Algoritmusok

9–10. évfolyam

Szerkesztette:
Hraskó András, Surányi László

2018. október 21.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2018

Tartalomjegyzék

Bevezetés

1. FEJEZET
Az állapotfüggvény

A fejezet még embrionális állapotban van, fejlesztése folyamatban.

Korábbi feladatok: K.II.7.2. és K.II.7.3., K.II.7.6

1.1. (S) [3] Egy táblára felírtuk az $1, \quad 2, \cdots \quad 1978$ számokat. Ezek közül két teszőleges számot letörlünk és helyettük a különbségüket írjuk fel. Ezt a műveletet addig ismételjük, amíg csak egyetlen, nullától különböző szám marad. Bizonyítsuk be, hogy ez a szám páratlan! (Arany Dániel verseny, 1978/K, döntő)

1.2. (M) [5] Felírtuk a táblára a $2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2}$ számokat. A táblán szereplő számok közül bármely kettőt letörölhetjük ha a helyükre az összegük, ill. különbségük $1/\sqrt{2}$-szeresét írjuk.

Elérhető-e, hogy néhány ilyen csere után a táblán az $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$ számok álljanak?

1.3. [5] Van egy kétkarú mérlegünk és 101 darab mérősúlyunk, melyek össztömege 200 gr. Minden mérősúly gr-ban kifejezett tömege egész. A súlyokat egyesével, csökkenő sorrendben rakjuk a mérlegre, és mindig abba a serpenyőbe, ahol kisebb a már felrakott súlyok össztömege.

Bizonyítsuk be, hogy az összes súly felrakása után a mérleg egyensúlyban lesz.

1.4. (M) Egy 1999-szer 2000-es téglalap alakú táblázat minden mezőjében a -1 vagy az 1 szám áll. Egy-egy alkalommal bármelyik sorban vagy oszlopban megváltoztathatjuk az összes szám előjelét. Bizonyítsuk be, hogy az adott „művelet” véges sokszori alkalmazásával elérhető,

a) hogy a táblázatban levő számok összege legalább 2000 legyen;

b) hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege nemnegatív legyen. (Arany Dániel-verseny, 2000H)

1.5. (M) [4] A tanár felírta a táblára az $x^2 + 10x + 20$ polinomot. A diákok ezután sorra változtattak rajta úgy, hogy vagy az x-es tag együtthatóját vagy a konstans tagot növelték vagy csökkentették eggyel. Végeredményül az $x^2 + 20x + 10$ polinom állt a táblán. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan pillanat, amikor a táblán álló polinom gyökei egész számok voltak.

1.6. (M) * Egy erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Minden év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesti-e házikóját. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai többsége éppen más színű házban lakik, mint ő. Bizonyítsuk be, hogy néhány év után már semelyik törpe sem fogja átfesteni a házát. A barátságok kölcsönösek és az évek során nem változnak. (AD haladó, 1990, tagozatos döntő.)

2. FEJEZET

A „mohó algoritmus”

A fejezet még fejlesztés alatt áll.

A fejezet témájához kapcsolódik Surányi László: *Algoritmusok a középiskolában: a mohó algoritmus* című cikke [6].

2.1. (M) Egy baráti összejövetelen n házaspár vett részt, $n > 2$. Bármely három házaspár közül vagy a három asszony, vagy a három férj ismerte egymást.

Elhelyezhetők-e a házaspárok két teremben úgy, hogy az egyik teremben az asszonyok, a másik teremben a férfiak mind ismerik egymást? (Arany Dániel-verseny, 1982H)

2.2. (MS)

Bevezetjük a következő definíciókat:

Definíció. Egy algoritmust *optimálisnak* nevezünk, ha minden esetben talál egy keresett tulajdonságú és optimális (minimális vagy maximális) elemszámú ponthalmazt.

Szubotpimálisnak nevezzük, ha optimális elemszámút nem talál, de a feladat méretétől független konstansszorosát talál.

Bizonyítsuk be, hogy a K.II.13.13. feladat megoldásában használt – egyébként végső soron „mohó algoritmusnak” tekinthető – algoritmus szuboptimális.

2.3. (MS) Mutassuk meg, hogy az alábbi, egy gráf maximális elemszámú független élrendszerét kereső algoritmus nem optimális, de szuboptimális.

Független éleket kereső algoritmus.

Kezdetben V és K üres, G a gráf összes élét tartalmazza.

A CIKLUS a következő: kiválasztunk G-ből egy élt elhagyjuk G-ből és áttesszük V-be. Az összes olyan élt, amelynek van közös végpontja ezzel az éllel, a „kukába” dobjuk, azaz K-ba tesszük. Ha marad még él a gráfban, elölről kezdjük a ciklust, ha nem, akkor a kiválasztott élek a gráf egy független élrendszerét alkotják.

2.4. (MS) Legalább mekkora független ponthalmazt tudunk garantálni egy n pontú egyszerű gráfban, amelyben minden pont foka legfeljebb d?

Vagyis: melyik az a legnagyobb m szám, amelyre igaz, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legfeljebb d, akkor van benne m pontú független ponthalmaz?

2.5. (MS) Az előző (2.4.) feladat megoldásában láttuk, hogy a független ponthalmaz kiválasztásához használt „mohó algoritmus” – a fokszám felső korlátjára tett kikötés mellett – bizonyos értelemben a legjobbat adja, annyi független pontot választ ki, amennyinél többet általában nem tudunk garantálni. Mutassunk példát olyan gráfra, amelyiknél ez a „mohó algoritmus” nem feltétlenül a legnagyobb független ponthalmazt választja ki.

2.6. (MS) Módosítsuk a 2.4. feladat megoldásában használt „mohó algoritmust” annyiban, hogy a maradó gráfból mindig a(z egyik) legkisebb fokú pontot vesszük. Az új algoritmus tehát a következő:

Módosított független ponthalmazt kereső algoritmus.

Kezdetben legyen V is, K is az üres halmaz, G az adott gráf.

A CIKLUS a következő: Ha G üres, akkor az eljárásnak vége, V a talált független ponthalmaz. Ha G nem üres, akkor válasszuk ki G egy minimális fokú x pontját és vegyük hozzá V-hez, a(z aktuális G-beli) szomszédait tegyük hozzá K-hoz (a többi már ott van, mert V független ponthalmaz és G és V között nem fut él). Az új G-t pedig úgy kapjuk, hogy G-ből elhagyjuk x-et és szomszédait. Ezután elölről kezdjük a ciklust.

Az eljárás nyilván véget ér, ha G véges gráf, és az is világos, hogy V a gráf egy független ponthalmazát adja meg. Az előző – 2.5. – feladat megoldásában adott ellenpélda most nem működik.

Igaz-e, hogy ez a módosított algoritmus mindig egy maximális pontszámú független ponthalmazt talál meg?

2.7. (MS) Döntsük el a 2.6. feladatban definiált algoritmusról, hogy szuboptimális-e.

2.8. (MS) Legyen G egy izolált pont nélküli gráf. Ki akarunk választani minimális számú élt, amelyek együttesen lefedik a gráf összes pontját, tehát keresünk egy minimális lefedő élrendszert. A következő „mohó algoritmust” alkalmazzuk:

Minimális lefedő élrendszert kereső algoritmus.

Kezdetben E – a lefedő élek rendszere – üres, V – a lefedendő pontok halmaza – a gráf összes pontja.

A CIKLUS a következő: Keresünk egy olyan élt, amely V két pontja között fut. Azaz sorra vesszük V pontjait, amíg nem találunk kettőt, amelyeket él köt össze. Ha van ilyen, hozzávesszük E-hez és két végpontját elhagyjuk V-ből. Ha V pontjai között már nem fut él, akkor kiválasztjuk V soron jövő pontját, keresünk egy belőle induló élt (ilyen van, mert nincs izolált pont a gráfban), ezt hozzávesszük E-hez, a pontot pedig elhagyjuk V-ből.

Ha ezzel V kiürül, akkor vége az eljárásnak. Ha nem, akkor elölről kezdjük a CIKLUSt.

a) Mutassunk példát arra, hogy ez az algoritmus nem optimális.

b) Bizonyítsuk be, hogy az algoritmus szuboptimális.

2.9. A minimális lefedő élrendszert kereső algoritmusunkat (l. a 2.8. feladatot) megpróbálhatjuk úgy javítani, hogy ha „felesleges” éleket is kiválasztott, akkor azokat elhagyjuk. Vagyis az ottani algoritmust kibővítjük egy lépéssel:

Sorra vesszük E éleit, és ha találunk egy e élt, amelynek mindkét végpontját lefedi E többi éle, akkor ezt az e élt elhagyjuk E-ből. Ha nem találunk ilyet, akkor befejezzük az eljárást.

Optimális-e az így kiegészített algoritmus?

2.10. (M) Egy véges gráfban minden pont foka $\leq d$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf $d+1$ színnel jólszínezhető.

Kiszínezhető-e mindig d színnel is?

Igaz-e az állítás (megszámlálhatóan) végtelen gráfra is?

3. FEJEZET
Fák, favázak

A fejezet még fejlesztés alatt áll.

A **??**. feladat jó „bemelegítő feladat” a szélességi favázhoz! L. a 3.4. és a **??** feladatot is!

3.1. Szélességi faváz

3.1. (M) Legyen G összefüggő gráf. Létezik-e G-nek olyan faváza, amely „megőrzi” minden pontpár távolságát? Ezen azt értjük, hogy x és y távolsága G-ben és a favázban bármely két pontra ugyananyi.

3.2. Legyen G összefüggő egyszerű gráf és legyen x a gráf egy tetszőleges pontja. Létezik-e G-nek olyan faváza, amelyben az x-től való távolságot „megőrzi”? Ezen azt értjük, hogy bármely y pontra x és y távolsága G-ben és a favázban azonos.

3.3. (S)

A szélességi faváz definíciója. Legyen G egy összefüggő gráf és legyen x a gráf egy pontja. Legyenek a gráf pontjai megszámozva: $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. A faváz textitnulladik emelete egyetlen pontból, az x pontból áll. Az *első emeletére* x szomszédai kerülnek. Mindegyiküket össze is kötjük x-szel.

Általában az i-edik emeletre az $i-1$-edik emeleti pontok szomszédai kerülnek, feltéve, hogy még nem szerepelnek korábbi emeleten. Lehetséges azonban, hogy egy ilyen pont több, $i-1$-edik emeleti ponttal is össze van kötve. Ilyenkor azzal a szomszédjával kötjük össze, amelyiknek legkisebb az indexe.

Bizonyítsuk be, hogy az így kapott részgráf G faváza, amelynek minden éle két, szomszédos emeleten levő pontot köt össze. A G gráf minden éle vagy két, azonos emeleten levő pontot köt össze, vagy két szomszédos emeleten levő pontot.

3.4. (MS) Oldjuk meg a **??**. feladatot a szélességi faváz segítségével!

3.5. (S) Mi lehet a teljes gráf szélességi faváza?

3.6. (S) Van-e több olyan, egymással nem izomorf faváza a teljes gráfnak, amely teljesíti a 3.2. feladat feltételét?

3.7. (S) Mi lehet egy n pontú kör szélességi faváza?

3.8. (S) Van-e több olyan faváza C_n-nek, amely teljesíti a 3.2. feladat feltételét?

3.9. (M) Mutassunk példát olyan gráfra, amelynek több, egymással nem izomorf x gyökerű szélességi faváza van!

3.10. (M) Nyilvánvaló, hogy ha egy összefüggő egyszerű gráf két pontjának a fokszáma különbözik, akkor a belőlük induló szélességi favázak nem lehetnek izomorfak.

Mutassunk példát olyan reguláris gráfra, amelynek több, egymással nem izomorf szélességi faváza van!

3.11. (M) * Van-e olyan csúcstranzitív gráf, amelynek több, egymással nem izomorf szélességi faváza van?
Megjegyzés. A csúcstranzitivitás definícióját lásd a **??**. fejezetben.

3.12. (M) Igazoljuk, hogy az oktaéder minden szélességi faváza izomorf!
Igaz-e, hogy ugyanez a kockára? És az ikozaéderre?

3.13. (S) Van-e több olyan, a szélességi favázzal nem izomorf faváza a) az oktaédernek,
b) a kockának,
amely teljesíti a 3.2. feladat feltételét?

3.14. (M) Rajzoljuk fel a szabályos dodekaéder minden szélességi favázát!

3.15. (M) Rajzoljuk fel a kocka gráfja komplementerének minden szélességi favázát!

3.16. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy gráf pontosan akkor páros gráf, ha nincs benne páratlan kör.

3.17. (M) Egy n pontú egyszerű gráfban nincs páratlan kör. Legfeljebb hány éle lehet?

3.18. (MS) ** Adott $n \geq 5$ egész szám. Minden lehetséges módon számpárokat képeztünk belőlük, s vettük minden számpárban a számok összegét. Az így kapott $(n^2 - n)/2$ összeg közül legalább $(n^2 - 3n + 4)/2$ racionális. Bizonyítandó, hogy akkor az összes összeg racionális.
Következik-e a feltételből az is, hogy minden megadott szám racionális?

3.19. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges gráf szélességi favázában a gyökérből induló minden út geodetikus útvonal a gráfban.

3.20. (MS) * Bizonyítsuk be, hogy ha egy végtelen összefüggő gráfban minden pont foka véges, akkor van benne (egy irányban végtelen) geodetikus útvonal.

3.2. Mélységi faváz

3.1. (M) Van-e olyan faváza
a) az n pontú teljes gráfnak,
b) az n pontú körnek,
c) a Petersen-gráfnak,
d) a **??**. feladat gráfjának
amelyre igaz, hogy a gráf minden éle a faváz egy elődjét és utódját köti össze?

3.2. (S) Van-e olyan faváza a **??**. feladat gráfjának, amelynek gyökere az ötödfokú pont és amelyre igaz, hogy a gráf minden éle a faváz egy elődjét és utódját köti össze?

3.3. (S) Legyen G az alábbi gráf:
Van-e ennek a gráfnak olyan faváza amelyre igaz, hogy a gráf minden éle a faváz egy elődjét és utódját köti össze?
Van-e ilyen faváza akkor is, ha megköveteljük, hogy annak gyökere a gráf egy másodfokú pontja legyen.

3.4. (S) Legyen G az alábbi gráf:
Van-e ennek a gráfnak olyan faváza amelyre igaz, hogy a gráf minden éle a faváz egy elődjét és utódját köti össze, s amelynek gyökere a gráf egyik negyedfokú pontja?

3.5. Mélységi faváz!!

3.6. (S) Igaz-e, hogy minden összefüggő gráfnak van olyan faváza, amelyre igaz, hogy a gráf minden éle a faváz egy elődjét és utódját köti össze?

3.7. (MS) Legyen G egy összefüggő véges egyszerű gráf, amelynek k éle van. Bizonyítsuk be, hogy az élei megszámozhatók az $1,2,\ldots,k$ számokkal úgy, hogy minden, legalább másodfokú pontra igaz, hogy a belőle induló élekre írt számok legnagyobb közös osztója 1. (NMO, 1991)

3.8. (S) Mi lehet a teljes gráf mélységi faváza?

3.9. (S) Mi lehet egy n pontú kör mélységi faváza?

3.10. (M) Igazoljuk, hogy a tetraéder minden mélységi faváza izomorf!
Igaz-e ugyanez a kockára? És az oktaéderre?

3.11. (M) Rajzoljuk fel az ikozaéder minden mélységi favázát!

3.12. (M) Igaz-e, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor minden mélységi faváza Hamilton-út?

4. FEJEZET

„Hibás mérések”

A fejezet még fejlesztés alatt áll.

4.1. „Hibás mérések”

A következőkben különböző súlyú érmék súlyát akarjuk megállapítani egy egykarú mérleg segítségével. A mérlegünk azonban nem teljesen megbízható, bizonyos *előre rögzített számú* esetben hibáz*hat*. Kezdjük rögtön egy példával:

4.1. (M) Száz, különböző érme súlyát kell megállapítanunk egy egykarú mérleg segítségével. Tudjuk, hogy a mérleg néha – de *legfeljebb háromszor* – hibás eredményt mutat. Hány méréssel tudjuk biztosan megállapítani minden érme súlyát?

4.2. (M) Most három érmét kell megmérnünk egy egykarú mérleg segítségével. Tudjuk, hogy a mérleg legfeljebb egyszer fog hibás eredményt mutatni. A 4.1. módszerével hét mérésből akkor is megállapíthatjuk minden érme súlyát, ha egyszerre mindig csak egy érmét rakunk a mérlegre. De most tetszésünk szerint egy vagy két érmét is mérhetünk egyszerre. Meg tudjuk-e állapítani mindhárom érme súlyát hat méréssel is?

4.3. (M) Most hét érmét kell megmérnünk egy egykarú mérleg segítségével, amelyen egyszerre pontosan két érmét mérhetünk. Tudjuk, hogy a mérleg legfeljebb egyszer fog hibás eredményt mutatni. Meg tudjuk-e állapítani 11 mérésből mind a hét érme súlyát?

4.4. (MS) n érme súlyát kell megállapítanunk egy egykarú mérleg segítségével, amelyen egyszerre pontosan két érmét mérhetünk. Most is tudjuk, hogy a mérleg legfeljebb egyszer ad hibás eredményt. A 4.3. feladat alapján hány mérésből tudjuk ezt garantálni?

4.5. Most 2500 érmét kell megmérnünk egy egykarú mérleg segítségével, amelyen egyszerre pontosan két érmét mérhetünk. Tudjuk, hogy a mérleg legfeljebb egyszer fog hibás eredményt mutatni. Meg tudjuk-e állapítani 3000-nél kevesebb mérésből mind a 2500 érme súlyát?

4.6. Most $7n$ érménk van, $n > 1$; ismét egy egykarú mérlegen mérjük az érméket, egyszerre pontosan kettőt lehet ráhelyezni és legfeljebb egyszer lesz hibás az eredmény. Szeretnénk $8n + 7$ éréssel minden érme súlyát megállapítani. Hogyan tegyük?

4.7. Most 2500 érmét kell megmérnünk egy egykarú mérleg segítségével, amelyen egyszerre pontosan két érmét mérhetünk. Tudjuk, hogy a mérleg legfeljebb egyszer fog hibás eredményt mutatni. Meg tudjuk-e állapítani 2600 mérésből mind a 2500 érme súlyát?

5. FEJEZET
Játékok

5.1. [5] Hány kérdéssel lehet eldönteni, hogy öt számból melyik háromra gondoltak, ha minden lépésben egy három elemű halmazt választhatunk ki, és azt tudjuk meg, hogy a kiválasztott halmazban hány van a három gondolt szám közül?

5.2. (MS) Antal 100 gyufásdobozt megszámoz 1-től 100-ig, és mindegyikbe tetszése szerinti számú gyufát tesz. Bea tetszőlegesen kiválaszt 15 dobozt (ő dönti el, melyikeket), erre Antal megszámolja a bennük levő gyufákat (úgy, hogy Bea ezt ne lássa), és megmondja, hogy a 15 dobozban együttesen páros vagy páratlan számú gyufa van. Bea ezt a kérdezési lépést akárhányszor megismételheti. Ki tudja-e Bea találni, hogy az 1-es számú dobozban páros vagy páratlan sok gyufa van, és ha igen, akkor mi az ehhez szükséges minimális lépésszám? (OKTV, 1990)

5.3. (M) a) Az 5.2. feladatban most Antalnak csak 20 gyufásdoboza van. Ki tudja-e találni most Bea 5 kérdéssel, hogy az 1-es számú dobozban páros vagy páratlan sok gyufa van-e? Legkevesebb hány kérdésből tudja kitalálni?

b) És mi a helyzet, ha csak 18 gyufásdoboz van? Elég-e 7 kérdés?

c) Végül válaszoljunk arra a kérdésre is, hogy hány kérdéssel sikerülhet Beának kitalálni, ha 16 doboz van?

5.4. (M) Egy asztalon négy doboz áll, mindegyikben egy golyó van, ami fehér vagy fekete. Tudjuk, hogy van néhány fehér golyó, összesen páros sok. Egy lépésben rámutathatunk bármelyik két dobozra, és megtudjuk, van-e fehér golyó a párban.

Legalább hány kérdés kell ahhoz, hogy biztosan találjunk két fehér golyót tartalmazó dobozt?

5.5. (M) * Egy asztalon 1004 doboz áll, mindegyikben egy golyó van, ami fehér vagy fekete. Tudjuk, hogy van néhány fehér golyó, összesen páros sok. Egy lépésben rámutathatunk bármelyik két dobozra, és megtudjuk, van-e fehér golyó a párban.

Legalább hány kérdés kell ahhoz, hogy biztosan találjunk két fehér golyót tartalmazó dobozt? (Arany Dániel-verseny, 2005H)

5.6. (M) [2] Aladár egy dobozba valahány golyót helyezett el (üresen is hagyhatta), Béla megpróbálja kitalálni a golyók számát.

a) Minden rossz tipp után Aladár egy újabb golyót tesz a dobozba.

b) A játék elején Aladár eldönti, hogy egy vagy két golyóval növel, de nem árulja el. Minden rossz tipp után Aladár annyi új golyót tesz a dobozba, amennyit előre elhatározott. (Tehát vagy mindig egyet vagy mindig kettőt.)

c) A játék elején Aladár eldönti, hogy hány golyóval növel, de nem árulja el. Minden rossz tipp után Aladár annyi új golyót tesz a dobozba, amennyit előre elhatározott.

A játéknak akkor van vége, ha tippjével Béla eltalálja az éppen aktuális golyószámot. Hogyan játsszon Béla?

5.7. Az 5×7-es tábla jobb felső sarkában áll egy bábu. A figurával a sorában balra, az oszlopában lefelé, vagy pedig átlósan balra lefelé lehet lépni tetszőlegesen nagyot, tehát nem csak a szomszédos mezőre léphetünk át. Két játékos felváltva mozgatja a bábut. Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek, vagy a másodiknak következő játékosnak, ha

a) az nyer, **b)** az veszt,

aki a bal alsó sarokban található mezőre lép?

5.8. Az 5×7-es tábla jobb felső sarkában áll egy bábu. A figurával a sorában balra, az oszlopában lefelé, vagy pedig átlósan balra lefelé lehet lépni tetszőlegesen nagyot, tehát nem csak a szomszédos mezőre léphetünk át. Két játékos felváltva mozgatja a bábut. Összesen egyszer passzolhatnak is (ha az egyikük passzolt, akkor a másik sem passzolhat többet), az is lépésnek számít. Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek, vagy a másodiknak következő játékosnak, ha az az nyer

a)) aki a bal alsó sarokba lép?

b) akinek az ellenfele nem tud lépni?

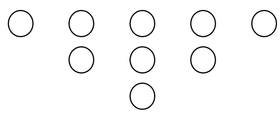
5.9. Az $n \times k$ méretű tábla jobb felső sarkában áll egy bábu. A figurával a sorában balra, az oszlopában lefelé, vagy pedig átlósan balra lefelé lehet lépni tetszőlegesen nagyot, tehát nem csak a szomszédos mezőre léphetünk át. Két játékos felváltva mozgatja a bábut. Szeretnénk eldönteni, hogy kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek, vagy a másodiknak következő játékosnak, ha

a)) az nyer, **b)** az veszt,

aki a bal alsó sarokban található mezőre lép. Írjunk programot, amely n és k beadása után eldönti a kérdést és megadja a nyeréshez vezető eljárást (azoknak a mezőknek a koordinátáit, amelyekre érdemes rálépni).

5.10. Bergengóc 1-ből

5.11. [5] 9 golyót helyeztünk el az alábbi ábrán látható módon.



Ketten felváltva lépnek, mindig elvesznek egy golyót, vagy pedig két egymás mellettit vagy alattit. Kinek van nyerő stratégiája, a kezdő játékosnak vagy pedig a másodjára következőnek, ha az

a) nyer, **b)** veszít,

aki az utolsó golyót veszi el?

5.12. [5] Anna és Béla egy n gyufát tartalmazó kupacból felváltva vesznek el – tetszésük szerint – 1, 2 vagy 3 gyufát, amíg el nem fogy. Ha senki nem vett el a játék folyamán egyszerre két gyufát, a játék döntetlen. Ha vett el valaki egyszerre két gyufát, akkor az nyer, aki utoljára vett el egyszerre két gyufát.

5.13. [5] Ketten játsszák a következő játékot. Tíz érme van egy sorban, mindegyiken az írás van felül. Az a cél, hogy mindegyiken a fej legyen felül, és az nyer, aki ezt eléri. Egyszer már megfordított korongot nem szabad vissza fordítani. Aki kezd, először csak egyet fordíthat fel, utána mind-ketten egyet, vagy két szomszédosat fordítanak fel. Ki nyer, ha mindketten jól játszanak?

5.14. [5] Ketten játsszák a következő játékot. Kezdetben k db halom van, összesen n elemmel. Aki soron jön, egy halmot ketté oszt, ha még lehet. Az veszít, aki egy halmot sem tud már tovább osztani. Kinek van nyerő stratégiája?

5.15. [5] Anna és Béla a következő gráfjátékot játssza n ponton: felváltva húznak be éleket, és az veszít, aki kört zár be. Kinek van nyerő stratégiája?

5.16. [5] Adott k halmaz, melyekben összesen n elem van. Ketten a következő játékot játsszák: felváltva lépnek; a soron következő játékos kiválaszt egy kupacot és két részre osztja. Az veszt, aki már egyik részt sem tudja kettéosztani.

5.17. [5] Adott egy halmaz n elemmel. Ketten a következő játékot játsszák: felváltva lépnek; a soron következő játékos minden olyan halmazt kettéoszt, amelyben legalább két elem van; az nyer, aki eléri, hogy mindegyik halmazban egy elem legyen.

5.18. Ezt a játékot két ember játsza 6 koronggal. A korongok egyik oldala piros, a másik kék. Kezdetben a korongok szín szerint így helyezkednek el: $KPKKPK$. A két játékos felváltva lép. A lépés abból áll, hogy a játékos kiválaszt egy kék (K) korongot és azt, valamint az összes attól jobbra elhelyezkedő korongot ellenkező színűre fordítja.

6. FEJEZET

Eljárások

7. FEJEZET

Programozási feladatok

Ez a fejezet még fejlesztés alatt áll.

7.1. (M) Írjunk függvényt, amelynem bemenete egy pozitív egész szám (n), kimenete pedig az n-edik prímszám.

7.2. (M) Írjunk programot, amely megvalósítja két pozitív szám legnagyobb közös osztójának kiszámolását. Bemenete két egész szám a és b, kimenete pedig a legnagyobb köszös osztójuk.

7.3. (M) Írjunk programot, amely két pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját előállítja a két szám egészegyütthatós kombinációjaként.

A program bemenete két egész szám, a és b, két további paramétere a c és a d változó, amikbe a két együtthatót helyezi. Ezekre

$$c \cdot a + d \cdot b = (a;b).$$

7.4. (M) Írjuk meg a racionális számokkal való számolás műveleteinek megfelelő függvényeket. A törteket két mezőből (*numerator*: számláló, *denominator*: nevező) álló rekordokkal reprezentáljuk.

a) Egyszerűsítés: az x bemenetre, ahol $x = \frac{a}{b}$ (a és b egészek, $b \neq 0$) azt az $x' = \frac{a'}{b'}$ törtet adja ki, amelynek tagjai relatív prímek, és $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Valósítsuk meg racionális számok

b) összeadását **c)** kivonását **d)** szorzását **e)** osztását!

7.5. Írjuk meg a racionális számok és tizedestört alakjuk közti oda-vissza megfeleltetést megvalósító függvényeket!

a) A $TortbolTizedes$ program bemenete a $SZAMLALO$ és a $NEVEZO$ (pozitív egész számok) kimenete három lista $EGESZRESZ$, $PISZOK$, $PERIODUS$, amely a tizedestört alak megfelelő jegyeit tartalmazza.

b) A $TizedesbolTort$ program bemenete az $EGESZRESZ$, $PISZOK$, $PERIODUS$ listákból áll, kimenete annak a törtnek a tovább nem egyszerűsíthető alakja, amelynek tizedesjegyeit az adott listák tartalmazzák.

7.6. Írjunk programot, amely képes nagy pozitív egész számokkal alapműveleteket végezni. Bemenete a két szám számjegyeinek listája, kimenete az

a) összegük **b)** szorzatuk

b) hányadosuk és a maradék

listája (listái).

7.7. Írjunk programot, amely képes nagy pozitív egész számokból gyököt vonni. Bemenete a ($SZAM$) szám számjegyeinek listája és a pontosságot megadó $HIBAKORLAT$ szám. Kimenete a $GYOKEGESZRESZ$ és a $GYOKTIZEDES$ lista, amelyek összefűzve legfeljebb $HIBAKORLAT$ értékével térnek el a tényleges gyöktől.

7.8. Írjunk programot, amely egy listában adott számsorozatot növekvő sorrendbe rendez.

7.9. Írjunk programot, amely egy listában adott számsorozatból kiválasztja a két legnagyobb elemet.

7.10. Írjunk programot, amely egy listában adott számsorozatból kiválasztja a legnagyobb és a legkisebb elemet.

7.11. Írjunk programot, amely egy listában adott számsorozatból kiválasztja a középső elemet.

7.12. Írjunk kongruenciamegoldó programot. A program bemenete az $ax \equiv b \pmod m$ kongruencia a, b, m együtthatója (egészek, m pozitív) kimenete a kongruencia egyik x megoldása és a megoldás m' modulusa.

7.13. Írjunk programot, amely megvalósítja két nagyon nagy pozitív szám legnagyobb közös osztójának kiszámolását. Bemenete számjegyek két listája, $EGYIKSZAM$ és $MASIKSZAM$, kimenete pedig $LNKO$, a legnagyobb köszös osztójuk, amely szintén egy lista.

7.14. Írjunk programot, amely megvalósítja polinomok maradékos osztását. Bemenete két valós együtthatós polinom, $OSZTANDO$ és $OSZTO$, kimenete pedig a $HANYADOS$ és $MARADEK$ (ezek pl. mind listák).

7.15. Írjunk programot, amely megvalósítja racionális együtthatós polinomok maradékos osztását. Bemenete két racionális együtthatós polinom, $OSZTANDO$ és $OSZTO$, kimenete pedig a $HANYADOS$ és $MARADEK$ (ezek pl. mind számpárokból $(SZAMLALO, NEVEZO)$ álló listák).

7.16. Írjunk programot, amely megvalósítja racionális együtthatós polinomok legnagyobb közös osztójának kiszámolását. Bemenete két racionális együtthatós polinom, $EGYIKPOL$ és $MASIKPOL$, kimenete pedig $LNKO$ (ezek pl. mind számpárokból $(SZAMLALO, NEVEZO)$ álló listák).

7.17. Írjunk programot, amelynek bemenete egy véges egyszerű gráf súlyozott élekkel, kimenete pedig a gráf

a) egyik **b)** összes

minimális költségű feszítőfája.

7.18. Írjunk programot, amelynek bemenete egy véges egyszerű gráf és egy csúcsa, kimenete pedig a gráfnak az adott csúcsot tartalmazó komponense (csúcsok listája).

7.19. Írjunk programot, amelynek bemenete egy véges egyszerű gráf, kimenete pedig a gráf csúcsainak összefüggőségi komponensei (halmazok listája).

7.20. Írjunk programot, amelynek bemenete egy véges egyszerű gráf és két csúcsa, kimenete pedig a két csúcs közti legrövidebb út (csúcsok listája).

7.21. Írjunk programot, amelynek bemenete egy véges egyszerű gráf és két csúcsa, kimenete pedig a két csúcs közti leghosszabb út (csúcsok listája).

7.22. Adott egy véges egyszerű gráf. Ketten játszanak. Le lehet törölni egy csúcsot (a belőle induló élekkel együtt) vagy pedig két szomszédos csúcsot az összes éleikkel. Két játékos felváltva lép. Az nyer, aki letörli az utolsó csúcsot.

Írjunk programot, amelynek bemenete a gráf. A program megválaszthatja melyik fél szeretne lenni ("kezdő" vagy "második") és lejátssza a partit a nyerésig.

7.23. Írjunk programot, amelynek bemenete a gráf és két csúcsa és képes játszani a [1][VII. 338.] játékot.

7.24. Írjunk gyökkreső programot. A program bemenete egy valós együtthatós polinom (számok listája) valamint két valós szám $X1$, $X2$, és a $HIBALORLAT$ (kis pozitív szám). A program ellenőrzi, hogy az adott polinom a két adott helyen ellenkező előjelű értéket vesz fel, és ha igen, akkor megkeresi a polinom egy $X1$ és $X2$ közé eső gyökét $HIBALORLAT$ pontossággal.

8. FEJEZET

Barkochba

Segítség, útmutatás

1. Az állapotfüggvény

1.1. Minek nem változik a paritása a lépések során?

2. A „mohó algoritmus”

2.2. Olvassuk el figyelmesen a **??**. feladat megoldását.

2.3. Ellenpéldának jó a legtöbb út.

Másrészt a maximális független élrendszer hány élét „rontja el” az algoritmus, amikor egy élt V-be választ?

2.4. Mi történik, ha kiválasztunk egy tetszőleges pontot és elhagyjuk a szomszédait?

2.5. Használjuk ki, hogy a 2.4. feladat megoldásában használt „mohó algoritmus” kimenetele attól is függ, hogy milyen sorrendben jönnek sorra az egyes pontok. Nagyon egyszerű gráfokra érdemes gondolni!

2.6. Már olyan hétpontú gráf is van, amelyben van három független pont, de az algoritmus csak két független pontot talál.

2.7. A 2.6. feladat megoldása általánosítható.

2.8. a) Keressünk kis gráfot, amelyre az algoritmus nem optimális.

b) Amikor az algoritmus olyan V ponthalmazhoz jut, amelyben nem fut él, akkor ezeket egyesével fedi le – ám ezeket a pontokat a minimális lefedő élrendszer is köteles egyesével lefedni, hiszen V pontjai között nem fut él.

3. Fák, favázak

3.3. Eljárásunk a G gráf minden pontját eléri, hiszen G összefüggő, tehát x-ből minden pontjához vezet út. Eljárásunk minden ponthoz „meg is talál” egy-egy ilyen, x-ből hozzá vezető utat, tehát a kapott feszítő részgráf összefüggő. Másrészt minden éle két, szomszédos emeleten levő pontot köt össze, és egy i-edik szinten levő pontból csak egy $i-1$-edik szinten levő pontba fut él, tehát nem keletkezhet kör. A kapott feszítő részgráf tehát összefüggő és körmentes, így valóban G faváza.

3.4. Vegyük a gráf szélességi favázát, ennek legfeljebb két emelete van a gyökéren kívül és minden pontjából így néz ki. Ez bizonyos köröket kizár.

3.5. A teljes gráf minden szélességi faváza izomorf: egy csillag.

3.6. Nincs, mert minden pont x szomszédja.

3.7. A szélességi faváz egy út, amelynek a(z egyik) középső pont a gyökere.

3.8. Nincs.

3.13. Az oktaédernek nyilván nincs. Viszont a kockának több is van:

3.18. Nyilvánvaló, hogyan lehet átfogalmazni a feladatot gráfokra. A feladat feltétele azt mondja meg, hogy legalább hány *él* racionális, a kérdés pedig az, hogy a *pontok* racionálisak-e. Hogyan lehet kapcsolatot létesíteni a kettő között? Nyilván úgy, ha sikerül egy pontról több adatot nyerni éleken keresztül.

3.20. Vegyük a gráf szélességi favázát és alkalmazzuk a König-lemmát (**??**. feladat).

3.2. Van.

3.3. Mindkét esetben igenlő a válasz.

3.4. Van:

3.6. Minden mélységi favázra igaz a feladat állítása.

3.7. A mélységi keresés (l. a 3.5. feladatot) segít!

3.8. A teljes gráf minden mélységi faváza izomorf: egy út, amelynek gyökere az út valamelyik végpontja.

3.9. A mélységi faváz egy út, amelynek az egyik végpont a gyökere.

4. „Hibás mérések”

4.4. Állítsuk hetes csoportokba az érméket,

5. Játékok

5.2. Ha ügyes, három kérdéssel kitalálja.

6. Eljárások

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

7. Programozási feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

8. Barkochba

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

Megoldások

1. Az állapotfüggvény

1.2. Vegyük észre, hogy a számok megengedett változtatása a három szám négyzetösszegét nem változtatja meg. Ez a négyzet összeg kezdetben racionális volt, a kívánt végállapotban viszont irracionális lenne, tehát nem érhető el ez az állapot.

1.4. a) Egy 1999 számból álló oszlopban a számok összege nem lehet nulla. Így vagy eleve legalább 1 az ott álló számok összege, vagy az előjelváltoztatással elérhető ugyanez. Összesen 2000 ilyen oszlop van, tehát elérhető, hogy a táblázatban a számok összege legalább 2000 legyen.

b) Ha valamelyik sorban, vagy oszlopban a számok összege negatív, akkor ebben a sorban vagy oszlopban megváltoztatva a számok előjelét a táblázatban álló számok összege nőni fog. Növeljük tehát a táblázatban levő számok összegét a megadott lépéssel, amíg tudjuk. A számok összege nem lehet több 2000×1999-nél, tehát véges sok lépés után meg kell állnunk, s ekkor minden sorban és oszlopban nemnegatív a számok összege. Természetesen ekkor minden oszlopban pozitív a számok összege (mert ott páratlan sok szám áll), s ezért a táblázatban a számok összege legalább annyi, ahány sor van, azaz legalább 2000. Ezzel az a) részre is új megoldást adtunk.

1.5. Azt kell észrevennünk, hogy az $x^2 + bx + b - 1$ polinomnak gyöke az 1 és a $b - 1$ szám. Az eljárás kezdetén a konstans tag és az x együtthatójának különbsége 10 volt, a végén -10 lett és közben mindig egyesével változott. Tehát volt olyan helyzet amikor a különbség -1 volt és ebben a helyzetben éppen $x^2 + bx + b - 1$ alakú volt.

1.6. A barátságokat ábrázoljuk gráffal, amelynek pontjai a törpék, élei a barátságok. Minden pontot olyan színűre festettnek képzelünk, amilyen színű házban az illető törpe éppen lakik. Nézzük, mi történik egy-egy törpe akciója után azoknak az éleknek a számával, amelyek két végpontja különböző színű volt. Ha a törpe átfesti a házát, ez azért van, mert így az ilyen élek száma csökken. Mivel az élek száma nem lehet negatív, egy idő után nem csökkenhet, vagyis egy idő után egyetlen törpe sem fogja átfesteni a házikóját.

2. A „mohó algoritmus”

2.1. Kérjük meg a házaspárokat, hogy álljanak sorba. Az első három házaspárt beküldjük a nők termébe, ha a három asszony ismeri egymást, ellenkező esetben a férfiak termébe kerülnek. Utána a következő algoritmus alkalmazzuk. A soron következő házaspár nőtagja – nevezzük A-nak – megnézi, hogy ismer-e minden asszonyt a nők terméből. Ha igen, megkérjük e házaspárt, hogy fáradjon a nők termébe. Ha van olyan A' asszony, akit A nem ismer, akkor A férje biztosan ismeri a férfi terem minden férfi tagját. Ha ugyanis volna egy F', akit nem ismer, akkor vegyük A'-t és férjét, A-t és férjét, F-et, továbbá F'-t és feleségét. Ez három különböző házaspár, és sem az asszonyok nem ismerik mindhárman egymást – hiszen A és A' nem ismeri egymást –, de a a férjek sem ismerhetnék mindhárman egymást, hiszen F és F' nem ismeri egymást. Ez azonban ellentmond a feladat feltételének. Tehát A férje, F mindenkit ismer a férfiak terméből, tehát a házaspárt nyugodtan beküldhetjük a férfiak termébe.

Ezt az eljárást addig folytathatjuk, amíg el nem fogynak a házaspárok. A feladat kérdésére ez az algoritmus pozitív választ ad.

2.2. A K.II.13.13. feladat megoldásában használt algoritmus olyan páronként diszjunkt köröket talál, amelyek együttesen lefedik az eredetileg lefedett területnek legalább a kilencedét. Másrészt nyilván legfeljebb az egész területet fedhetnék le, tehát biztos, hogy az optimálisan kiválasztható körök által lefedett területnek legalább a kilencedét lefedik.

Egyébként ugyanott mutattunk példát arra is, hogy bizonyos esetekben legalább a 4/9-edét is lefedik.

2.3. Először azt kell meggondolnunk, hogy az algoritmus valóban független élrendszert ad. De ez nyilvánvaló.

Az is nyilvánvaló, hogy nem optimális, hiszen például egy három hosszúságú útból rossz esetben a középső élt fogja kiválasztani V-be, a másik két élt pedig K-ba dobja, holott az a két él is független. (Bármely páratlan útnál előfordulhat ugyanez a helyzet, és egy legalább hat hosszú útnál úgyszintén.)

Most megmutatjuk, hogy az algoritmus szuboptimális: ha a maximális független élrendszer m elemszámú, akkor legalább $m/2$ független élt kiválaszt.

Legyen $E = \{e_1, e_2, \dots e_m\}$ a gráf egy maximális független élrendszere. Amikor az algoritmus kiválaszt egy élt és V-be teszi, akkor vagy E egy élét választja ki, vagy egy olyan élt, ami E két különböző élének egy-egy végpontját köti össze. Első esetben E-nek egy éle kerül elhagyásra, második esetben E-nek két élét dobjuk ki a „kukába”. Ez tehát azt jelenti, hogy amikor V elemszáma eggyel nő, akkor E-ből legfeljebb két él kerül K-ba. Ám G nem ürül ki addig, amíg van elem E-ben, tehát leghamarabb $\lceil m/2 \rceil$ lépés után ürül ki. Így V elemszáma legalább a fele a maximális elemszámnak.

2.4. Tegyük fel először, hogy n osztható $d+1$-gyel, $n = k(d+1)$ és legyen a gráf k komponensű, legyen továbbá minden komponense egy-egy $d+1$ pontú teljes gráf. Ekkor a gráf d-reguláris, és minden maximális független ponthalmazt úgy kapunk, hogy minden komponensből veszünk egy-egy pontot. Tehát a maximális független ponthalmaznak $k = n/(d+1)$ pontja van.

Általában, ha $n = k(d+1) + l$ és $0 \le l < d+1$, akkor az előbbi gráfhoz még egy komponenst hozzáveszünk, amely egy l pontú teljes gráf lesz. Ez a gráf is teljesíti, hogy minden pont foka legfeljebb d, és a maximális független ponthalmazoknak most $k+1 = \lceil n/(d+1) \rceil$ pontja van.

A két példából együtt azt kapjuk, hogy a feladatban szereplő m nem lehet nagyobb $\lceil n/(d+1) \rceil$-nél.

Most megmutatjuk, hogy ekkora független ponthalmaz mindig ki is választható, mégpedig a legegyszerűbb módon, mohó algoritmussal.

Vegyünk egy tetszőleges x_1 pontot, válasszuk ki, tegyük a V halmazba, az összes szomszédját tegyük a „kukába”, K-ba, vagyis hagyjuk el a gráfból őt és összes szomszédját. Így legfeljebb $d+1$ pontot hagytunk el, s a maradó gráf egyetlen pontja sincs összekötve x_1-gyel. Az eljárást ismételjük a következő módon. Tegyük fel, hogy már k pontot tettünk a V halmazba, a velük összekötött pontokat pedig a K halmazba tettük. Tegyük fel továbbá, hogy a V halmaz pontjai között nem fut él a gráfban. Ekkor a $K \cup V$ halmaznak legfeljebb $k(d+1)$ pontja van és ha $K \cup V$ pontjait elhagyjuk a gráfból, akkor a maradó G_k gráf egyetlen pontja sincs összekötve V egyetlen pontjával sem. Válasszuk ki G_k egy tetszőleges x_{k+1} pontját, tegyük V-be, szomszédait (ha még nem nincsenek ott) tegyük K-ba. Ekkor V továbbra is független ponthalmaz az eredeti gráfban, és K-ba maximálisan d pontot tehettünk, tehát most a $K \cup V$ ponthalmaznak legfeljebb $(k+1)(d+1)$ pontja van. Az eljárás mindaddig folytatható, amíg G_k üres nem lesz. Mivel az elhagyott pontok száma legfeljebb $k(d+1)$, ezért G_k leghamarabb akkor ürül ki, amikor V-ben már $\lceil n/(d+1) \rceil$ pont van. Tehát a gráfban van egy legalább ekkora független ponthalmaz.

Ezzel állításunkat bizonyítottuk: m értéke pontosan $\lceil n/(d+1) \rceil$.

2.5. Az előző (2.4.) feladat megoldásában használt „mohó algoritmus” kimenetele attól is függ, hogy milyen sorrendben jönnek sorra az egyes pontok. Legyen például a gráf egy d ágú csillag. Ha a mohó algoritmus először a középpontját találja meg, akkor ez lesz V egyetlen eleme, az összes többi pont a „kukába” – K-ba – kerül, hiszen mind szomszédja ennek az egy pontnak. A 2.4.) feladat állítása most is teljesül, hiszen $n = d + 1$, és így $\lceil n/(d + 1)\rceil = 1$. Ám a gráfban van d pontból álló független ponthalmaz – épp K halmaz elemei alkotják –, a mi algoritmusunk azonban ehelyett csak egy egyelemű t talált.

Ha most egy olyan gráfot veszünk, amely k komponensből áll, minden komponenese egy-egy ilyen csillag – tehát pontszáma $n = k(d + 1)$, és mindig a következő csillag középpontját találja meg először az algoritmusunk, akkor összesen $k = \lceil n/(d + 1)\rceil$ pontú független ponthalmazt találunk, holott a gráfnak van egy dk pontú független ponthalmaza is (éppen a „kukába” került pontok halmaza).

Megjegyzés: Példánk esetében az okozta a bajt, hogy nem a kis fokú pontot választottuk ki. Megpróbálhatjuk tehát úgy módosítani algoritmusunkat, hogy mindig a maradó gráf (egyik) legkisebb fokú pontját válassza ki. Erre vonatkozik a következő – 2.6. – feladat.

2.6. Vegyük a következő hételemű gráfot. A gráf pontjai $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Azt akarjuk, hogy x_1, x_2, x_3 egy három elemű független ponthalmaz legyen. Közöttük tehát nem fut él. x_0 csak ezzel a három ponttal van összekötve, ő tehát harmadfokú. El akarjuk érni, hogy minden más pont nagyobb fokú legyen és az x_0 és szomszédai elhagyása után maradó gráfban ne legyen két pontú teljes gráf. Utóbbihoz az kell, hogy x_4, x_5, x_6 között mind a három él be legyen húzva. Az előbbit pedig úgy érjük el, hogy e három pontot x_1, x_2, x_3 pontokkal is összekötjük. Ekkor utóbbi pontok foka négy lesz, x_4, x_5, x_6 pontoké öt. Az algoritmus tehát először valóban az x_0 pontot találja meg, ezt beválasztja V-be, az x_1, x_2, x_3 pontokat a „kukába” teszi, és a maradó három pontból már csak egyet tud V-be választani. Tehát a kiválasztott független ponthalmaz nem maximális.

Ha a fenti gráfot kiegészítjük még három ponttal, amelyekkel x_0 kivételével minden más pontot összekötünk, akkor ez már olyan ellenpélda, amiből akár k darabot is egymás mellé tehetünk, az algoritmusunk először az egyes komponensek harmadfokú pontját fogja megtalálni, majd a maradó gráf csupa hatpontú teljes gráfból áll, ezek pontjai közül választ ki egyet-egyet, így végül egy $2k$ elemű független ponthalmazt választ ki. A gráfnak azonban van $3k$ pontú független ponthalmaza is.

2.7. Mutatunk egy példát, amikor a módosított algoritmus is „nagyon rossz” eredményt ad. A G gráfot a következőképpen definiáljuk. Legyen H egy m elemű ponthalmaz, ennek pontjai között ne fusson él. A gráf ezen kívül még egy x pontból és egy $m + 1$ elemű J ponthalmazból áll. x és J minden pontja össze van kötve H minden pontjával, továbbá J teljes gráfot feszít.

Ebben a gráfban x a legkisebb fokú pont, tehát algoritmusunk először ezt a pontot választja ki V-be és elhagyja összes szomszédját, vagyis H pontjait – tehát épp a maximális független ponthalmazt! Megmaradnak J pontjai, amelyek viszont egy teljes gráfot alkotnak, tehát közülük már csak egyetlen pontot választhat ki az algoritmus.

Így összesen két független pontot talál, holott a maximális független ponthalmaz m elemű. Tehát a maximálisnak csak $m/2$-ed részét találja meg. Mivel $m/2$ akármilyen nagy lehet, ez az algoritmus nem szuboptimális.

2.8. a) Ha a gráf egy három élből álló út és az algoritmus először a középső élt „találja” meg, akkor mind a három élt ki kell választania, holott a két szélső él is elég volna a lefedéshez. Ez az ellenpélda már elég annak bizonyításához, hogy az algoritmus nem optimális. A továbbiak kedvéért azonban megmutatjuk, hogy tetszőlegesen nagy ellenpélda is van: vegyünk egyszerűen n darab pontdiszjunkt, háromélű utat. Ha ezekből az algoritmus mindig először a középső élet

„találja” meg, akkor a gráf mind a $3n$ élét ki fogja választani a legfedéshez, holott a gráfnak van teljes párosítása, tehát elég volna $2n$ él is a pontok lefedéséhez.

Az algoritmusunk tehát rossz esetben a minimális lefedő élrendszer élszámának másfélszeresét is kiválaszthatja.

b)Legyen a gráf lefedő éleinek minimális száma ρ. Egy él legfeljebb két pontot fed le, tehát a gráf pontjainak száma legfeljebb 2ρ.

Nézzük, mit csinál az algoritmus. Először kiválaszt néhány élt, mondjuk k darab független élt. Ezután nem marad él V pontjai között, ezeket tehát már egyesével fedi le. Legyen l az így lefedett pontok száma. Mivel ezek között a pontok között nem fut él, ezeket a minimális lefedő élrendszer is csak egyesével tudja lefedni. Ebből következik, hogy

$$l \leq \rho$$

.

Másrészt az algoritmussal talált élek közül az első k darab két-két pontot fed le, az utána következő l darab egyet-egyet, tehát

$$2k + l = n \leq 2\rho,$$

ahol n a gráf pontjainak száma. A két egyenlet felét összeadva azt kapjuk, hogy

$$l + k \leq 3\rho/2.$$

Tehát az algoritmus legfeljebb a minimális lefedő élrendszer másfélszeresével fedi le a gráf pontjait, vagyis szuboptimális.

Megjegyzés. Az a)-ban adott példa mutatja, hogy a kapott másfélszeres szorzónál jobbat nem mondhatunk.

2.10. Vegyük sorra a gráf pontjait. Az elsőt nyilván akármilyen színűre színezhetjük. Ha a második pont nincs összekötve az elsővel, akkor színezhetjük az elsővel azonos színűre. Ha össze van vele kötve, akkor egy tőle különböző színt adhatunk neki. Általában ha az első m pontot már kiszíneztük, a soron következő $m+1$-edik pont ezek közül legfeljebb d-vel van összekötve (hiszen összesen is legfeljebb ennyivel van összekötve), tehát legfeljebb d szín van kizárva, amit nem kaphat. Mivel $d+1$ színünk van, marad egy szín, amellyel kiszínezhető.

A $d+1$ pontú teljes gráf mutatja, hogy d színnel nem feltétlenül színezhető ki egy olyan gráf, amelynek minden pontja (legfeljebb) d-ed fokú. Ha $d = 2$, akkor minden páratlan kör is ellenpélda. (l. a **??**. feladatot).

Megjegyzés. Bizonyítható, hogy *lényegében nincs más ellenpélda.* Igaz ugyanis

Brooks tétele. Ha egy véges összefüggő gráfban minden pont foka legfeljebb d, és a gráf nem $d+1$ pontú teljes gráf és nem is páratlan kör, akkor d színnel színezhető.

Ennek a bizonyítása azonban lényegesen nehezebb.

Az eredeti állítás viszont nyilvánvalóan igaz megszámlálható gráfokra, a fenti eljárás)„mohó algoritmus”) ott is ugyanúgy működik.

3. Fák, favázak

3.1.

1. megoldás. Ha két pont össze van kötve éllel, akkor távolságuk 1. A favázban is ennyi kell, hogy legyen a távolságuk, tehát ott is éllel kell összekötve lenniük. Ha G egyszerű gráf, akkor ebből következik, hogy G minden éle éle a faváznak is, tehát G azonos a favázával. Ha G egyszerű gráf, akkor a feladat feltétele pontosan akkor teljesül, ha G fa.

Ha G-ben vannak többszörös élek, akkor annyiban módosul az állítás, hogy G-t úgy kapjuk egy fából, hogy bizonyos éleit „megtöbbszörözzük".

2. megoldás. Ilyen favázat a következőképpen csinálhatunk. A faváz gyökere az x pont. Ez lesz a „nulladik emelet". A fa „első emeletére" x szomszédainak kell kerülniük, a fához hozzávesszük az x-szel összekötő éleket. A „második emeletre" azoknak a pontoknak kell kerülniük, amelyekből x kettő távolságra van. Minden ilyen ponthoz kiválasztunk egy-egy, x-be vezető kettő hosszú utat. Ez nyilván keresztül vezet az „első emelet" egy pontján. Vagyis a „második emeleten" pontosan azoknak a pontoknak kell szerepelniük, amelyeknek van szomszédjuk az „első emeleten", de nem szomszédai x-nek. A következőre kell figyelnünk: ha egy ilyen pontnak több „első emeleti" szomszédja van, ezek közül csak eggyel kötjük össze (mivel favázat keresünk).

Általában is az „i-edik emeletre" azoknak a pontoknak kell kerülniük, amelyek i távolságra vannak x-től, tehát i hosszú úttal elérhetők x-ből, de rövidebbel nem. Ezek a pontok pontosan azok, amelyek még nem szerepelnek korábbi emeleten, de van szomszédjuk az $i-1$-edik emeleten.

A keresett tulajdonsággal rendelkező favázat tehát a következő eljárással kapunk. A „nulladik emeleten" csak x van. Az „első emeleten" x szomszédai. Általában az i-edik emeleten az $i-1$-edik emeleten levő pontok olyan szomszédai, amelyek korábbi emeleten még nem szerepeltek. Minden pontot pontosan egy, $i-1$-edik szintű ponttal kötünk össze. A gráf összefüggő, tehát minden ponthoz eljutunk, és az eljárás közben vigyáztunk arra, hogy kör ne keletkezzen, tehát favázat kapunk.

3.4. Az ottani megoldást elmondhatjuk a „szélességi faváz" nyelvén is. A városok a gráf pontjai, a járatok az élek.

Vesszük a gráf egy x pontjából induló szélességi favázát, ennek két emelete van, az elsőn legfeljebb három pont van, a másodikon legfeljebb hat. A gráfnak tehát maximálisan 10 pontja lehet. Az is csak úgy, hogy az x-szel összekötött pontok között nem fut él. Mivel x tetszőleges, ez azt jelenti, hogy a gráfban nincs háromszög. Másrészt x semelyik két szomszédjának sem lehet közös szomszédja x-en kívül, különben a második emeletre kevesebb pont jutna. Tehát a gráfban nincs C_4 sem.

A második emeleten levő hat pont egy 2-reguláris gráfot feszít, amelyben nincs háromszög. Egyetlen ilyen gráf van: a C_6. Tudjuk még, hogy ennek éleit úgy kell behúznunk, hogy egyetlen pont se legyen szomszédos két olyan ponttal, amelyek ugyanannak az első emeleti pontnak a gyerekei. Ezt figyelembe véve a második emelet pontjai között futó élek izomorfiától eltekintve csak egyféleképp húzhatók be. A kapott gráf megfelel a feltételeknek, ugyanis nincs benne sem háromszög, sem C_4, így bármely pontjából induló szélességi faváza kétemeletes, tehát két átszállással bármely pontból bármely pontba eljuthatunk.

3.9. Vegyük azt az ötpontú gráfot, amely egy négy hosszú körből áll, valamint egy, az x pont valamelyik szomszédjából induló élből. Ennek két különböző szélességi faváza van, attól függően, hogy x melyik szomszédja kerül előbb sorra:

3.10. Tekintsük a következő gráfot:

A 4-ből induló szélességi favázai különbözőek aszerint, hogy pl. 1,3,5 sorrendben jönnek-e az első emeleti csúcsok, vagy 3-1-5 sorrendben.

3.11. Tekintsük a következő gráfot:

Ennek a gráfnak két különböző szélességi faváza van, bár csúcstranzitív.

3.12. A tetraéder faváza egy négypontú csillag. Az oktaéder faváza egy ötpontú csillag, plusz egyik elsőfokú pontjához hozzáillesztve egy él.

A kocka és az ikozaéder bármely csúcsából induló faváza az alábbi ábrán látható.

3.14. A dodekaéder minden szélességi faváza izomorf a következővel:

3.15. Az „első emeleten” négy pont van, de attól függően, hogy ezek milyen sorrendben következnek, három nem-izomorf szélességi favázat kapunk:

3.16. Előzetes megjegyzés: a **??**. feladat c) részéből és a **??**. feladatból már következik, hogy ha egy gráfban van páratlan kör, akkor nem lehet páros gráf. A feladat állításának új része az, hogy ha egy gráfban nincs páratlan kör, akkor a gráf biztosan páros gráf. Az itt következő bizonyítás azonban az állítás két részét egyszerre bizonyítja.

Nyilván elég összefüggő gráfokra bizonyítani, hiszen egy gráf pontosan akkor páros, ha minden komponense páros, másrészt pontosan akkor van benne páratlan kör, ha valamelyik komponensében van.

Vegyünk tehát egy összefüggő gráfot és annak egy szélességi favázát (3.3. feladat). Tudjuk, hogy a gráf minden éle vagy azonos emeleten levő pontok között fut, vagy két olyan pont között, amelyek szomszédos emeleteken vannak. Színezzük meg a párosadik emeletek pontjait 2-es, a páratlanadik emelet pontjait 1-es színnel. Két eset van:

Ha azonos emeleten levő pontok között nem fut él, akkor ez a színezés jólszínezi a gráfot, tehát a gráf páros gráf. (Ezesetben a gráfban nem lehet páratlan kör, hiszen már a páratlan kör pontjait sem lehet két színnel jólszínezni.)

Ha valamelyik két azonos emeleten levő x és y pont között fut él, akkor ez nem jólszínezés és nyilván nincs más kétszínű jólszínezése sem a gráfnak. Tehát a gráf nem páros gráf. Másrészt ebben az esetben vegyük az x és y legközelebbi közös ősét, z-t. Az x-ből z-be vezető út, a z-ből y-ba vezető út és az xy él egy páratlan kört alkot.

Megjegyzés. Az algoritmus eredményeképpen nem csak annyit tudunk meg, hogy lehet-e két színnel színezni a gráfot. Vagy megadja a gráf egy két színnel színezését, vagy mutat egy páratlan kört, ami bizonyítja, hogy nem lehet a gráfot két színnel színezni.

3.17. A 3.16. feladat szerint a gráf páros gráf. Ha két osztályában k és $n-k$ pont van, akkor maximálisan $k(n-k)$ éle van, s ez legfeljebb $[n^2/4]$. Páros n-re a $K_{n/2,n/2}$ teljes páros gráf, páratlan n-re a $K_{(n+1)/2,(n-1)/2}$ teljes páros gráf adja a maximumot.

3.18. A gráf pontjai legyenek a számok, két pont akkor van összekötve, ha a hozzájuk tartozó két szám összege racionális. Ha a gráfban van páratlan kör, akkor e kör minden pontjához tartozó szám racionális. Ugyanis ha az éleket (= az általuk jelölt összegeket) egy xy élből indulva felváltva pozitív és negatív előjellel összeadjuk, akkor az utolsó, zx él is pozitív előjelű lesz, tehát minden ponthoz tartozó számot egyszer $+$, egyszer $-$ előjellel számoltunk, kivéve x-et, amit mindkétszer pozitív előjellel számoltunk. Márpedig a kapott előjeles összeg racionális, tehát x is az.

Ha a gráfban nem volna páratlan kör, akkor a 3.16. feladat szerint páros gráf volna, s így a 3.17. feladat szerint az élek száma legfeljebb $[n^2/4]$ volna, s ez kevesebb, mint $(n^2-3n+4)/2$.

Tehát a gráfban van páratlan kör, s így vannak olyan pontok, amelyek racionális számhoz tartoznak. Nevezzük ezeket racionális pontoknak.

Nyilvánvaló, hogy minden olyan ponthoz is racionális szám tartozik, amely össze van kötve racionális ponttal. Következésképp racionális minden olyan pont is, amely vele azonos komponensben van. A megadott élszám mellett azonban a **??**. feladat szerint a gráfunk összefüggő, így azt kapjuk, hogy minden pont, s így minden szám racionális. Ekkor viszont az összes összeg is racionális.

3.19. Ez következik abból, hogy a szélességi faváz a gyökér és a gráf tetszőleges pontja között pontosan egy utat ad meg, s ez egy legrövidebb út a két pont között. (L. a 3.2. feladatot.)

3.20. Vegyük a gráf egy szélességi favázát. Ebben minden pont foka véges, tehát alkalmazható a König-lemma (**??**. feladat), amely szerint van benne végtelen hosszú (a gyökérből induló) út. Ez az út a 3.19. feladat szerint geoedetikus útvonal.

3.1. Mind a négy gráfnak van Hamilton-útja, s ez megfelelő faváz. (A Hamilton-út létezése csak d) gráf esetében nem látszik azonnal: ilyen út például az $y_2x_1y_5zy_1x_2y_3x_4x_3y_4x_5$ út.

3.7. Tekintsük a gráf egy mélységi favázát (l. a 3.5. feladatot). Írjuk rá e faváz éleire a számokat a következő eljárás szerint: Sorra vesszük a faváz éleit abban a sorrendben, ahogyan a favázba beválasztottuk őket és minden élre ráírjuk az éppen sorra következő számot (az egyes számmal indulva). Egyetlen esetben teszünk kivételt: ha a faváz egy elsőfokú pontjához érünk, amely a gráfban nem elsőfokú. Ekkor van olyan e él, amely ebből a pontból „visszafelé” megy, tehát egy olyan ponthoz vezet, amelyen már „keresztül mentünk” legalább egyszer. Ilyenkor erre az e élre írjuk a következő számot és csak utána vesszük sorra a mélységi faváz következő élét.

Ezzel az eljárással elérjük, hogy

a) a mélységi faváz *gyökeréből* induló egyik élre az egyest írtuk, tehát a gyökérre mindenképpen teljesül a feladat feltétele;

b) a mélységi faváz minden *legalább másodfokú* pontjára igaz, hogy két, belőle induló élre szomszédos számokat írtunk, tehát az ilyen pontokra is teljesül a feltétel;

c) a faváz elsőfokú pontjai közül azokra, amelyek a gráfban legalább másodfokúak, szintén igaz, hogy két belőle induló élre szomszédos számokat írtunk.

Tehát az eljárásunkkal már elértük, hogy minden pontra teljesül a feltétel. Viszont lehet, hogy még nem minden élt számoztunk meg, de a kimaradó éleket már tetszőlegesen számozhatjuk a még fennmaradt számokkal.

3.10. A tetraéder minden mélységi faváza egy négypontú út. Az oktaéder mélységi faváza azonban többféle lehet. Lehet például egy hatpontú út, de lehet egy ötpontú út, amelynek utolsó előtti pontjából még egy él ágazik el.

A kocka mélységi faváza is kétféle lehet.

3.12. Ha egy négypontú gráfban x_3 és x_4 nincs összekötve, akkor akkor az x_1 gyökerű mélységi favázban x_2-nél elágazás van.

4. „Hibás mérések”

4.1. Ha a mérleg egy érmére négyszer ugyanazt az eredményt adja, akkor biztosak lehetünk a súlyában, hamarabb nem – feltéve, hogy nem tudjuk, hogy már hibázott. Ebből következik, hogy a legeredményesebb mérés az, ha először sorban megmérjük az érméket, mindegyiket négyszer, amennyiben ugyanazt az eredményt kapjuk. Ha valamelyikre legalább két különböző eredményt kapunk, akkor tovább mérjük, amíg négy azonos eredményt nem kapunk. Ezután már tudjuk azt is, hány hibás mérésen vagyunk már túl, s ettől függően a következő érméket már kevesebbszer kell mérnünk ahhoz, hogy biztos eredményt kapjunk. Tehát a legrosszabb esetben az első 99 érmét négyszer-négyszer mérjük meg, majd az utolsót hétszer. Összesen tehát 403 mérésből minden érméről tudjuk a súlyát, kevesebb viszont nem mindig elég.

4.2. Legyen a három érme a, b, c. Mérjük le a-t, b-t és $a+b$-t. Ha az utolsó eredmény nem mond ellent az előző kettőnek, akkor biztosak lehetünk a és b súlyában, hiszen kétszer nem mutathatott hibát a mérleg. Ezután c-t megmérjük kétszer, ha ugyanazt az eredményt kapjuk, máris tudjuk c súlyát (és azt is, hogy a mérleg egyszer sem hibázott), ha két különböző eredményt kaptunk, akkor c-t lemérjük harmadszor is és ez lesz az igazi súlya.

Ha az első három mérés ellentmondásos, akkor már tudjuk, hogy a mérleg hibázott egyszer, tehát most már megbízható. Lemérjük mindhárom érmét és hat mérésből most is kész vagyunk.

4.3. Többféleképpen is. Az egyik lehetőség:

Felhasználjuk a következőt. Ha megmérünk három érmét mind a három párosításban, tehát megmérjük $a+b$, $a+c$, $c+b$ súlyát, akkor például az első kettő eredményéből kivonva az utolsót kapunk a súlyára egy értéket, s ugyanígy kapunk egy-egy értéke b és c súlyára is. Ezt felhasználva végrehajtjuk a következő kilenc mérést:

x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1, x_3+x_4, x_4+x_5, x_5+x_3, x_5+x_6, x_6+x_7 és x_7+x_5. Az első hat mérésből kapunk egy-két eredményt x_3-ra, az utolsó hatból pedig egy-egy értéket x_5-re. Három eset van.

Ha mindkét helyen egyezés van, akkor mind a kilenc mérésünk pontos volt (két hiba nem lehetett), így mind a hét érme súlyát pontosan meg tudjuk mondani.

Ha egy helyen nincs egyezés, akkor szimmetria okokból feltehetjük, hogy x_3-ra két különböző értéket kaptunk, de x_5-re nem. Ez utóbbiból következik, hogy az utolsó hat mérés pontos volt, a hiba az első háromban volt. Ez azt jelenti, hogy x_1 és x_2 kivételével már minden érme súlyát biztosan tudjuk. Lemérjük még egyszer x_3+x_1-et és x_3+x_2-t és a kapott, immár biztosan pontos értékből kiszámítjuk x_1 és x_2 súlyát.

Ha az első kilenc mérés után x_3-ra és x_1-re is két különböző eredmény adódik, ez csakis azért lehet, mert a középső három mérés között volt a hibás mérés. Ekkor még jobb helyzetben vagyunk, hiszen már csak x_4-re nincs biztos eredményünk, ezt bármelyik másik érmével együtt lemérve megkaphatjuk.

Az első esetben 9, a másodikban 11, a harmadikban 10 mérés is elég volt.

4.4. Legyen $n = 7k + i$, $i < 7$. Állítsuk k darab hetes csoportba az első $7k$ érmét. Az egyes csoportokban hajtsuk végre a 4.3-ban leírt első kilenc mérést. Azokban a csoportokban, amelyekben a kilenc mérés egyik érmére sem ad eltérő eredményt, máris tudjuk az érmék súlyát. Ha egyben sem kaptunk hibás eredményt, akkor az első $7k$ érme súlyát már tudjuk. Legfeljebb egy hetes csoportban kapunk hibás eredményt, ott egyszerűen „körbe mérjük” a hét érmét, és újabb hét méréssel megkapjuk a helyes eredményt. Ha volt már hibás mérés, akkor a maradó i darab érme mindegyikét egy már tudott súlyú érmével együtt mérjük le, ez újabb i darab mérés. Tehát ebben az esetben $9k + 7 + i$ méréssel kész vagyunk.

Ha az első $9k$ mérés egyikében sem volt hibás eredmény, akkor még i darab érmét kell lemérnünk, ahol $i < 7$. Hozzá veszünk még $7 - i$ érmét, és a 4.2. feladat szerint 11 mérésből mind a hét érméről megállapíthatjuk a súlyát (most „elfelejtettük”, hogy néhánynak már tudjuk a súlyát). Ebben az esetben $9k + 11$ mérés elég.

Minden esetben azt kaptuk, hogy $9n/7 + 11$ mérésnél többre nincs szükségünk.

5. Játékok

5.2. Bea két kérdéssel nyilván nem tudja megállapítani, hogy egy dobozban levő gyufák száma páros-e vagy páratlan. Nyilván két különböző kérdést fog feltenni, és nyilván legalább az egyikben fog szerepelni az 1-es doboz. Ha az 1-es doboz mindkét kérdésében szerepel, akkor van egy x és egy y doboz, amelyek közül x csak az első kérdésben, y csak a második kérdésben szerepel. Rakjon Antal egy-egy gyufát az 1-es, az x és az y dobozba, így válaszai nem változnak, márpedig az 1-es dobozban levő gyufák száma egyik esetben páros, másik esetben páratlan. Ha az 1-es doboz csak az egyik kérdésében szerepel, és van egy másik, x doboz, amely szintén csak ebben a kérdésben szerepel, akkor Antal válasza ugyanaz lenne, ha e két dobozba beletenne egy-egy gyufát, márpedig az 1-es dobozban levő gyufák paritása nem változik. Marad az az eset, ha az 1-es dobozon kívül minden más doboz szerepel mindkét kérdésében. De ha például a 2-es doboz szerepelne mindkét kérdésben, akkor Antal válasza nem változna, ha a 2-esen kívül minden dobozba tenne egy további gyufát.

Két kérdéssel tehát Bea nem érhet célhoz. Három kérdéssel viszont már igen. Legyen $A = \{2,3,4,5,6,7,8\}$ $B = \{9,10,11,12,13,14,15\}$ és $C = \{16,17,18,19,20,21,22,23\}$. A három kérdés legyen a következő: $A \cup C$, $B \cup C$ és $A \cup B \cup \{1\}$. Ez három 15 elemű halmaz. A, B, C minden elemére kétszer kérdez rá, 1-re egyszer. Tehát az első dobozban levő gyufák paritása egyenlő lesz az Antal által adott három válasz összegének paritásával.

5.3. a) Ossza Bea négy ötös csoportba a dobozokat, legyen a négy csoport A, B, C és D. Az első öt doboz legyen A-ban, az utolsó öt D-ben. Kérdezze meg először $A+B+D$, majd $A+C+{}+D$ paritását. A két eredményt összeadva megtudja $B+C$ paritását. Harmadszorra megkérdezi $A+B+C$-t és megtudja A paritását.

Most kérdezze meg $1.+2.+3.+B+C+19.+20.$-t, így $A+B+C$-vel összevetve megtudja $4.+5.+19.+20.$ paritását. ($x.$ az x-edik dobozt jelöli.) Végül kérdezze meg $1.+4.+5.+B+{}+C+19.+20.$ paritását. Ezt $A+B+C$-vel összevetve megtudja $2.+3.+19.+20.$ paritását, s ezt az előbbi eredménnyel összevetve megvan $2.+3.+4.+5.$ paritása is. Másrészt A paritását már tudja, tehát megvan az első doboz paritása is.

Megmutatjuk, hogy négy kérdéssel Bea nem érhet célhoz. Ha négy kérdést tesz fel, ebben összesen (multiplicitással számolva) 60 doboz szerepel. Összesen 20 doboz van, tehát vagy minden doboz pontosan háromszor szerepel, vagy van egy doboz, amelyik legalább négyszer szerepel.

Tegyük fel először, hogy van olyan, az 1-estől különböző doboz, amely mind a négy kérdésében szerepel. Feltehetjük, hogy ez a 2-es doboz. Bea ugyanazokat a válaszokat kapná, ha Antal minden, a 2-estől különböző dobozba még egy gyufát tett volna. Márpedig a két esetben különböző az 1-es dobozban levő gyufák paritása.

Ha csak az 1-es doboz szerepel mind a négy kérdésben, akkor egy kivétellel minden más doboz három kérdésben szerepel, egy pedig kettőben, hiszen összesen 60 doboz szerepel a kérdésekben, és $4+3\cdot 18+2=60$. Van tehát olyan doboz, amely az első kérdésben nem szerepel és a többiben szerepel, feltehetjük, hogy ez a 2-es doboz. Ugyanígy van egy-egy doboz, amely csak a második, a harmadik, illetve a negyedik kérdésben nem szerepel, legyenek ezek rendre a 3-as, a 4-es és az 5-ös doboz. Bea most ugyanazokat a válaszokat kapná, ha az első öt dobozban egy-egy gyufával több volna, mert közülük pontosan négy szerepel minden kérdésében. Az első dobozban levő gyufák paritása pedig a két esetben különböző.

Marad az az eset, ha minden doboz három kérdésben szerepel. Feltehetjük, hogy az 1-es doboz az utolsó kérdésben nem szerepel (az előző háromban pedig szerepel). Nyilván van még egy (sőt, még négy) doboz, amelyre ugyanez igaz. Feltehetjük, hogy például a 2-es dobozra igaz. Bea most ugyanazt a választ kapná, ha e két dobozban egy-egy gyufával több volna, s az első dobozban levő gyufák paritása most is különböző a két esetben.

Ezzel beláttuk, hogy négy kérdésből Bea nem tudja meghatározni az első dobozban levő gyufák paritását. Nem tettük fel, hogy ne volnának azonos kérdései, így kevesebb kérdés sem lehet elég, hiszen ha kevesebb kérdés elég volna, akkor egy kérdést többször feltéve négy kérdés is elég volna.

Végül megmutatjuk, hogy már 19 doboz is elég ahhoz, hogy Bea öt kérdéssel célhoz érjen. Most minden kérdésből négy dobozt kell kihagynia. Ha sikerül úgy megtennie ezt, hogy minden dobozt páratlan sokszor hagyjon ki, kivéve az 1-est, akkor célhoz ért. Könnyen kiszámolható, hogy ezt úgy érheti el, ha az első dobozt kétszer hagyja ki, a többit egyszer-egyszer. Ezt valóban meg is teheti: az első két kérdésben hagyja ki az 1-es dobozt, ezenkívül az első kérdésben még a 2-es, 3-as és 4-es dobozt, a második kérdésben az 5-ös, 6-os és 7-es dobozt. A maradó három kérdésben hagyja ki egyszer-egyszer az eddig ki nem hagyott 12 dobozt. Így minden doboz páros sok kérdésben szerepel, kivéve az 1-es dobozt, ami páratlan sok kérdésben. Ha tehát a kapott válaszokat összeadja, megkapja az 1-es dobozban szereplő gyufák számának paritását.

b) Most Bea hat darab hármas csoportba osztja a dobozokat: A, B, C, D, E, F, A-ban van 1.,2.,3. doboz, F-ben az utolsó három. Bea először megkérdi az összes dobozból B-be esőket kihagyva, majd rendre a C-be, D-be, E-be és végül az F-be esőket kihagyva, akkor a kapott öt választ mod 2 összeadva épp A paritását kapja, hiszen az öt másik csoportbelieket páros sokszor (négyszer) kérdezte. Ezután kérdezze meg $1. + 3. + B + C + D + E + 20.$-at, és $1. + 2. + B + {} + C + D + E + 20.$-at. Ezeket összeadva megtudja 2. és 3. doboz paritásának összegét. De tudja A paritását is, így tudja az 1. dobozét is. Ez hét kérdés.

Hat kérdéssel Bea nem találhatja ki az első dobozban levő gyufák számának paritását. Ha ugyanis hat kérdést tesz fel, akkor a kérdezett dobozok száma (multiplicitással) 90. Tehát vagy van olyan doboz, amely mind a hat kérdésében szerepel, vagy minden doboz pontosan öt kérdésben szerepel. Ha minden doboz pontosan öt kérdésében szerepel, akkor feltehetjük, hogy az 1-es doboz az utolsó kérdésben nem szerepel, s hogy ebben a kérdésben rajta kívül még a 2-es és a 3-as doboz nem szerepel. Ha az 1-es és a 2-es dobozban gyufák száma eggyel nagyobb volna, Antal akkor is minden kérdésre ugyanazt a választ adná, pedig az 1-es dobozban levő gyufák száma a két esetben különböző paritású. Ez az eset tehát nem lehetséges.

Ha például a 2-es doboz mind a hat kérdésben szerepel, akkor Bea mind a hat kérdésére ugyanazt a választ kapná, ha a 2-es kivéve minden dobozban eggyel több gyufa volna, márpedig a két esetben most is különböző paritású az 1-es dobozban levő gyufák száma.

Végül ha csak az 1-es doboz szerepel mind a hat kérdésben, akkor egy kivétellel minden további doboz ötször szerepel. Mivel minden kérdésben pontosan három doboz nem szerepel, van egy-egy olyan doboz, amely csak az első, csak a második, stb. kérdésben nem szerepel. Feltehetjük, hogy az első kérdésben a 2-es, a másodikban a 3-as, a harmadikban a 4-es, a negyedikben az 5-ös, az ötödikben a 6-os, a hatodikban a 7-es doboz nem szerepel, s hogy ezek a dobozok a többi kérdésben szerepelnek. Ha mind e hét dobozban eggyel-eggyel több gyufa volna, Antal válaszai ugyanazok volnának, hiszen minden kérdésnél e dobozok közül hat szerepel. Viszont az 1-es dobozban változott a gyufák paritása, tehát Bea most sem tudja meghatározni az 1-es dobozban levő gyufák paritását.

Hat kérdés tehát nem elég, s akkor kevesebb sem (l. az a) rész megoldásának végét).

c) Ha sorra kihagyja az 2., 3., …, 15., 16. dobozt, akkor az eredményeket összeadva éppen az 1. paritását kapja. Hiszen minden más dobozt páros sokszor (14-szer) kérdezett, míg az 1. dobozt páratlan sokszor. Tehát 15 kérdéssel Bea célhoz ér.

Viszont 14 kérdéssel nem tudja kitatlálni az 1-es doboz paritását. Ha csak 14-et kérdez, akkor van két doboz, amelyik minden kérdésében szerepel. Ha az egyik az 1-es, akkor Antal válaszai nem változnak, ha e két dobozhoz egy-egy gyufát hozzáadna. Ha pedig mondjuk a 2-es és a 3-as szerepel minden kérdésben, akkor a 2-es kivételével minden dobozba rakjon egy-egy gyufát Antal, így minden kérdésben 14-gyel nő a gyufák száma, tehát a válasz nem változik. (15 dobozban nőtt a gyufák száma és ebből egy-egy nem szerepel Bea kérdéseiben.)

Mindkét esetben változik az 1-es dobozban a gyufák számának paritása, viszont Antal válaszai nem változnak. Tehát Bea 14 kérdéssel nem ér célhoz.

Megjegyzés. A feladatnak lineáris algebrai háttere van. Például az a) rész esetében arról van szó, hogy Antal gondol egy 20-dimenziós vektorra mod 2, és Bea néhány 20-dimenziós vektort kérdezhet a mod 2 számtest felett, mégpedig olyant, amiben pontosan 15 db. egyes van. Bebizonyítható, hogy Bea pontosan akkor tudja kitalálni k kérdéssel az első dobozban levő gyufák számának paritását, ha van legfeljebb k ilyen vektor, amelyek összege az a 20-dimenziós vektor, amelynek az első koordinátája 1, a többi koordinátája 0. Nyilvánvaló, hogy páros sok ilyen vektor összege nem lehet az $(1{,}0,\ldots,0)$ vektor, mert páros sok ilyen vektor összegében páros sok 1-es van. Az is világos, hogy az elsőt kivéve minden koordináta páros sok kérdésben kell, hogy 1-es legyen, az első viszont páratlan sokban. Ez $k=3$ esetben legfeljebb $3+19\cdot 2=41$ egyes lehet, ám három ilyen vektorban 45 egyes van. Tehát k legalább öt. $k=5$ kérdéssel valóban célt érhet Bea, a kérdésekhez tartozó vektorok könnyen felírhatók az ismertett megoldás alapján. Hasonlóan bizonyíthatjuk a b) részben, hogy k legalább hét.

Végül ezzel a lineáris algebrai átfogalmazással (amelynek feladatunkkal való ekvivalenciája korántsem triviális) is bebizonyítjuk, hogy a c) részben 14 kérdés nem lehet elég. Tegyük fel ugyanis, hogy van k darab 16-dimenziós 0-1 vektor, v_1, v_2, …, v_k, amelyek mod 2 vett összege az $(1{,}0,\ldots,0)$ vektor. Láttuk már, hogy k páratlan. Vonjuk ki mindegyik vektort a csupa-1 vektorból.

Legyen $\mathbf{v}$ ez a csupa-1 vektor. Adjuk össze mod 2 az így kapott vektorokat, ezek összege $v-$ $-\sum_{1\le i\le k} v_i$, mert k páratlan. Vagyis az összegnek az $(0{,}1,\ldots,1)$ vektornak kell lennie. Márpedig a $v-v_i$ vektorok egy-egy 1-esből állnak, a többi helyen csupa 0 van. Ilyen vektorból legalább 15 kell, hogy az összeg olyan vektor legyen, amelyben 15 darab egyes van.

5.4. Összesen hét lehetőség van: vagy mind a négy dobozban fehér golyó van, vagy pontosan kettőben van fehér golyó. Ha tehát egy a,b dobozpárra rákérdezve nemleges választ kapunk, akkor biztosak lehetünk, hogy a másik két dobozban fehér golyó van.

Tegyük fel, hogy már négy párt megkérdeztünk, és minden esetben pozitív választ kaptunk. Lényegében kétféleképpen kérdezhetünk négy párra: 1,2, 2,3, 3,4, 4,1 vagy 1,2, 1,3, 2,3, 1,4. (Egy négy hosszú kört kérdezünk, vagy egy háromszöget és egyik csúcsából induló negyedik élt.)

Az első esetben lehet, hogy csak az 1,3 dobozpárban van fehér golyó, és lehet, hogy csak a 2,4 dobozpárban van fehér golyó (és persze lehet, hogy mind a négy dobozban fehér golyó van). Tehát ezzel a négy kérdéssel nem biztos, hogy célhoz érünk.

A második esetben lehet, hogy csak az 1,2 dobozpárban van fehér golyó, de az is lehet, hogy csak az 1,3 párban (és persze lehet, hogy mind a négy dobozban fehér golyó van). Ebben az esetben sem érünk célhoz négy kérdéssel.

Négy kérdéssel tehát nem érünk célhoz.

Megállapíthatjuk viszont, hogy az első esetben csakis az említett három lehetőség van: vagy mind a négy dobozban fehér golyó van, vagy az 1,3 párban, vagy a 2,4 párban van fehér golyó. Ha tehát még az 1,3 párra is rákérdezünk, akkor már biztosan célhoz érünk: ha igenlő választ kapunk, akkor e két dobozban biztosan fehér golyó van, ha nemlegeset, akkor a másik kettőben van fehér golyó.

Öt kérdéssel már biztosan fogunk tudni mutatni két olyan dobozt, amelyben fehér golyó van.

5.5. Nyilván elképzelhető, hogy minden kérdésünkre igenlő választ kapunk, hiszen a feltételeknek nem mond ellent az, hogy minden dobozban fehér golyó van. Tegyük fel, hogy néhány kérdés után biztosan tudjuk, hogy két dobozban fehér golyó van, és minden kérdésünkre pozitív választ kaptunk. Legyen ez a két doboz az 1-es és a 2-es doboz. Tegyük fel, hogy az $1,a$ dobozpárra még nem kérdeztünk rá (a lehet a 2-es is). Ekkor a kapott igenlő válaszoknak nem mond ellen az sem, hogyha az összes dobozban fehér golyó van, kivéve az 1-es dobozt és az a-dikat. Tehát nem lehetnénk biztosak benne, hogy az $1,a$ dobozokban fehér golyó van. Ugyanez a helyzet, ha valamelyik $2,a$ dobozpárra nem kérdeztünk még rá. Tehát minden olyan párra rá kellett kérdeznünk, amelyben szerepel az 1-es és a 2-es doboz közül legalább az egyik. Ez összesen 2005 kérdés.

Megmutatjuk, hogy 2005 kérdéssel célhoz is lehet érni. A következőt, általános álítást fogjuk belátni. Ha n doboz mindegyikében van egy fehér vagy egy fekete golyó, és a fehér golyók száma páros és nem nulla, ha n páros, és páratlan, ha n páratlan, akkor $n-1$ kérdéssel található egy olyan doboz, amelyben fehér golyó van. Ebből állításunk már következik, hiszen 1003 kérdéssel találhatunk egy fehér golyót található dobozt, és utána ezt elhagyva marad 1003 doboz, közülük páratlan sokban van fehér golyó, tehát 1002 kérdéssel található még egy olyan doboz, amelyben fehér golyó van. Tehát összesen 2005 kérdéssel található két ilyen doboz.

Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1{,}2$-re az állítás semmitmondóan igaz. Tegyük fel, hogy minden n-nél kisebb számra már találtunk megfelelő eljárást $n-1$ kérdéssel. n doboz esetén a következőképpen járunk el. Vesszük az első dobozt és először az első két dobozt kérdezzük meg. Ha a két doboz egyikében sincs fehér golyó, akkor marad $n-2$ dobozunk ugyanazzal a feltétellel, tehát $n-3$ további kérdéssel készen vagyunk. Ha azt a választ kapjuk, hogy az első két doboz (legalább) egyikében van fehér golyó, akkor sorra megkérdezzük az első és a harmadik, az első és a negyedik, ... első és i-edig dobozt, amíg vagy nem kapunk nemleges választ, vagy végére nem jutunk az összes doboznak. Ha az első és i-edik dobozról azt a választ kapjuk, hogy nincs bennük fehér golyó, akkor a második dobozban fehér golyó van, hiszen az első kettő valamelyikében fehér van. Ez $i \leq n-1$ darab kérdés. Ha minden lépésben azt a választ kapjuk, hogy van fehér doboz az első és az i-edik dobozban, akkor az első dobozban biztosan fehér golyó van. Ha ugyanis abban nem fehér golyó lenne, akkor az összes többiben fehér golyónak kell lennie, mert minden lépésben pozitív választ kaptunk. De ez $n-1$ fehér golyós dobozt jelent, márpedig ez ellenkező paritású, mint n, tehát kell még egy fehér golyónak lennie, vagyis az első dobozban mégis fehér golyónak kellene lennie.

Ezzel az állításunkat beláttuk.

5.6. a) Béla tippeljen először 0-ra. Ha Aladár 0 golyóval kezdett, akkor máris talált. Ha nem, és Aladár 1 golyóval kezdett, akkor a második tipp előtt 2 golyó lesz a dobozban. Ha tehát Béla másodszor 2-t tippel és ez volt a helyzet, akkor talált. Általában ha már n rossz tipp volt és Aladár n golyóval kezdett, akkor az $n+1$-edig tipp előtt $2n$ golyó van a dobozban. Ha tehát Aladár sorban a páros számokat tippeli, akkor valamelyik lépésben találni fog, éspedig éppen akkor fog az n-edik lépésben találni, ha kezdetben n golyó volt a dobozban.

b) Most a következőképpen jár el Béla. A páros lépésekben azt követi, hogy épp hány golyó lenne, ha Aladár mindig egy golyóval növel, a páratlanadik lépésekben azt követi, hogy épp hány golyó lenne, ha Aladár mindig két golyóval növel. Tehát a $2n$-edik lépésben abból a feltételezésből indul ki, hogy kezdetben $n-1$ golyó volt és minden kérdés után eggyel növelte Aladár a golyók számát, vagyis most $3n-2$-t fog tippelni (és találni fog, ha tényleg ez volt a helyzet), a $2n-1$-edik lépésben abból indul ki, hogy kezdetben $n-1$ golyó volt és mindig kettővel nőtt a golyók száma, tehát most $5n-5$-öt fog tippelni (és találni fog, ha tényleg ez volt a helyzet). Nyilván valamelyik lépésben találni fog.

b)

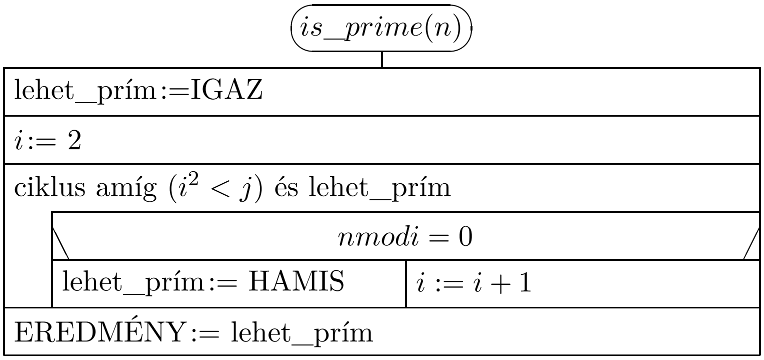
6. Eljárások

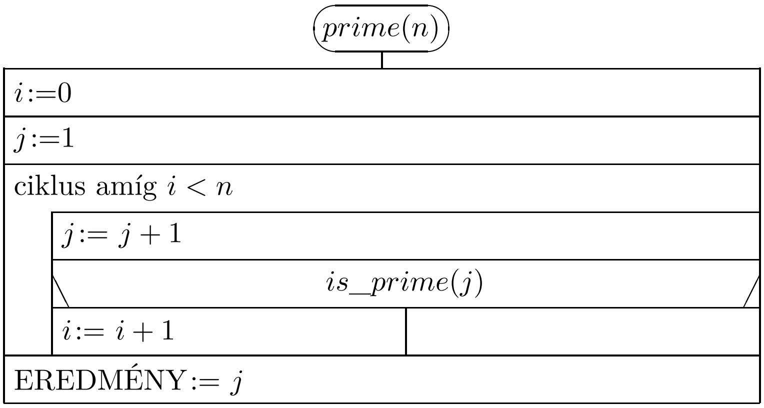
Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

7. Programozási feladatok

7.1.

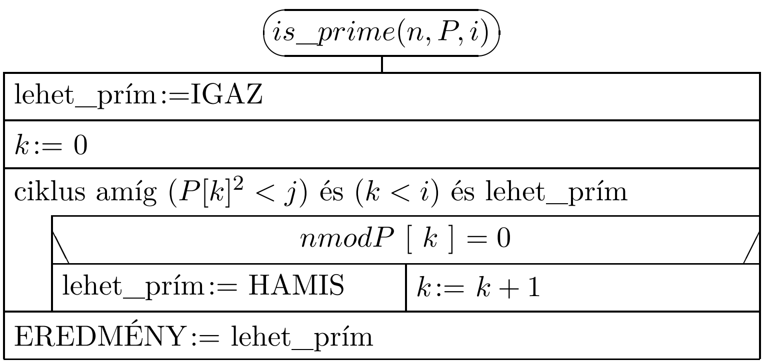
1. megoldás. Az n. prímet megkereső függvényben (prime) j megy az n. prímig, közben i tárolja, hogy már hány prímet találtunk. Az is_prime függvényben, amely egy számról megállapítja, hogy prím-e, számokat az összes gyöküknél kisebb számmal megpróbáljuk elosztani, hogy megnézzük, prímek-e. Gyorsítás: ha már biztos, hogy a szám összetett, kilépünk a ciklusból.





A megoldás hátránya, hogy az újabb számok vizsgálatakor nem használja ki, hogy az addigi számok közül már tudjuk, melyik prím.

2. megoldás. Ebben a megoldásban tároljuk a már megtalált prímeket, és amikor megvizsgáljuk, hogy egy szám prím-e, csak a gyökénél nem nagyobb prímekkel próbáljuk meg elosztani. Az is_prime függvény most megkapja a már megtalált prímek tömbjét (P) és számát (i) is.



$prime(n)$

$i := 0$
$j := 1$
P: TÖMB [0 .. $n-1$]
ciklus amíg $i < n$
    $j := j + 1$
    $is\_prime(j, P, i)$
        $P~[~i~] := j$
        $i := i + 1$
EREDMÉNY$:= j$

7.2. Az euklideszi algoritmust használjuk. A számoknak először az abszolútértékét vesszük, így negatív számokra is működik.

$gcd(a, b)$

$a := abs(a)$
$b := abs(b)$
ciklus amíg $(a > 0)$ és $(b > 0)$
    $a > b$
        $a := amodb$ | $b := bmoda$
EREDMÉNY$:= a$

7.3. Ugyanúgy járunk el, mint az előző feladatban, de mindig tároljuk, hogy az aktuális a és a b változót hogy lehet előállítani az eredeti a és b értékek kombinációjaként: ca és da jelöli az eredeti a és b együtthatóját az aktuális a előállításában, cb és db pedig az aktuális b előállításában.

$gcd\_factors(a, b, \triangleright c, \triangleright d)$

$a := abs(a)$
$b := abs(b)$
$ca := 1$
$da := 0$
$db := 1$
$cb := 0$
ciklus amíg $(a > 0)$ és $(b > 0)$
    $a > b$
        $ca := ca - (adivb) \cdot cb$ | $cb := cb - (bdiva) \cdot ca$
$c := da$ $da := da - (adivb) \cdot db$ | $db := db - (bdiva) \cdot da$
$d := da$ $a := amodb$ | $b := bmoda$

7.4. a)

$simplify(x)$

EREDMÉNY.$numerator := \frac{x.numerator}{gcd(x.numerator, x.denominator)}$
EREDMÉNY.$denominator := \frac{x.denominator}{gcd(x.numerator, x.denominator)}$

b) Az *lcm* függvény két egész szám legkisebb abszolútértékű közös többszörösét számítja ki. Az eredmény előjele a számok szorzatának az előjele.

$lcm(a, b)$

EREDMÉNY$:= \frac{a \cdot b}{gcd(a,b)}$

$sum(x, y)$

EREDMÉNY.$denominator := lcm(x.denominator, y.denominator)$
EREDMÉNY.$numerator := x.numerator \cdot \frac{lcm(x.denominator, y.denominator)}{x.denominator} + {} + y.numerator \cdot \frac{lcm(x.denominator, y.denominator)}{y.denominator}$

c) Az összeadást használjuk fel. A *negative* függvény paramétere egy tört, eredménye a tört ellentettje.

$negative(x)$

EREDMÉNY.$numerator := -x.numerator$
EREDMÉNY.$denominator := x.denominator$

$substract(x, y)$

EREDMÉNY$:= sum(x, negative(y))$

d)

$multiply(x, y)$

EREDMÉNY.$numerator := x.numerator \cdot y.numerator$
EREDMÉNY.$denominator := x.denominator \cdot y.denominator$

Az eredményen célszerű alkalmazni a simpify függvényt, hiszen automatikusan nem lesz egyszerűsített. **e)** A szorzást használjuk fel. A *reciprocal* függvény a paraméterében megadott racionális szám reciprokát adja vissza.

$reciprocal(x)$

EREDMÉNY.$numerator := x.denominator$
EREDMÉNY.$denominator := x.numerator$

$divide(x, y)$

EREDMÉNY$:= multiply(x, reciprocal(y))$

8. Barkochba

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Csúri József Duró Lajosné Gyapjas Ferencné Kántor Sándorné és Pintér Lajosné Bartha Gábor, Bogdán Zoltán: *Matematika feladatgyűjtemény I.* 12. kiad. Budapest, 1998, Nemzeti Tankönyvkiadó. ISBN 963 18 8911 4. A „Sárga könyv".

[2] Orosz Gyula: Algoritmusok. In *Közös nevezőnk a matematika* (konferenciaanyag). 2002, 139–156. p.

[3] Bakos Tibor Lackovich Miklós Reiman István Surányi János Urbán János: *Középiskolai matematikai versenyek 1977-1979.* Budapest, 1981, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 5758 7.

[4] Kvant, fizikai és matematikai tudományos népszerűsítő folyóirat. A Szovjet, majd az Orosz Tudományos Akadémia és a Pedagógiai Tudományok Akadémiájának lapja.
URL `http://kvant.mirror0.mccme.ru/`.

[5] Surányi László: *Játékok, algoritmusok.* 1996. gépelt jegyzet.

[6] Surányi László: *Algoritmusok a középiskolában: a mohó algoritmus.* Szeged, 1998, Mozaik Oktatási Stúdió.