységet vegyünk fel (a 3 helyére most 1 kerül) és írjuk fel, hogy az új koordinátarendszerben mely függvénynek felel meg az eredeti grafikon!

1.9. (MS) Elemezzük a valós számok halmazán értelmezett

$$f_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$$

általános másodfokú függvényt! Adjuk meg, hogy – az a, b, c – paraméterek mely értékeinél van maximuma illetve minimuma a függvénynek, határozzuk meg a szélsőértéket is!

1.10. (MS) Írjuk le, hogy a valós számok halmazán értelmezett

$$f_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$$

általános másodfokú függvény grafikonja milyen transzformációkkal kapható meg a normál-parabolából, azaz az $f_{1,0,0}(x) = x^2$ függvény grafikonjából!

1.11. (MS) Igazoljuk, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja valóban parabola. Hol van a fókuszpontja illetve a vezéregyenese?

1.12. (M) Az általános $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény *diszkriminánsa* a $D = b^2 - 4ac$ szám. Igazoljuk az alábbi általános összefüggéseket:

a)Az $f(x)$ függvény grafikonjának (mint parabolának) a csúcsa $(\frac{-b}{2a}; \frac{-D}{4a})$.

b)Az $f(x)$ függvény különböző nullhelyeinek (gyökeinek) száma 0, ha $D < 0$; 1, ha $D = 0$ és 2, ha $D > 0$. (Ezért hívják diszkriminánsnak, megkülönbözteti az alapvető eseteket.)

c)Az $f(x)$ függvény gyökeinek különbsége $\sqrt{D}/a$ (ha $D \geq 0$).

1.13. (M) Hol pozitív az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény értéke? (Feltesszük, hogy $a \neq 0$.)

1.5. Paraméteres feladatok

1.1. (MS) Határozzuk meg b és c értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : x \longrightarrow -2x^2 + bx + c$ függvénynek maximuma (-5) legyen és ezt a 10 helyen vegye fel!

1.2. (MS) Milyen p valós számra teljesül minden valós x-re a $px^2 + 12x - 5 < 0$ egyenlőtlenség?

1.3. (MS) Határozzuk meg c értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény szélsőértékét a (-2) helyen vegye fel! Állapítsuk meg a szélsőértéket is!

a) $f(x) = x^2 + cx + 1$ **b)** $f(x) = -4x^2 + cx + 12$

c) $f(x) = (2x - c)(5 + x)$ **d)** $f(x) = (x + c)(x - c) + c$.

1.4. (MS) Határozzuk meg p és q értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : x \longrightarrow x^2 + px + q$ függvénynek

a) minimuma (-1) legyen és ezt a 3 helyen vegye fel;

b) minimuma 5 legyen és ezt a 0 helyen vegye fel;

c) a maximuma 500 legyen;

d) csak egy zérushelye legyen, a (-10).

1.5. (M) Határozzuk meg b és c értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : x \longrightarrow -2x^2 + bx + c$ függvénynek
 a) két zérushelye 0 és 6 legyen;
 b) a maximuma 50 legyen és ezt a (-3) helyen vegye fel;
 c) a maximuma (-5) legyen és ezt a 10 helyen vegye fel;
 d) ne legyen maximuma.

1.6. (MS) Melyek azok a valós számok, amelyekhez az f és a $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény is pozitív értéket rendel?
 a) $f(x) = x^2 - x - 20$ és $g(x) = x^2 - 4x - 12$
 b) $f(x) = x^2 - x - 20$ és $g(x) = -x^2 + 2x + 8$

1.7. (M) Határozzuk meg p és q értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : x \longrightarrow qx^2 + px + 1$ függvénynek csak egy zérushelye legyen, a (-10).

1.8. (MS) Adjunk meg – az a, b, c paraméterekre vonatkozó – minél egyszerűbb szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $ax^2 + bx + c$ általános *legfeljebb* másodfokú polinom értéke minden valós x-re nemnegatív legyen!

1.9. (M) Milyennek válasszuk a valós p paramétert, hogy az $f_p(x) = (p-1)x^2 - 2px + p + 3 = 0$ függvény
 a) minden valós x esetén pozitív értéket vegyen fel?
 b) két pozitív zérushelye legyen?

1.10. (M) Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az

$$(m + 2)x^2 + (2m + 3)x - 2 = 0$$

egyenletnek két különböző, (-1)-nél kisebb valós gyöke legyen!

1.11. (MS) Fejezzük ki a-val az

$$y = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} \tag{1}$$

kifejezést, ha

$$x = \frac{a^4 + 20a^2 + 16}{4a^2} \tag{2}$$

és $0 < a \leq 2$!

1.12. (MS) Hogyan függ a k valós paraméter értékétől az

$$\frac{5 + kx}{2x - k} = 2$$

egyenlet megoldásainak száma? A k milyen értéke esetén lesz az egyenletnek 3-nál nagyobb megoldása?

1.13. (MS) Milyen értékeket vesz fel az $f(x) = x + 1/x$ függvény? És a $g(x) = x + 2/x$?

1.14. (MS) Milyen értékeket vesz fel az $h(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ függvény?

1.15. (M) Milyen értékeket vesz fel a $i(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$ függvény?

1.16. (M) Hát a $j(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$ milyen értékeket vesz fel?

1.17. (M) Az előző feladatok módszerét próbáljuk algoritmusként megfogalmazni egy olyan függvény értékkészletének meghatározására, amely két legfeljebb másodfokú polinom hányadosa.

1.18. (M) Oldjuk meg az alábbi paraméteres feladatot. Milyen p esetén van megoldása az $x^2 + x + 1 = p(x^2 + 3x + 4)$ egyeletnek?

1.19. (M) Mi köze van az előző feladatnak az őt megelőzőkhöz? Melyik egyszerűbb módszer?

1.20. (MS) Mikor pozitív $(x-2)(x+1)(x+3)$?

1.21. (M) Mikor pozitív

$$\frac{(x-1)^2(x-2)(x+3)}{(x+1)^2(x+4)}?$$

1.22. (MS) Mikor pozitív

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 3}?$$

És mikor lesz $f(x) > 2$, illetve $f(x) > -2$?

1.23. (M) Théoden király végső harcba szólítja népét Sauron hordái ellen. Legkésőbb 5 napon belül meg kell ütközniük velük, hogy Gondor ne essen el. A leghűségesebb 3000 embere máris vele van, a többiek egyenletesen érkeznek a táborba: naponta c ember. A táborból Minas Tirithbe kell vonulniuk. Ha x emberrel y nap alatt érnek oda, akkor a csapat $10x\frac{y}{1+y}$ fős gyülevész orkhadat tud legyőzni. Hány fős az a maximális orkcsőcselék, amelyet le tudnak Rohanni? (Természetesen nem csak teljes napokat lehet várakozni. Oldjuk meg a feladatot $c = 1000$ esetén először.)

1.24. (M) Ismeretes, hogy ha a vízszintes irányhoz képest x fokos szög alatt c kezdősebességgel elhajítunk egy követ, akkor a kő $\frac{c^2 sin^2 x}{2g}$ magasságra emelkedik, és vízszintes irányban $\frac{c^2 sin 2x}{g}$ távolságra jut el (eltekintünk a légellenállástól és a hajítást a földfelszínről végezzük el), ahol g a nehézségi gyorsulás (tekintsük $9{,}8 m/s^2$-nek).

Milyen szög alatt hajítsuk el a követ, hogy

a) a legmagasabbra emelkedjék?

b) a legtávolabbra jusson el?

c) legmagasabban $7{,}5m$-re legyen a földfelszíntől és a hajítás helyétől $51{,}96m$-re repüljön? Mekkora kezdősebességet kell adnunk neki?

2. FEJEZET

Egyenlőtlenségek

2.1. Becslések, egyenlőtlenségek

2.1. (MS) [5] Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket!

a) $\frac{3x+5}{7-3x} < 4$;

b) $\frac{x^2-1}{x^2+1} < \frac{x^3-1}{x^3+1}$;

c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{100}$;

2.2. (MS) [5] Adottak az $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ törtek úgy, hogy $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ tört értéke az adott törtek közül a legnagyobb és a legkisebb értéke között van!

2.3. (M) Az alábbi sorozatok közül melyik korlátos (felülről), azaz melyikhez van olyan K szám amelynél a sorozat egyik eleme sem nagyobb? Döntsük el, hogy van-e ilyen K szám és keressük meg a legkisebbet az alábbi esetekben!

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;

b) $b_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}$;

c) $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$;

d) $d_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

2.4. (MS) Korlátos-e az $f_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ sorozat?

2.2. Közepek

2.1. (M) Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és c. Fejezzük ki

a) a trapéz középvonalának;

b) a trapéz átlóinak metszéspontján át az alapokkal párhuzamos egyenes trapézon belüli részének

hosszát a-val és c-vel.

c) Az a), b) feladatrészekben definiált szakaszok közül melyik a hosszabb? Adjunk a bizonyításra geometriai és algebrai gondolatmenetet is!

2.2. (MS) (*Átlagsebesség az idő illetve az út egyenlősége mellett*)

a) Egy autó egy ideig v_1 sebességgel, majd ugyanannyi ideig v_2 sebességgel haladt. Határozzuk meg a teljes időtartamra vonatkozó átlagsebességét!

b) Egy autó A városból B városba v_1 sebességgel haladt, majd visszafelé, B városból A városba v_2 sebességgel ment. Határozzuk meg az utazás teljes időtartamára vonatkozó átlagsebességét!

2.3. (MS) Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóját a CT magasság az $AT = p$, $BT = q$ szakaszokra osztja.

Fejezzük ki a

a) háromszög CT magasságát;

b) háromszög CF súlyvonalát;

c) a CT magasság CF súlyvonalra vonatkozó merőleges vetületének hosszát a p, q mennyiségek segítségével!

2.3. A számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közepek két számra

2.1. (M)
a) Adott egy téglalap kerülete (K). Milyen határok között lehet a területe (T)?
b) Adott egy téglalap területe (T). Milyen határok között lehet a kerülete (K)?

2.2. (MS)
Mutassuk meg, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}^+$, akkor
a) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$; **b)** $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$; **c)** $\sqrt{a \cdot b} \geq \frac{2ab}{a+b}$
és az egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $a = b$.

2.3. (MS)
a) Mutassuk meg, hogy ha $x \in \mathbb{R}^+$, akkor

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

b) Mutassuk meg, hogy ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2.$$

2.4. (MS) Igazoljuk, hogy ha a és b pozitív számok, akkor $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

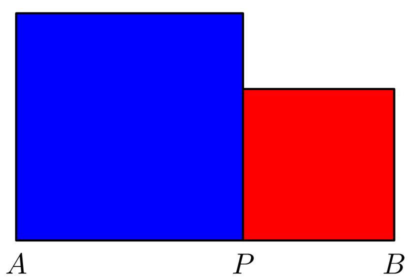
2.5. (M) Az $xy = 1$ egyenletű hiperbolának melyek azok a pontjai, amelyek a koordinátarendszer origójához a legközelebb vannak?

2.6. (M) Mennyi a valós számok halmazán értelmezett

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

függvény minimuma?

2.7. (MS) Hogyan kell egy szakaszt két részre osztani, hogy a két részre emelt négyzetek (lásd az 1. ábrát) területének összege
a) minimális; **b)** maximális
legyen?



2.7.1. ábra.

2.8. (MS) Igazoljuk, hogy ha két pozitív szám összege állandó, akkor a szorzatuk annál nagyobb, minél kisebb a különbségük. A négyzetösszegük pedig annál nagyobb, minél nagyobb a különbségük.

2.9. (MS) A Kökörcsin, Zsombolyai, Ulászló utcák és a Bartók Béla út négyszöget alkotnak. A Kökörcsin utca és a Zsombolyai utca kereszetezödéséből akarunk eljutni a másik két utca kereszteződédébe egy kisgyerekkel. Mindenképpen a rövidebbik utat kell választanunk. A két irányba nézve világos, hogy bármerre is megyük a következő saroknál derékszögben kell elfordulnunk mégpedig az út fele előtt; illetve az is, hogy a Zsombolyai utcán valamivel többet kell mennünk, mint ha a Kökörcsinen mennénk. Merre menjünk?

2.10. (MS) [7] Mutassuk meg, hogy ha $0 < b \le a$, akkor

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \le \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}.$$

2.4. Egymás után több egyenlőtlenség

2.1. (M) [5, 2] Bizonyítsuk be, hogy ha az a és b pozitívszámok eleget tesznek az $a + b = 1$ feltételnek, akkor érvényes az

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}$$

egyenlőtlenség. Milyen esetben jutunk egyenlőséghez?

2.2. (M)

a) Bizonyítsuk be, hogy ha a_1, a_2, a_3 és a_4 pozitív számok, akkor

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \ge \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}. \tag{1}$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

b) Hány számra és pontosan milyen formában írható még fel az (1) egyenlőtlenséggel analóg összefüggés?

2.5. Egyszerre több egyenlőtlenség

2.1. (MS) Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc.$$

2.2. (MS) Igazoljuk, hogy ha a, b és c pozitív számok, akkor

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \le a+b+c.$$

2.3. (MS) Igazoljuk, hogy ha a_1, a_2, $\ldots$, a_n pozitív számok és $a_1a_2\ldots a_n = 1$, akkor

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \ge 2^n.$$

2.4. (M) [7] Igazoljuk, hogy $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^2+y^2+z^2 \ge x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{x^2+z^2}.$$

Mikor teljesül az egyenlőség?

2.5. (M) Mutassuk meg, hogy ha az a_1, a_2, a_3 pozitív számok összege 1, akkor

$$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\sqrt{4a_3+1}<5.$$

(Lásd még a 2.4. feladatot!)

2.6. (M) Határozzuk meg az

$$f(x,y)=x^2+y^2-xy-x-y+1$$

kétváltozós függvény szélsőértékeit $(x,y\in\mathbb{R})$!

2.7. (MS) Igazoljuk, hogy $\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}$ a számtani $A(x,y)$ és a négyzetes $N(x,y)$ közép közé esik. Vajon ezek mértani közepénél $\sqrt{A(x,y)N(x,y)}$ kisebb, nagyobb-e mindig?

2.6. Számtani és mértani közép sok számra

2.1. (MS) Igazoljuk, hogy $x,y,z\in\mathbb{R}^2$ esetén

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}.$$

Mikor teljesül az egyenlőség?

2.2. (M) Bizonyítsuk be, az n tagú számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Azaz legyen n pozitív egész, a_1, a_2, …, a_n pozitív számok, ekkor

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_4}. \tag{1}$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

2.3. (M) Igazoljuk, hogy ha x és y pozitív számok, akkor $x^3+y^3+1\geq 3xy$.

2.4. (MS) Melyik az a legkisebb λ valós szám, amelyre minden valós x, y számra teljesül az $x^4+y^4+\lambda\geq 8xy$ egyenlőtlenség?

2.5. (M) Mutassuk meg, hogy tetszőleges pozitív a és b számra érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt[n+1]{ab^n}\leq\frac{a+nb}{n+1}.$$

2.6. (M) Egy 30 cm oldalú négyzetlap sarkaiból kis négyzeteket vágunk le és a levágott sarkok közti részeket derékszögben felhajtjuk, hogy felül nyitott dobozt hozzunk létre. Hány cm oldalhosszúságú négyzeteket vágjunk le, hogy a létrejövő doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

2.7. (MS) A $p(x)=3x^3-7x^2+4$ harmadfokú függvénynek a $[-1;1]$ intervallumon felvett maximumát keressük.

Dr. Agy szerint $p(x)=(2-x)(1-x)(3x+2)$, így a $[-1;-\frac{2}{3})$ intervallumon $p<0$ és $[-\frac{2}{3};1]$-ben $p\geq 0$. Elég az utóbbi intervallumban vizsgálni a függvényt, ahol $(2-x)$, $(1-x)$ és $(3x+2)$ is nemnegatív. Dr. Agy ezután a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazza:

$$\sqrt[3]{2p(x)}=\sqrt[3]{(4-2x)(1-x)(3x+2)}\leq\frac{(4-2x)+(1-x)+(3x+2)}{3}=\frac{7}{3},$$

tehát Dr. Agy szerint f maximuma a vizsgált intervallumon $\frac{7^3}{3^3\cdot 2}\approx 6{,}35$.

Dr. Kekec szerint $p(x)=4-x^2(7-3x)$, és a vizsgált intervallumban $(7-3x)<0$, így $p(x)\leq 4$, Dr. Agy eredménye nem lehet helyes.

Jó-e Dr. Agy eljárása vagy Dr. Kekecnek igaza van? Mennyi a kérdezett maximum?

2.8. (MS) Ebben a feladatban a $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ függvényt vizsgáljuk.

a) Készítsünk értéktáblázatot!

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$										

b) Vázoljuk a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg a függvény lokális szélsőértékeit, a szélsőértékhelyeket!

d) Mely y értékeket hányszor vesz fel a függvény? Döntsük el a kérdést minden valós y számra!

2.9. (MS) Adjuk meg a $h(x) = x \cdot (4000 - x^3)$ függvény maximumát az $x \in [0; 100]$ intervallumon!

2.10. Ha n pozitív egész és Δ valós szám ($\Delta \geq -n$), akkor jelölje $e_{n,\Delta}$ azon n tényezőből álló szorzatok maximumát, amelyekben a tényezők nemnegatívak és összegük $(n + \Delta)$.

a) Számítsuk ki és jelenítsük meg táblázatban $e_{n,\Delta}$ értékeit, ha $100 \leq n \leq 105$ és $-3 \leq \Delta \leq 3$.

b) Vizsgáljuk a táblázatot! Fogalmazzunk meg az $e_{n,\Delta}$ számok nagyságrendi és algebrai viszonyaival kapcsolatos sejtéseket!

c) Próbáljuk meg bebizonyítani az észrevételeket!

2.11. (MS) A 2.7 feladatot általánosítsuk kettőnél több számra!

2.7. Rendezési tétel

2.1. (MS) Ha $a_1 < a_2$ és $b_1 < b_2$, akkor $a_1b_1 + a_2b_2$ és $a_1b_2 + a_2b_1$ közül melyik a nagyobb? Mennyivel?

2.2. (MS) Ha $a_1 < a_2 < a_3$ és $b_1 < b_2 < b_3$, akkor az

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3), \qquad (a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2), \qquad (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3),$$

$$(a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1), \qquad (a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2), \qquad (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)$$

szorzatösszegek közül melyik a

a) legkisebb? **b)** legnagyobb?

2.3. (MS) (*Rendezési tétel* vagy *Szűcs Adolf egyenlőtlenség*)

Mutassuk meg, hogy ha $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$ és π az $(1,2,\ldots,n)$ számok tetszőleges permutációja, akkor

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \ldots + a_nb_{\pi(n)} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

Mikor teljesülhet az egyik illetve a másik egyenlőség?

2.4. (MS) Az alábbi két kifejezésben a_1, a_2, a_3, a_4 tetszőleges valós számok lehetnek. Igaz-e, hogy a két kifejezés közül az egyiknek az értéke mindig nagyobb, mint a másiké? Ha igen, akkor igazoljuk az egyenlőtlenséget, ha nem, akkor hozzunk példát arra, hogy az egyik és arra, hogy a másik oldal a nagyobb!

a) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ és $2(a_1a_4 + a_2a_3)$;

b) $\frac{a_1}{a_4} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_1}$ és $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_4}{a_1}$.

2.5. (M) Mutassuk meg, hogy ha a_1, a_2, a_3, a_4 és a_5 tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_4}{a_5}+\frac{a_5}{a_1}\geq 5.$$

2.8. A háromszögegyenlőtlenség

2.1. (MS) Adott egy háromszög alapja és magassága. Mikor lesz legkisebb a kerülete?

2.9. A CBS egyenlőtlenség

2.1. (MS) Milyen határok között változhat $a_1b_1+a_2b_2$ értéke, ha $a_1^2+a_2^2=1$ és $b_1^2+b_2^2=1$?

2.2. (MS) (*A Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség*)
Legyenek a_1, a_2, …, a_n és b_1, b_2, …, b_n tetszőleges valós számok. Igazoljuk az

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leq\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)} \tag{1}$$

egyenlőtlenséget

a) $n=3$; **b)** $3<n\in\mathbb{N}$

esetén!

c) Mikor teljesül az egyenlőség?

2.3. (MS) Mutassuk meg, hogy ha x_1, x_2, x_3 tetszőleges valós számok, akkor

$$\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{6}x_3\right)^2\leq\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{3}x_2^2+\frac{1}{6}x_3^2. \tag{1}$$

2.4. (MS) Mutassuk meg, hogy ha az a_1, a_2, a_3 pozitív számok összege 1, akkor

$$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\sqrt{4a_3+1}\leq\sqrt{21}.$$

2.5. (MS) Bizonyítsuk be, hogy $x,y>0$ esetén $\frac{(a+b)^2}{x+y}\leq\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}$. Mikor van egyenlőség?

2.6. (MS) Igazoljuk, hogy $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ esetén $\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\leq\frac{a_1^2}{x_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{x_n}$. Mikor teljesül az egyenlőség?

2.7. (MS) Igazoljuk a fenti 2.6 feladatbeli egyenlőtlenség ekvivalens a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszij egyenlőtlenséggel.

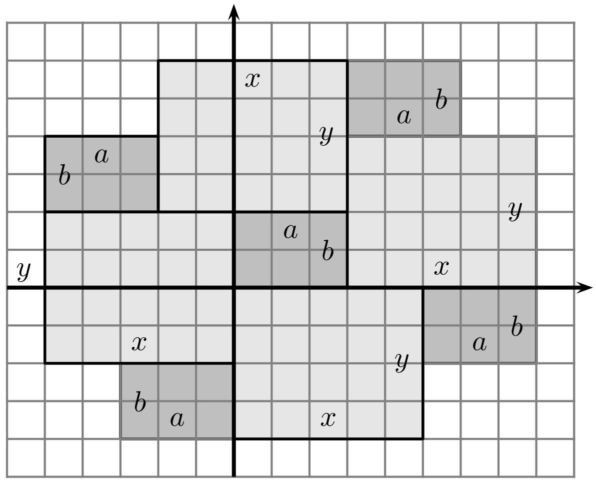
2.8. (M) Legyen $a,b,x,y>0$ és parkettázzuk ki a síkot $a\times b$-s és $x\times y$-os téglalapokkal mégpedig úgy (lásd az 1. ábrát) , hogy az origót körülvevő három téglalap „bal alsó” és „jobb felső” csúcsai ($y\geq b$-t feltételezve:

$$\{(0;0),(a,b)\},\ \{(-x;b-y),(0;b)\},\ \{(0;-y),(x;0)\}.$$

(A $b>y$ eset hasonlóan.) Keressünk alkalmas parallelogrammát az ábrán, amellyel geometriailag bebizonyíthatjuk a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget pozitív számpárok esetén.

2.9. (MS) Adott pozitív számokból álló n darab szorzat $a_1b_1\geq1,\ldots,a_nb_n\geq1$. Adott még egy súlyozás, vagyis $p_1,p_2,\ldots,p_n\geq0$, $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a súlyozott összegek szorzata is legalább 1, azaz

$$(a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n)(b_1p_1+b_2p_2+\cdots+b_np_n)\geq1.$$



2.8.1. ábra.

2.10. (M) Igazoljuk a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszij egyenlőtlenséget több tényezőre, például háromra:

$$\left(\sum a_i b_i c_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)\left(\sum c_i^2\right).$$

2.10. A Jensen-egyenlőtlenség

2.1. (M)

a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja konvex.

b) Igazoljuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget n számra! Tehát mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív számok, akkor

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

2.2. (M)

a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonja az $x \in \mathbb{R}^+$ értelmezési tartományon konvex.

b) Igazoljuk a számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenséget n számra! Tehát mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok, akkor

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

2.3. (M) Melyik függvény konvexitása igazolja a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget?

2.11. Vegyes feladatok

2.1. (M) Igazoljuk, hogy az

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \geq 0$$

egyenlőtlenség bármely x_1, x_2, x_3 valós számra teljesül!

2.2. (MS) Mutassuk meg, hogy ha az a_1, a_2, …, a_n számok pozitívak, akkor

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

2.3. (MS) Legyen $p(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3$ és $q(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a$.
Igaz-e az alábbi állítások közül valamelyik?
I. Ha a, b és c pozitívak, akkor $p(a, b, c) \leq q(a, b, c)$.
II. Ha a, b és c pozitívak, akkor $p(a, b, c) \geq q(a, b, c)$.
Bizonyítsuk be az igaz állítást illetve indokoljuk meg, ha egyik sem igaz!

2.4. (M) [7] (*Nesbitt egyenlőtlensége*)
Mutassuk meg, hogy ha a, b és c pozitív számok, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2.5. (MS) Mutassuk meg, hogy ha a, b és c pozitív számok, akkor
a) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$.
b) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$.

2.6. (MS) Az a, b, c pozitív számok összege 1. Határozzuk meg az

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} + \sqrt{1 + c^2}$$

kifejezés legkisebb értékét!

2.7. (MS) Az a, b, c pozitív számok összege 1.
a) Mutassuk meg, hogy $\left(\frac{1}{a} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{b} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$;
b) Határozzuk meg az $\left(\frac{1}{a} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{b} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{c} + 1\right)$ kifejezés minimumát!

2.8. (MS) Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2.9. (M) Bizonyítsuk be, hogy (pozitív a, b, c, d esetén)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq 2\frac{a+c}{b+d}$$

pontosan akkor teljesül, ha a törtek nevezői megegyeznek, vagy a nagyobb nevezőjű tört értéke nem nagyobb. Egyenlőség pontosan akkor van, ha a két tört nevezője megegyezik, vagy a két tört értéke megegyezik.

2.10. (M) Határozzuk meg az alábbi kifejezés minimális értékét, ha a változók pozitívak!

$$S = \frac{a_1}{a_{2008} + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_3} + \frac{a_3}{a_2 + a_4} + \ldots + \frac{a_{2008}}{a_{2007} + a_1}. \qquad (1)$$

2.11. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha n elég nagy gész szám, akkor $n^2 < 2^n$.

2.12. (MS) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész k esetén ha n elég nagy egész szám, akkor $n^k < 2^n$.

2.13. (MS) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $p(x)$ polinom esetén ha n elég nagy egész szám, akkor $p(n) < 2^n$.

3. FEJEZET

Polinomok

3.1. Ismétlő, gyakorló feladatok

3.1. (M) Igazoljuk, hogy ha $a + 1/a$ egész akkor $a^n + 1/a^n$ is egész.

3.2. (M) Binom köbe $x^3 + ax^2$ -nel kezdődik. Fejezzük be!

3.3. (M) Az $x^2 - 6x + 7 = 0$ egyenlet megoldásakor teljes négyzetté alakítást végzünk, azaz az $y = x - 3$ helyettesítéssel az egyenletet az $y^2 - 2 = 0$ alakra hozzuk. Hozzuk az $x^3 + 6x^2 - x + 3 = 0$ harmadfokú egyenletet $y = x - a$ alakú helyettesítéssel $y^3 + py + q = 0$ alakra! Adjuk meg a, p és q értékét!

3.4. (M) Írjuk föl a $2x^3 - 33x^2 + 181^x - 333$ polinomot $(x - 5)$ hatványai szerint!

3.5. (M) Az a valós együttható mely értéke esetén lesz a 3 gyöke a $2x^5 - 3x^4 + ax^3 - x^2 + 3x - 9$ polinomnak?

3.6. (M) Az a valós együttható mely értéke esetén emelhető ki $(x - 3)$ a $2x^5 - 3x^4 + ax^3 - - x^2 + 3x - 9$ polinomból?

3.7. (M) Osszuk el az $x^7 + 1$ polinomot maradékosan $x^3 + 1$-gyel.

3.8. (M) Mutassunk két egészegyütthatós polinomot, amelyek közül az egyiket maradékosan osztva a másikkal a hányados és a maradék nem lesznek egész együtthatósak.

3.9. (M) Mutassuk meg, hogy ha egy egészegyütthatós polinomot osztunk egy 1 főegyütthatós egészegyütthatós polinommal, akkor a hányados és a maradék is egész együtthatósak lesznek.

3.2. Gyökkiemelés, Horner elrendezés

3.1. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy polinomból pontosan akkor lehet kiemelni az $x - 1$-et, ha az együtthatóinak az összege 0.

3.2. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy polinomból pontosan akkor lehet kiemelni az $x - a$-t, ha a gyöke a polinomnak.

3.3. (M) A 3.2 feladatban beláttuk, hogy ha x_0 gyöke a $p(x)$ polinomnak, akkor $(x - x_0)$ kiemelhető a polinomból, azaz létezik olyan $q(x)$ polinom, amelyre $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$. Ebben a feladatban azt vizsgáljuk, hogy ez milyen együtthatótartomány esetén igaz.

a) Mutassuk meg, hogy ha $x_0 \in \mathbb{Z}$, akkor a hányados $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

b) Mutassuk meg, hogy ha $x_0 \in \mathbb{F}_p$, akkor a hányados $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$. (Azaz az együtthatók modulo p értendők, ahol p egy prímszám.)

c) Mutassuk meg, hogy ha $x_0 \in \mathbb{F}_k$, akkor a hányados $q(x) \in \mathbb{F}_k[x]$. (Azaz az együtthatók modulo k értendők, ahol $k > 1$ most kifejezetten nem prímszám.)

d) Fogalmazzuk meg, hogy pontosan mire van szükség, hogy lehessen kiemelni. Keressünk olyan számköröket, ahol ez nem működik.

3.4. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha a $p(x)$ valós polinomnak gyöke a különböző a és b, akkor *szimultán* kiemelhetők, azaz $p(x) = (x-a)(x-b)q(x)$ egy alkalmas $q(x)$ valós polinommal.

3.5. (M) Mutassuk meg, ha $p(x)$ együtthatói olyan számkörből kerülnek ki, amelyben az összeadás, kivonás, szorzás elvégezhető és két nemnulla szám szorzata sem nulla, akkor teljesül a 3.4 feladat állítása.

3.6. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy n-edfokú valós együtthatós – nem azonosan nulla – polinomnak legfeljebb n db (valós) gyöke van!

3.7. (M) (*Horner elrendezés*)
Írjuk fel a $h(x) = 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 7$ polinomot $h(x) = (((2x-5)x-5)x+4)x+7$ alakban. Hány műveletet kellet elvégezni az első típusú felíráshoz, hányat a másodikhoz? Egy általános n-edfokú polinom esetén mi a válasz?

3.8. (M) Helyettesítsük be a $h(x) = 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 7$ polinom Horner elrendezettjébe az $x = 3$-at: Írjuk fel az együtthatókat egy sorba, és utána legbelülről haladva minden összeadás eredményét írjuk a második sorba az együttható alá, minden szorzás eredményét pedig írjuk a harmadik sorba a szorzandó alá.

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & -5 & -5 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -6 & -6 & \end{array}$$

Az így létrejött táblázat második sorában van a $h(x) = k(x)(x-3) + h(3)$ felbontás. Hogyan? Miért?

3.9. (M) Ellenőrizzük, hogy $12x^4 - 4x^3 - 21x^2 - 2x + 3$ gyökei -1; $-1/2$; $1/3$; $3/2$.

3.10. (M) Jani a Horner módszerrel ellenőrzi, hogy gyöke-e egy racionális szám egy egész együtthatós polinomnak. Észreveszi, hogy ha a számolás során tört számot kap, akkor a végén soha nem lesz 0 a maradék. Bizonyítsuk be, hogy Jani megfigyelése helyes.

3.11. (M) Következtessünk az előző feladat (3.10) megfigyeléséből arra, hogy ha egy egész együtthatós polinomnak p/q gyöke, akkor nem csak $x - p/q$, hanem $qx - p$ is kiemelhető belőle.

3.3. Racionális gyökök

3.1. (M) Bontsuk tényezőkre az alábbi kifejezést: $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$.

3.2. (M) Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^4 - 3x^3 - x + 3 \geq 0$ egyenlőtlenséget!

3.3. (M) Oldjuk meg az $x^4 + x^3 - 29x^2 - 9x + 180 = 0$ egyenletet!

3.4. (MS) Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ egy n-edfokú egész együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha a p/q (p, q relatív prímek) racionális szám gyöke $f(x)$-nek, akkor $p|a_0$ és $q|a_n$.

3.5. (M) Mutassuk meg, hogy az $x^4 - (k+3)x^3 - (k-11)x^2 + (k+3)x + (k-12) = 0$ egyenlet két gyöke nem függ k-tól. A további két gyök k mely értékei mellett lesz valós?

3.6. (MS) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$1 + 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} = 0 \tag{1}$$

3.4. A Vieta formulák

3.1. (M) (*Vieta formulák*)
Jelölje x_1, x_2 és x_3 az $x^3+px+q=0$ egyenlet három gyökét. Fejezzük ki $x_1+x_2+x_3$-at, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$-at és $x_1x_2x_3$-at p és q segítségével!

3.2. (M) Jelölje x_1, x_2 és x_3 az $x^3+px+q=0$ egyenlet három gyökét. Határozzuk meg $x_1^5+x_2^5+x_3^5$ értékét!

3.3. (M) Legyenek x_1, x_2, x_3 az x^3+px+q polinom gyökei. Számítsuk ki az

$$x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4+x_2^4x_3^2+x_2^2x_3^4+x_3^4x_1^2+x_3^2x_1^4$$

kifejezés értékét!

3.4. (MS) Írjunk fel olyan harmadfokú polinomot, amelynek gyökei az x^3-2x^2-x+1 polinom
a) gyökeinek ellentettjei!
b) gyökeinek kétszeresei!
c) gyökeinél eggyel nagyobbak!
d) gyökeinek reciprokai!
e) gyökeinek négyzetei!

3.5. (M) Adjuk meg azokat az x, y valós számokat, amelyekre

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x^5+y^5 &= 31 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

3.6. (M) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= y+z+2 \\ y^2 &= x+z+2 \\ z^2 &= x+y+2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

3.5. Különbségpolinomok

3.1. (M) Legyen k teszőleges pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k-adfokú polinom $p(x)$ különbségpolinomja $k-1$-edfokú. (A különbségpolinom $q(x)=p(x)-p(x-1)$.)

3.2. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha két polinomnak ugyanaz a különbségpolinomja, akkor különbségük konstans. Vagyis, egy helyen megegyezik az értékük, akkor egyenlőek.

3.3. (M) Az előző 3.2 feladat segítségével határozzuk meg azt az $f(x)$ polinomot, amelynek n helyen felvett értéke az első n pozitív szám összege.

3.4. (M) Határozzuk meg azt a $g(x)$ polinomot, amelynek n helyen felvett értéke az első n pozitív szám négyzetösszege.

3.5. (M) Számoljuk ki a következő összeget általános n-re:

$$\sum_{0\le a<b\le n}(a+b).$$

3.6. (MS) Adjuk meg az összes olyan n-edfokú valós polinomot, amely minden egész helyen egész értéket vesz fel!

3.6. Polinomok számelmélete

3.1. (M) (*Schönemann-Eisenstein kritérium*)
a) Bizonyítsuk be, hogy ha a

$$q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 \tag{1}$$

egészegyütthatós polinom a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 együtthatói mind oszthatók a p prímszámmal, de a_0 nem osztható p^2-tel, akkor $q(x)$ nem írható fel két n-nél kisebb fokú egészegyütthatós polinom szorzataként.
b) Bizonyítsuk be, hogy a fenti feltételek mellett racionális együtthatós polinomok szorzataként sem lehet felírni $q(x)$-et!

3.2. (M) Legyen $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$ egészegyütthatós polinom. Tegyük fel, hogy van olyan p prím, amellyel

$$p \nmid a_{2n+1},\ p \mid a_{2n},\ p \mid a_{2n-1}, \ldots,\ p \mid a_{n+1},\ p^2 \mid a_n,\ p^2 \mid a_{n-1}, \ldots,\ p^2 \mid a_0,\ p^3 \nmid a_0.$$

Bizonyítsukk be, hogy ekkor $f(x)$ nem bontható fel két kisebb fokú egészegyütthatós polinom szorzatára.

3.3. (M) Adjunk példát olyan valós együtthatós polinomra, amelynek nincsen valós gyöke, mégsem irreducibilis, azaz felbomlik nála kisebb fokú polinomok szorzatára!

3.4. (MS) Döntsük el, hogy a

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

polinom irreducibilis-e a megadott gyűrűben és ha nem, akkor bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára!
a) $\mathbb{Q}[x]$-ben; **b)** $\mathbb{R}[x]$-ben; **c)** $\mathbb{F}_2[x]$-ben; **d)** $\mathbb{F}_5[x]$-ben.

3.5. (M) **a)** Határozzuk meg a

$$p(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 14x - 8 \tag{1}$$

és

$$q(x) = 4x^6 - 12x^5 - x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 4x - 6 \tag{2}$$

polinomok legnagyobb közös osztóját!
b) Határozzuk meg a fenti $q(x)$ polinom összes valós gyökét!

3.6. (M) $\mathbb{F}_2[x]$-ben dolgozunk.
a) Számítsuk ki a

$$\begin{aligned} p(x) = &\quad 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^7 + x^{11} + x^{12}, \\ q(x) = &\quad 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^8 + x^9 + x^{13} + x^{15} + x^{16}. \end{aligned}$$

polinomok legnagyobb közös osztóját és
b) fejezzük azt ki $a(x)p(x) + b(x)q(x)$ alakban ($a(x), b(x) \in \mathbb{F}_2[x]$).

3.7. (M) Határozzuk meg az

$$x^4 + px^2 + q \tag{1}$$

polinomban p-t és q-t úgy, hogy osztható legyen a $(x^2 + 2x + 5)$ polinommal!

3.8. (M) Határozzuk meg p és q értékét úgy, hogy $(x^4 + 9)$ osztható legyen $(x^2 + px + q)$-val!

3.7. Multiplicitás

3.1. (M) Hogyan kell megválasztani a p és a q együttható értékét ahhoz, hogy a 3 kétszeres multiplicitású gyöke legyen az alábbi egyenletnek?

$$2x^4 - qx^3 + 13x^2 + 3x + p = 0 \tag{1}$$

3.2. (M) **a)** Osszuk el maradékosan az $x^3 + px + q$ polinomot az $(x - a)^2$ polinommal!

b) A p, q paraméterek mely valós értékei esetén van olyan a valós szám, hogy az $x^3 + px + q$ polinom osztható az $(x - a)^2$ polinommal?

c) Adjuk meg p és q olyan polinomját, amelynek értéke akkor és csakis akkor 0, ha az x^3+px+q polinomnak van kétszeres gyöke!

3.3. (M) **a)** A c valós paraméter mely értéke esetén lesz az $x^5 - 5x + c = 0$ egyenlet gyökei között kettő egyenlő?

b) Milyen összefüggésnek kell fennálnia az $x^5+px+q = 0$ ötödfokú egyenlet p és q együtthatói között, hogy az egyenletnek legyen két egyenlő gyöke?

3.8. Vegyes feladatok

3.1. (M) Az $x^3+px+q = 0$ harmadfokú egyenletben határozzuk meg a p együttható értékét úgy, hogy két gyök egymásnak reciprok értéke legyen. Határozzuk meg ebben az esetben a gyököket!

3.2. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c számok egyike sem negatív, akkor az $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$ egyenletnek nem lehet egynél több pozitív gyöke!

3.3. (M) Keressük meg azt a legalacsonyabb fokszámú $p(x)$ polinomot, amelyre teljesül, hogy
a) $p(x)$ együtthatói egész számok;
b) $p(x)$ elsőfokú tényezők szorzatára bontható;
c) $p(x)$ gyökei egész számok;
d) $p(0) = -1$;
e) $p(3) = 128$.

3.4. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b számok egyike sem negatív, akkor $a^3 - 3ab^2 + 2b^3$ sem negatív!

3.5. (M) Bontsuk négy elsőfokú valós együtthatós polinom szorzatára az $x^4 - 14x^2 + 9$ polinomot!

4. FEJEZET

Lineáris egyenletrendszerek

Ismételjük át az A.I.20. fejezet anyagát, pl. az A.I.20.16. feladatot!

4.1. Egyenletrendszerek

4.1. Írjunk a betűk helyére számokat úgy, hogy mindkét megadott állítás igaz legyen! Hány megoldás van az egyes esetekben?

a) $x + y = 2,\qquad 3x + 3y = 6.$
b) $x - y = 10,\qquad 4x - 4y = 50.$
c) $x + y = 5,\qquad x + 3y = 11.$

4.2. **a)** Ábrázoljuk az alábbi egyenletek megoldáshalmazát közös koordinátarendszerben!

$$0 = 2x + 1 - y, \qquad 2y - x = 2, \qquad y = 2x - 2.$$

Olvassuk le az ábráról az alábbi egyenletek közös megoldásait!

b) $0 = 2x + 1 - y,\qquad 2y - x = 2.$
c) $2y - x = 2,\qquad y = 2x - 2.$
d) $0 = 2x + 1 - y,\qquad y = 2x - 2.$

4.3. **a)** Ábrázoljuk az $y = mx + m$ függvény grafikonját $m = -4$, $m = -2$, $m = 0$, $m = 2$ és $m = 4$ esetén!

b) Az m paraméter értékétől függően hány megoldása van az

$$y - x = 1, \qquad y = mx + m$$

egyenletrendszernek? (Adjuk meg minden valós m-re az egyenletrendszer megoldásainak számát!)

4.4. Milyen $(x; y)$ számpárra teljesülnek a következő egyenletrendszerek?

a) $\left.\begin{aligned} 3^x \cdot 2^x &= y \\ y &= 1296 \end{aligned}\right\},$ **b)** $\left.\begin{aligned} 2^{x+y} \cdot 5^{x+y} &= 10\,000 \\ x + 3y &= 10 \end{aligned}\right\}$

4.5. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} 2x - 5y &= 7 \\ x + 3y &= 9 \\ 3x - 2y &= 16 \end{aligned}\right\},$ **b)** $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ 2x - y &= 7 \\ x - 3y &= 3 \end{aligned}\right\}.$

4.6. A k paraméter mely értékeire van a

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 6x + ky &= 2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek

a) megoldása? **b)** egyértelmű megoldása? **c)** végtelen sok megoldása?

4.7. Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y &= c_1 \\ a_2x+b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\}$$

általános kétismeretlenes egyenletrendszert! (Fejezzük ki az x, y ismeretleneket az a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 paraméterekkel!)

4.8. Milyen $(x;y)$ számpárra teljesül a

$$\left.\begin{aligned} 3^x+3^y &= 108 \\ 3^x-3^y &= 54 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer?

4.9. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\left.\begin{aligned} 2x+y &= 7 \\ x &= 3{,}5-\tfrac{y}{2} \\ y &= 7-2x \end{aligned}\right\}$, **b)** $\left.\begin{aligned} 2x-y &= 7 \\ 8x+6y &= 10 \\ 11x+7y &= 16 \end{aligned}\right\}$.

4.10. (M) Adjunk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az alábbi pontokon:

a) $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(-1;0;2)$.
b) $A(0;0;0)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;0)$.
c) $A(1;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(4;1;-2)$.

4.11. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} 2x &+& 3y &+& z &+& 5t &= 3; \\ 2x &+& 4y &+& 3z &+& 7t &= 7; \\ 4x &+& 5y &+& 2z &+& 8t &= 3; \\ -2x && &+& 9z && &= 3. \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} x &+& y &+& 4z &+& 2t &= 1; \\ -x &+& y &-& z &-& t &= -1; \\ -2x &+& 2y &+& 2z &-& t &= 0; \\ 2x && &+& 13z &+& 5t &= 6. \end{array}\right\}$$

c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} x &+& 2y &+& 2z &+& t &= 3; \\ x &+& 4y &+& 3z &+& t &= 4; \\ 2x &+& 2y &+& 4z &+& 3t &= 6; \\ && 4y &+& 4z &+& 2z &= 6. \end{array}\right\}$$

d) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} 2x &+& y &+& 3z &+& 5t &= 1; \\ -2x && &-& z &-& 3t &= 0; \\ 4x &+& 5y &+& 18z &+& 16t &= 5; \\ 2x &+& 3y &+& 11z &+& 9t &= 3. \end{array}\right\}$$

e) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} 2x &+& 10y &-& 2z &+& t &= 2; \\ x &-& y &-& z &-& 2t &= 1; \\ -x &+& 11y &+& z &+& 7t &= -1; \\ x &+& y &-& z &-& t &= 1. \end{array}\right\}$$

f) $$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} 2x &-& y &+& z &+& 3t &= 8; \\ x &+& 2y &+& 3z &-& t &= -1; \\ 3x &-& y &-& z &-& t &= -1; \\ 5x &+& y &-& 2z &+& t &= 12. \end{array}\right\}$$

4.12. A 4.11. feladat négyismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásából áll. Keressük ki azokat az egyenletrendszereket, ahol a négy egyenlet nem volt független egymástól, némelyik következett a többiből. Válasszunk ki ezekben a részfeladatokbnan minél kevesebb olyan egyenletet, amelyek egymásból nem következnek, „függetlenek”, de az összes többi egyenlet már levezethető belőlük. Adjuk is meg, hogyan áll elő az összes többi egyenlet ezek lineáris kombinációjaként!

4.13. (M) Az alábbi két egyenletrendszer közül az egyikben az egyenletek nem függetlenek. Válasszuk ki ezt az egyenletrendszert és fejezzük ki az egyik egyenletet a többi lineáris kombinációjaként!

a) $\left.\begin{aligned} 2x+6y+10z &= 11;\\ 4x+15y+24z &= 25;\\ 2x+9y+16z &= 15.\end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 3x+y+8z &= 11;\\ 9x+7y+26z &= 38;\\ 6x+18y+24z &= 42.\end{aligned}\right\}$

4.14. (M) Az alábbi két egyenletrendszer közül az egyikben az egyenletek nem függetlenek. Válasszuk ki ezt az egyenletrendszert és fejezzük ki az egyik egyenletet a többi lineáris kombinációjaként!

a) $\left.\begin{aligned} 3x+4y+7z &= 2;\\ 2x+y+4z &= 1;\\ -x+7y+2z &= 1.\end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} 3x+4y+7z &= 2;\\ 2x+y+4z &= 1;\\ -x+7y+z &= 1.\end{aligned}\right\}$

4.15. (M) Az alábbi egyenletrendszer egyenletei nem függetlenek egymástól. Adjuk meg az egyik egyenletet a többi lineáris kombinációjaként!

$$\left.\begin{aligned} x+4y-6z+2t &= -2;\\ 5x-3y-z+7t &= 2;\\ 3x-10y+2z+4t &= 6;\\ 3x-y+10z+3t &= 0.\end{aligned}\right\}$$

4.16. Dr. Agy a munkahelyén felejtette a megoldandó háromismeretlenes lineáris egyenletrendszerét, de két megoldásra emlékezett:

$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 1;$

$x_2 = 1, \quad y_2 = 2, \quad z_2 = 3.$

a) Vajon van-e még megoldása az egyenletrendszernek?

b) Adjunk meg ilyen egyenletrendszert!

4.17. Dr. Agy a munkahelyén felejtette a megoldandó háromismeretlenes lineáris egyenletrendszerét. Arra emlékezett, hogy ilyen alakú volt:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 &= 0;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 &= 0;\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 &= 0,\end{aligned}\right\}$$

és még a munkahelyén megtalálta az alábbi megoldást:

$$x_1 = 1, \qquad y_1 = 1, \qquad z_1 = 1.$$

Van-e még megoldása az egyenletrendszernek? Hány megoldása van?

4.18. a) Az alábbi egyenletek közül melyikre igaz az, hogy ha egy $(x; y; z)$ számhármas kielégíti, akkor annak λ-szorosa (λ tetszőleges valós szám), a $(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$ számhármas is kielégíti?

I.) $x^3y - 2x^2y^2 + 11y^3z - 3y^4 = 0;$ **II.)** $x^3 - 2x^2y^2 + 11y^3z - 3y^4 = 0;$

III.) $2x - 11y + 3z = 0;$ **IV.)** $2x - 11y + 3z = 5.$

b) A fenti egyenletek közül melyikre igaz az, hogy ha az $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ és a $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ számhármas is kielégíti, akkor a $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ számhármas is kielégíti?

4.19. Alább egy homogén (a szabad tagok értéke zérus) és egy inhomogén (nem minden szabad tag értéke zérus) lineáris egyenletrendszert látunk, és azok egy-egy megoldását.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 &= 0;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 &= 0;\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 &= b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 &= b_2;\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1=1,\ x_2=4,\ x_3=3 \qquad\qquad x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=-1$$

Próbáljuk meg megadni mindkét egyenletnek minél több további megoldását!

4.2. Vektorok

4.1. Írjuk fel a $\underline{w}(11;7)$ vektort az $\underline{u}(2;-1)$, $\underline{v}(1;2)$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz keressük meg azokat az α, β számokat, amelyekre $\underline{w}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}$.

a) Ábrázoljuk négyzethálós papíron a vektorokat! Oldjuk meg a feladatot geometriával!

b) Oldjuk meg a feladatot tisztán számolás útján!

4.2. Állítsuk elő az $\underline{u}$ vektort az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként:

a) $\underline{u}(4;3)$, $\underline{a}(2;0)$, $\underline{b}(0;6)$.

b) $\underline{u}(4;9)$, $\underline{a}(-2;1)$, $\underline{b}(5;3)$.

c) $\underline{u}(6;11)$, $\underline{a}(-6;10)$, $\underline{b}(9;-15)$.

4.3. Állítsuk elő az $\underline{u}$ vektort az $\underline{a}(2;1)$, $\underline{b}(3;-2)$ vektorok lineáris kombinációjaként:

a) $\underline{u}(14;0)$; **b)** $\underline{u}(1;0)$; **c)** $\underline{u}(0;1)$; **d)** $\underline{u}(3;2)$; **e)** $\underline{u}(-4;13)$;

e) $\underline{u}(u_1;u_2)$.

4.4. Határozzuk meg az $\underline{u}(u_1;u_2)$, $\underline{v}(v_1;v_2)$ helyvektorok által közrefogott háromszög (ennek csúcsai tehát az origó és az $U(u_1;u_2)$, $V(v_1;v_2)$ pontok) területét!

4.5. Adott az $\underline{n}(2;2)$ vektor. Keressünk néhány példát olyan $\underline{P}$ vektorra, majd határozzuk meg azon $\underline{P}$ helyvektorok végpontjának mértani helyét, amelyekre

a) $\underline{n}\cdot\underline{P}=0$; **b)** $\underline{n}\cdot\underline{P}=4$; **c)** $\underline{n}\cdot\underline{P}=-1$; **d)** $\underline{n}\cdot\underline{P}=c$, ahol c tetszőleges, de rögzített szám.

4.6. Írjuk fel a $\underline{w}(11;7)$ vektort az $\underline{u}(2;-3)$, $\underline{v}(4;6)$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz keressük meg azokat az α, β számokat, amelyekre $\underline{w}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}$.

a) Ábrázoljuk négyzethálós papíron a vektorokat! Oldjuk meg a feladatot geometriával!

b) Oldjuk meg a feladatot tisztán számolás útján!

4.7. Adott az $\underline{n}(3;4)$ vektor. Keressünk néhány példát olyan $\underline{P}$ vektorra, majd határozzuk meg azon $\underline{P}$ helyvektorok végpontjának mértani helyét, amelyekre

a) $\underline{n}\cdot\underline{P}=0$;

b) $\underline{n}\cdot\underline{P}=4$;

c) $\underline{n}\cdot\underline{P}=-1$;

d) $\underline{n}\cdot\underline{P}=c$, ahol c tetszőleges, de rögzített szám.

4.8. **a)** A térben rögzített derékszögű koordinátarendszerben adott az $\underline{u}(1;2;-1)$ vektor. A tér mely pontjainak helyvektora írható fel $\alpha\underline{u}$ alakban, ahol α valós szám?

b) Adott még az $\underline{v}(3;-3;1)$ vektor is. Milyen ponthalmazt alkotnak a térben azok a pontok, amelyek helyvektora felírható $\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}$ alakban, ahol α és β valós számok?

4.9. Szeretnénk felírni az

a) $\underline{a}(15; -6; 1)$ **b)** $\underline{b}(2; -5; 3)$

vektort az $\underline{u}(1; 2; -1)$, $\underline{v}(3; -3; 1)$, $\underline{w}(5; 1; -1)$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$ alakban (α, β, γ valós számok).

Hány megoldás van?

4.10. Adott a térben az $\underline{n}(1; 1; 1)$ vektor. A P_0 pont helyvektora $\underline{P_0}(1; 2; 1)$. Keressünk néhány példát olyan $\underline{P}$ vektorra, majd határozzuk meg azon $\underline{P}$ helyvektorok végpontjának mértani helyét, amelyekre $\underline{n} \cdot (\underline{P} - \underline{P_0}) = 0$.

4.11. Állítsuk elő az $\underline{u}$ vektort az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként:

a) $\underline{u}(4; 3; 2)$, $\underline{a}(2; 0; 0)$, $\underline{b}(0; 6; 0)$, $\underline{c}(0; 0; 10)$.

b) $\underline{u}(4; 9; 1)$, $\underline{a}(-12; 6; 18)$, $\underline{b}(8; -4; -12)$, $\underline{c}(-18; 9; 27)$.

c) $\underline{u}(4; 9; 1)$, $\underline{a}(-12; 6; 18)$, $\underline{b}(8; -4; -12)$, $\underline{c}(-18; 9; 27)$.

d) $\underline{u}(8; 5; -18)$, $\underline{a}(-1; 2; 3)$, $\underline{b}(2; 3; -4)$, $\underline{c}(1; 12; 1)$.

e) $\underline{u}(8; 6; -18)$, $\underline{a}(-1; 2; 3)$, $\underline{b}(2; 3; -4)$, $\underline{c}(1; 12; 1)$.

4.12. Állítsuk elő az $\underline{u}$ vektort az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként:

a) $\underline{u}(1; 6; 10)$, $\underline{a}(1; 2; 3)$, $\underline{b}(2; 2; -1)$, $\underline{c}(3; 4; 1)$.

b) $\underline{u}(1; 0; 0)$, $\underline{a}(6; 4; 3)$, $\underline{b}(5; -3; -2)$, $\underline{c}(7; 11; 8)$.

c) $\underline{u}(8; 18; 13)$, $\underline{a}(-12; 6; 18)$, $\underline{b}(8; -4; -12)$, $\underline{c}(-18; 9; 27)$.

4.13. Állítsuk elő az $\underline{u}$ vektort az $\underline{a}(2; 1; 1)$, $\underline{b}(1; 3; -2)$, $\underline{c}(4; 4; 0)$ vektorok lineáris kombinációjaként:

a) $\underline{u}(2; 1; 0)$; **b)** $\underline{u}(1; 0; 0)$; **c)** $\underline{u}(0; 1; 0)$; **d)** $\underline{u}(0; 0; 1)$;

e) $\underline{u}(-4; 13; 2)$; **e)** $\underline{u}(u_1; u_2; u_3)$.

4.14. (M) **a)** Adjunk meg az $\underline{u}(1; 1; 2)$, $\underline{v}(2; 3; -1)$ vektorokra merőleges vektort!

b) Adjuk meg az összes ilyen vektort!

4.15. **a)** Adjunk meg az $\underline{u}(u_1; u_2; u_3)$, $\underline{v}(v_1; v_2; v_3)$ vektorokra merőleges vektort!

b) Az a) részre adott általános megoldás időnként a $\underline{0}$ vektort adja. Mely $\underline{u}$, $\underline{v}$ vektorok esetén következik ez be?

4.16. Két sík normálvektorának szöge α. Határozzuk meg a két sík szögét!

4.17. Egy r hosszúságú vektornak a koordinátatengelyekkel bezárt szöge α_1, α_2 és α_3.

a) Határozzuk meg a vektor koordinátáit!

b) Milyen összefüggés áll fenn az α_1, α_2, α_3 értékek között?

4.3. Determinánsok

4.1. Legyenek a, b, c, d olyan egész számok, amelyekre az

$$\begin{aligned} ax + by &= m; \\ cx + dy &= n, \end{aligned}$$

egyenletrendszernek m, n minden egész értéke esetén van egész számokból álló megoldása. Mutassuk meg, hogy $|ad - bc| = 1$.

4.2. Hogyan változik egy 2×2-es mátrix determinánsának értéke, ha
a$_1$) az egyik sort megszorozzuk egy λ számmal?
a$_2$) az egyik oszlopot megszorozzuk egy λ számmal?
b$_1$) az egyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát?
b$_2$) az egyik oszlophoz hozzáadjuk egy másik oszlop λ-szorosát?

4.3. Adott két vektor.
a) Hogyan változik az általuk kifeszített paralelogramma területe, ha az egyik vektorhoz hozzáadjuk a másik vektor λ-szorosát?
b) Hogyan változik a paralelogramma előjeles területe? (Az előjeles terület pozitív, ha az első oldal félegyenesét a második oldal félegyenesébe vivő 180°-nál kisebb abszolútértékű forgatás pozitív szöggel történik.)

4.4. Mutassuk meg, hogy az $(a_1; a_2)$, $(b_1; b_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma előjeles területe megegyezik a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

determinánssal!

4.5. Adjuk meg az $A(1; 1; 2)$, $B(7; -8; 6)$, $C(19; 4; -6)$ pontokon átmenő sík egy normálvektorát!

4.6. (M) Harározzuk meg az a és a c paraméter értékét úgy, hogy az $\underline{n}(1; 1; 2)$ vektor merőleges legyen az $A(2; a; c)$, $B(3; 3; 7)$, $C(c; -1; 4)$ pontokon átmenő síkra!

4.7. Adjuk meg egy olyan $\underline{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\underline{b}(b_1; b_2; b_3)$ vektorokra merőleges vektornak a koordinátáit, amelynek hossza megegyezik az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok által kifeszíettt paralelogramma területével!

4.4. Vegyes feladatok

4.1. Mutassuk meg, hogy bármely értéket is adunk m-nek az $mx + 3y - 4m + 1 = 0$ egyenletű egyenesek ugyanazon meghatározott ponton mennek át.

4.2. [1] Pista vásárolt egy körzőt egy ceruzát és egy radírt. Ha egy körző az ötödébe, egy ceruza a felébe és egy radír a kétötödébe kerülne, akkor 96 Ft-ot, ha egy körző a felébe, egy ceruza a negyedébe és egy radír a harmadába kerülne, akkor 144 Ft-ot fizetett volna. Mennyit fizetett? A körző vagy a ceruza a drágább?

4.3. [1] Kétféle cukorkából, amelyek közül az egyiknek kg-ja a Ft, a másik kg-ja b Ft, m kg keveréket készítünk. A keverék ára kilogrammonként c Ft. Hány kg kell a keverékhez a két fajtából?

4.4. [1] Kétféle alkoholunk van. Ha az első fajtából a litert, a másikból b litert összekeverünk, akkor k%-os keveréket kapunk. Ha viszont a második fajtából veszünk a litert, és az elsőből b litert, akkor t%-os lesz a keverék. Hány százalálos töménységűek az összetevők?

4.5. (M) Oldjuk meg és diszkutáljuk az

$$\left.\begin{aligned} cy - 3x &= 7 - (c+2)(2y + x); \\ 1 - 2x &= 7 + (c+2)(1 - y) \end{aligned}\right\}$$

lineáris egyenletrendszert!

4.6. (M) **a)** Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} 2x+by &= 1; \\ -2x+4y &= b(1-x) \end{aligned}\right\}$$

lineáris egyenletrendszert!
A b valós paraméter mely értéke esetén
b) nincs megoldás?
c) van végtelen sok megoldás?

4.7. (M) **a)** Oldjuk meg az

$$\left.\begin{aligned} 2ax-4y &= 10; \\ 3x+ay &= 5(1+y) \end{aligned}\right\}$$

lineáris egyenletrendszert!
Az a valós paraméter mely értéke esetén
b) nincs megoldás?
c) van végtelen sok megoldás?

4.8. (M) A d valós paraméter mely értéke esetén
a) nincs megoldása
b) van végtelen sok megoldása a

$$\left.\begin{aligned} 3x+(1-d)y &= d-2; \\ dx-4y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

lineáris egyenletrendszernek?
c) A további esetekben adjuk meg az egyértelmű megoldást!

4.9. A k paraméter mely értékeire van a

$$\left.\begin{aligned} kx+y &= 1-x \\ 6x+ky &= 2 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek
a) megoldása?
b) egyértelmű megoldása?
c) végtelen sok megoldása?

4.10. Az ABC derékszögű háromszögben az AC befogó hossza 3 egység, míg a BC befogóé 4 egység volt. Az A pontot elmozdítottuk a BC egyenessel párhuzamosan. Ezután a B pontot mozgattuk el az (új) AC egyenessel párhuzamosan, végül a C helyzetét változtattuk meg (új) AB-vel párhuzamosan. Így olyan háromszöghöz jutottunk, amelyben B-nél lett derékszög, az AB szakasz hossza pedig 1 egységnyi lett. Milyen hosszú lett a BC szakasz?

4.11. A k paraméter mely értékeire van az

$$\left.\begin{aligned} x+y &= k \\ x-y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek pozitív x és pozitív y megoldása?

4.12. A Descartes koordinátarendszerben melyek azok a vektorpárok, amelyek által kifeszített rács megegyezik a négyzetráccsal? Válasszuk ki az alábbiak közül a megfelelőeket!
a) $\underline{a}(2;1)$, $\underline{b}(1;0)$;
b) $\underline{a}(3;2)$, $\underline{b}(1;0)$;
c) $\underline{a}(2;1)$, $\underline{b}(3;2)$;
d) $\underline{a}(3;5)$, $\underline{b}(8;12)$;
e) $\underline{a}(3;5)$, $\underline{b}(8;13)$;

4.13. Egy háromszög síkjának a térbeli Descartes koordinátarendszer koordinátasíkjaival bezárt szöge β_1, β_2 és β_3. Határozzuk meg a háromszög koordinátasíkokra vonatkozó vetületeinek területét!

4.14. Egy háromszögnek a térbeli Descartes koordinátarendszer koordinátasíkjaira vonatkozó merőleges vetületeinek területe T_1, T_2 és T_3. Határozzuk meg a háromszög területét!

4.15. (M) Adjunk meg olyan f másodfokú függvényt, amelyre
a) $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, $f(3) = 11$;
b) $f(1) = 8$, $f(2) = 5$, $f(3) = -2$;

4.16. (M) Adjunk meg az összes olyan h harmadfokú függvényt, amelyre
a) $h(-1) = h(0) = h(1) = 1$; **b)** $h(-1) = 1$, $h(0) = 1$, $h(1) = 3$.

4.17. Adjunk meg az összes olyan h harmadfokú függvényt, amelyre $h(-1) = h(0) = h(1) = 1$ és $h(2) = 7$.

4.18. Alább egy g harmadfokú polinom hiányos értéktáblázata látható. Pótold a hiányt!

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$		2	1	0	5

4.19. A tanár holnap villámversennyel kezdi az órát. Megadja egy f másodfokú függvény értékét az 1, 2, 3 helyeken, azaz közli az $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ értékeket. Az nyeri a versenyt, aki leghamarabb megadja az f másodfokú függvény konkrét alakját. Készüljünk fel a versenyre!

4.20. (M) **a)** Írjuk fel azt a összes olyan h harmadfokú függvényt, amelyre $h(-1) = 12$, $h(0) = 2$, $h(1) = 2$, $h(2) = 0$.
b) Írjuk fel paraméteresen azt a harmadfokú függvényt, amely a (-1), 0, 1, 2 helyeken megadott értékeket vesz fel.

4.21. (M) **a)** Írjunk fel olyan p polinomot, amelynek 0-ban, kétszeres gyöke van és $p(-2) = 12$, $p(-1) = -2$, $p(2) = 28$.
b) Írjunk fel olyan q polinomot, amelynek 1-ben, kétszeres gyöke van és $q(-1) = -12$, $q(0) = 1$, $q(2) = 3$.

4.22. Adjuk meg a $P(x; y)$ pont képének koordinátáit az origó körüli
a) 180°-os **b)** 90°-os **c)** α szögű
elforgatásnál.

4.23. Adjuk meg annak a transzformációnak minél több tulajdonságát, amely a síkbeli Descartes koordinátarendszerben az

$$(x; y) \longrightarrow (x + y; x - y) \tag{1}$$

képlettel adható meg! Próbáljuk meg megadni ezt a transzformációt az ismert transzformációk kompozíciójaként.

4.24. **a)** A síkbeli Descartes koordinátarendszer origóját is tartalmazó t egyenes 30°-os szöget zár be az x-tengellyel és részben a pozitív síknegyedben halad. Határozzuk a $P(x; y)$ pont t tengelyre vonatkozó tükörképének koordinátáit!
b) Adjuk meg az x-tengely origó körüli α szöggel való elforgatottjára vonatkozó tengelyes tükrözés képletét!

4.25. Határozzuk meg a $P(1; -2; 3)$ pontnak az origót az $A(1; 1; 1)$ ponttal összekötő egyenes körüli $\pm 120°$-os szöggel való elforgatottjait!

4.26. Adott egy szabályos háromszög és a síkon a PQ szakasz. A szabályos háromszög oldalegyeneseire merőlegesen vetítjük a $\overrightarrow{PQ}$ vektort, a vetületek $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$. Mutassuk meg, hogy

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \frac{3}{2}\overrightarrow{PQ}.$$

Keressünk értelmes általánosítást!

4.27. (M) Adott egy szabályos tetraéder és a térben a PQ szakasz. A tetraéder lapsíkjaira merőlegesen vetítjük a $\overrightarrow{PQ}$ vektort, a vetületek $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$, $\underline{v}_4$. Igaz-e, hogy a

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \underline{v}_4$$

vektorösszeg a $\overrightarrow{PQ}$ számszorosa? Ha igaz, akkor hányszorosa?

4.28. [1] Határozzuk meg az összes olyan (a, b, c) számhármast, amelyre a következő egyenletrendszernek van az $x = y = z = 0$ esettől különböző megoldása:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= 0;\\ bx + cy + az &= 0;\\ cx + ay + bz &= 0. \end{aligned}\right\}$$

4.29. **a)** Adjunk meg négy olyan legfeljebb negyedfokú h polinomot, amelyre

$$h(1) = h'(1) = 0. \tag{1}$$

b) Mutassuk meg, hogy az (1) feltételnek megfelelő legfeljebb negyedfokú valós együtthatós polinomok valós számtest fölött lineáris teret alkotnak!

c) Hány dimenziós ez a tér?

4.30. (M) **a)** Adjuk meg az összes olyan $p(x)$ legfeljebb harmadfokú polinomot, amelyre $p(-$ $-1) = p(0) = p(2) = 3$.

b) Az előbb megadott polinomok közül melyikre lesz $p'(0) = 6$?

4.31. Adjunk meg négy ismeretlennel négy lineáris egyenletet úgy, hogy a négy közül bármelyik két egyenletből álló egyenletrendszernek ugyanaz legyen a megoldáshalmaza, de ez ne egyezzen meg egyik egyenlet megoldáshalmazával sem!

4.32. Adott egy

a) 2×2-es, **b)** 2×3-as

kapcsolótábla. Mindegyik mező egyszerre lámpa, és egyszerre kapcsoló. Kapcsolóként mindegyik mező váltja a saját, és az élben szomszédos mezők lámpáját. Melyik táblán van olyan mező, amely kapcsolóként felesleges?

4.33. **a)** Adjunk meg négy olyan sorozatot, amely teljesíti az

$$g_{n+2} = 9 \cdot g_n + 2 \cdot g_{n+1} \tag{1}$$

rekurzív formulát!

b) Mutassuk meg, hogy az (1) képletnek megfelelő valós számokból álló sorozatok a valós számtest fölött lineáris teret alkotnak!

c) Hány dimenziós ez a tér?

4.34. (M) [4] Válasszuk az $OPQR$ paralelogramma O csúcsát egy derékszögű koordinátarendszer origójának. E rendszerre nézve legyen

a PQ egyenes egyenlete:	$u_1x + v_1y = 1;$
a QR egyenes egyenlete:	$u_2x + v_2y = 1.$

Fejezzük ki a paralelogramma területét az u_1, u_2, v_1, v_2 paraméterek függvényeként!

5. FEJEZET

Vegyes feladatok

5.1. (M) [8] Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$4 + x + \frac{1}{9} = 12{,}2y_3$$

(Az egyenlet két oldalán ugyanaz a szám áll, a bal oldalon tízes, a jobb oldalon hármas számrendszerben).

5.2. (M) Bizonyítsuk be az alábbi számról, hogy nem egész!

$$\frac{8\,795\,689 \cdot 8\,795\,688 \cdot 8\,795\,687 \cdot 8\,795\,686}{8\,795\,688^2 + 8\,795\,686^2 + 8\,795\,684^2 + 8\,795\,682^2}$$

5.3. (M) Messük el az $y = x^2$ függvény grafikonját rögzített m meredekségű egyenesekkel és vizsgáljuk a metszéspontok közti szakasz felezőpontjának mértani helyét. Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg állítást ás próbáljuk meg igazolni állításunkat!

5.4. (M) Határozzuk meg

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{2}$$

pontos értékét!

5.5. (M) [4] Legyen $f(x) = x^2 - x + 1$. Bizonyítsuk be, hogy minden $m > 1$ egész esetén m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f\Big(f(f(m))\Big)$, $\ldots$ páronként relatív prímek.

5.6. (M) [4] Bontsuk fel az $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ függvényt két szigorúan monoton függvény különbségére!

5.7. [4] Az a, b paraméterek mely értékei esetén lesz az $|x^2 + ax + b|$ függvénynek a $[-1; 1]$ intervallumon vett maximuma minimális?

5.8. [4] Az $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ függvények grafikonjainak nincs közös pontja és főegyütthatóik szorzata negatív ($a_1 \cdot a_2 < 0$). Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, amellyel grafikonjaik elválaszthatók!

5.9. (MS) Döntsük el, hogy $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ racionális vagy irracionális!

5.10. (M) A valós számok halmazában értelmezett $\circ$ műveletre (amelynél $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $(x \circ y) \in \mathbb{R}$) minden x, y, z valós szám esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$x \circ y = y \circ x,$$
$$(x \circ y) \cdot z = (x \cdot z) \circ (y \cdot z),$$
$$(x \circ y) + z = (x + z) \circ (y + z).$$

Mennyi $1999 \circ 2000$?

5.11. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet összes gyöke valós szám, akkor $a^2 \geq 3b$ (a, b, c adott valós számok)!

5.12. (M) Oldjuk meg a pozitív prímszámok halmazán a következő egyenletet: $3x^2 + 6x = 2y^2 + 7y$.

5.13. (M) Igazoljuk, hogy ha a, b, n olyan természetes számok, melyekre $a^{2^n} - b^{2^n}$ osztható 9-cel, akkor $a^2 - b^2$ is osztható 9-cel!

5.14. Az ABC háromszög oldalai között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4b^2(a^2 + c^2) + 3a^2c^2.$$

Mekkora a β szög?

5.15. [3] Tegyük fel, hogy az

$$ax^2 + 2bx + c \geq 0, \tag{1}$$

$$px^2 + 2qx + r \geq 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenségek minden x valós szám esetén teljesülnek. Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$apx^2 + 2bqx + cr \geq 0 \tag{3}$$

egyenlőtlenség is teljesül minden valós x esetén!

5.16. (MS) Legyen $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek $(x;y)$ koordinátáira $f(x) \geq f(y)$.

5.17. (MS) Határozzuk meg minden pozitív egész n-re az $\sqrt{n^2+n+1}$ számban a tizedesvessző után álló első számjegyet!

5.18. (M) A táblára az alábbi félkész egyenletet írták:

$$x^3 + \boxed{}\,x^2 + \boxed{}\,x + \boxed{} = 0 \tag{1}$$

Ketten játszanak. Kezdő a három üres téglalap egyikébe alkalmas egész számot írhat. Ezután Második a megmaradt két téglalap egyikébe tetszőleges egész számot ír, végül Kezdő az utolsó üresen maradt téglalapba ismét egy alkalmas egész számot ír.

Kezdő akkor nyer, ha a kitöltés után kapott hatmadfokú egyenletnek van három – nem feltétlenül különböző - valós gyöke. Egyébként Második nyer. Kinek van nyerő stratégiája?

5.19. (MS) Melyek azok az x, y, z valós számok, amelyekre

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} + \frac{z^2+x^2-y^2}{2zx} + \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy} = 1? \tag{1}$$

5.20. (MS) Egy háromszög körülírt és beírt körének sugara 170 ill. 12 egység, a háromszög kerülete 416 egység. Mekkorák a szögei?

5.21. (M) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{y+4} &= 11 \\ x + y &= 340 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

5.22. (M) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2-x+2y} - \tfrac{1}{x+2y-1} &= 2 \\ \tfrac{1}{2-x+2y} + \tfrac{1}{x+2y-1} &= 4 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

5.23. (M) Határozzuk meg az $(x-5)^4 + (x-4)^4 = 97$ egyenlet valós gyökeit!

5.24. (M) Határozzuk meg az xy szorzat értékét, ha x és y olyan egymástól különböző valós számok, amelyekre

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy}.$$

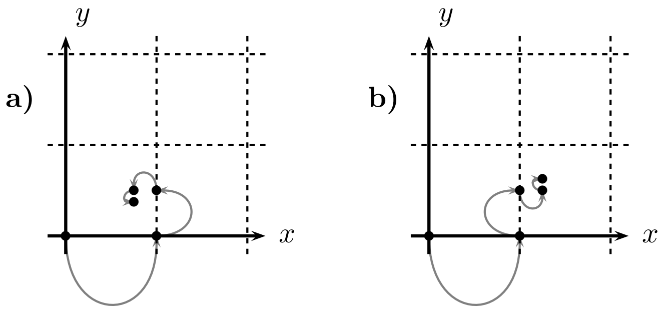
5.25. (M) A 10 mely pozitív egész kitevős hatványai írhatók fel két pozitív négyzetszám összegeként?

5.26. (M) Hány megoldása van a pozitív egészek körében az $a^2 + b^3 + c^4 = d^5$ egyenletnek?

5.27. (M) Egy bolha ugrál a síkon. A koordinátarendszer origójából indul, első ugrásával $(1;0)$-ba érkezik. Minden további ugrása feleakkora, mint a megelőző volt. Hová jut 48. ugrásával a bolha, ha minden ugrása után 90°-kal elfordul (lásd az 1. ábrát)

a) mindig ugyanabban a forgásirányban?

b) váltakozó irányban?



5.27.1. ábra.

5.28. (M) Tizes számrendszerben $12 = 3 \times 4$, hatosban pedig $3 \times 2 = 10$. Határozzuk meg az összes olyan számrendszert és számot, amely két egymás utáni számjegyből áll és a két következő szám szorzataként álljon elő. (Csökkenő vagy emelkedő sorrendben, mint a példákban.)

5.29. (MS) Határozzuk meg az alábbi egyenlet megoldásait:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2.$$

5.30. (M) Állapítsuk meg két szám negyedik hatványainak öszegét, ha a számok összege 10, szorzatuk 4.

5.31. (M) Megoldandó a következő egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x+y+xy+5 &= 0 \\ x^2y+xy^2+6 &= 0. \end{aligned}$$

5.32. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b+c=0$, akkor

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

5.33. (M) Legyenek α, β az $x^2+px+1=0$ egyenlet gyökei és γ, δ az $x^2+qx+1=0$ egyenlet gyökei. Bizonyítsuk be, hogy

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

5.34. (M) Határozzuk meg a b együtthatót a

$$4x^4-11x^2+9x+b=0$$

egyenletben úgy, hogy legyen az egyenletnek két különböző gyöke, amelyek összege -1.

Segítség, útmutatás

1. Másodfokú függvények, polinomok

1.1. A **d)** részben például $d(x) = (x-5)^2$ lesz.

1.2. A **d)** részben például $d(x) + 24 = (x-5)^2$ lesz.

1.3. A **d)** részben például $d(x) + 25/a - c = a(x - 5/a)^2$ lesz.

1.1. Az **a)** részben például $(x-1)^2 + c - 1 = 0$ pontosan akkor megoldható, ha $c \leq 1$.

1.2. Alkalmazzuk a fenti módszert ebben az általános esetben is.

1.1. Nézzük meg, hogy a fenti 1.2 feladat megoldásában hogyan kapjuk meg a megoldásokból az együtthatókat. Kiindulhatunk a $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ egyenlőségből. Azt kell megnézni, hogy mit kapunk „plusz-minusz”-ként. Például az **a)** esetben $\pm 1 = x = 2ax + b$, vagyis $a = 1/2$, $b = 0$ lehet. Ekkor $1 = -4ac = -2c$, vagyis $c = -1/2$, végül az egyenlet $0{,}5x^2 - 0{,}5 = 0$. Nézzük meg, hogyan érhettük volna el, hogy $x^2 - 1 = 0$-t kapjunk inkább.

1.2. Mindegyik kifejezést két négyzet különbségévé alakíthatjuk. Alkalmazzuk az 1.2 feladat megoldási módszerét. Például **d)** $x^2 - 10x + 24 = (x-5)^2 - 1 = (x-6)(x-4)$.

1.5. Oldjuk meg az $x^2 \equiv 1\,(8)$ kongruenciát, azaz keressünk olyan számokat, amelyek négyzete 1 maradékot ad 8-cal osztva.

1.6. Szorozzuk meg $f(x)$-et egy konstanssal úgy, hogy a főegyütthatója megegyezzen $g(x)$ főegyütthatójával.

1.7. Lényegében ezt használtuk az 1.1 feladat megoldásánál.

1.8. Használjuk az 1.2 feladat megoldását.

1.9. Bátran helyettesítsünk be.

1.10. Használjuk a Vieta formulákat.

1.11. Próbáljuk kifejezni az új öszeget, ill. szorzatot az eredeti összegből és szorzatból.

1.1. Alakítsuk egy teljes négyzet és egy konstans összegévé.

1.2. A **b)** és **c)** részt először oldjuk meg az abszolútérték figylembevétele nélkül és utána alkalmazzunk függvénytranszformációt.

1.3. Alkalmazzuk a teljes négyzet módszerét.

1.4. Minden esetben érdemes a parabola csúcspontjából kiindulni.

1.6. Az elősző feladathoz hasonlóan járjunk el.

1.7. Megint a csúcspontra érdemes figyelni. Vagy azt használjuk, hogy a koordinátarendszer eltolása milyen függvénytranszformációt jelent.

1.9. Az első számú különbséget az a paraméter érteke jelenti.

1.10. Alkalmazzuk az 1.4 és az 1.5 feladatok módszerét.

1.11. Használjuk az előző feladat megoldását, így elég a $g(x) = x^2$ függvény grafikonjáról igazolni.

1.1. Lásd az 1.12 feladatot.

1.2. A maximum legyen negatív.

1.3. A szélsőértékhely a gyökök átlaga, vagy a megoldóképletben $-b/2a$.

1.4. Használjuk a csúcspont általános alakját.

1.6. Alkalmazzuk az 1.13 feladat módszerét.

1.8. Egy hasonló feladatot már megoldottunk: 1.2.

1.11. Bátran írjuk be az 1. egyenletbe x helyébe a 2. értéket és vegyük észre a teljes négyzeteket. Ha nem használjuk fel a megadott megkötést a-ra akkor biztos rossz a megoldásunk.

1.12. Az egyenlőtlenség megoldásánál próbáljuk elkerülni az esetszétválasztást.

1.13. Pozitív x-re alsó korláthoz lásd a 2.3 feladatot.

1.14. Hozzuk kapcsolatba $f(x)$-szel.

1.20. Az előjelváltásokat érdemes számolni.

1.22. Alakítsuk szorzattá.

2. Egyenlőtlenségek

2.1. Vigyázzunk az átalakítások megfordíthatóságára!

2.2. Indukcióval.

2.4. Hasonlítsuk össze sorozatunkat a 2.3. feladat d_n sorozatával!

2.2. Összút osztva összidővel.

2.3. Hasonlóságokkal.

2.2. Szabaduljunk meg a gyökjeltől majd rendezés után keressünk teljes négyzetet.

2.3.

1. segítség, útmutatás. Szabaduljunk meg a törttől és rendezzünk nullára!

2. segítség, útmutatás. Használjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget (2.2. feladat)!

2.4. Az előző 2.3 feladatot használhatjuk.

2.7. Amelyik mennyiség állandó, az szerepeljen az egyenlőtlenség egyik oldalán. Jelen esetben a számtani közép. Amit meg keresünk, azt hozzuk kapcsolatba egy másik középpel.

2.8. Ha minden a különbségen múlik, akkor legyen az az ismeretlen.

2.9. Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza c. Milyen határok között változik a két befogó hosszának összege?

2.10. Írjuk át az egyenlőtlenségeket az $\sqrt{a} = A$, $\sqrt{b} = B$ változókra és alkalmazzunk algebrai átalakításokat!

2.1. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget két számra, de azt többször is!

2.2. Alkalmazzuk a számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenséget két számra, de azt többször is!

2.3. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget 1-re és a_i-re!

2.7. Ha igaz egy egyenlőtlenség, akkor $(x-y)^2$ kiemelésével valószínűleg bizonyítható.

2.1.

1. segítség, útmutatás. Legyen $\sqrt[3]{x} = X$, $\sqrt[3]{y} = Y$, $\sqrt[3]{z} = Z$ és emeljük ki az $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$ polinomból az $(X + Y + Z)$ tényezőt!

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget az alábbi négy számra (lásd a 2.2. feladatot):

$$x, \qquad y, \qquad z, \qquad \frac{x+y+z}{3}.$$

3. segítség, útmutatás. Legyen az x, y, z számok átlaga S. Alkalmazzuk az alábbi lépést: ha x, y és z között van két olyan, amelyek nem egyenlők S-sel, akkor változtassuk meg őket úgy, hogy összegük ne változzon és egyikük S legyen. Hogyan változik eközben a három szám szorzata?

2.4. Keressünk olyan a, b pozitív számokat, hogy az x^4, y^4, a, b számok számtani és mértani közepe jelenjen meg a feladatban!

2.7. Legyen $a, b > 0$, $a + b = 3$. Alkalmazhatjuk Dr. Agy módszerét a

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{abp(x)} &= \sqrt[3]{(2a-ax)(b-bx)(3x+2)} \leq \frac{(2a-ax)+(b-bx)+(3x+2)}{3} = \\ &= \frac{2a+b+2}{3} \end{aligned}$$

felbontásra. Vizsgáljuk, hogy itt mikor lehet egyenlőség.

2.8. Vonjunk ki belőle 3-at és alkalmazzuk Dr Agy módszerét lásd 2.7.

2.9. Emeljük köbre a függvényt és szorozzuk meg 3-mal.

2.11. Vezessünk be új ismeretlent: A a számtani közép, B a négyzetes közép.

2.1. Próbáljuk a különbséget szorzattá alakítani.

2.2. Alkalmazzuk az összehasonlításoknál az előző 2.1 feladatot.

2.3. Alkalmazzuk az összehasonlításoknál a 2.1 feladatot.

2.4. Alkalmazzuk a Szűcs Adolf egyenlőtlenséget (2.3 feladat), ha lehet.

2.1. Az egyenlőszárú a legjobb. Ha egy másik alapját az egyenlőszárúéval fedésbe hozzuk, egy tükrözés után alkalmazhatjuk a háromszögegyenlőtlenséget.

2.1.

1. segítség, útmutatás. A két négyzetösszeg szorzata és a keresett kifejezés négyzete kapcsolatba hozható.

2. segítség, útmutatás. Lásd még az ugyanezen a trükkön múló, de teljesen más típusú 5.25 feladatot.

2.2. Írjuk fel az alábbi λ-ban másodfokú egyenlőtlenséget:

$$(a_1 - \lambda b_1)^2 + (a_2 - \lambda b_2)^2 + \cdots + (a_n - \lambda b_n)^2 \geq 0.$$

2.3. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (2.2 feladat).

2.4. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (2.2 feladat).

2.5. Ha lehet, ne hivatkozzunk a egyenlőtlenségre (2.2 feladat), de persze abból is kijön.

2.6. Indukcióval.

2.7. Az $x_i = b_i^2$ helyettesítés kell.

2.9. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (2.2 feladat).

2.2. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (2.2 feladat).

2.3. A **II.** igaz.

2.5. Mindkettő kijön a rendezési egyenlőtlenségből.

2.6. Akkor lesz a legkisebb, ha $a = b = c$. A bizonyításhoz úgy próbáljuk alkalmazni a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget, hogy lehessen(!) egyenlőség.

2.7. Próbáljuk meg először két számra három helyett.

2.8. A fölső becsléshez a számtani és a mértani közepeket érdemes használni. Az alsó elemibb.

2.12. Próbáljuk megoldani először $k = 3$-ra. Keressünk olyan számot, amire már teljesül és onnét bizonyítsuk indukcióval.

2.13. Legyen $q(x) = p(x) - p(x-1)$, ez p *különbségpolinomja.* Ennek foka (1-gyel) kisebb, mint p-é, így alkalmazhatunk indukciót a polinom fokára.

3. Polinomok

3.1. Akármivel is szorozzuk meg $x-1$-et, az együtthatóösszeg 0 lesz.

3.2. Osszunk maradékosan $x-a$-val.

3.4. Használjuk a 3.2 feladatot.

3.4. Behelyettesítés után tüntessük el a nevezőt.

3.6. Alkalmazzuk a $\sqrt[6]{x}=y$ helyettesítést és a kapott harmadfokú egyenletnek keressük az egész gyökét!

3.4. Mindegyiknél próbáljuk meg a gyökök összegét, kettősszorzat-összegét, szorzatát meghatározni az eredetiekéből. Használjuk a Vieta formulákat. Van sok olyan feladatrész, amelynél más meggondolás gyorsabban megoldáshoz vezet.

3.6. Ez a tulajdonság öröklődik a különbségpolinomra. Sőt, ha a különbségpolinom ilyen, akkor (esetleg a konstanst megváltoztatva) az eredeti polinom is ilyen. Határozzuk meg az ilyen másodfokú és harmadfokú polinomokat. A kapott eredmény alapján fogalmazzunk meg az általános formát amit indukcióval bizonyíthatunk.

3.4. a)-b) Próbálkozzunk az $(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)$ alakkal.

3.4. Alakítsuk a megadott kifejezést szorzattá! (Keressük meg az x^3-3x+2 polinom egyik gyökét!)

4. Lineáris egyenletrendszerek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

5. Vegyes feladatok

5.9. Számoljuk ki az eredményt számológéppel!

5.16. Alakítsuk szorzattá az $f(x)-f(y)$ kétváltozós polinomot!

5.17. „Gyökösítsük” a $\sqrt{n^2+n+1}-n$ különbséget.

5.19. Két törthöz adjunk 1-et, az egyikből pedig vonjunk le 1-et! A számlálókat alakítsuk szorzattá, majd szorozzunk át a nevezők legkisebb közös többszörösével. Összevonás után újból alakítsunk szorzattá!

5.20. Alkalmazzunk három területformulát! A kapott harmadfokú egyenlettől ne ijedjünk meg!

5.29. Emeljünk négyzetre.

Megoldások

1. Másodfokú függvények, polinomok

1.1. A megoldások:

a) $a(x) = (x-1)^2$

b) $b(x) = -(x^2+3)^2$

c) $c(x) = 2(x-1{,}5)^2$

d) $d(x) = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

e) $e(x) = -2(x-2)^2 = -2x^2 + 8x - 8$

f) $f(x) = -16(x-0{,}5)^2 = -16x^2 + 16x - 4$

g) $g(x) = 5(x \pm \sqrt{20})^2 = 5x^2 \pm \sqrt{20}x + 100$.

1.2. A megoldások:

a) $a(x) - 1 = (x-1)^2$

b) $b(x) + 1 = -(x+3)^2$

c) $c(x) - 2 = 2(x-1{,}5)^2$

d) $d(x) + 24 = (x-5)^2$

e) $e(x) - 8 = -2(x-2)^2$

f) $f(x) + 36 = 2(x+4)^2$

g) $g(x) - 88{,}75 = 5(x+1{,}5)^2$.

1.3. A megoldások:

a) $a(x) + 1 - c = (x-1)^2$

b) $b(x) + 9 - c = -(x+3)^2$

c) $c(x) + 4{,}5 - c = 2(x-1{,}5)^2$

d) $d(x) + 25/a - c = a(x-5/a)^2$

e) $e(x) - b^2/8 - c = -2(x-b/4)^2$

f) $f(x) + a - c = a(x+1)^2$

g) $g(x) + b^2/4a - c = a(x+b/2a)^2$.

1.1. Mindegyik kifejezést átalakítjuk egy teljes négyzet és egy valós konstans összegévé. Ez pontosan akkor lehet 0, ha a konstans és a teljes négyzet előjele különböző. Itt vannak az átalakított kifejezések: **a)** $(x-1)^2 + c - 1 = 0$ **b)** $-(x+3)^2 + c + 9 = 0$ **c)** $a(x-6/a)^2 + c - 36/a = a(x-6/a)^2 + \frac{ac-36}{a^2}) = 0$ **d)** $(x+b/2)^2 + 1 - b^2/4 = 0$ **e)** $-2(x-b/4)^2 + c + b^2/8 = 0$.

1.2. Az átalakítás során ezt kapjuk: $ax^2 + bx + c = a(x+b/2a)^2 + c - b^2/4a = a((x+b/2a)^2 + + \frac{4ac-b^2}{4a^2}) = 0$, ez pedig pontosak akkor megoldható, ha $4ac \le b^2$. Ebben az esetben a fenti egyenletet a-val egyszerűsítve ezt kapjuk: $b^2 - 4ac = 4a^2(x+b/2a)^2$. Vagyis $2ax + b = \pm \pm\sqrt{b^2-4ac}$, innen a (két) megoldás:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(Lásd még az 1.12 feladatot.)

1.1. Az **a)** esetben $2ax + b = 2x = \pm 2$ választással $a = 1$, $b = 0$ és $c = -1$. Az egyenlet $x^2 - 1 = 0$. A **b)** esetben $2ax + b = 2x - 4 = \pm 2$ választással $a = 1$, $b = -2$ és $c = 3$. Az egyenlet $x^2 - 4x + 3 = 0$. A **c)** esetben $2ax + b = 2x - 3 = \pm 1$ választással $a = 1$, $b = -3$ és $c = 2$. Az egyenlet $x^2 - 3x + 2 = 0$. A **d)** esetben $2ax + b = 2x - 2 = \pm 1$ választással $a = 1$, $b = -2$ és $c = 3/4$. Az egyenletet 4-gyel szorozva $4x^2 - 8x + 3 = 0$. Az **e)** esetben $2ax + b = 2x + 2 = \pm 2\sqrt{2}$ választással $a = 1$, $b = 2$ és $c = -1$. Az egyenlet $x^2 + 2x - 1 = 0$. Az **f)** esetben a nevezőket eltüntetve $2ax + b = 144x - 17 = \pm 1$, így $a = 72$, $b = -17$ és $c = 1$. Az egyenlet $72x^2 - 17x + 1 = 0$. A **g)** esetben $2ax + b = 2x - \sqrt{2} - 1 = \pm(\sqrt{2} - 1)$ választással $a = 1$, $b = -\sqrt{2} - 1$ és $c = \sqrt{2}$. Az egyenlet $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$.

1.2. A megoldások: (természetesen többféle szorzatalak is lehetséges a konstansszorzók helyzetétől függően) **a)** $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ **b)** $-x^2-4x-4 = -(x+2)^2$ **c)** $-2x^2-6x-4{,}5 = -2(x+1{,}5)^2$ **d)** $x^2-10x+24 = (x-5)^2-1 = (x-6)(x-4)$ **e)** $-2x^2+8x+10 = -2(x-2)^2+2 = -2(x+1)(x-5)$ **f)** $-12x^2+16x-4 = -12(x-2/3)^2+4/3 = -12(x-1/3)(x-1)$ **g)** $g(x) = 5x^2 + 51x + 10 = 5(x + 5{,}1)^2 - 120{,}05 = 5(x + 1/5)(x + 10)$.

1.3. A szorzatalakok:

a) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

b) $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

c) $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

d) $4x^2 - 8x + 3 = (2x - 1)(2x - 3)$

e) $x^2 + 2x - 1 = (x - (\sqrt{2} - 1))(x + \sqrt{2} + 1)$

f) $72x^2 - 17x + 1 = (9x - 1)(8x - 1)$

g) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = (x - 1)(x - \sqrt{2})$.

1.4. Legyenek az előírt megoldások p és q, ezkből készül egy másodfokú kifejezés. Ezt szorzattá alakítjuk: $s(x - t)(x - u)$. Ha ebbe p-t helyettesítünk, akkor 0-t kell kapjunk, hiszen így készült a kifejezés. De egy szorzat csak akkor lehet 0, ha legalább az egyik tényezője az, vagyis $p - t = 0$ vagy $p - u = 0$. Hasonlóan q-ra. Ezt akartuk igazolni. Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy egy másodfokú kifejezésnek (polinomnak) legfeljebb két megoldása (gyöke) van.

1.5. A két lényegesen eltérő szorzatalak $x^2-1 \equiv (x-1)(x+1) \equiv (x+3)(x-3) \pmod 8$. Ennél több nincs, hiszen ha az egyik tényezőt megadjuk, akkor a másik már egyértelműen megkapható a polinomosztás segítségével. (Lásd 3.3) De ha az első szorzatalakba behelyettesítjük a 3-at, akkor is 0-t kapunk, hiszen $2 \cdot 4 \equiv 0 \pmod 8$. Itt ugyanis nem igaz a fent idézett törvényszerűség, hogy egy szorzat csak akkor lehet 0, ha legalább az egyik tényezője 0.

1.6. Szorozzuk meg $f(x)$-et egy konstanssal úgy, hogy a főegyütthatója megegyezzen $g(x)$ főegyütthatójával. A gyökök továbbra is ugyanazok, de most már a két polinom különbsége $h(x)$ legfeljebb elsőfokú, viszont a két gyök $h(x)$-nek is gyöke. Így viszont $h(x)$ azonosan nulla, ez volt a bizonyítandó.

A bizonyítás során kihasználtuk, hogy két *különböző* gyök van. Ez persze nem feltétlenül igaz. De ha egy másodfokú $ax^2 + bx + c$ polinomnak csak egy gyöke van, p, akkor az 1.2 feladatbeli megoldóképletben $(2ax+b)^2 = 0$-t kapunk. Ennek gyöke $p = -b/2a$ vagyis $b = -2ap$ és $c = ap^2$. Azaz a polinom $ax^2 - 2apx + ap^2 = a(x - p)^2$. Ez igyaz $f(x)$-re és $g(x)$-re is, tehát tényleg egymás konstansszorosai.

1.7. Ha a két gyök p és q, akkor egy ilyen polinom $(x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + pq$. Az előző feladat szerint ez csak konstansszorzóban különbözik $ax^2 + bx + c$-től. Ez a konstans a. Vagyis $a(x - p)(x - q) = ax^2 - a(p + q)x + apq = ax^2 + bx + c$, ezek szerint tényleg $b = -a(p + q)$ és $c = apq$.

1.8. Az 1.2 feladat szerint a két gyök (ha léteznek) $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Vagyis a szorzatalak

$$a(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}).$$

1.9. Behelyettesítve $a+b$-t azt kapjuk, hogy $0 = (a+b)^2 - k(a+b) + a^2 - b^2 = 2a^2 + 2ab - k(a + b) = (a + b)(2a - k)$. Ezek szerint, ha $a + b = 0$, akkor mindegy, mi a k. Ha pedig $a + b \neq 0$, akkor $k = 2a$ a megoldás.

1.10. **a)** x^2+3x-9 **b)** $x^2-6x-36$ **c)** x^2-5x-5 **d)** $x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$ **e)** $x^2-27x+81$.

1.11. A megoldások **a)** ax^2-bx+c **b)** $a^2x^2+(2ac-b^2)x+c^2$ **c)** $a(x-1)^2+$ $+b(x-1)+c=ax^2+(b-2a)x+a-b+c$ **d)** cx^2+bx+a **e)** $a^2x^2-(b^2-4ac)$ **f)** $x^2+(2-\frac{b^2}{ac})x+1$.

1.1. Átalakítva $f(x)=(x-2)^2+c-4$. Ez minimális az $x=2$ helyen, itt az értéke $c-4$. Ha $c\leq 4$, akkor metszi ($c=4$ esetén érinti) az x tengelyt, mégpedig $x-2=\pm\sqrt{4-c}$, azaz $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-c}$ esetén. Az y tengelyt $y=c$-ben metszi. A c megadott értékei esetén a függvény grafikonja rendre az x tengely felett, azt érintve illetve azt metszve helyzkedik el. A grafikonok szimmetrikusak az $x=2$ egyenesre. (A grafikon egy parabola, ezt az 1.11 feladatban bizonyítjuk be, de addig is hallgatólagosan használjuk, legalábbis az elnevezését.)

1.2. **a)** Átalakítva $f(x)=|x-3|+x-3$, vagyis $x\leq 3$ esetén $f(x)=0$, $x\geq 3$ esetén pedig $f(x)=2x-6$, a grafikonja két félegyenesből áll. **b)** Ha $G(x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$, akkor $G(x)$ grafikonja egy, az x tengelyt 3-ban érintő parabola. Ennek y tengelytől jobbra eső részét tükrözve az y tengely bal oldalára kapjuk $g(x)=G(|x|)$ grafikonját. **c)** Most $h(x)=|G(x)-4|$, vagyis $G(x)$ grafikonját 4 egységgel letoljuk és az x tengely alatti részt az x tengelyre tükrözzük, így kapjuk $h(x)$ grafikonját. **d)** A kiindulási $G(x)-4$ függvénynek -4 a miniumértéke. Ezek szerint a kérdéses egyenletnek $p>4$ esetén kettő, $p=4$ esetén három, $0<p<4$ esetén négy, $p=0$ esetén kettő megoldása van, $p<0$ esetén pedig nincsen megoldása.

1.3. Azt kapjuk, hogy $f_c(x)=(x+c/2)^2+3-c^2/4$. Ennek minimumhelye $x=-c/2$, minimumértéke $y=3-c^2/4$, ez lényegében megválaszolja a **b)**, **c)** és az **e)** kérdéseket. Mivel $f_c(2)=2c+7$, ezért **d)**-re a válasz $c=-3{,}5$. Mivel a főegyüttható 1, a Vieta formulák miatt (ha léteznek) a gyökök összege $-c$, szorzatuk 3. Ha egészek, akkor csak 3,1, illetve $-3,-1$ lehetnek, e két lehetőség $c=\pm 4$ esetén fordul elő. Ezzel válaszoltunk **f)**-re. Mivel minden $x\neq 0$ esetén $f_c(x)$ értéke függ c-től, de $f_c(0)$ nem, így **h)**-ra a válasz: igen, a $(0;3)$ pont, **i)**-re pedig: a $(0;d)$ pontok, ahol $d\neq 3$. A **g)** kérdésre a válasz a $(-c/2;3-c^2/4)$ pontok által alkotott görbe, ezt $d=-c/2$ helyettesítésel így is írhatjuk $(d;3-d^2)$. Ez pedig láthatóan egy alulról nyitott parabolát ír le.

1.4. Átalakítva $f(x)=(x-3)^2-4$, a parabola csúcsa $(3;-4)$. **b)** $(x-2)^2-6(x-2)+4=$ $=x^2-10x+20$. **c)** $(x-u_1)^2-6(x-u_1)+5+u_2$. **d)** $-x^2+6x-5$. **e)** $-(x-3)^2+2a+4$. **f)** $(-x)^2+6x+5$. **g)** $(x-2b+3)^2-4$. **h)** $-(-x)^2-6x-5$. **i)** $-(x-2c+3)^2+2d+4$.

1.5. **b)** $3x^2$. **c)** $x^2/9$. **d)** A két transzformáció egymásutánja, $x^2/3$.

1.6. **b)** $3(x^2-6x+5)$. **c)** $(x/3)^2-6(x/3)+5$. **d)** A két transzformáció egymásutánja, $x^2/3-$ $-6x+15$.

1.7. **a)** $(x+3)^2+6(x+3)-4$. **b)** x^2+6x-6. **c)** $(x+3)^2+6(x+3)-6$.

1.8. **a)**$(3x)^2+6(3x)-4$. **b)** $x^2/3+2x-4/3$. **c)** a kettő egymásutánja $3x^2+6x-4/3$.

1.9. Ha $a\neq 0$, akkor nem is másodfokú a függvény. Ha $a<0$, akkor mindent -1-gyel szorozva a grafikon tükröződik az x tengelyre, így a szélsőérték is ellentétére változik, a szélsőértékhely pedig változatlan marad. Ezért mostantól legyen $a>0$.

A szokásos átalakítással $f(x)=a((x+b/2a)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2})$. Ennek szélsőértékhelye ott van, ahol a teljes négyzetnek, azaz $x=-b/2a$ esetén, ott az értéke $y=a(\frac{4ac-b^2}{4a^2})=\frac{4ac-b^2}{4a})$, ez minimum. (Vagyis $a<0$ esetén pedig maximum.)

1.10. A megoldás: $f_{a,b,c}(x) = a((x+b/2a)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}) = a(f_{1,0,0}(x+b/2a) + \frac{4ac-b^2}{4a^2})$, vagyis (belülről kifele haladva) először eltoljuk az alapfüggvény grafikonját $-b/2a$-val jobbra, utána $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$-tel felfelé, végül a arányban az x tengelyre merőlegesen affinítjuk. (Más helyes transzformáció-sorrend is van.)

1.11. Mivel eltolással és affinítással a parabola parabolába megy át, ezért elég a $g(x) = x^2$ függvény grafikonjáról igazolni. A parabola vezéregyenese merőleges a szimmetriatengelyre, vagyis párhuzamos az x tengellyel. A fókuszpont pedig rajta van a szimmetriatengelyen, az y tengelyen és a csúcspontra vett tükörképe a vezéregyenesre esik. Tehát ha valóban paraboláról van szó, a fókuszpontja $(0; p)$, a vezéregyenese az $y = -p$ egyenes valamilyen $p > 0$ valós számra.

A grafikon egy tetszőleges $(a; a^2)$ pontjának távolsága a vezéregyenstől $a^2 + p$, a fókuszponttól $\sqrt{a^2 + (a^2 - p)^2}$. Ezek pontosan akkor egyenlőek, ha a négyzeteik azok, vagyis átrendezve $(a^2 + p)^2 - (a^2 - p)^2 = a^2$. Szorzattá alakítva, majd a^2-tel egyszerűsítve: $4p = 1$, azaz $p = 1/4$. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, a $p = 1/4$ választás minden pontra jó, vagyis a grafikon tényleg parabola.

(Tulajdonképpen csak azt mutattuk meg, hogy a függvény grafikonja illeszkedik erre a parabolára. De fordítva, ha $P(a, b)$ egy pontja a parabolának, akkor az előző számítást visszafelé elvégezve azt kapjuk, hogy $b = a^2$, vagyis a parabola is illeszkedik a grafikonra, tehát a két alakzat azonos.)

1.12. **a)** Ez már volt az 1.9 feladatban. **b)** és **c)** Lásd az 1.2 feladatot, vagyis a másodfokú függvény megoldóképletét.

1.13. Ha $D < 0$, akkor nem vált előjelet a függvény, tehát $a < 0$ esetén seholsem pozitív, $a > 0$ esetén mindenhol potitív. Ha $D = 0$, akkor hasonlóan $a < 0$ esetén seholsem pozitív, $a > 0$ esetén $x = -b/2a$ kivételével mindenhol.

Ha $D > 0$ és $a < 0$, akkor a két gyök között pozitív, vagyis akkor, ha $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} < x < \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Ha viszont $a > 0$, akkor a két gyökön kívül pozitív, vagyis akkor, ha $x < \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ vagy $x > \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

1.1. Az 1.12 feladatot használva $b = 40$ és $8c + b^2 = D = -40$, vagyis $c = -205$.

1.2. Természetesen $p \leq 0$, hiszen egyébként nincs felső korlátja a függvénynek. Ha $p = 0$, akkor pl $x = 1$-re nem teljesül az egyenlőtlenség. Ha $p < 0$, akkor a függvény maximumértéke $\frac{-D}{4a} = \frac{-144-20p}{4p} < 0$, vagyis $-36 - 5p > 0$. Mindent összevetve $p < -7{,}2$.

1.3. **a)** Itt $-2 = -c/2$, vagyis $c = 4$, az érték -3. **b)** Itt $-2 = c/8$, vagyis $c = -16$, az érték 28. **c)** Itt a gyökök átlaga $-2 = \frac{c/2-5}{2}$, vagyis $c = 2$, az érték -18. **d)** Itt az elsőfokú tag együtthatója 0, vagyis mindenképpen 0 a szélsőértékhely, nincs megfelelő c érték.

1.4. A csúcspont mindenképpen $(\frac{-p}{2}; \frac{-p^2+4q}{4})$. **a)** $p = -6$, $q = -10$. **b)** $p = 0$, $q = 5$. **c)** Nincs ilyen p, q, hiszen a főegyüttható pozitív, vagyis a függvénynek nincs maximuma. **d)** $f(x) = (x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$ adja a megoldást.

1.5. **a)** $c = f(0) = 0)$ és $-72 + 6b = f(6) = 0$ adja $b = 12$-t. **b)** A csúcspont $(\frac{b}{4}; \frac{b^2+8c}{8})$. Vagyis $b = -12$ és így $8c = 400 - 144$ miatt $c = 32$. **c)**Ezt már megoldottuk 1.1-ben, $b = 40$, $c = -205$. **d)**Ez nem fordulhat elő, hiszen a főegyüttható pozitív.

1.6. Használjuk az 1.13 feladat megoldását. **a)** f gyökei -4 és 5, ezeken *kívül* pozitív, g gyökei -2, 6, ezeken *kívül* pozitív, vagyis a megoldás: $x < -4$ és $x > 6$ intervallumok. **b)**Itt az új g gyökei -2 és 4, a két gyök *között* pozitív, vagyis nincs közös pozitivitási tartománya a két függvénynek.

1.7. Mivel csak egy nullhelye van, a -10, ezért $f(x) = q(x+10)^2$. Az együtthatók összehasonlításával kapjuk, hogy $q = 0{,}01$, $p = 0{,}2$.

1.8. A másodfokú függvény grafikonja nem lehet lefelé nyíló parabola:

$$a \geq 0. \tag{1}$$

A függvény értéke 0-ban nem lehet negatív:

$$c \geq 0. \tag{2}$$

A függvénynek nem lehet két zérushelye:

$$b^2 - 4ac \leq 0. \tag{3}$$

A három kapott feltétel elégséges is. Ha $a = 0$, akkor azért, mert ilyenkor (3) egyenlőtlenségben szükségképpen $b = 0$ és (2) miatt $c \geq 0$, ahol c maga a „másodfokú" kifejezés. Ha pedig $a > 0$, akkor a parabola felfelé nyílik és (3) miatt legfeljebb egy zérushelye van, azaz pontjai az x-tengelyen és „fölötte" lehetnek.

1.9. **a)** Ha $p < 1$, akkor maximuma van, ha $p = 1$, akkor nemkonstans lineáris, egyik sem lehet, vagyis $p > 1$. Még az kell, hogy ne legyenek gyökei, vagyis $0 > D = 4p^2 - 4(p-1)(p+3) = 8p + 12$. Ebből $p > 1{,}5$ adódik. **b)** Először is szükséges, hogy *létezzen* két gyök, vagyis $p \neq 1$ és $D > 0$, ami az előző rész miatt $1 \neq p < 1{,}5$ esetén teljesül. Az $x = 1$ helyen a behelyettesítési érték $f(1) = p - 1 - 2p + p + 3 = 2$ pozitív, vagyis a nagyobbik gyök mindenképpen pozitív. Az kell még, hogy a két gyök szorzata is pozitív legyen, vagyis $c/a = (p-1)(p+3) > 0$. Ez akkor teljesül, ha $p > 1$ vagy $p < -3$. Mindent öszevetve: $p < -3$ és $1 < p < 1{,}5$ intervallumok jók.

1.10.

1. megoldás. Akkor lesz két különböző gyöke, ha $m \neq -2$ és $0 < D = (2m+3)^2 + 8(m+2) = 4m^2 + 20m + 25 = (2m+5)^2$. Vagyis $m \neq -2$ és $m \neq -2{,}5$. Két negatív gyöke csak úgy lehet, ha a szorzatuk $-2/(m+2) > 0$, vagyis $m < -2$. Mivel $f(-2) = 4(m+2) - 2(2m+3) - 2 = 0$, ezért csak az kell, hogy a másik gyöke is kisebb legyen, mint -1. Ez pontosan akkor teljesül, ha a gyökök összege kisebb, mint -3. A gyökök összege $-(2m+3)/(m+2) < -3$ pontosan akkor, ha $-2m - 3 > -3m - 6$, egyszerűsítve $m > -3$.

Mindent összevetve $-3 < m < -2$, de $m \neq -2{,}5$.

2. megoldás. Alkalmazzuk az $y = x + 1$ helyettesítést. A kapott $0 = (m+2)(y-1)^2 + (2m+3)(y-1) - 2 = (m+2)y^2 - y - (m+3)$ egyenletnek két különböző negatív gyöke kell legyen. Két különböző gyöke akkor van, ha a diszkrimináns pozitív, azaz $0 < 1 + 4(m+2)(m+3) = 4m^2 + 20m + 25 = (2m+5)^2$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $m \neq -2{,}5$. Mivel a diszkrimináns négyzetszám, a gyökök könnyen meghatározhatóak:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm (2m+5)}{2m+4} = \{-1; 1 + \frac{1}{m+2}\}.$$

Ezek egyike negatív, a másik pontosan akkor negatív, ha $-1 < m + 2 < 0$.

Mindent összevetve $-3 < m < -2$, de $m \neq -2{,}5$.

1.11.

$$y = \sqrt{\frac{a^4 + 8a^2 + 16}{4a^2}} + \sqrt{\frac{a^4 - 8a^2 + 16}{4a^2}} = \left|\frac{a^2+4}{2a}\right| + \left|\frac{a^2-4}{2a}\right|.$$

Mivel $0 < a \leq 2$, így $|a^2 - 4| = 4 - a^2$, így

$$y = \frac{a^2+4}{2a} + \frac{4-a^2}{2a} = \frac{4}{a}.$$

1.12. Ha $x \neq k/2$, akkor a nevezővel szorozhatunk és rendezés után a $(4-k)x = 2k+5$ egyenletet kapjuk. Ennek $k = 4$ esetén nincs megoldása, $k \neq 4$ esetén pedig $x = \frac{2k+5}{4-k}$ az egyetlen megoldása. Ellenőrizendő, hogy $\frac{2k+5}{4-k} = \frac{k}{2}$ mikor fordul elő. Ekvivalens átalakítással $4k + 10 = 4k - k^2$, ez pedig lehetetlen. Összegezve: $k = 4$ esetén nincs megoldás, egyébként pedig egy megoldás van.

A második kérdés ezt jelenti: Mikor lesz $3 < \frac{2k+5}{4-k}$. Ekvivalens(!) átalakítással $0 < \frac{2k+5-12+3k}{4-k} = \frac{5k-7}{4-k}$, vagyis mikor pozitív $(5k-7)(4-k)$. Mivel ez k-val mint változóval negatív főeggyütthatós másodfokú függvény, ezért a két gyök között pozitív, azaz $1{,}4 < k < 4$ esetén.

1.13. Mivel f páratlan függvény, elég a pozitív x helyettesítésekre vizsgálni. Ezekre a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség miatt

$$1 = x\frac{1}{x} \leq \frac{x + 1/x}{2}, \text{ vagyis } 2 \leq f(x),$$

itt egyenlőség lehetséges. Most már csak azt kellene belátnunk, hogy $f(x)$ bármilyen 2-nél nagyobb értéket is felvesz. Legyen tehát $t > 2$. Ekkor, követve a számtani-mértani egyenlőtlenség (egyik) bizonyítását:

$$(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 = x + \frac{1}{x} - 2 = t - 2; \qquad (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 = x + \frac{1}{x} + 2 = t + 2.$$

Ezért $2\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{t-2} + \sqrt{t+2}$, vagyis $x = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$.

Végül az értékkészlet: $\mathbb{R} \setminus (-2; 2)$.

Vegyük észre, hogy $g(x) = \sqrt{2}f(x/\sqrt{2})$. Így $g(x)$ értékkészlete $\mathbb{R} \setminus (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

1.14. Vegyük észre, hogy

$$h(x) = x + \frac{1}{x+1} = f(x+1) - 1,$$

így $h(x)$ értékkészlete $\mathbb{R} \setminus (-3; 1)$.

1.15. Most így alakíthatjuk:

$$i(x) = x + 1 + \frac{2}{x+1} = \sqrt{2}f\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right),$$

így $i(x)$ értékkészlete $\mathbb{R} \setminus (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

1.16. Hasonlóan az eddigiekhez:

$$1/j(x) = x - 1 + \frac{3}{x+2} = \sqrt{3}f\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) - 3,$$

így $1/j(x)$ értékkészlete $\mathbb{R} \setminus (-2\sqrt{3} - 3; 2\sqrt{3} - 3)$. Végül $j(x)$ értékkészlete

$$\left[\frac{1}{-2\sqrt{3}-3}; \frac{1}{2\sqrt{3}-3}\right] = \left[\frac{3-2\sqrt{3}}{3}; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right].$$

1.17. Szemléltetjük az algoritmust egy konkrét példán. Legyen

$$k(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-x-1} = \frac{x^2 - 0{,}5x - 0{,}5 + 0{,}5x + 1{,}5}{2x^2-x-1} = 0{,}5 + 0{,}5\frac{x+3}{2x^2-x-1}.$$

Az átalakításból látszik, hogy elég meghatározni az így kapott elsőfokú és másodfokú függvények hányadosának értékkészletét. A konstansszorzó és konstans összeadandó ezek után már nem okoz gondot. Ha a fenti egyszerűsítés során a számlálóban esetleg nulladfokú polinom maradna, akkor a nevező értékkészletéből könnyen megkapjuk az eredeti függvény értékkészletét is. (Például $l(x) = 1 + \frac{2}{x^2+1}$ értékkészlete $(1; 3]$.)

A kapott $\frac{x+3}{2x^2-x-1}$ függvénynek először vesszük a reciprokát és ennek az értékkészletét fogjuk mehatározni. Ezt visszavezetjük az 1.13 feladatban definiált $f(x)$ függvényére:

$$\frac{2x^2-x-1}{x+3} = 2x - 7 + \frac{20}{x+3} = 2x + 6 + \frac{20}{x+3} - 13 = 2\sqrt{10} f\left(\frac{x+3}{\sqrt{10}}\right) - 13.$$

Tehát a fenti sor függvényének értékkészlete $\mathbb{R} \setminus (-4\sqrt{10} - 13; 4\sqrt{10} - 13)$. Így az eredeti $k(x)$ értékkészlete $\mathbb{R} \setminus (0{,}5 + 0{,}5\frac{1}{-4\sqrt{10}-13}; 0{,}5 + 0{,}5\frac{1}{4\sqrt{10}-13})$. (A reciprokvételnél ügyelni kell az előjelekre. Jelen esetben az intervallum mindkét vége negatív volt.)

1.18. Egyoldalra rendezve a $(p-1)x^2 + (3p-1)x + 2p - 1 = 0$ egyenletet kapjuk. Ez nem másodfokú, ha $p = 1$, ekkor van is megoldása. Ha viszont $p \neq 1$, akkor a megoldás szükséges és elégséges feltétele, hogy $0 \leq D = (3p-1)^2 - 4(p-1)(2p-1) = p^2 + 6p - 3$ legyen. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha p nincs benne a $(-3-2\sqrt{3}; -3+2\sqrt{3})$ intervallumban. Mivel 1 sincs benne ebben, ezért a végeredményt megkaptuk.

1.19. Természetesen ez ugyanaz, mint az

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}$$

függvény értékkészletének meghatározása. Mindkét módsszer ugyanazt adja. Az első módszer kicsit körülményesebb, de a szélsőértékeket nyomon követve a szélsőérték-helyeket is egyből megkaphatjuk. A második módszer segítségével ehhez a $D = 0$ esetben meg kell keresnünk a megfelelő x-et. Tulajdonképpen ez sem nehéz, hiszen ha tudjuk, hogy $D = 0$, akkor $x = -b/2a$, vagyis a mi esetünkben $(1-3p)/(2p-2)$. Ide kell behelyettesítenünk a $D = 0$ egyenletből kapott (két) p értéket.

Másik előnye az első módszernek, hogy általában paraméteres függvények esetén is működik, például az 1.23 feladatnál. Ilyenkor a második módszer jóval nehézkesebb.

1.20. Mindhárom tényező lineáris, vagyis előjelváltás csak egyszer történik, amikor az x változó „áthalad” a nullhelyén. Sorbaállítjuk a gyököket: $-3 < -1 < 2$, így létrejön négy intervallum. Ezeken az intervallumokon az előjel állandó, a határokon pedig megváltozik. Ezek szerint a szorzat pozitív, ha $2 < x$ illetve, ha $-3 < x < -1$.

1.21. Az előző 1.20 feladat gondolatmenetét követve, a gyökök (függetlenül attól, hogy a számlálóban vagy a nevezőben vannak): $-4 < -3 < -1 < 1 < 2$. Ráadásul most a dupla gyökök miatt nincs előjelváltás a -1-nél, és az 1-nél. Vagyis a szorzat pozitív, ha $2 < x$ illetve, ha $-4 < x < -3$.

1.22. Az első kérdére a választ szorzattáalakítással kapjuk:

$$f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+2x-3} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-1)},$$

vagyis pozitív, ha $3 < x$ illetve, ha $-2 < x < 1$ illetve, ha $x < -3$.

A második kérdésre a választ nem úgy keressük, hogy szorzunk a nevezővel. Akkor ugyanis azt kellene diszkutálnunk, hogy mikor negatív a nevező. Vagyis inkább:

$$0 < \frac{x^2-x-6}{x^2+2x-3} - 2 = \frac{x^2-x-6-2x^2-4x+6}{x^2+2x-3} = \frac{-x^2-5x}{x^2+2x-3} = \frac{-x(x+5)}{(x+3)(x-1)}.$$

Ez pozitív, ha $0 < x < 1$ illetve, ha $-5 < x < -3$.

1.23. Legyen a t ismeretlen 1-gyel több, mint az utazásra szánt idő, ennek segítségével a csapat ütőereje $f(t) = 10000(9 - t)(t - 1)/t = 10000g(t)$ a képlet szerint. (Itt $y = t - 1$ és $x = 3000 + + 1000(5 - (t - 1))$.) Ennek maximuma a kérdés az $1 < t < 6$ intervallumban. Alakítsuk át $g(t)$-t az alábbiak szerint:

$$g(t) = \frac{-t^2 + 10t - 9}{t} = -t + 10 + \frac{-9}{t} = 10 - 3(\frac{t}{3} + \frac{3}{t}) \leq 4,$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $t = 3$. És itt $f(3) = 40000$.

1.24. A három kérdésre a válasz: **a)** $x = 90°$, függőlegesen; **b)** $x = 45°$ alatt; **c)** $x = 30°$ alatt $c = 24{,}25m/s$ kezdősebességgel.

2. Egyenlőtlenségek

2.1. a) Mindkét oldalból 4-et kivonva:

$$0 > \frac{3x + 5 - 4(7 - 3x)}{7 - 3x} = \frac{15x - 23)}{7 - 3x},$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $0 > (15x - 23)(7 - 3x)$, azaz, ha $x < 23/15$ illetve, ha $7/3 < x$.

b)Mindkét oldalból 1-et levonva

$$\frac{-2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1 - (x^2 + 1)}{x^2 + 1} < \frac{x^3 - 1 - (x^3 + 1)}{x^3 + 1} = \frac{-2}{x^3 + 1}.$$

Ez kétféleképpen teljesülhet. Vagy $x < -1$, ekkor a bal oldal negatív, a jobb pozitív, vagy $x > > -1$ (és ekkor mindkét oldal negatív), de $x^3 + 1 < x^2 + 1$, vagyis a jobb oldali tört nevezője a kisebb. Ez a második eset pedig $x > 1$ esetén teljesül. Összefoglalva: $x < -1$, illetve $x > 1$.

c)Négyzetre emelve a két pozitív oldalt:

$$2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x} < 10^{-4}.$$

Átrendezve és újra négyzetre emelve

$$4x^2 + 4x - 4 \cdot 10^{-4}x + (1 - 10^{-4})^2 < 4x^2 + 4x.$$

Újra átrndezve és $10^4/4$-gyel szorozva

$$49{,}995^2 = \left(\frac{(1 - 10^{-4})10^2}{2}\right)^2 < x.$$

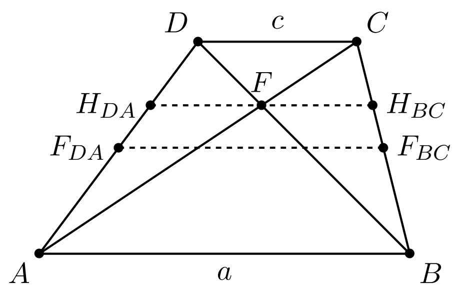
2.2. Alkalmazzunk indukciót n-re. Ha $n = 1$, akkor nincs mit bizonyítani. Ha $n = 2$, akkor tegyük fel, hogy $a_1/b_1 \leq a_2b_2$ és megmutatjuk, hogy $a_1/b_1 \leq (a_1 + a_2)/(b_1 + b_2)$, a másik ugyanígy belátható. A két oldalt megszorozva a nevezők szorzatával $a_1b_1 + a_1b_2 \leq a_1b_1 + a_2b_1$ adódik. Kivonás után $a_1b_2 \leq a_2b_1$, ez pedig ekvivalens $a_1/b_1 \leq a_2/b_2$-vel.

Ha már $n - 1$-re igaz, akkor tekintsük az n-re vonatkozó állítást és bontsuk fel a törtet két részre, az egyikben az első $n - 1$ darab „összege” áll, a másikban pedig az n-edik tört. Ezek „öszege” kisebb, mint az eredeti törtek közüla legnagyobb, hiszen indukció miatt az $n - 1$-es „összeg” kisebb, mint az első $n - 1$ közül a legnagyobb és ennél kisebb az n-es „összeg,” kivéve, ha az n-edik a legnagyobb, de akkor meg ennél kisebb. Az alsó korlát ugyanígy látható.

2.3. a) $a_n + \frac{1}{2^n} = 2$, vagyis $a_n < 2$ mindig, de más, kisebb korlát nem létezhet.
b) $2b_n + \frac{1}{3^n} = 3$, vagyis $b_n < 1{,}5$ mindig, de más, kisebb korlát nem létezhet.
c) $c_{2^n} - c_{2^{n-1}} \geq 0{,}5$, vagyis $c_{2^n} > n/2$, tehát nincs felső korlát.
d) Vegyük észre, hogy $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Emiatt $d_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, vagyis $d_n < 1$ mindig, de más, kisebb korlát nem létezhet.

2.4. Mivel $\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$, így a feladatbeli f_n összeg kisebb, mint a 2.3 feladatbeli $1 + d_{n-1} < 1 + 1 = 2$. (Megjegyzés: Euler híres eredménye, hogy f_n legkisebb felső korlátja $\pi^2/6$.)

2.1. a) és **b)** Lásd a G.II.8.5. feladatot.
c)
Geometriai okoskodás: Az alappal párhuzamos egyeneseknek a szárak közé eső darabja a hosszabbik alaptól a rövidebbik felé haladva (lineárisan) csökken. Az átlók metszéspontjának a két alaptól való távolsága úgy aránylik egymáshoz, mint a két alap hossza, ezért a rövidebbik alaphoz van közelebb (lásd az 1. ábrát), így hossza is ahhoz van közelebb, rövidebb, mint a középvonal.



2.1M.1. ábra.

Algebrai okoskodás: Igazolnunk kell, hogy pozitív számok esetén

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

A pozitív $2(a+b)$ kifejezéssel átszorozva az eredetivel ekvivalens

$$4ab \leq (a+b)^2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A zárójel felbontása és rendezés után a jól ismert

$$0 \leq (a-b)^2$$

összefüggéshez jutunk. Ez mindig teljesül, így eredeti egyenlőtlenségünk is igaz. Az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a = b$.

2.2. a) Ha kétszer t ideig ment az autó, akkor az összidő $2t$, az összút pedig $tv_1 + tv_2$. Ezek hányadosa

$$\frac{v_1 + v_2}{2}.$$

b) Ha a két város távolsága s, akkor az összút $2s$, az összidő pedig $s/v_1 + s/v_2$. Ezek hányadosa egyszerűsítés után

$$\frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

2.3. A Thalesz tétel szerint $CF = \frac{p+q}{2}$. A magasságtétel szerint $CT = \sqrt{pq}$. Utána még egy hasonlóság a kisháromszögbe adja, hogy a merőleges vetület hossza $2pq/(p+q)$, ami pont a harmonikus közép.

2.1. a) Ha az oldalak hosszai a és b, akkor $K = 2a + 2b$ adott, $T = ab$ becsülendő. Természetesen ab akármilyen kis pozitív lehet, ha a és b egyike közel van 0-hoz, másik közel $K/2$-höz. Legnagyobb pedig akkor lesz, ha egyenlőek, vagyis, ha négyzetről van szó, ugyanis $ab \le ab + (a-b)^2/4 = (a+b)^2/4 = K^2/16$ és itt egyenlőség akkor van, ha $a = b$. Hasonló módon mindig lehet szorzatból négyzetek különbségét csinálni: $2a \cdot 2b = (a+b+a-b)(a+b-(a-b)) = (a+b)^2 - (a-b)^2$.

b) Ez ugyanaz visszafelé. A kerület akármilyen nagy lehet, viszont $K \ge 4\sqrt{T}$.

2.2.

1. megoldás. a)

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \ge \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2a^2+2b^2 \ge a^2+2ab+b^2 \Longleftrightarrow a^2-2ab+b^2 \ge 0 \Longleftrightarrow (a-b)^2 \ge 0.$$

b)

$$\sqrt{a\cdot b} \le \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow 4ab \le (a+b)^2 \Longleftrightarrow 0 \le a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2.$$

c)

$$\sqrt{a\cdot b} \ge \frac{2ab}{a+b} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a\cdot b}} \ge \frac{2}{a+b} \Longleftrightarrow \sqrt{a\cdot b} \le \frac{a+b}{2} \text{ lásd b) fent.}$$

2. megoldás. b) Átrendezve:$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \ge 0$.

2.3. a) $x > 0$ esetén az alábbi átalakítás ekvivalens:

$$x + \frac{1}{x} \ge 2 \Longleftrightarrow x^2+1 \ge 2x \Longleftrightarrow x^2-2x+1 \ge 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 \ge 0.$$

b) $x < 0$ esetén

$$x + \frac{1}{x} \le -2 \Longleftrightarrow x^2+1 \ge -2x \Longleftrightarrow x^2+2x+1 \ge 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2 \ge 0.$$

2.4. Az előző 2.3 feladatban legyen $x = a/b$.

2.5. Az adott hiperbola egy általános $(a;\ 1/a)$ pontjának távolsága $(0;\ 0)$-tól $\sqrt{a^2+1/a^2}$, ez legalább $\sqrt{2}$ a 2.3 feladatbeli egyenlőtlenség miatt.

2.6. Alakítsuk át a megbecsülendő kifejezést:

$$g(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2$$

a 2.3 feladatbeli egyenlőtlenség miatt.

2.7. Ha a két szakasz hossza a és b, akkor $a+b$ állandó. A keresett területösszeg a^2+b^2. Ez a 2.2 feladat számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlensége szerint $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, ami állandó. Egyenlőség akkor, ha $a=b$.

Ebből a gondolatmenetből nehezen hozható ki, hogy a maximum pedig abban az esetben van, ha az egyik 0. Legyen inkább x a két szakasz hosszának különbsége, $t=\frac{a+b}{2}$ pedig az átlag. Ekkor a keresett négyzetösszeg $(t-x/2)^2+(t+x/2)^2 = 2t^2+x^2/2$. Ebből azonnal látszik, hogy a minimum $x=0$-ban van, de az is, hogy a maximum pedig akkor, ha x a lehető legnagyobb, azaz, ha az egyik szakasz hossza 0.

2.8. Legyen az állandó összeg t, a különbség $x>0$. Ekkor a két mennyiség $t/2-x/2$ és $t/2+x/2$. A szorzat $t^2/4-x^2/4$ tényleg annál nagyobb, minél kisebb x. A négyzetösszeg $t^2/2+x^2/2$ pedig tényleg annál nagyobb, minél nagyobb x.

2.9. Legyen a négyszög átlójának hossza c. Az egyik útirány a illetve b hosszúságú szakaszokból, a másik a' és b' hosszúságúakból. Tegyük fel azt, hogy $a'<a<b<b'$. A Pithagorasz tétel miatt $a^2+b^2=c^2=a'^2+b'^2$. A 2.8 feladat átfogalmazása szerint ha a négyzetösszeg állandó, akkor annál nagyobb az összeg, minél kisebb a különbség. Vagyis érdemes a(z a' hosszú) Kökörcsin utcán indulni, ugyanis ott nagyobb a különbség.

2.10. Legyen $A=\sqrt{a}$ és $B=\sqrt{b}$. Ekkor az első egyenlőtlenség

$$\frac{1}{8}\frac{(A-B)^2(A+B)^2}{A^2} = \frac{1}{8}\frac{(A^2-B^2)^2}{A^2} \leq \frac{A^2+B^2}{2} - AB = \frac{(A-B)^2}{2}.$$

Mindkét oldalt $8A^2/(A-B)^2$-tel szorozva és gyököt vonva $A+B \leq 2A$-t kapunk, ami magától értetődő. Ha a másik oldallal végezzük el a megfelelő műveleteket, akkor $A+B \geq 2B$-t kapunk, ami hasonlóan magától értetődő.

2.1. Legyen a vizsgált kifejezés f és alkalmazzuk a számtani és a négyzetes közép közti összefüggést (2.2. a) feladat):

$$\frac{f}{2} = \frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geq \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2,$$

azaz

$$\frac{f}{2} \geq \left(\frac{1+\frac{a+b}{ab}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{1}{ab}}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Most alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget!

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{ab} \geq 4,$$

amiből (1) figyelembevételével adódik a feladat állítása. Az egyenlőség csakis $a=b=\frac{1}{2}$ esetén teljesül.

2.2. **a)** Háromszor alkalmazva a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

b) Analóg módon felírható a pozitív számokra vonatkozó 2-hatvány változós számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenség:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

A bizonyítás indukcióval úgy megy, mint 4-re az **a)** részben.

2.1. Az
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca},$$
számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségek szorzatából kapjuk a vizsgált egyenlőtlenséget.

2.2.

1. megoldás. Az
$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad \frac{2bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{2}, \qquad \frac{2ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{2},$$
harmonikus és számtani közepek közti egyenlőtlenségek összegéből kapjuk a vizsgált egyenlőtlenséget.

2. megoldás. A mértani és számtani közép közti egyenlőtlenségek szerint $2ab \leq \frac{(a+b)^2}{2}$, így $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{a+b}{2}$. Írjunk fel hasonló egyenlőtlenséget a b és c illetve a c és a számpárokra, majd adjuk össze a három egyenlőtlenséget!

2.3. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget 1-re és a_i-re:
$$\frac{1+a_1}{2}\frac{1+a_2}{2}\cdots\frac{1+a_n}{2} \geq \sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\sqrt{a_n} = 1.$$
Ez pedig a bizonyítandó egyenlőtlenség 2^n-edrésze.

2.4. Ha az x, y, z számokat az abszolútértékükre cseréljük, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala nem változik, a jobb oldala pedig nem csökken. Így elég az állítást nemnegatív számokra igazolni. Írjunk fel két számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:
$$\frac{x^2+(y^2+z^2)}{2} \geq x\sqrt{y^2+z^2}, \qquad \frac{y^2+(x^2+z^2)}{2} \geq y\sqrt{x^2+z^2}.$$
Az egyenlőség rendre
$$x = \sqrt{y^2+z^2}, \qquad y = \sqrt{x^2+z^2} \tag{1}$$
esetén áll fenn. A két egyenlőtlenség összege a bizonyítandó állítás. Ebben tehát az egyenlőség akkor teljesül, ha (1) mindkét összefüggése fennáll, tehát minden olyan számhármasra, amelyben $z = 0$ és $x = y \geq 0$.
$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y,$$
tehát $f \geq 0$ és az egyenlőség $x = y = 1$ esetén teljesül.

2.5. Írjunk fel három számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget, mindig 1 és $(4a_i + 1)$ a két szám:
$$\sqrt{(4a_1+1)\cdot 1} \leq \frac{4a_1+1+1}{2}, \qquad \sqrt{(4a_2+1)\cdot 1} \leq \frac{4a_2+1+1}{2},$$
$$\sqrt{(4a_3+1)\cdot 1} \leq \frac{4a_3+1+1}{2}.$$
Az egyenlőség sehol sem teljesülhet, mert a_i pozitív, így $1 \neq 4a_i + 1$. Így a három egyenlőtlenség összege:
$$\sqrt{4a_1+1} + \sqrt{4a_2+1} + \sqrt{4a_3+1} < 2a_1 + 1 + 2a_2 + 1 + 2a_3 + 1 = 2(a_1+a_2+a_3) + 3 = 5.$$

2.6.

1. megoldás. Ha y-t paraméternek tekintjük, akkor f egy x-ben másodfokú függvény:

$$f(x,y) = g_y(x) = x^2 - x(y+1) + (y^2 - y + 1) = \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3y^2 - 6y + 3}{4} =$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2.$$

Ez négyzetösszeg, tehát a minimum legalább zérus, és az el is éretik az $y = 1$, $x = \frac{y+1}{2} = 1$ számpárnál. A függvénynek nincs maximuma, tetszőleges nagy értéket felvehet.

2. megoldás. Csak a függvény minimumát vizsgáljuk (maximuma nincs). Ha x és y helyére is az abszolút értéküket írjuk, akkor az f kifejezés értéke nem nő, így a minimum vizsgálatakor feltehető, hogy $x, y \geq 0$. Ha $A = \frac{x+y}{2}$, $B = \sqrt{xy}$, akkor

$$f = 4A^2 + 2A - 3B^2 + 1 = 3(A^2 - B^2) + (A-1)^2.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint $0 \leq B \leq A$, így $0 \leq f$ és egyenlőség csak $A = 1$ és $A = B$ esetén, azaz $x = y = 1$ esetén áll.

3. megoldás. Feltesszük, hogy $x, y \geq 0$ (lásd a 2.6M2. megoldást). Alkalmazzuk háromszor a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy, \qquad \frac{x^2+1}{2} \geq x, \qquad \frac{1+y^2}{2} \geq y.$$

Az egyenlőség rendre $x = y$, $x = 1$ és $y = 1$ esetén áll fenn. A három egyenlőtlenség összege:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y,$$

tehát $f \geq 0$ és az egyenlőség $x = y = 1$ esetén teljesül.

2.7. Hogy a négyzetesnél kisebb az azonnal látszik, hiszen a gyökjel alatt a négyzetek átlaga a szorzattal van „rontva.” A számtaninál pedig nagyobb, ugyanis négyzetreemelve:

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{x^2 + xy + y^2}{3}.$$

Most egyszerűsítés, rendezés után a kapott egyenlőtlenség:

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2,$$

ami azonosan igaz. A $\sqrt{A(x,y)N(x,y)}$ középnél pedig kisebb. A bizonyításhoz emeljünk kétszer négyzetre, rendezzük az egyenlőtlenséget, ezt kapjuk:

$$0 \leq x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = (x-y)^2(x^2 + 4xy + y^2).$$

Ez pedig mindig igaz.

Egyszerűsíthetünk a számoláson, ha x és y helyett $t = (x+y)/2$ és $s = (x-y)/2$ ismeretlenekre írjuk át az egyenleteket.

2.1.

1. megoldás. Ha $\sqrt[3]{x} = X$, $\sqrt[3]{y} = Y$, $\sqrt[3]{z} = Z$, akkor $x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} =$

$$= X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ = (X + Y + Z) \cdot (X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX),$$

és a jobb oldalon mindkét tényező nemnegatív (lásd a 2.1. feladatot)és a szorzat pontosan akkor zérus, ha $X = Y = Z$.

2. megoldás. A 2.2. feladat eredményét alkalmazzuk az x, y, z, $\frac{x+y+z}{3}$ számokra:

$$\frac{x + y + z + \frac{x+y+z}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{xyz\frac{x + y + z}{3}},$$

azaz a bal oldal átalakítása után

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[4]{xyz\frac{x + y + z}{3}}.$$

Innen negyedik hatványra emelés, majd a $\frac{x+y+z}{3}$ tényezővel való osztás után kapjuk a bizonyítandó állítást.

3. megoldás. Legyen az x, y, z pozitív számok átlaga S, tehát $x = S + \Delta x$, $y = S + \Delta y$, $z = S + \Delta z$, ahol

$$\Delta x + \Delta y + \Delta z = 0.$$

Ha x, y és z nem mind egyenlő, akkor van köztük az átlaguknál nagyobb és kisebb is. Legyen pl. $\Delta x \Delta y < 0$ és tekintsük az

$$x' = S, \qquad y' = S + \Delta x + \Delta y, \qquad z' = z$$

számhármast.

$$x'y'z' - xyz = S(S + \Delta x + \Delta y)z - (S + \Delta x)(S + \Delta y)z = -z\Delta x\Delta y \geq 0,$$

tehát a számok szorzata nőtt. Az x', z' számok továbbra is pozitívak, és y' is hiszen $0 < xyz < < x'y'z'$. Az eljárást megismételhetjük, az y', z' számok egyikét, és így egyszerre mindkettőt az S átlagra cserélhetjük, miközben a szorzatot növeljük. Adott összeg mellett tehát a szorzat akkor maximális, ha a három szám egyenlő.

2.2. Ha n 2-hatvány, akkor már bebizonyítottuk a 2.2 feladatban. Ha pedig az átlag s, és $n < 2^k$, akkor

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (2^k - n)s}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1a_2 \cdots a_n s^{2^k-n}}.$$

Most emeljük mindkét oldalt 2^k-adik hatványra és egyszrűsítsünk s megfelelő hatványával: $s^n \geq \geq a_1a_2 \cdots a_n$, ez pedig a bizonyítandó egyenőtlenség n-edik hatványa. A bizonyítás lépéseit ellenőrizve kapjuk, hogy egyenlőség csak akkor áll, ha minden a_i azonos.

2.3. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti összefüggést (lásd a 2.1. feladatot) az x, y, 1 számokra!

2.4. Írjuk fel a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az x^4, y^4, 4, 4 számokra!

$$\frac{x^4 + y^4 + 4 + 4}{2} \geq \sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot 4 \cdot 4} = 2|x||y|,$$

azaz $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$, tehát $\lambda = 8$ megfelelő. Mivel ilyenkor $x = y = \sqrt{2}$ esetén egyenlőség van, így kisebb λ nem is lehet jó.

2.5. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az alábbi $n+1$ számra: $a, a, \ldots, a$ és b.

2.6. Ha a kivágott saroknégyzetek oldala x, akkor a térfogat (cm^3-ben): $V(x) = x \cdot (30-2x)^2$. Ez pontosan akkor maximális, ha a $\sqrt[3]{4V(x)}$ mennyiség maximális, ami már jól elő van készítve a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazásához:

$$\sqrt[3]{4V(x)} = \sqrt[3]{4x \cdot (30-2x) \cdot (30-2x)} \leq \frac{4x + (30-2x) + (30-2x)}{3} = 20,$$

azaz $V(x) \leq \frac{20^3}{4} = 2000$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$4x = 30 - 2x = 30 - 2x,$$

azaz ha $x = 5$.

Tehát 5 cm oldalú négyzetek levágásakor lesz a doboz térfogata a legnagyobb.

2.7. Legyen $a, b > 0$, $a + b = 3$. Alkalmazhatjuk Dr. Agy módszerét a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{abp(x)} &= \sqrt[3]{(2a-ax)(b-bx)(3x+2)} \leq \frac{(2a-ax)+(b-bx)+(3x+2)}{3} = \\ &= \frac{2a+b+2}{3}\end{aligned}$$

felbontásra. Olyan esetet szeretnénk, amikor lehet egyenlőség is. Vagyis olyat, amikor a három tag egyenlő. Az első egyenlő a harmadikkal, ha $x = \frac{2a-2}{a+3}$, a második egyenlő a harmadikkal, ha $x = \frac{b-2}{b+3}$. Ez teljesül, ha ezek egyenlőek, azaz $(b-2)(a+3) = (2a-2)(b+3)$. Rendezve és felhasználva a $b = 3 - a$ egyenlőséget ezt kapjuk: $a^2 - 16a + 15 = 0$. Ennek két megoldása 15 és 1, ebből 15 nem jön szóba, mert $b = 3 - 15 < 0$. Tehát $a = 1$, $b = 2$ és a becslés egyenlőséget ad, ha $x = 0$. A kapott egyenlőtleség ebben az esetben $2p(x) \leq (\frac{2+2+2}{3})^3 = 8$, vagyis $p(x) \leq 4$, ami $x = 0$ esetben egyenlőséggel teljesül.

2.8. A lokális szélsőértékhelyek nem változnak, ha a konstanstagot megváltoztatjuk. Ezért legyen $f(x) = g(x) - 3 = x^2(3-x)$. Alkalmazzuk Dr Agy módszerét (lásd 2.7 feladat), de jelen esetben a két szorzó azonos 1/2 lesz. Legyen tehát $a = 1/2$, ekkor

$$-a^2 f(x) = ax \cdot ax \cdot (3-x) \leq \left(\frac{ax + ax + 3 - x}{3}\right)^3 = 1,$$

a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint. Egyenlőség teljesül, ha $1/2x = 3 - x$, vagyis, ha $x = 2$. Tehát a $g(x)$ függvény lokális szélsőértékhelyei 0 és 2, ezekben a függvényérték 3 és -1. Ez válaszol **c)**-re. A **d)** feladathoz pedig azt használjuk, amit már tudunk. Egy táblázatban összefoglalva a megoldásszámokat:

y	hány darab	hol
$y < -1$	1	$x < -1$
$y = -1$	2	$x = -1$, $x = 2$
$-1 < y < 3$	3	$-1 < x < 0$, $0 < x < 2$, $2 < x < 3$
$y = 3$	2	$x = 0$, $x = 3$
$3 < y$	1	$3 < x$

2.9. Alkalmazzuk a négytagú számtani és mértani közép közötti egyenlőséget:

$$\begin{aligned}3h^3(x) &= 3x^3(4000-x^3)^3 \leq \\ &\leq \left(\frac{3x^3 + (4000-x^3) + (4000-x^3) + (4000-x^3)}{4}\right)^4 = 3000^4.\end{aligned}$$

Ezek szerint $h^3(x) \leq 3^3 1000^4$, vagyis $h(x) \leq 30000$. Egyenlőség teljesül, ha $3x^3 = 4000 - x^3$ vagyis, ha $x = 10$.

2.11. Vezessünk be új ismeretlent: A a számtani közép, B a négyzetes közép. Ekkor az egyenlőtlenség az alábbi formába írható. (Itt n az átlag tagjainak száma.)

$$\sqrt{AB} \geq \sqrt{\frac{n^2A^2 + nB^2}{2 \cdot (\binom{n}{2} + n)}}.$$

Mindkét oldalt emeljük négyzetre és szorozzunk $n+1$-gyel.

$$(n+1)AB \geq nA^2 + B^2,$$

most pedig rendezünk egy oldalra:

$$0 \leq (n+1)AB - nA^2 - B^2 = (B-A)(nA-B),$$

itt az első tényező nem negatív, hiszen a számtani közép nem nagyobb, mint a négyzetes. A második tényező pedig pozitív, hiszen még $(nA)^2 \geq (\sqrt{n}B)^2$ is igaz.

2.1. Alakítsuk a különbséget szorzattá:

$$a_1b_1 + a_2b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1).$$

Itt a jobb oldal pozitív.

2.2. Ha egy cserét csinálunk az indexeknél, akkor alkalmazhatjuk az előző 2.1 feladatot. Ezek szerint akkor csökken az öszeg, ha kisebbet szorzunk nagyobbal. Az összehasonlítások eredménye (s_{ij}-vel jelölve a feladat szövegében az i-dik sor j-dik tagját): $\begin{array}{c|c|c|c} s_{11} & s_{12} & s_{21} & s_{23} \\ & s_{13} & s_{22} & \end{array}$ Minden elem nagyobb a tőle jobbra levő oszlopok elemeinél.

2.3. A korábbi 2.1 feladat miatt, ha egy indexpár két tagja nem egyezik, akkor kicserélve őket az összeg nem csökken. Így egyesével elérhető, hogy minden indexpár azonosakból álljon, bármiből is indultunk ki. Vagyis a legnagyobb tényleg $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Hasonlóan minden összeg növelés nélkül átváltható a fordított sorrendűvé, vagyit tényleg $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$ a legkisebb.

2.4. **a)** Alkalmazzuk az (a_1, a_2, a_3, a_4), (a_1, a_2, a_3, a_4) számsorozatokra a rendezési egyenlőtlenséget (2.4. feladat)! Nem tudjuk az elemek nagyságrendi sorrendjét, de ha mindegyik elemet önmagával (a másik sorozatban szeerplő párjával) szorozzuk, akkor a legnagyobb a legnagyobbal, a második legnagyobb a második legnagyobbal stb lesz összeszorozva, így

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_2 + a_4a_1 = 2(a_1a_4 + a_2a_3).$$

b) Az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$ példában a bal oldal a nagyobb, míg az $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$ kiosztásnál a jobb.

2.5.

1. megoldás. Alkalmazni fogjuk a rendezési egyenlőtlenséget (2.4. feladat) az $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4})$ számsorozatokra. E két sorozat ebben a felsorolásban nagyság szerint ellenkezően van rendezve (ha a_i a legkisebb az elsőben, akkor $\frac{1}{a_i}$ a legnagyobb a másodikban stb), így a szorzatösszegek közül

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \ldots + a_5 \cdot \frac{1}{a_5} = 5$$

a legkisebb, az

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_1}$$

szorzatösseg legalább ekkora.

2. megoldás. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{a_2}{a_3}$, $\frac{a_3}{a_4}$, $\frac{a_4}{a_5}$, $\frac{a_5}{a_1}$ számokra!

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_1}}{5} \geq \sqrt[5]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_1}} = 1$$

amiből átszorzással kapjuk a bizonyítandó állítást.

2.1. Akkor lesz legkisebb a kerület, ha a háromszög (az adott alappal tekintve) egynelőszárú. Ennek bizonyításáshoz vegyünk fel egy BC alapot. A lehetséges harmadik csúcspont a BC oldalegyenessel párhuzamos, attól az adott m távolságban lévő e egyenesen van. (Szimmetria miatt elegendő a szóbajövő két párhuzamos egyenes közül csak az egyiket tekinteni.) Legyen a BC felezőmerőlegesének és e-nek metszéspontja A, és legyen az e egyenes egy A-tól különböző pontja D. Az állítás bizonyításához elegendő igazolni, hogy $AB + AC < DB + DC$.

Tükrözzük C-t A-ra, így kapjuk az E pontot. Mivel A rajta van a BC felezőmerőlegesén, így a $BCE_\triangle$ derékszögű csúcsa B. A tükrözés miatt $AB + AC = AE + AC = EC$ és $DB + DC = DE + DC > EC$, ahol a szigorú egyenlőtlenség amiatt van, mert D nem pontja a CE szakasznak. A bizonyítást befejeztük.

2.1. Írjuk fel az alábbi hasznos egyenlőséget:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

Ebből azonnal látszik, hogy a keresett összeg legfeljebb 1 és egyenlőség csak akkor lehet, ha $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

2.2. Tegyük fel, hogy van olyan b_i, amely nem 0. Ha mind 0, akkor mincs mit bizonyítani. Legyen λ tetszőleges valós szám, ekkor taljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$(a_1 - \lambda b_1)^2 + (a_2 - \lambda b_2)^2 + \cdots + (a_n - \lambda b_n)^2 \geq 0. \tag{2}$$

Ha felbontjuk a zárójeleket, olyan másodfokú egyenletet kapunk, amely mindig nemnegatív. Ezért a diszkriminánsa nem lehet pozitív. Az egyenlőtlenség és utána a diszkrimináns:

$$\lambda^2(b_1^2 + \cdots + b_n^2) - 2(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)\lambda + (a_1^2 + \cdots + a_n^2) \geq 0.$$

$$0 \leq D/4 = (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 - (b_1^2 + \cdots + b_n^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2),$$

ez pont a bizonyítandó egyenlőtlenség négyzete.

Egyenlőség csak akkor teljesül, ha a diszkrimináns 0, azaz, ha a (2) egyenlőtlenségben egyenlőség is állhat. Ez viszont csak úgy lehet, ha $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n$. (Úgy értve, hogy ha $b_i = 0$, akkor $a_i = 0$ is.) Ez persze csak akkor igaz, ha valamelyik $b_i \neq 0$. Ha mindegyik 0, akkor az egyenlőség automatikusan teljesül.

2.3. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (lásd a 2.2. feladatot) az

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1, \frac{1}{\sqrt{3}}x_2, \frac{1}{\sqrt{6}}x_3\right)$$

sorozatokra!

2.4.

1. megoldás. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (lásd a 2.2. feladatot) az

$$\left(\sqrt{4a_1+1}, \sqrt{4a_2+1}, \sqrt{4a_3+1}\right), \qquad (1,1,1)$$

sorozatokra!

$$\sqrt{4a_1+1}\cdot 1 + \sqrt{4a_2+1}\cdot 1 + \sqrt{4a_3+1}\cdot 1 \leq$$
$$\leq \sqrt{(4a_1+1+4a_2+1+4a_3+1)(1+1+1)} = \sqrt{7\cdot 3}.$$

A CBS egyenlőtlenségben az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sqrt{4a_1+1} = \sqrt{4a_2+1} = \sqrt{4a_3+1}$, tehát az $a_1+a_2+a_3=1$ feltétel mellett pontosan akkor, ha $a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}$.

2. megoldás. Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget három számra, a $\sqrt{4a_1+1}$, $\sqrt{4a_2+1}$, $\sqrt{4a_3+1}$ számokra (lásd a 2.1. feladatot):

$$\frac{\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\sqrt{4a_3+1}}{3} \leq \sqrt{\frac{4a_1+1+4a_2+1+4a_3+1}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Ebből 3-mal átszorozva kapjuk az állítást. A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenségben az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sqrt{4a_1+1} = \sqrt{4a_2+1} = \sqrt{4a_3+1}$, tehát ha $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$.

2.5. Hozzuk a két oldalt közös nevezőre és haonlítsuk össze a számlálókat:

$$(a+b)^2xy \leq (x+y)(a^2y+b^2x).$$

Felbontva a zárójeleket és 0-ra rendezve:

$$0 \leq a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay-bx)^2,$$

ami teljesül. Egyenlőség csak $a/x = b/y$ esetén fordulhat elő.

2.6. Alkalmazzuk a 2.5 feladatot mint indukciós lépést és mint kezdőlépést is. Egyenlőséget pontosan akkor kapunk, ha $a_1/x_1 = \ldots = a_2/x_2$.

2.7. Tegük fel, hogy a 2.6 feladat egyenlőtlenségét már bebizonyítottuk. Ebből levezetjük a 2.2 feladat egyenlőtlenségét. Legyenek tehát $a_1,\ldots,a_n$ és $b_1,\ldots,b_n$ adottak. Legyen $y_i = a_ib_i$ és legyen $x_i = b_i^2$. Ekkor a fenti 2.6 feladatbeli egyenlőtlenség (y_i-vel a_i helyett) pontosan a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget adja.

Fordítva, tegyük fel, hogy a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget ismerjük. A fenti 2.6 feladatbeli egyenlőtlenségben adott számokból készítsük el a $p_i = a_i/x_i$ és $q_i = x_i$ számokat, ezekkel felírva a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget lényegében pont a keresett egyenlőtlenséget kapjuk.

2.8. Tekintsük azt a paralelogrammát, amelynek csúcsai

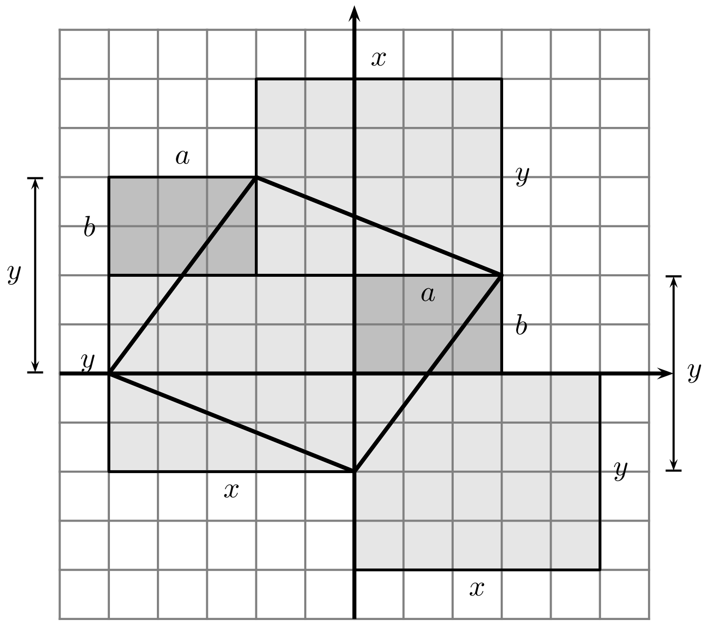
$$(0; b-y), \qquad (a; b), \qquad (a-x; 2b), \qquad (-x; 2b-y).$$

Ennek két oldalvektora: $(a; y)$ és $(-x; b)$, így területe legfeljebb az oldalak szorzata:

$$T \leq \sqrt{(a^2+y^2)\cdot(b^2+x^2)}.$$

Másrészt a paralelogramma átdarabolható a kétfajta téglalapba, a két parkettalapba (lásd a 2. ábrát), így területe:

$$T = a\cdot b + x\cdot y.$$



2.8M.2. ábra.

2.9. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (2.2 feladat) az

$$\left(\sqrt{a_1p_1}, \sqrt{a_2p_2}, \ldots, \sqrt{a_np_n}\right), \qquad \left(\sqrt{a_1p_1}, \sqrt{a_2p_2}, \ldots, \sqrt{a_np_n}\right)$$

sorozatokra:

$$\begin{aligned}(a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n)(b_1p_1+b_2p_2+\cdots+b_np_n) &\geq \\ \geq \quad \left(\sqrt{a_1b_1}p_1+\cdots+\sqrt{a_nb_n}p_n\right)^2 &\geq (p_1+p_2+\cdots+p_n)^2 = 1.\end{aligned}$$

2.10. Kétszer kell alkalmazni a „kétkomponensű” Cauchy-Schwarz-Bunyakovszij egyenlőtlenséget:

$$\left(\sum a_ib_ic_i\right)^2 \leq \left(\sum a_ib_i\right)^2\left(\sum c_i^2\right) \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)\left(\sum c_i^2\right).$$

2.1. A konvexitás azt jelenti, hogy tetszőleges $0 \leq s \leq 1$ esetén minden x_1, x_2 valós számra $sf(x_1) + (1-s)f(x_2) \geq f(sx_1 + (1-s)x_2)$. Ez a mi $f(x) = x^2$ függvényünk esetén azt jelent, hogy

$$x_2^2 + s(x_1^2 - x_2^2) \geq s^2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) + s(2x_1x_2 - 2x_2^2) + x_2^2.$$

Ezt egy oldalra rendezve s hatványai szerint csoportosítva

$$0 \geq s^2(x_1 - x_2)^2 - s(x_1 - x_2)^2 = s(s-1)(x_1 - x_2)^2,$$

ez pedig igaz, hiszen $0 \leq s \leq 1$.

Így Jensen tétele szerint ez minden n-szög súlypontjára is igaz. Vagyis

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n} \geq f(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}).$$

Ez pedig pont a **b)** igazolandó állítása.

2.2. A konvexitás azt jelenti, hogy tetszőleges $0 \leq s \leq 1$ esetén minden x_1, x_2 pozitív számra $sf(x_1) + (1-s)f(x_2) \geq f(sx_1 + (1-s)x_2)$. Ez a mi $f(x) = 1/x$ függvényünk esetén azt jelent, hogy

$$1/x_2 + s(1/x_1 - 1/x_2) \geq 1/(s(x_1 - x_2) + x_2).$$

A pozitív $x_1x_2(s(x_1 - x_2) + x_2)$ kifejezéssel szorozva

$$sx_1^2 - sx_1x_2 + x_1x_2 + s(x_2 - x_1)(s(x_1 - x_2) + x_2) \geq x_1x_2.$$

Átrendezve, s hatványai szerint csoportosítva

$$0 \geq s^2(x_1 - x_2)^2 - s(x_1 - x_2)^2 = s(s-1)(x_1 - x_2)^2,$$

ez pedig igaz, hiszen $0 \leq s \leq 1$.

Így Jensen tétele szerint ez minden n-szög súlypontjára is igaz. Vagyis

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n} \geq f(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}).$$

Ez pedig pont a **b)** igazolandó állítása.

2.3. Az $f(x) = 2^x$ függvény konvexitása ezt jelenti.

2.1.

1. megoldás. Vegyük észre, hogy a vizsgált kifejezés kétszerese így írható:

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2,$$

ami tényleg nemnegatív és pontosan akkor zérus, ha $x_1 = x_2 = x_3$.

2. megoldás. Feltehető, hogy a számok nemnegatívak, mert ha mindegyiket az abszolútértékére cseréljük, akkor a vizsgált kifejezés értéke nem nő. Háromszor alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti összefüggést:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geq x_1x_2, \qquad \frac{x_2^2 + x_3^2}{2} \geq x_2x_3, \qquad \frac{x_3^2 + x_1^2}{2} \geq x_3x_1.$$

A három egyenlőtlenség összege adja a bizonyítandó állítást. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha mind a három egyenlőtlenségben teljesül, tehát ha az összes szám egyenlő. Akkor is teljesül az egyenlőség, ha mind a három szám negatív.

3. megoldás. Alkalmazzuk a Rendezési tételt (lásd a 2.3. feladatot) az (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) sorozatokra! Ezek így egyformán rendezettek, nem úgy, mint a (x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_1) sorozatok, tehát

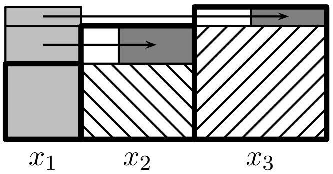
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

4. megoldás. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (lásd a 2.2. feladatot) az (x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_1) sorozatokra!

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2 + x_1^2)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

5. megoldás. (*Kiss Dóra*)

Feltehető, hogy a számok nemnegatívak és hogy nagyságrendi sorrendjük $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Az 1. ábrán egymás mellé helyeztünk egy-egy x_1, x_2 és x_3 oldalú négyzetet, vonalazással jelöltünk egy-egy $x_1 \times x_2$ és $x_2 \times x_3$ méretű téglalapot az x_2 illetve az x_3 oldalú négyzet belsejében. Az $x_3 \times x_1$ méretű világosszürke téglalapot három részre daraboltuk. Alsó része az x_1 oldalú négyzet, egy-egy további részét pedig betoltuk az x_2 illetve az x_3 oldalú négyzet belsejébe az ábra szerint. Ezekből a négyzetekből $x_1 < x_2$ illetve $x_1 < x_3$ esetén még egy-egy kis rész kimarad, tehát a szorzatösszeg legfeljebb akkora, mint a négyzetösszeg. Egyenlőség akkor van, ha $x_1 = x_2$ és $x_1 = x_3$, azaz mind a három szám egyenlő.



2.1M5.1. ábra.

6. megoldás. A 2.1M5. megoldás ábrája alapján felírható egy összefüggés, ami algebrailag könnyen igazolható:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 = (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)(x_3 - x_1). \tag{1}$$

Ha x_1, x_2 és x_3 közül x_3 a legnagyobb, akkor (1) igazolja is az állítást, hiszen ilyenkor (1) jobb oldala nemnegatív. Ha nem x_3 a legnagyobb, akkor (1) jobb oldalára a

$$(x_3 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)(x_1 - x_2), \qquad (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)$$

kifejezések egyikét írjuk és újból használható az előző gondolatmenet.

2.2.

1. megoldás. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget (2.2 feladat) a

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$$

sorozatokra:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(a_1\frac{1}{a_1} + a_2\frac{1}{a_2} + \ldots + a_n\frac{1}{a_n}\right)^2 = n^2.$$

2. megoldás. Bontsuk fel a

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

szorzatot n darab

$$\left(a_1 \frac{1}{a_{\pi(1)}} + a_2 \frac{1}{a_{\pi(2)}} + \ldots + a_n \frac{1}{a_{\pi} n}\right)$$

típusú szorzat-összegre. Ezek mindegyike a Szűcs Adolf egyenlőtlenség miatt (2.3 feladat) legalább n, így az összegük legalább n^2. (A felbontásban szereplő n darab permutációt nem nehéz kiválasztani. Definiáljuk például a „$+i$” permutációt így: ha π a „$+i$” permutáció, akkor $\pi(j) = j + i$ vagy $j + i - n$, attól függően, hogy melyik esik 1 és n közé. Ezzel a jelöléssel a megoldásbeli n permutáció legyen a „$+0$”, „$+1$”, etc „$+(n-1)$.”)

2.3. Mivel pozitív számhármasok esetén (a^2, b^2, c^2) és (a, b, c) ugyanúgy vannak rendezve, ezért a **II.** állítás azonnali következménye a Szűcs Adolf egyenlőtlenségnek (2.3 feladat).

2.4. Feltehetjük, hogy $a \le b \le c$ és így $a + b \le a + c \le b + c$, amiből $\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{a+c} \le \frac{1}{a+b}$. Alkalmazzuk a rendezési egyenlőtlenséget kétszer is:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b},$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.$$

A fenti két egyenlőtlenség összegének fele épp a bizonyítandó állítást adja.

2.5. Mivel pozitív számhármasok esetén (ab, ac, bc) és $(1/c, 1/b, 1/a)$ fordítva vannak rendezve, ezért az **a)** állítás azonnali következménye a Szűcs Adolf egyenlőtlenségnek (2.3 feladat).

A **a)** egyenlőtlenségnél ugyanígy az $(a/b, b/c, c/a)$ és $(a/b, b/c, c/a)$ sorozat(ok) azonos rendezettségét kell használni. (Az egyenőtlenség jobb oldala így áll elő: $a/b \cdot b/c + b/c \cdot c/a + c/a \cdot a/b$.

2.6. Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{1 + a^2} = \sqrt{10}\sqrt{\frac{1/9 + 1/9 + \cdots + 1/9 + a^2}{10}} \ge \sqrt{10}\frac{1/3 + 1/3 + \cdots + 1/3 + a}{10}.$$

Ezt mindhárom tagra alkalmazva, majd összeadva ezt kapjuk:

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} + \sqrt{1 + c^2} \ge \frac{9 + a + b + c}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Egyenlőség teljesül, ha $a = b = c = 1/3$.

2.7. Először azt igazoljuk, hogy $0 < p,\ q \le 1$ számok esetén ha $p + q$ állandó, akkor $(1/p - -1)(1/q - 1)$ és $(1/p + 1)(1/q + 1)$ is annál nagyobb, minél nagyobb a $|p - q|$ különbség. Ebből már következik, hogy mindkét egyenlőtlenségnek $a = b = c = 1/3$ esetén van minimuma. Ugyanis tekintsük $a \ge b \ge c$ közül a-t és c-t, mivel $a \ge 1/3 \ge c$, így a különbségük csökkentése és összegük állandóan tartása mellett a kérdéses szorzat is csökken, miközben az egyikük 1/3 lesz. Ez megismételhető a másik kettővel, így kapjuk, hogy a minimumot akkor érjük (és csak akkor érjük) el, ha a három szám egyenlő.

Vezessük be a $t = (p+q)/2$ és az $x = (p-q)/2$ ismeretleneket, ezek segítségével $p = t + x$, $q = t - x$. Írjuk fel a kérdéses szorzatot:($e = \pm 1$ attól függően, hogy melyik szorzatról van szó)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{p}+e\right)\left(\frac{1}{q}+e\right) &= (\frac{1}{t+x}+e)(\frac{1}{t-x}+e) = \frac{(1+et+ex)(1+et-ex)}{t^2-x^2} = \\ &= \frac{1+2et+t^2-x^2}{t^2-x^2} = 1+\frac{1+2et}{t^2-x^2}.\end{aligned}$$

Itt a számláló mindenképpen nemnegatív, hiszen még $e = -1$ esetben is $1-2t = 1-p-q \geq 0$. A nevező pedig annál kisebb, minél nagyobb a különbség. Vagyis az eredeti szorzat tényleg annál nagyobb, minél nagyobb a különbség.

2.8. Bontsuk fel $n!$-t $n/2$ darab szorzatra: $n! = (1\cdot n)(2\cdot(n-1))\cdots(k)(n+1-k)\cdots$ Az utolsó tényező $n/2(n/2+1)$, ha n páros, illetve $(n+1)/2$, ha n páratlan.

A becslésekhez azt kellene belátni, hogy minden k-ra

$$\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq k(n+1-k) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

(Kell, hogy ez még $k = (n+1)/2$ esetén is teljesüljön, ha n páratlan.)

Az alsó azért teljesül, mert a két tényező közül a nagyobbik biztosan legalább $(n+1)/2$, a kisebbik pedig legalább 1 (még akkor is, ha csak egy tényező van). A fölső pedig azért, mert a számtani és mértani közpek közötti egyenlőtlenség szerint egy szorzat kisebb a tényezők átlaga négyzeténél. Márpedig a két itteni tényező összege $n+1$.

2.9. Világos, hogy egyenlőség teljesül, ha a törtek nevezői megegyeznek. Tegyük fel tehát, hogy $b < d$. Szorozzuk mindkét oldalt $bd(b+d)$-vel és rendezzünk egy oldalra:

$$ad^2 + cb^2 - (a+c)bd \geq 0.$$

Itt kiemelhető $d-b$, vagyis $0 \leq (d-b)(ad-bc)$ akkor teljesül, ha $ad \geq bc$, azaz ha $a/b \geq c/d$, ahogy a feladat állította.

2.10. Nincs minimális érték, a 2-nél nagyobb számok mind elérhetők, maga a 2 nem.

Osszuk két részre a törteket. Az egyikben a páratlan indexű számlálók, a másikba a párosak kerülnek. Az első összeget alulról becsli, ha minden nevezőt a páratlan indexű a_i-k összegével helyettesítünk. Ekkor a közös nevező miatt el is végezhetjük az összeadást. Hasonlóan eljárva a másik összeggel, a keresett S összegre az alábbi alsó becslést kapjuk:

$$\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2007}}{a_2+a_3+\cdots+a_{2008}} + \frac{a_2+a_3+\cdots+a_{2008}}{a_1+a_3+\cdots+a_{2007}} \geq 2.$$

Ügyesen választva az a_i számokat elérhető, hogy két tört értéke $1+1/n^2$-nél kisebb, a többi $1/n^2$-nél kisebb legyen. Így az összeg $2+1/n$-nél kisebb lesz.

2.11. Legyen $n > 4$, ekkor $n > 2 + \frac{1}{n}$. Indukcióval bizonyítuk, hogy ilyen n-ekre teljesül az egyenlőtlenség. Egyrészt $5^2 = 25 < 32 = 2^5$, másrészt ha n-re már tudjuk az állítást, akkor $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n^2 > n^2 + n(2+\frac{1}{n}) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$.

2.12. Először bebizonyítjuk, hogy van olyan x_0 egész, amelynél nagyobb x-ek esetén már igaz az állítás az $n = kx$ alakú számokra. Legyen tehát $n = kx$, ekkor $n^k < 2^{kx}$-nek vehetjük a k-adik gyökét: $kx < 2^x = 1 + x + \binom{x}{2} + \cdots + \binom{x}{x}$ a Newton-féle binomiális tétel miatt. Teljesül az egyenlőtlenség, ha $x \geq 2$ és $kx < 1 + x + \frac{x^2-x}{2}$. Ez pedig igaz, ha $x > 2k - 1$. Vagyis $x_0 = 2k - 1$ jó korlát.

Ha viszont n már jó, akkor $n + 1$ is jó lesz, hiszen megint a binomiális tétel miatt

$$\begin{aligned}(n+1)^k/n^k &= 1 + \binom{k}{1}/n + \binom{k}{2}/n^2 + \cdots + 1/n^k < 1 + k/n + k^2/n^2 + \cdots = \\ &= \frac{1}{1-\frac{k}{n}} = 1 + \frac{k}{n-k} \leq 2,\end{aligned}$$

ha $n \geq 2k$. Ekkor tehát $(n + 1)^k < 2n^k < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Vagyis az egyenlőtlenség teljesül, ha $n > 2k^2 - k$.

2.13. Legyen $p(x)$ foka k. Ha $k = 0$, akkor $p(x)$ állandó, azt kell bizonyítani, hogy 2^n minden határon túl nő. Ez igaz.

Tegyük most fel, hogy minden k-nál kisebb fokú polinomra igaz az állítás. Tekintsük a $q(x) = p(x) - p(x - 1)$ *különbségpolinomot.* Ennek foka $k - 1$ (lásd 3.1 feladat). Indukció miatt $q(n) < 2^n$, ha n elég nagy. Vagyis $p(n) - 2^n - (p(n - 1) - 2^{n-1}) < 2^n - 2^n + 2^{n-1} = 2^{n-1}$. Ezek szerint még ha $p(n) > 2^n$, akkor is a $p(n) - 2^n$ különbség minden $n \to n + 1$ lépésben legalább 1-gyel csökken. Így legfeljebb $p(n)$ lépésben megfordul a reláció. Azaz (ha n_0 jelöli azt a legkisebb n-et, ahonnan kezdve $q(n) < 2^n$) $p(n) < 2^n$ ha $n > n_0 + p(n_0)$.

Ez új bizonyítást ad a 2.12 feladatra is, hiszen $p(x) = x^k$ is polinom. De az indukcióhoz ilyen általánosságban volt érdemes megfogalmazni a feladatot.

3. Polinomok

3.1. Kezdő lépés: $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$. Az indukciós lépés használja az indukciós feltevést n-re és $(n - 1)$-re is: $a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$.

3.2. $(x - a/3)^3 = x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + \frac{a^3}{27}$.

3.3. Az $y = x + 2$ ($a = -2$) helyettesítés lesz jó, mivel $y^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ egy füst alatt megadja az x^2-es tagot is. Marad a polinomból $-13x - 5 = -13y + 21$. Vagyis $x^3 + 6x^2 - x + 3 = y^3 - 13y + 21 = 0$.

3.4. A legmagasabb fokú tagtól a legalacsonyabb felé haladva egyenként megkapjuk az együtthatókat. A végeredmény $2(x - 5)^3 - 3(x - 5)^2 + (x - 5) - 3$.

3.5. Behelyettesítve 3-at $234 + 27a$-t kapunk. Ez pontosan akkor 0, ha $a = -\frac{26}{3}$. (Ez persze ugyanaz, mint a 3.6 feladat.)

3.6. Kiemelés után $2x^5 - 3x^4 + ax^3 - x^2 + 3x - 9 = (x - 3)(2x^4 + 3x^3 + (9 + a)x^2 + (26 + 3a)x + (81 + 9a)) + 243 + 27a$. Emiatt $a = -\frac{26}{3}$. (Ez persze ugyanaz, mint a 3.5 feladat.)

3.7. Az első tag a hányadosban x^4, ezzel visszaszorozva $x^7 + x^4$-t kapunk, ezt kivonva az eredetiből $-x^4 + 1$ marad. Ennek tovább csökkenthetjük a fokát, ha $-x$-et veszünk még a hányadosba, ezzel visszaszorozva $-x^4 - x$-et kapunk. Ezt kivonva az eredetiből $x + 1$ marad, ez már nem csökkenthető fokú, így ez a maradék. A végeredmény: $x^7 + 1 = (x^3 + 1)(x^4 - x) + x + 1$.

3.8. Például ilyen a $3x + 1$, $2x + 1$ pár. Az a fontos, hogy a főegyüttható ne legyen ± 1.

3.9. Elég az osztás minden lépésére ezt belátni, hiszen véges sok lépésből áll. Ha az osztantó $p(x)$ polinom főtagja ax^n, az osztó $q(x)$ polinom főtegja pedig x^k, akkor az osztás soronkövetkező lépésében a hányadosba ax^{n-k}-t kell venni. Ez egészegyütthatós és a maradék $p(x) - ax^{n-k}q(x)$ különbség mindkét tagja egészegyütthatós.

3.1. Figyeljük meg, hogy $x-1$ minden többszörösében az együtthatóösszeg 0, hiszen amit x-szel megszorozva kapunk, annál egyel kisebb fokút elentétes előjellel megkapunk -1-gyel szorozva is.

Fordítva a polinom fokszámára vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Ha ez 0, akkor a polinom konstans, de a feltétel miatt csak azonosan 0 lehet. Ha viszont $p(x)$ polinom foka $n \geq 1$ és a főegyütthatója a, akkor $p(x) - ax^{n-1}(x-1)$ alacsonyabb fokú, de az együtthatóösszeg a-val nőtt is és csökkent is, tehát továbbra is 0. Emiatt $p(x) - ax^{n-1}(x-1) = q(x)(x-1)$ az indukciós feltevés miatt. Tehát $p(x) = (q(x) + ax^{n-1})(x-1)$, ahogy állítottuk.

3.2.

1. megoldás. Legyen $p(x)$ tetszőleges polinom. Mivel $a \cdot x^n - a \cdot y^n$-ből $x - y$ kiemelhető, ezért a tagonként tekintett $p(x) - p(y)$ különbségből $x - y$ kiemelhető. Ha most $y = a$, akkor azt kapjuk, hogy $p(x) - p(a)$-ból $x - a$ kiemelhető. Ebből azonnal látszik, hogy pontosan akkor $p(a) = 0$, ha $p(x)$-ből $x - a$ kiemelhető.

2. megoldás. Legyen a kérdéses polinom $p(x)$. Ha $x - a$ kiemelhető, azaz $p(x) = q(x)(x - a)$, akkor $p(a) = q(a)(a - a) = 0$.

Fordítva a polinom fokszámára vonatkozó indukcióval bizonyíthatunk, lásd a 3.1 feladatot. De most más utat választunk. Azt akarjuk bizonyítani, hogy ha $p(a) = 0$, akkor $x - a$ kiemelhető. Osszuk $p(x)$-et maradékosan $x - a$-val: $p(x) = q(x)(x - a) + r(x)$. Mivel $r(x)$-ből már nem emelhető ki $x - a$, így $r(x)$ foka kisebb, mint 1, vagyis konstans. Helyettesítsünk be a-t mindkét oldalba $0 = p(a) = q(a)(a - a) + r(a) = 0 + r(a)$, vagyis $r(x)$ konstans 0, és pont ezt akartuk bizonyítani. Azt kaptuk, hogy általában $x - a$-val osztva egy polinomot, a maradék $p(a)$.

3.3. Az **a)**, **b)** és **c)** esetben is ugyanazt a módszert alkalmazzuk, mint a 3.2 feladat bizonyításában. Használjuk az

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1}) \tag{1}$$

felbontást. Emiatt minden $p(x) = ax^n$ típusú polinom esetén $p(x) - p(a)$-ból ki tudjuk emelni $x - a$-t. De mivel minden polinom ilyenek összege, ezért az állítás minden polinomra igaz.

Ezek szerint arra volt szükség a kiemeléshez, hogy teljesüljön a fenti (1) egyenlőség és szabadon lehessen szorozni, illetve összeadni, kivonni. Ezek minden középiskolában ismert, szokásos számkörben teljesülnek. Kivételt csak az olyan konstrukciók jelentenek, mint például a „páros számok”, a „pozitív egészek” vagy az „irracionális számok.” Ezekben a számkörökben a fenti állítás nem igaz, más-más okból.

3.4. A 3.2 feladat szerint $p(x) = (x-a)r(x)$ felírható. Ha $r(x)$-nek is gyöke b, akkor ugyanemiatt kész vagyunk. De $r(b) = p(b)/(a - b) = 0$ írható, mivel $a - b \neq 0$.

3.5. Először is a gyöktényező kiemelhető, hiszen $x - a$ kiemeléséhez osztásra nincs szükség (lásd a 3.9 feladatot). A hányadospolinom együtthatóit is osztás nélkül kaptuk meg. Tehát felírható a $p(x) = (x - a)r(x)$ alak. Ha $r(x)$-nek is gyöke b, akkor kész vagyunk. De $p(b) = (a - b)r(b)$, csak úgy lehet 0, ha $r(b) = 0$, mivel $a - b \neq 0$.

3.6. Az állítást n-re vonatkozó indukcióval igazoljuk. Ha $n = 0$, akkor a polinom konstans, de nem azonosan 0, tehát nincs gyöke, ahogy állítottuk. Tegyük fel, hogy $n > 0$ és legfeljebb n-edfokú polinomokra az állítás igaz. Ha $p(x)$-nek a gyöke, akkor kiemelhető belőle $x - a$ és a hányadospolinomnak, $q(x)$-nek az indukció miatt már legfeljebb $n - 1$ gyöke lehet. De ha $b \neq a$ gyöke $p(x)$-nek, akkor $0 = p(b) = (b - a)q(b)$ miatt b gyöke $q(x)$-nek. Vagyis legfeljebb $n - 1$ ilyen b van, a-val együtt legfeljebb n darab gyök.

3.7. Az első típusú felíráshoz $4 + 3 + 2 + 1$ szorzás és még 4 összeadás, a Horner elrendezéshez 4 szorzás és 4 összeadás kell. Általában egy n-edfokú polinoméhoz $\binom{n+1}{2}$ szorzás és n összeadás, a Horner elrendezéshez n szorzás és n összeadás.

3.8. Az utolsó elem a maradék, ami pont $h(3)$, hiszen a behelyettesítésnek $(((2 \cdot 3 - 5)3 - 5)3 + 4)3 + 7$ az eredménye. Az előtte levő együtthatók pedig $q(x)$ együtthatói. Ezt úgy tudjuk ellenőrizni, hogy ha ezt a polinomot megszorzom 3-mal, akkor pont az alatta lévő sort kapom meg. Tehát $q(x)x - q(x)3$-at úgy kell kiszámolni, hogy a második sor minden eleméből ki kell vonni a harmadik sor egyel előrébb lévő elemét. De ez a sorok kiszámítási módja miatt pont $p(x)$ együtthatóit állítja elő.

3.9. A Horner-elrendezéses számolás eredménye:

	12	-4	-21	-2	3
-1	12	-16	-5	3	0
	-12	16	5	-3	
$-1/2$	12	-22	6	0	
	-6	11	3		
$1/3$	12	-18	0		
	4	-6			
$3/2$	12	0			
	18				

A polinom kapott szorzatalakja $12(x - 3/2)(x - 1/3)(x + 1/2)(x + 1)$.

3.10. Legyen $\alpha = p/q$ a kérdéses racionális szám. Egész szám hozzáadásával és racionális α számmal való szorzással amikor először kapunk valódi nevezőt, az mindenképpen q egy osztója lesz. Ez az osztó osztani fog minden további nevezőt, hiszen egész hozzáadása nem változtat a nevezőn, p/q-val való szorzás során pedig semmiképpen nem egyszerűsödik ki, hiszen p-hez reladív prím.

3.11. A $qx - p$ kiemelhetőségéhez az kell, hogy a Horner elrendezés második sorában álló számok oszthatóak legyenek q-val. De ez teljesül, hiszen a harmadik sorban is egész számok állnak, márpedig ezeket p/q-val való szorzással kaptuk, ahol p és q relatív prímek.

3.1. Ha a egész gyök, akkor $a|10$, hiszen minden más tagját osztja az $a^3 + 8a^2 + 17a + 10 = 0$ összegnek. Ezeket az osztókat ellenőrizve (a pozitív együtthatók miatt csak negatív gyökök lehetnek) az alábbi szorzatalakot kapjuk: $(x + 1)(x + 2)(x + 5)$.

3.2. Először az egyenlőséget oldjuk meg. Keressünk egész gyököt, hogy kiemeléssel csökkentsük a fokszámot. A szóbajövő egészek osztják 3-at, ellenőrizve a lehetséges osztókat ezt kapjuk: $(x - 1)(x - 3)(x^2 + x + 1) \geq 0$. Itt az utolsó tényező mindig pozitív, vagyis a megoldás: $x \leq 1$, illetve $3 \leq x$.

3.3. Először keressünk egész gyököket. Csak 180 osztói jönnek szóba, ezeket sorban ellenőrizzük. (Ha egyet találunk, akkor ki is emeljük a gyöktényezőt, hogy egyszerűsítsük a számolást.) Így kapjuk, hogy a megolások: -5; -3; 3; 4.

3.4. Ha $0 = f(p/q)$-t kifejtjük, majd mindkét oldalt q^n-nel szorozzuk, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$0 = a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n.$$

Itt az utolsót kivéve minden tag osztható q-val, így az utolsó is. A relatív prímség miatt csak a_n lehet osztható vele. Hasonlóan az elsőt kivéve minden tag osztható p-vel, így az első is. De a relatív prímség miatt a_0 kell p-többszörös legyen.

3.5. Ha tudjuk, hogy valami k-tól függetlenül gyök, akkor k egy alkalmas értéke esetén is gyök lesz, pl $k = 11$ esetén. Ekkor a konstanstag -1, vagyis ennek osztója, azaz ± 1 jön csak szóba. Ezeket ellenőrizve tényleg gyököket kapunk. A kapott szorzatalak: $(x+1)(x-1)(x^2-(k+3)x- - (k-12)$. A másodfokú tényezőnek akkor van valós gyöke, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz $0 \le (k+3)^2+4(k-12) = k^2+10k-39$. Ez akkor teljesül, ha k nem esik ezen új másodfokú egyenlőtlenség két gyöke közé. Vagyis ha $k \le -13$, illetve $3 \le k$.

3.6. Alkalmazva a $\sqrt[6]{x} = y$ helyettesítést, a kapott harmadfokú egyenlet $2y^3-y^2-2y+1$, ennek keressük először egész gyökét. Szóba jön ± 1, ellenőrizve mindkettő jó, a három gyök -1; $1/2$; 1. Ezeket visszaírva $x_1 = 1$, $x_2 = 1/64$. ($\sqrt[6]{x} = -1$ lehetetlen.)

3.1. Mivel $x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$, így $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p$ és $x_1x_2x_3 = -q$.

3.2. Használjuk a Vieta formulákat (3.1 feladat) és megpróbáljuk a keresett hatványösszeget ezekkel kifejezni.

$$\begin{aligned}
x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = &\\
= \;& (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - \\
& -(x_1^4x_2 + x_1^4x_3 + x_2^4x_1 + x_2^4x_3 + x_3^4x_1 + x_3^4x_2) = \\
= \;& 0 - (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_1 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 + x_3^3x_2) + \\
& +(x_1^3x_2^2 + x_1^3x_3^2 + x_2^3x_1^2 + x_2^3x_3^2 + x_3^3x_1^2 + x_3^3x_2^2) + \\
& +2(x_1^3x_2x_3 + x_2^3x_1x_3 + x_3^3x_1x_2) = \\
= \;& 0 + (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2(x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_1x_3 + x_3^2x_1x_2)) - \\
& -5(x_1^2x_2^2x_3 + x_1^2x_3^2x_2 + x_2^2x_3^2x_1) = \\
= \;& -5x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 5pq.
\end{aligned}$$

3.3. Használjuk a Vieta formulákat (3.1 feladat) és megpróbáljuk a keresett hatványösszeget ezekkel kifejezni.

$$\begin{aligned}
& x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_2^4x_3^2 + x_2^2x_3^4 + x_3^4x_1^2 + x_3^2x_1^4 = \\
= \;& (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) - 3x_1^2x_2^2x_3^2 = \\
= \;& \Big[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\Big] \cdot \\
& \cdot \Big[(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2(x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_1x_3 + x_3^2x_1x_2)\Big] - 3(x_1x_2x_3)^2 = \\
= \;& [0 - 2p]\Big[p^2 - 2 \cdot 0 \cdot (-q)\Big] - 3(-q)^2 = -2p^3 - 3q^2.
\end{aligned}$$

3.4. Az eredeti gyökök α, β, γ összege $\alpha + \beta + \gamma = 2$, kettősszorzat-összege $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1$, szorzata $\alpha\beta\gamma = -1$.

a) $(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) = -(-x - \alpha)(-x - \beta)(-x - \gamma) = -(-x)^3 + 2(-x)^2 + (-x) - 1 = = x^3 + 2x^2 - x - 1$.

b) $8((x/2)^3 - 2(x/2)^2 - x/2 + 1) = x^3 - 4x^2 - 4x + 8$.
c) $(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - (x-1) + 1 = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$.
d) $x^3((1/x)^3 - 2(1/x)^2 - x + 1) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.
e) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 4 - 2(-1) = 6$, $\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma = 1 - 2(2)(-1) = 5$ és $\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 1$, vagyis a polinom $x^3 - 6x^2 + 5x - 1$.

3.5.

1. megoldás. Az első egyenletet negyedik hatványra emelve

$$1 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

a második egyenletetből $x + y = 1$-et kiemelve

$$31 = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$$

Vegyük e két egyenlet különbségét és osszunk 5-tel:

$$-6 = x^3y + x^2y^2 + xy^3 = xy(x^2 + xy + y^2) = xy((x+y)^2 - xy) = xy(1 - xy).$$

Vagyis azt kaptuk, hogy xy gyöke $-6 = u(1-u)$-nak, másszóval $u^2 - u - 6 = 0$-nak. Az egyik lehetőség $xy = 3$, ekkor $x + y = 1$ és $xy = 3$ miatt x, y gyökei $t^2 - t + 3 = 0$-nak, de ennek nincs valós gyöke. Vagyis marad a másik $xy = -2$ lehetőség. Ekkor x, y gyökei $t^2 - t - 2 = 0$-nak, azaz $\{x; y\} = \{-2; 1\}$ a megoldás.

2. megoldás. Legyen $z = x - y$. Ekkor $x = \frac{1+z}{2}$ és $y = \frac{1-z}{2}$. Ötödik hatványra emelve a páratlanfokú tagok kiejtik egymást:

$$31 = x^5 + y^5 = \frac{2 + 20z^2 + 10z^4}{32}.$$

Rendezve az egyenletet $z^4 + 2^2 - 99 = 0$. Ez másodfokú z^2-re nézve, a megoldás $z^2 = 9$ vagy $z^2 = -11$, ez utóbbi nem ad valós megoldást. Az előbbiből viszont $x = 2$, $y = -1$ adódik (vagy fordítva).

3. megoldás. Tegyük fel, hogy x, y karakterisztikus gyökei az $f(n) = af(n-1) + bf(n-2)$ másodrendű rekurziónak. A karakterisztikus egyenlet $t^2 - at - b = 0$, vagyis $x + y = 1$ miatt $a = 1$. A rekurzió megoldásában $f(n) = \alpha x^n + \beta y^n$. Minket az $\alpha = \beta = 1$ eset érdekel. Vagyis $f(0) = x^0 + y^0 = 2$, $f(1) = x + y = 1$ miatt $f(2) = 1 + 2b$, $f(3) = 1 + 3b$, $f(4) = 1 + 4b + 2b^2$, $f(5) = 1 + 5b + 5b^2 = 31$. Ezt rendezve és 5-tel osztva $b^2 + b - 6 = 0$. Gyökei $b = -3$ és $b = 2$. Az első esetben a karakterisztikus egyenlet $t^2 - t + 3 = 0$, ennek nincs valós gyöke. A második esetben $t^2 - t - 2 = 0$, ennek két gyöke 2 és -1 adják x-et és y-t.

3.6.

1. megoldás. Mindegyik egyenélethez hozzáadva a hiányzó ismeretlent ezt kapjuk:

$$x^2 + x = y^2 + y = z^2 + z = u = x + y + z + 2.$$

Vagyis x, y, z mind gyökei a $t^2 + t - u = 0$ egyenletnek. De ennek csak két különböző megoldása lehet, vagyis a három ismeretlen között van két egyforma, mondjuk $x = y$. Ha még $z = x = y$ is teljesül, akkor ők a gyökei $t^2 - 2t - 2 = 0$-nak, vagyis $(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ és $(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$ két lehetséges megoldás.

Ha viszont $x \neq z$, akkor ők a két különböző gyöke $t^2 + t - u = 0$-nak, tehát összegük $x + z = -1$, így $x^2 = x + z + 2 = 1$ miatt $(1, 1, -2)$ és $(-1, -1, 0)$ a maradék két megoldás. (Persze ezeknek a permutációi is jók. Összesen nyolc jó megoldás van.)

2. megoldás. Az első két egyenletet kivonva egymásból $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = y - x$. Két lehetőség van, vagy $x = y$, vagy $x + y = -1$. Ugyanez igaz bármelyik két ismeretlen esetén. Ha mind a három ismeretlen különbözne, akkor $x + y = x + z = y + z = -1$ lenne, de ekkor $x = y = z = -0{,}5$ miatt mind egyenlőek lennének, pont ellentétesen a feltételezéssel.

Legyen tehát $x = y$. Ha még $x = z$ is, akkor mind gyökei $x^2 - 2x - 2 = 0$-nak, vagyis $(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ és $(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ két lehetséges megoldás. Ha viszont $x \neq z$, akkor $x + z = -1$ és így $x^2 = 1$. Ebből adódik a másik két megoldás $(1, 1, -2)$ és $(-1, -1, 0)$. (Persze ezeknek a permutációi is jók. Összesen nyolc jó megoldás van.)

3.1. Ha a legmagasabbfokú tag $a_k x^k$, akkor az ebből a tagból származó különbség-részlet $a_k x^k - a_k(x^k - kx^{k-1} + \binom{k}{2}x^{k-2} - + \cdots) = ka_k x^{k-1} - + \cdots$, vagyis létrejön egy nemnulla $k-1$-edfokú tag. Az összes többi tagból pedig nem jön létre $k-1$-edfokú. Vagyis ki sem tudják ezt ejteni. Lásd még a 2.13 feladatot.)

3.2. Az előző 3.1 feladat szerint ha egy polinom különbségpolinomja 0, akkor a polinom konstans. Márpedig, ha $f(x) - f(x-1) = g(x) - g(x-1)$, akkor $(f(x) - g(x)) - (f(x-1) - g(x-1)) = 0$, vagyis $(f(x) - g(x))$ konstans, ahogy állítottuk.

3.3. Tudjuk, hogy $f(x)$ különbségpolinomja elsőfokú x, vagyis f másodfokú, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Most f definíciójából ezeket kapjuk: $c = f(0) = 0$, $a + b + c = f(1) = 1$ és $4a + 2b + c = f(2) = 3$. Ezek szerint $c = 0, a + b = 1{,}2a = 1$ és végül $a = 1/2, b = 1/2$, vagyis $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x$.

3.4. Tudjuk, hogy ezen $g(x)$ különbségpolinomja másodfokú x^2, vagyis f harmadfokú, ráadásul x^2 páros, vagyis f grafikonja szimmetrikus $(-1/2; 0)$-ra, és így 0 mellett gyöke a -1 és a $-1/2$ is. Azaz $f(x) = ax(x+1)(x+1/2)$. Most f definíciójából ezt kapjuk: $2a1{,}5 = f(1) = 1$, vagyis $a = 1/3$, azaz $f(x) = 1/3x^3 + 1/2x^2 + 1/6x = 1/6x(x+1)(2x+1)$.

3.5. Legyen az eredmény $f(n)$. Mivel $f(n) - f(n-1) = \sum_{0 \leq a < n}(a + n) = n(n-1)/2 + n^2$ másodfokú polinomja n-nek, így $f(x)$ harmadfokú polinom. Persze $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 6$, $f(3) = 18$ adódik. Ezek alapján elkészthetjük a különbségpolinomok táblázatát (minden szám a fölötte lévő két szám különbsége, azaz minden sor a fölötte lévő sor polinomjának különbségpolinomja):

-2		-1		0		1		2		3
(-2)		(0)		0		1		6		18
	(2)		(0)		1		5		12	
(-5)		(-2)		(1)		4		7		
	3		3		3		3		3	

Az utolsó sort onnan tudjuk, hogy az már a nulladfokú, a konstans sor. Ebből visszafelé meghatározhatjuk a korábbi elemeket is (zárójelben). Tehát az $f(x)$ polinomnak két gyöke -1 és 0, így $f(x) = (x+1)x(ax+b)$. Ezt $f(1) = 1$-be és $f(-2) = -2$-be helyettesítve: $2a + 2b = 1$, $2b - 4a = -2$. Vagyis $a = 1/2$, $b = 0$. A eredmény tehát

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{2}.$$

3.6. Állítás:

$$a_0 + a_1 x + a_2\binom{x}{2} + a_3\binom{x}{3} + \cdots + a_n\binom{x}{n} \tag{1}$$

alakú az összes n-edfokú polinom, amely minden egész helyen egész értékű. (Az a_i együtthatók mind egészek.) Az világos, hogy ezek mind jó polinomok. Bizonyításra az szorul, hogy más nincs.

A bizonyítást fokszámra vonatkozó indukcióval végezzük. Ha $n = 0$, akkor a polinom egy egész konstans. Tegyük fel, hogy n-nél kisebb fokszám esetén már beláttuk az állítást. Legyen tehát $f(x)$ egy n-edfokú valós polinom, amely minden egész helyen egész értékű. Írjuk fel a fenti (1) alakban, az a_i együtthatókról most csak azt tudjuk, valós számok. Számítsuk ki az $f_1(x) = f(x) - f(x-1)$ különbségpolinomot. A binomiális együtthatók tulajdonsági miatt

$$f_1(x) = a_1 + a_2(x-1) + a_3\binom{x-1}{2} + \cdots + a_n\binom{x-1}{n-1}.$$

Ez $n-1$-edfokú, szintén minden egész helyen egész, vagyis az indukció miatt az a_i együtthatók mind egészek, ha $i > 0$. Másrészt $f(0) = a_0$ a konstanstag, mivel az összes többi binomiális együttható x-nek többszöröse. Így ez is egész, a bizonyítás kész.

3.1.

1. megoldás. Tegyük fel, hogy $q(x) = r(x)s(x)$, ahol

$$r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_kx^k, \qquad s(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_lx^l$$

k-adfokú és l-edfokú egészegyütthatós polinomok szorzata, $k + l = n$. Mivel p^2 nem osztja $a_0 = b_0c_0$-t, így valamelyik a két konstanstag közül nem osztható p-vel. Tegyük fel, hogy ez b_0. Legyen j a legkisebb index, hogy c_j nem osztható p-vel ($1 = b_kc_l$ miatt $j \leq l$ létezik). Ekkor $a_j = b_0c_j + b_1c_{j-1} + \cdots + b_jc_0$, itt az elsőt kivéve minden tag osztható p-vel. Ez csak úgy lehetne, ha $j = n$, de így $n \geq l \geq j$ miatt $s(x)$ nem lenne kisebb fokú, mint $q(x)$.

A bizonyítás elmondható racionális együtthatós polinomra is. Ott azt kell nézni, hogy melyik az első együttható, amelynek a számlálója nem osztható p-vel.

2. megoldás. Tegyük fel, hogy $q(x) = r(x)s(x)$ egészegyütthatósak szorzata. Tekintsük a szorzatot modulo p. Ekkor $x^n \equiv r_1(x)s_1(x) \pmod p$, ebből látszik, hogy $r(x)$ és $s(x)$ főegyütthatótól különböző együtthatói mind oszthatóak p-vel. Ekkor a konstanstagjaik szorzata, vagyis a_0 osztható lenne p-vel. Vagyis csak az lehet, hogy az egyiknek a főegyütthatója egyben a konstanstagja, vagyis nulladfokú a polinom, de ekkor a felbontás nem kisebbfokúak szorzata. Ezt az esetet a feltétel kizárta.

3.2. Tegyük fel, hogy $f(x) = r(x)s(x)$, ahol

$$r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_kx^k, \qquad s(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_lx^l$$

k-adfokú és l-edfokú egészegyütthatós polinomok szorzata, $k + l = 2n + 1$. Ha b_0 és c_0 egyike nem osztható p-vel, akkor a 3.1 feladat megoldási módszere változtatás nélkül működik. Tegyük fel, hogy mindkettő osztható p-vel, de ekkor egyik sem osztható p^2-tel, hiszen p^3 nem osztja $a_0 = b_0c_0$-t. Így van egy-egy olyan „első” index $t \leq k$ és $u \leq l$, hogy b_i nem osztható p-vel, ha $i < t$, de b_t már nem osztható, hasonlóan c_j osztható p-vel, ha $j < u$, de c_u már nem osztható. Tekintsük a_{t+u}-t. A polinomok szorzása miatt $a_{t+u} = b_0c_{t+u} + b_1c_{t+u-1} + \cdots + b_tc_u + \cdots + b_{t+u}c_0$. Itt a középőt kivéve minden tag osztható p-vel. Ez csak úgy lehet, ha $t + u = 2n + 1$. Ekkor az egyik kisebb, mondjuk $u < t$, vagyis az $a_u = b_0c_u + b_1c_{u-1} + \cdots + b_uc_0$ összegben az elsőt kivéve minden tag osztható p^2-tel, vagyis $u \geq n + 1$, de így $2n + 1 = u + t > 2u \geq 2n + 2$, ez ellentmondás.

3.3. $x^4 + 2x^2 + 1$ egy nagyon egyszerű példa. De rengeteg másik van. Olyan másodfokúakat kell szorozni, amelyeknek nincs valós gyökük.

3.4. a) $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilis; **b)**(Lásd [4][1967/2. 204-205. old.]) $(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1)$.
c) $\mathbb{F}_2[x]$-ben irreducibilis; **d)** $(x-1)^4$.

3.5. a) $x^2 - 2x - 2$.
b) $x^2 - 2x - 2$ gyökei továbbá $\frac{3}{2}$ és $\frac{1}{2}$.

3.6. a) Számoljunk euklideszi algoritmussal! A polinomok helyett csak az együtthatók sorozatát írjuk fel:

$$\begin{aligned}
q &= p \cdot 10011 + 1101011010;\\
p &= 1101011010 \cdot 1001 + 100010111;\\
1101011010 &= 100010111 \cdot 11 + 1100011;\\
100010111 &= 1100011 \cdot 111 + 111110;\\
1100011 &= 111110 \cdot 10 + 11111;\\
111110 &= 11111 \cdot 10 + 0.
\end{aligned}$$

A legnagyobb közös osztó az 11111 sorozatnak megfelelő polinom, azaz $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
b) Az euklideszi algoritmus alapján visszafelé sorban kifejezhetjük a maradékokat. Egyszerűsíti a leírást, hogy a „+” és a „−” művelet $\mathbb{F}_2$-ben ugyanaz. Pl.

$$\begin{aligned}
11111 &= 1100011 + 111110 \cdot 10 =\\
&= 1100011 + (100010111 + 1100011 \cdot 111) \cdot 10 =\\
&= 100010111 + 1100011 \cdot 1111 = \dots\\
\dots &= 100111011111p + 10000100q,
\end{aligned}$$

azaz

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^{11} + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)p + (x^7 + x^2)q.$$

3.7. $x^4 + px^2 + q = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + (p-1)) - 2(p-6)x + q - 5(p-1);$, így $p = 6$, $q = 25$.

3.8.

1. megoldás. $(x^4 + 9) = (x^4 + 6x^2 + 9) - 6x^2 = (x^2 + \sqrt{6}x + 3)(x^2 - \sqrt{6}x + 3)$

2. megoldás. A $(x^4+9) = (x^2+px+q)(x^2-px+p^2-q) - p(p^2-2q)x + 9 - q(p^2-q)$ felbontás alapján $p = 0$ vagy $p^2 = 2q$. Az első esetben $9 + q^2 = 0$ lehetetlen. Vagyis $p^2 = 2q \geq 0$ miatt a konstanstagra a $0 = 9 - q^2$ egyenletet kapjuk. Ezek szerint $q = 3$; $p = \pm\sqrt{6}$.

3.1. Például Horner módszerrel meghatározható. A keresett polinom $2x^4 - 11x^3 + 13x^2 + 3x + 9$.

3.2. a)A harmadik gyöke $-2a$, hiszen a gyökök összege 0. Vagyis $(x-a)^2(x+2a) = x^3 - 3a^2x + 2a^3$ a polinom, $p = -3a^2$; $q = 2a^3$.
b) Az előző alapján csak $a = \sqrt[3]{q/2}$ jöhet szóba, de ehhez még az is kell, hogy $p = -3\sqrt[3]{q^2/4}$ legyen. Ez viszont a fenti számolás miatt elég is.
c) Mivel a köbreemelés megfordítható, így $4p^3 = -27q^2$ is ugyanezt jelenti.

3.3. a) Osszunk maradékosan $(x-a)^2$-nel:

$$x^5 - 5x + c = (x-a)^2(x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + 4a^3) - 5a^4x + 4a^5.$$

A kapott egyenletek: $-5a^4 = -5$ és $4a^5 = c$. Ez csak úgy lehet, ha $a = \pm 1$, vagyis $c = \pm 4$.
b) Ugyanazt a számolás most a $-5a^4 = p$ és $4a^5 = q$ egyenleteket adja. Tehát $a = \sqrt[5]{q/4}$ és innen $p = -5\sqrt[5]{q^4/4^4}$. (Mivel az ötödik hatványra emelés megfordítható, így $(-p/5)^5 = (q/4)^4$ is ugyanezt jelenti.)

3.1. A Vieta formulák miatt a három gyök szorzata $-q$, és a három gyök összege $0 = a + 1/a - q$ miatt $a + 1/a = q$, tehát $|q| \geq 2$ (pontosan ez kell, lásd az 1.13 feladatot). Végül $p = 1 - aq - q/a = 1 - q^2$. $x^3 + (1 - q^2)x + q = 0$; $\qquad x_3 = -q, \qquad x_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2-4}}{2}$.

3.2. Ha $c \neq 0$, akkor – mivel a Vieta formulák miatt c a gyökök szorzata – páratlan sok pozitív gyöke van. De a Vieta formulák miatt $-b$ a gyökök kettősszorzatainak összege, vagyis nem lehet mind pozitív. Ha viszont $c = 0$, akkor a maradék két gyök szorzata $-b$ nempozitív, vagyis nem lehet mindkettő pozitív.

3.3. Mivel elsőfokú tényezők szorzatára bontható, gyökei és együtthatói egész számok, így $p(x) = b(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ alakú, ahol az a_i gyökök és a b főegyüttható egészek. $-1 = p(0) = (-1)^n b a_1 a_2 \cdots a_n$ miatt minden gyök és b is ± 1, összesen páratlan sok -1 van. Legyen a gyökök közözz $+1$-ek multiplicitása i, a -1-eké j. Mivel $128 = p(3) = b(3 - a_1)(3 - a_2) \cdots (3 - a_n)$, ezért $128 = b2^i 4^j$, tehát $b = 1$ és a kitevőben $7 = i + 2j$. A polinom úgy a legkisebb fokú, ha $i+j = 7-j$ a lehető legkisebb, ezt a $j = 3$, $i = 1$ választás adja. Ekkor i tényleg páratlan, vagyis $p(0) = -1$, ahogy kellett. A megoldás $p(x) = (x-1)(x+1)^3 = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$.

3.4.

1. megoldás. $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = (a-b)^2 \cdot (a+2b)$, ahol $(a+2b)$ az a-ra és b-re vonatkozó feltétel miatt nemnegatív és $(a - b)^2$ is nemnegatív.

2. megoldás. Ismeretes, hogy $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, ha a, b, c nemnegatív számok (számtani és mértani közép közti összefüggés az a^3, b^3, c^3 számokra). Helyettesítsünk ebbe az összefüggésbe c helyébe b-t! [9]

3.5. Először bontsuk $(x^2 - a)(x^2 - b)$ alakra, ehhez határozzuk meg a gyökeit mint x^2-ben másodfokú polinomét: $x^2 = 7 \pm 2\sqrt{10}$. Vagyis végül

$$x^4 - 14x^2 + 9 = \left(x - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}\right)\left(x + \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}\right)\left(x - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)\left(x + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right).$$

Valamivel egyszerűbbé tehetjük a felírást, ha észrevesszük, hogy $7 \pm 2\sqrt{10} = (\sqrt{2} \pm \sqrt{5})^2$.

4. Lineáris egyenletrendszerek

4.10. $f(x) = x^2 + x - 1$.

4.13. **a)** megoldása $x = 2$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$.
b)-ben (3) = 4(2) - 10(1).

4.14. **a)** megoldása $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = 0$. **b)** (3) = 3(1) - 5(2)

4.15. 5(1) - 4(2) + 3(3) + 2(4) == 0, és ebből adódik a kívánt kombibáció.

4.14. **a)** $\underline{w}(7; -5; -1)$. **b)** $\lambda \cdot \underline{w}$, ahol λ tetszőleges valós szám.

4.6. $c = 13$, $a = -8$.

4.5. Az egyenletrendszer a szokásos alakban: $\left.\begin{aligned} (c-1)x + (3c+4)y &= 7; \\ 2x + (c+2)y &= c+8. \end{aligned}\right\}$ $D = (c+6)(c+1)$, $D_x = -3(c+6)(c+1)$, $D_y = (c+6)(c+1)$. Könnyű ellenőrizni, hogy $x = -3$, $y = 1$ minden c-re jó, de $c = -6$ és $c = -1$ esetén más megoldás is van.

4.6. **a)** $D = -(b+2)(b-4)$, $x = \frac{b-2}{b-4}$, $y = \frac{-1}{b-4}$ **b)** $b = 4$ **c)** $b = -2$.

4.7. **a)** $D = 2(a-2)(a-3)$, $x = y = \frac{5}{a-2}$ **b)** $a = 2$ **c)** $a = 3$.

4.8. $D = (d-4)(d+3)$. **a)** $d = 4$, **b)** $d = -3$, **c)** $x = \frac{1}{d-4}$, $y = \frac{5-d}{d-4}$.

4.15. **a)** $f(x) = x^2 + x - 1$ **b)** $f(x) = -2x^2 + 3x + 7$

4.16. **a)** $h(x) = ax^3 - ax + 1$ **b)** $h(x) = ax^3 + x^2 + (1-a)x + 1$

4.20.

1. megoldás. $g(x) = x^3 - 2x + 1$

2. megoldás. **a)** $h(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$.

4.21. **a)** $p(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2$ **b)** $q(x) = (x-1)^2 \cdot (-x^2 + 3x + 1)$.

4.27. $\frac{8}{3}$-szorosa. Részletesebben lásd [4][Gy.2101, 1983. 11. szám, 140. o.].

4.30. **a)** $p(x) = a(x^3 - x^2 - 2x) + 3$. **b)** $p(x) = 2(x^3 - x^2 - 2x) + 3$.

4.34. $\frac{1}{|u_1v_2 - u_2v_1|}$. Részletesebben lásd [4][407. fel. 1928. 12. szám, 102. o.]

5. Vegyes feladatok

5.1.

$$x = \frac{5}{3}, \qquad y = 1.$$

5.2. Legyen $n = 8\,795\,685$. Ekkor a kérdéses mennyiség

$$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+3)^2 + (n+1)^2 + (n-1)^2 + (n-3)^2}.$$

A műveletek elvégzése után

$$\frac{n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24}{4n^4 + 20} = \frac{1}{4}\left(n^2 + 10n + 30 - \frac{126}{n^2+5}\right),$$

és itt már a zárójelben lévő kifejezés sem egész, mivel $n^2 + 5 > 126$.

5.3. A függvénygrafikon és az $y = mx + b$ egyenletű egyenes metszéspontjaira teljesül, hogy $x^2 - mx - b = 0$, vagyis az x koordináták (a gyökök) $x_{12} = m/2 \pm \sqrt{D}/2$. (Itt $D = m^2 + 4b \geq 0$.) Ezek átlaga $m/2$, az y koordináták átlaga pedig $m^2/2 + b$. Vagyis a felezőpont koordinátái: $(m/2;\, m^2/2 + b)$. Ez egy félegyenes, mivel $b \geq -m^2/4$.

5.4. A rövidség kevéért legyen $\alpha = 2-\sqrt{3}$, $\beta = 2+\sqrt{3}$. Ekkor $\alpha+\beta = 4$, $\alpha^3+\beta^3 = 52$ és $\alpha\beta = 1$. Gyöktelenítve a kifejezést:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}-\sqrt{\alpha}}+\frac{\beta}{\sqrt{2}+\sqrt{\beta}}-\sqrt{2} = \frac{\alpha(\sqrt{2}+\sqrt{\alpha})}{2-\alpha}+\frac{\beta(\sqrt{2}-\sqrt{\beta})}{2-\beta}-\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}(\alpha-\beta)+\sqrt{\alpha^3}+\sqrt{\beta^3}\right)-\sqrt{2} = -3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha^3}+\sqrt{\beta^3})^2}}{\sqrt{3}} =$$

$$= -3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{\alpha^3+\beta^3+2\sqrt{\alpha^3\beta^3}}}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{2}+\sqrt{18} = 0$$

5.5. Bármelyik kettőről is szeretnénk belátni, hogy relatív prímek, a korábbit m-nek hívva feltehetjük, hogy az elsőről és egy későbbiről van szó. Akárhányszor is *iteráljuk* (ismételjük) az f-et, mindig olyan egész együtthatós polinomot kapunk amelynek konstanstagja 1. Hiszen a $p(x)$ polinom konstanstagja $p(0)$ és esetünkben $f(0) = 1 = f(1) = f(f(1)) = \cdot$, vagyis akárhányszor iteráljuk f-et, mindig 1-et fogunk kapni.

Ezek szerint az n-edik iteráltba m-et helyettesítve m-el osztva 1 maradékot adó számot kapunk, vagyis tényleg m-hez relatív prímet.

5.6. $f(x) = (x^3+2x^2+5x)-(x^3+3)$. A második világos, hogy szigorúan monoton nő. Az elsőről azt kell igazolni, hogy nincs olyan érték, amelyet háromszor vesz fel, azaz akármilyen c esetén az x^3+2x^2+5x+c polinomnak nincs három valós gyöke. Ez az 5.11 feladat azonnali következménye, hiszen $2^2-15 < 0$.

5.9.

1. megoldás. Legyen $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Alkalmazzuk az $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ azonosságot az $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ helyettesítéssel, ahol tehát $ab = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} =$ $= \sqrt[3]{4-5} = -1$. Innen

$$x^3+3x-4 = 0. \tag{1}$$

A bal oldalt szorzattá alakíthatjuk:

$$(x-1)\cdot(x^2+x+4) = 0,$$

amelyben a második tényező mindig pozitív, így $x = 1$. (Hivatkozhatunk az 1. bal oldalán álló függvény szigorú monotonitására, hogy lássuk, $x = 1$-en kívül nincs más gyök.)

2. megoldás. Legyen $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Vegyük észre, hogy

$$(1+\sqrt{5})^3 = 1+3\cdot\sqrt{5}+3\cdot 5+5\cdot\sqrt{5} = 16+8\cdot\sqrt{5}, \qquad \text{és} \qquad (1-\sqrt{5})^3 = 16-8\cdot\sqrt{5},$$

azaz

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

[6]

5.10. Először is minden n-re $0\circ n = (-1)(0\circ(-n)) = (-1)(((-n)\circ 0)+n) = (n\circ 0)-n$ miatt $0\circ n = n/2$, vagyis $1999\circ 2000 = 0\circ 1+1999 = 1999{,}5$.

Szigorúan véve még azt is meg kell mutatnunk, hogy létezik egyáltalán ilyen művelet. Valójában pontosan egy ilyen létezik, mégpedig $x\circ y = (x+y)/2$. Azt könnyű ellenőrizni, hogy ez tényleg mindhárom kritériumnak megfelel. Másrész a fenti gondolatmenetet tetszőleges x, y párra elvégezve tényleg azt kapjuk, hogy $x\circ y = (x+y)/2$.

5.11. Tegyük fel, hogy létezik három valós gyök. A Vieta formulák miatt (lásd a 3.1 feladatot és megoldását) a három gyök összege $-a$, kettőszszorzataik összege b. Tehát, ha α, β és γ a gyökök, akkor $a^2 - 3b = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \geq 0$. Az egyenlőtlenséghez lásd a 2.1 feladatot.

5.12. A két oldalt szorzattá alakítva:

$$3x(x+2) = y(2y+7).$$

Itt a bal oldal osztható 3-mal. Ha $y = 3$, akkor $x(x+2) = 25$-öt kapunk, ami lehetetlen. Ha $y = x$, akkor $3x+6 = 2x+7$ miatt $x = 1$ nem prím. Vagyis $y|x+2$ és $3x|2y+7$. Ezek nagyságrendi viszonyokat is jelentenek:

$$y \leq x + 2 \leq \frac{2y+7}{2} + 2.$$

Rendezve az egyenletet $y \leq 13$-at kapunk. Másrészt $3|2y + 7$ miatt 3-mal osztva 1 maradékot ad y. Tehát $y = 7$ és $y = 13$ jön csak szóba. Ezek közül $y = 13$, $x = 11$ a jó.

5.13. Használjuk az alábbi szorzattá alakítást:

$$a^{2^n} - b^{2^n} = (a^{2^{n-1}} + b^{2^{n-1}})(a^{2^{n-2}} + b^{2^{n-2}}) \cdots (a^2 + b^2)(a+b)(a-b).$$

Itt hátulról az utolsó két tényezőt nem tekintve a többi mind két négyzetszám összegéből áll. Ezek csak úgy lehetnek 3-mal oszthatók, ha a és b is osztható 3-mal. Ekkor persze $a^2 - b^2$ osztható 9-cel. ha pedig nem osztható mindkettő 3-mal, akkor 3-nak ugyanaz a hatványa osztja $a^{2^n} - b^{2^n}$-et, mint $a^2 - b^2$-et.

5.16. Szorzattá alakítva $f(x) - f(y) = (x-y)(x+y-6) \geq 0$. Egy szorzat akkor nemnegatív, ha az egyik tényezője 0, vagy a tényezői azonos előjelűek. Jelen esetben az $y = x$ és az $y = -x - 6$ egyenesek által meghatározott „jobb-” és „baloldali” zárt síknegyedek.

5.17. „Gyökösítsük” a $\sqrt{n^2+n+1} - n$ különbséget:

$$\sqrt{n^2+n+1} - n = \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \geq \frac{n+1}{2n+1} = 1/2 + \frac{0{,}5}{2n+1}$$

Ez nagyobb,mint 1/2, vagyis $\sqrt{n^2+n+1} > n + 1/2$. Emiatt felső becslést is kapunk:

$$\sqrt{n^2+n+1} - n = \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} < \frac{n+1}{2n+1/2} = 1/2 + \frac{0{,}75}{2n+1/2},$$

ez nem nagyobb, mint 0,6 pontosan akkor, ha $2n + 1/2 \geq 10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5$, azaz $n \geq 3{,}5$. Az $n = 1$, 2, 3 esetekben külön ellenőrizve a keresett számjegy rendre 7, 6, 6.

5.18. Kezdőnek van nyerő stratégiája. Sőt, azt is el tudja érni, hogy a kapott harmadfokú polinomnak legyen többszörös gyöke is. Töltse ki az elsőfokú együtthatót 0-nak. Ha most Második a másodfokú együtthatót tölti ki, akkor Kezdő a konstanstagot is 0-nak választja és $x^3 + ax^2 = 0$-nak a három gyöke 0; 0; $-a$. Ha viszont a konstanstagot tölti ki c-vel, akkor legyen a másodfokú tag a együtthatója olyan, amellyel $4a^3 = -27c$. Ez $c = 0$ esetén is nyilvánvalóan jó.

Ha viszont $c \neq 0$, akkor $4(a/c)^3 + 27(1/c)^2 = 0$ és így az $x^3 + a/cx + 1/c = 0$ egyenletnek van három valós gyöke, ebből kettő azonos (lásd a 3.2 feladat megoldását). Ezeknek a gyököknek a reciprokai pedig gyökei az $(1/x)^3 + (a/c)(1/x) + (1/c) = 0$, vagyis az $x^3 + ax^2 + c = 0$ egyenletnek. Ez viszont éppen a mi egyenletünk.

5.19. Pontosan akkor teljesül az egyenlet, ha egyik változó értéke sem 0, de van két olyan változó melyek értékének összege a harmadik változó értékével egyenlő. Részletesebben lásd [4][Gy. 2439, 1988/4. 166-167. old.]

5.20. Az oldalak hossza: 52, 160, 204, a hegyesszögek szinusza: $\sin\alpha = \frac{52}{340}$, $\sin\beta = \frac{160}{340}$. Részletesebben lásd [4][F. 2528, 1985/11. 378-380. old.]

5.21. Legyen $s = \sqrt[3]{x-3}$ és $t = \sqrt[3]{y+4}$. Ekkor $s + t = 11$ valamint

$$341 = s^3 + t^3 = (s+t)(s^2 - st + t^2) = (s+t)((s+t)^2 - 3st) = 11(121 - 3st).$$

A műveletek elvégzése után $st = 30$. Vagyis a két új ismeretlen gyöke a $p^2 - 11p + 30 = 0$ egyenletnek. Ezt megoldva $\{s;\, t\} = \{5;\, 6\}$. Ezeket a lehetőségeket az eredeti egyeneletbe visszaírva kapjuk a megoldásokat:

$$x_1 = 128,\ y_1 = 212, \qquad x_2 = 219,\ y_2 = 121.$$

5.22. A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy $2-x+2y = 3$. A két egyenlet különbségéből pedig azt, hogy $x + 2y - 1 = 1$. E két egyenletből egyszerűen jön a végeredmény:$x = 11/6$, $y = 1/12$.

5.23. Legyen $z = x - 4{,}5$ új ismeretlen. Ekkor $97 = (z-0{,}5)^2 + (z+0{,}5)^2 = 2z^4 + 12/4z^2 + 2/16$. Rendezve $z^2 = u$-ra kapjuk a $2u^2 + 3u - 97 + 1/8 = 0$ másodfokú egyenletet. Ennek megoldásai $u = 25/4$ és $u = -31/4$. Ezek közül csak az első lehet z^2, mégpedig $z_1 = 5/2$ vagy $z_2 = -5/2$. Az eredeti ismeretlenre $x_1 = 7$ vagy $x_2 = 2$.

5.24. Miután xy értéke a kérdés, vezessünk be új ismeretlent, $t = xy$. Ezek szerint $y = t/x$. Az új ismeretlennel az egyenlet:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+t^2} = \frac{2}{1+t}.$$

Közös nevezőre hozva és t hatványai szerint rendezve:

$$0 = t^3 - (1+2x^2)t^2 + (x^4+2x^2)t - x^4 = (t-1)(t^2 - 2x^2t + x^4) = (t-1)(t-x^2)^2.$$

Vagyis csak akkor teljesül az egyenlőség, ha $xy = 1$, vagy $x = y$. Az utóbbi esetet viszont kizárta a feladat feltétele.

5.25. Használjuk az $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$ azonosságot. Mivel $10 = 1^2 + 3^2$ előáll, ezért $100 = 10 \cdot 10 = (1\cdot 3 + 3 \cdot 1)^2 + (3 \cdot 3 - 1 \cdot 1)^2 = 6^4 + 8^2$ is előáll. Indukcióval $10^n = 10 \cdot 10^{n-1}$ is előáll.

5.26. Végtelen sok megoldás van. Egy lehetőség például $2^2 + 3^3 + 1^4 = 2^5$. Ennek segítségével bármilyen x egész számra $(2x^{30})^2 + (3x^{20})^3 + (x^{15})^4 = (2x^12)^5$. Ezek a megoldások mind különbözőek.

5.27. Az **a)**esetben az x tengely pozitív irányában a páratlanadik, $2n+1$-edik lépésben $(-1/4)^n$-t lép. Ez a mértani sor összeg $n = 0{,}1, \cdots 23$-ig $\frac{1-(1/4)^{24}}{1+1/4}$. Az y tengely pozitív irányában a párosadik, $2n$-edik lépésben $1/2(-1/4)^{n-1}$-et lép. Ezek összege pont feleannyi, $0{,}5\frac{1-(1/4)^{24}}{1+1/4}$.

A **b)** esetben hasonlóan a mértani sor összege $\frac{1-(1/4)^{24}}{1-1/4}$, illetve $0{,}5\frac{1-(1/4)^{24}}{1-1/4}$.

5.28. Legyen a számrendszer keresett alapszáma g, a nagyobbik helyiértékű számjegy a. Ekkor a növekedő esetben $ga + (a+1) = (a+2)(a+3)$ és $3 \leq a+3 < g$. Átrendezve az egyenlőséget: $a^2 + (4-g)a + 5 = 0$. Ezt a-ra megoldva olyan kifejezést kapunk, amelyben a gyökjel alatti érték, a diszkrimináns $(4-g)^2 - 20$. Ennek $(4-g$-vel megegyező paritású) négyzetszámnak kell lennie, hogy a megoldás egész legyen. Vagyis $20 = (g-4)^2 - n^2 = (g-4+n)(g-4-n)$, ahol a két tényező azonos paritású. Ez csak úgy lehet, ha mindkettő páros, a nagyobbik $g-4+n = 10$, a kisebbik $g-4-n=2$. (Negatívak nem lehetnek, mivel $g > a+3 \geq 3$.) Innen $g=10$, $a=5$ vagy $a=1$. A két megoldás: $12 = 3\times 4$ és $56 = 7\times 8$.

A csökkenő esetben hasonlóan felírva: $ga+(a-1) = (a+1)(a+2)$, és $3 \leq a+2 < g$. Átrendezés után $a^2+(2-g)a+3=0$, most a diszkrimináns $(g-2)^2-12$ négyzetszám. Vagyis $12 = (g-2+n)(g-2-n)$ és a fentihez hasonlóan ebből $g-2+n=6$, $g-2-n=2$ adódik. Végül $g=6$, $a=3$ vagy $a=1$. A két megoldás $10 = 2\times 3$ és $32 = 4\times 5$ (a 6-os számrendszerben).

5.29. Az értelmezési tartomány azokból a valós x számokból áll, amelyekre $x \geq 1/2$ és $x^2 \geq$ $\geq 2x-1$. Ez utóbbi mindig teljesül. Emeljük négyzetre mindkét oldalt (pozitívak, tehát ez ekvivalens átalakítás):

$$2x+2\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2x+2\sqrt{x^2-2x+1} = 2x+2|x-1| = 4.$$

Ezek szerint $x \geq 1$ esetén $4x=6$, vagyis $x=1{,}5$. Ha pedig $x<1$, akkor $2=4$, ami lehetetlen.

5.30. Alkalmazzuk a negyedik hatványok összegére az alábbi előállítást:

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &= (a+b)^4-4ab(a^2+b^2)-6a^2b^2 = \\ &= (a+b)^4-4ab((a+b)^2-2ab)-6a^2b^2 = \\ &= (a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2 = 10000-1600+32 = 8432 \end{aligned}$$

5.31. Némileg átrendezve az egyenleteket:

$$\begin{aligned} (x+y)+xy &= -5 \\ (x+y)xy &= -6. \end{aligned}$$

Vagyis két szám szorzata -6, összegük -5. E két szám gyöke a $z^2+5z-6=0$ másodfokú polinomnak. Ezt megoldva az egyik szám 6, a másik -1. Ha $xy=-6$, $x+y=1$, akkor x és y gyökei az $u^2-u-6=0$ polinomnak, vagyis egyik 3, másik -2. Ha viszont $xy=1$ és $x+y=-6$, akkor gyökei a $t^2+6t+1=0$ polinomnak, vagyis egyik $-3+2\sqrt{2}$, a másik $-3-2\sqrt{2}$. Ez a felcserélhetőségre is tekintettel 4 megoldás.

5.32. Legyen $x=\frac{a-b}{c}$, $y=\frac{b-c}{a}$, $z=\frac{c-a}{b}$. Ekkor $x+1=\frac{a+c-b}{c}=\frac{-2b}{c}$, illetve $x-1=\frac{a-c-b}{c}=\frac{2a}{c}$. Ugyanezeket az átalakításokat megcsináljuk az $y\pm 1$ és $z\pm 1$ mennyiségekre is. Így a következő szorzatokat írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} (x+1)(y+1)(z+1) &= \frac{-2b}{c}\frac{-2c}{a}\frac{-2a}{b} = -8; \\ (x-1)(y-1)(z-1) &= \frac{2a}{c}\frac{2b}{a}\frac{2c}{b} = 8. \end{aligned}$$

Ha a zárójeleket felbontjuk és egymásból kivonjuk a fenti két sort akkor (2-vel való osztás után) ez kapjuk

$$xy+xz+yz+1=-8,$$

vagyis $xy+xz+yz=-9$. Ha viszont a két sor átlagát vesszük, akkor ezt kapjuk

$$xyz+x+y+z=0.$$

A keresett szorzatot most már kiszámíthatjuk:

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = (x+y+z)(\frac{xy+xz+yz}{xyz}) = 9.$$

5.33. A Vieta formulák miatt $-p = \alpha + \beta$, $-q = \gamma + \delta$ és $1 = \alpha\beta = \gamma\delta$. Vagyis a négyzetek különbsége

$$\begin{aligned} q^2 - p^2 &= (\gamma + \delta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = \gamma^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta) = \\ &= (\alpha - \gamma)(\beta + \delta)(\alpha + \delta)(\beta - \gamma). \end{aligned}$$

5.34. A feltétel szerint a polinom maradék nélkül osztható az $x^2 + x + a$ polinommal egy a konstans esetén. Az osztást elvégezve

$$4x^4 - 11x^2 + 9x + b = (x^2 + x + a)(4x^2 - 4x - (7 + 4a)).$$

Emiatt $9 = -4a - 7 - 4a$, vagyis $a = -2$ és így $b = -a(7 + 4a) = -2$.

A megoldás során nem kellett használnunk, hogy *különböző* gyökök összege a -1, megkptuk, hogy ezek gyökei $x^2 + x - 2$-nek, vagyis az 1 és a -2.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Csúri József Duró Lajosné Gyapjas Ferencné Kántor Sándorné és Pintér Lajosné Bartha Gábor, Bogdán Zoltán: *Matematika feladatgyűjtemény I.* 12. kiad. Budapest, 1998, Nemzeti Tankönyvkiadó. ISBN 963 18 8911 4. A „Sárga könyv".

[2] I. M. Jaglom D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov: *Aritmetika és algebra*. Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből sorozat, I. köt. Budapest, 1979, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 3843 4. Újabban a Typotex kiadó is megjelentette.

[3] Kürschák József Matematikai Verseny.
URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Kurschak_Jozsef_verseny.html`.

[4] Középiskolai matematikai és fizikai lapok. A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata. URL `http://www.komal.hu`.

[5] Faragó László: *Matematikai szakköri feladatgyűjtemény*. Középiskolai szakköri füzetek sorozat. Budapest, 1963, Tankönyvkiadó.

[6] Prőhle Zsófia diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[7] Rogelio Valdez Delgado Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega: *Inequalities*. México, 2006, Cuadernos de Olimpiadas de matemáticas.

[8] Rubóczky György közlése.

[9] Tomon István diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.