Analízis

11–12. évfolyam

Szerkesztette:
Surányi László

2020. szeptember 20.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2020

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

Topológiai alapfogalmak

A fejezet fejlesztés alatt áll.

1.1. (MS) * **Definíció** Az egyenes pontjainak egy H részhalmazát *kompaktnak* nevezzük, ha igaz rá a következő tulajdonság:

Ha az $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ nyílt intervallumok uniója teljesen lefedi H-t, akkor kiválasztható közülük véges sok, amelyek uniója szintén lefedi H-t.

* Igazoljuk, hogy minden véges, zárt intervallum kompakt.

Más szóval igaz a következő tétel:

Lefedési tétel: Ha az $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ nyílt intervallumok uniója teljesen lefedi az $[a, b]$ zárt intervallumot, akkor kiválasztható közülük véges sok, amelyek uniója szintén lefedi a $[a, b]$ zárt intervallumot.

Segítség, útmutatás

1. Topológiai alapfogalmak

1.1. Vegyük az első n darab nyílt intervallumot és az általuk lefedett részt hagyjuk el $[a, b]$-ből. Mit mondhatunk a maradó ponthalmazról?

Próbáljuk alkalmazni a König-lemmát.

Megoldások

1. Topológiai alapfogalmak

1.1. Ebben a megoldásban zárt intervallumon kizárólag *nem üres* zárt intervallumot értünk. (Az egy pontból álló zárt intervallumot viszont megengedjük.)

Egy nyílt intervallum egy zárt intervallumot vagy teljesen lefed, vagy „kiharap” belőle egy részt, és marad egy kisebb zárt intervallum, vagy a „közepéből” harap ki egy részt, ekkor két kisebb zárt intervallum marad. Mindenesetre igaz az, hogy ha elhagyjuk az $[a, b]$ zárt intervallumból az $I_1, I_2, \ldots I_n$ – véges sok – nyílt intervallum unióját, akkor vagy semmi nem marad, vagy véges sok, páronként diszjunkt zárt intervallum marad. Első esetben kész vagyunk, az első n intervallum teljesen lefedi $[a, b]$-t.

Tegyük fel indirekten, hogy minden n-re marad véges sok (páronként diszjunkt) zárt intervallum azután, hogy uniójukat elhagytuk $[a, b]$-ből. Ezek a zárt intervallumok legyenek egy fa n-edik emeletének csúcsai. Az n-edik emelet egy csúcsát akkor kötjük össze az $n+1$-edik emelet egy csúcsával, ha az előbbinek megfelelő zárt intervallum tartalmazza az utóbbit.

Így egy fát kapunk, mert az azonos emelet csúcsainak megfelelő intervallumok páronként diszjunktak, tehát egy csúcsnak nem lehet két különböző „őse” az eggyel alacsonyabb emeleten.

Másrészt ez a fa feltevésünk szerint végtelen és minden szintjén véges sok csúcs van. Igaz rá tehát a König-lemma.

Ez pedig azt jelenti, hogy találunk zárt intervallumoknak egy

$$Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots Z_n \supset Z_{n+1} \supset \ldots$$

egymásba skatulyázott végtelen sorozatát, amelyre igaz, hogy $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ nem fedi le Z_n pontjait. A Z_n egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak a Cantor-axióma (l.) szerint van közös pontjuk, s ezt ezek szerint egyetlen I_k intervallum sem fedi le, ami ellentmond a rájuk tett kikötésnek.

Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...