Függvények

7–8. évfolyam

Szerkesztette:
Orosz Gyula

2020. szeptember 20.

Technikai munkák
(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2020

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET
Grafikonok

A fejezetben a statisztikai adatokat a KSH kiadványaiból válogattuk.

1.1. Ábrázoljuk derékszögű koordináta rendszerben az alábbi függvényeket!
Rendeljük minden egyjegyű pozitív egész számhoz
a) magát a számot;
b) a szám felét;
c) a szám háromszorosát;
d) a szám ellentettjét;
e) a szám abszolút-értékét;
f) a szám reciprokát;
g) a szám négyzetgyökét;
h) a szám osztóinak a számát;
i) a szám pozitív osztóinak a számát;
j) a 0-t, ha a szám prím, egyébként 1-et;
k) azt a számot, ahány betűből áll a szám neve.

1.2. Egy kórházi beteg testhőmérsékletét kétóránként megmérték, a kapott értékeket az alábbi táblázatban láthatjuk.

idő (óra)	8	10	12	14	16	18	20	22
testhőmérséklet (°C)	38,5	38,7	39	39,1	38,5	38,2	38,1	38

Szemléltessük az adatokat például vonaldiagrammal! (Alkalmazhatunk különböző ábrázolási módokat.)

1.3. Összefüggő adatok szemléltetésére az OpenOffice.org Calc vagy a Microsoft Excel program segítségével többféle diagram-típust, ezeken belül pedig különféle altípusokat is alkalmazhatunk. E programok pl. a következő diagram-lehetőségeket kínálják fel:
– oszlopdiagram (ezen belül lehetséges altípusok: csoportosított, halmozott és 100
– sávdiagram;
– grafikon;
– kördiagram;
– pont-; terület-; perec-; sugár-; felület-; buborék-; árfolyam-; henger-; kúp-; piramis-diagramok.
a) Egy-egy bemenő adatsorral próbáljuk ki az összes ábrázolási lehetőséget!
b) Elemezünk néhány „csemegét”: 3D-oszlop; vonal térhatással; 100%-ig halmozott terület; torta; robbantott perec stb.
c) Adjunk meg olyan adatokat, amelyek szemléltetésekor valamelyik módszer lényegesen előnyösebb a másiknál!
d) Egyes szemléltetési módokkal könnyen „manipulálhatjuk” a kapott adatokat. Melyik diagrammal van erre lehetőség, és hogyan?

1.4. Az alábbi táblázatban Budapest jellemző hőmérsékleti adatait tüntettük fel.

Hőmérséklet, °C	2000	2003	2004	2005
közepes	13,9	11,9	11,3	11
maximum	36,9	37,3	33,6	35,1
minimum	-10,0	-12,5	-9,8	-10,9
ingadozás				

a) Töltsük ki a táblázat utolsó sorát!
b) Elemezzük a számadatokat! Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?
c) Ábrázoljuk vonaldiagramon egy-egy év adatait!
d) Ábrázoljuk vonaldiagramon a négy év egy-egy hőmérsékleti jellemzőjét!

1.5. Az alábbi táblázatban a magyarországi népesség korcsoportok szerinti eloszlását tüntettük fel (aktuális év január 1-i adatok). Elemezzük a számadatokat! Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?

Korcsoport, év	2000 ezer fő	2005 ezer fő	2006 ezer fő	ebből férfi, ezer fő	ebből nő, ezer fő
0 - 4	502	478	477	245	232
5 - 9	597	503	491	252	239
10 - 14	631	599	584	299	285
15 - 19	682	634	626	320	306
20 - 24	844	688	671	342	329
25 - 29	751	846	816	417	399
30 - 34	680	753	790	401	389
35 - 39	621	679	704	356	348
40 - 44	757	614	605	300	5
45 - 49	811	738	695	337	358
50 - 54	671	779	794	377	417
55 - 59	618	635	664	307	357
60 - 64	526	574	567	249	318
65 - 69	502	474	481	195	286
70 - 74	434	428	420	161	259
75 - 79	335	338	341	120	221
80 - 84	130	225	227	71	156
85 - 89	97	69	82	23	59
90 -	33	44	42	11	31

a) Hasonlítsuk össze néhány azonos korcsoportban a 2000., 2005. és 2006. évi adatokat!
b) Ábrázoljuk mindhárom évben a népesség nagyságát a korcsoportok függvényében! (Alkalmazhatunk különböző szemléltetési módokat.)
c) Ábrázoljuk ugyanazon a grafikonon a férfiak és nők számát 2006-ban, korcsoportonként!
d) Hogyan becsülhetjük meg a három adatsor alapján valamely korcsoport lélekszámának természetes fogyását?

Érdekességképpen mellékeljük a Magyarországra bevándorló, illetve a Magyarországról kivándorló külföldiek számát korcsoportok szerint.

A Magyarországra bevándorló külföldiek száma korcsoportok szerint:

Korcsoport, év	1999	2004
- 14	2375	1346
15 - 59	15 738	19 523
60 -	2038	1295

A Magyarországról kivándorló külföldiek száma korcsoportok szerint:

Korcsoport, év	1999	2004
- 14	78	173
15 - 59	2297	3138
60 -	85	155

1.6. Az alábbi táblázat az aktuális év január 1-i adatait tartalmazza. Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?

Területi egység	Népesség, 2003., ezer fő	Népesség, 2006., ezer fő	Terület, km2
Bács-Kiskun megye	545	538	8445
Békés megye	396	386	5631
Fejér megye	428	429	4359
Hajdú-Bihar megye	552	548	6211
Heves megye	325	321	3637
Komárom-Esztergom megye	317	316	2265
Pest megye	1106	1160	6393
Somogy megye	336	330	6036
Vas megye	267	264	3336

a) Válasszunk ki a felsoroltak közül néhány megyét, s ábrázoljuk ezek népességét és területét! (Alkalmazzunk csoportosított oszlopdiagramot a megyék területének nagyság szerint csökkenő sorrendjében.)

b) Ábrázoljuk az egyes megyéket a népesség-terület grafikonon!

c) Mekkora az egyes megyék népsűrűsége? (Az előző grafikonon közvetlenül összehasonlíthatjuk két megye népsűrűségét. Hogyan?)

1.7. Az alábbi táblázatban a különböző típusú oktatási intézményeket elvégzett diákok számát tüntettük fel. Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat adatai alapján?

Végzettség (ezer fő)	2001	2003	2004	2005
8 évfolyam	119,3	116,6	118	120,3
gimnáziumi érettségi	38	42,7	48,3	45,2
szakközépiskolai érettségi	50,9	46,5	44,7	43,4
felsőfokú oklevél	47,4	52,8	53,5	57,2

a) Hány tanuló szerzett középiskolai érettségi bizonyítványt az egyes években?

b) Az összes megszerzett középiskolai érettségi bizonyítvány hány százaléka volt gimnáziumi érettségi?

c) Ábrázoljuk az érettségi bizonyítványt szerzett diákok számát az egyes években! (Alkalmazhatunk különböző szemléltetési módokat.)

d) Határozzuk meg az alap-, közép- és felsőfokú végzettséget szerzett diákok százalékos arányát az összes végzettséget szerző diák számához képest! (Az adatok szemléltetésére alkalmazhatunk például kördiagramot.)

1.8. Az alábbi táblázatban a középiskolai oktatással, neveléssel kapcsolatos adatokat tüntettük fel. Elemezzük az adatokat! Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?

	febr.01	2003/2004	máj.04	jún.05
iskolák száma	1576	1622	1652	1692
összes tanuló (nappali + esti tagozat, 1000 fő)	516,1	531,4	529	531,1
tanulók száma (nappali, 1000 fő)	420,9	438,1	438,7	441,1
osztályok száma (nappali)	15 283	15 910	16 051	16 127

a) Hány esti tagozatos tanuló járt középiskolai képzésre az egyes években?
b) Átlagosan hány tanulóra jut egy pedagógus?
c) Átlagosan hány tanulóra jut egy osztályterem?
d) Mennyi volt az átlagos osztálylétszám az egyes években?
e) Ábrázoljuk az a) - d) származtatott adatokat az egyes években! (Alkalmazhatunk különböző szemléltetési módokat.)

1.9. Az alábbi táblázatban az egyes intézmények hallgatóinak számát tüntettük fel (ezer fő).

Intézmény	febr.01	ápr.03	máj.04	jún.05
Óvoda	342,3	327,5	326	326,6
Általános iskola	947	913	890,6	861,9
Szakiskola	133	134,8	135,3	135
Középiskola	516,1	531,4	529	531,1
Felsőfokú iskola	349,3	409,1	421,5	24,2
Összesen				

a) Töltsük ki a táblázat utolsó sorát, pl. az OpenOffice.org Calc vagy a Microsoft Excel programot használva!
b) Szemléltessük az egyes intézmények hallgatói számának időbeli változását! (Alkalmazzunk különböző ábrázolási módokat!)
c) Elemezzük az adatokat! Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?

1.10. András egy táblázatot talált a régi papírjai között. A táblázatban a Magyarországon kiadott szépirodalmi könyvek számát tüntették fel, a művek műfaja szerint csoportosítva. Sajnos, a táblázat egyes celláiba írt számok már elmosódtak, olvashatatlanná váltak, ennek ellenére András sikerrel válaszolt az alábbi kérdésekre. Mik voltak a válaszai?

Műfaj	2001	2002	Példányszám
			(2002, ezer darab)
Verses mű, antológia	382	301	396
Regény, elbeszélés	1661		11150
Színmű	63	65	
Egyéb szépipróza	204	198	495
Összesen:		2244	12229

a) Hány művet adtak ki összesen 2001-ben?
b) Hány regény, illetve elbeszélés jelent meg 2002-ben?
c) Hány százalékkal változott 2001 és 2002 között a kiadott verses művek, illetve antológiák száma?
d) 2002-ben az összes kiadott műnek hány százaléka volt regény?
e) A négy műfaji kategória közül melyiknek volt a legmagasabb a művenkénti átlagos példányszáma 2002-ben?

1.11. Az alábbi táblázatban – amely, az előző feladatban szereplővel ellentétben, már nem hiányos – a Magyarországon kiadott szépirodalmi könyvek számát tüntettük fel, műfajuk szerint csoportosítva. Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?

Művek száma	2000	2003	2004	2005	példányszám (2005-ben, ezer db)
Verses mű, antológia	410	341	427	428	376
Regény, elbeszélés	1362	1547	1549	1552	9435
Színmű	55	59	87	63	118
Egyéb széppróza	223	180	252	259	491

a) Hány szépirodalmi művet adtak ki összesen az egyes években?
b) A kiadott művek hány százaléka volt színmű az egyes években?
c) Mennyi volt az egyes művek átlagos példányszáma 2005-ben?
d) A táblázat alapján szemléltessük a kiadott szépirodalmi könyvek számának időbeli változását! (Alkalmazhatunk különböző ábrázolási módokat.)

1.12. Az alábbi táblázat a 2004-ben és 2005-ben legnagyobb példányszámban megjelent tíz országos napilapot tartalmazza. Elemezzük az adatokat! Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?

Országos napilap (átlagos megjelenési példányszám, ezer db)

Sajtótermék	2004	2005
Metro	316	345
Blikk	324	330
Népszabadság	186	175
Nemzeti Sport	121	110
Magyar Nemzet	92	93
Mai Nap	87	49
Népszava	38	38
Magyar Hírlap	42	31
Expressz	30	28
Világgazdaság	16	17

a) Készítsünk a táblázat alapján normál oszlopdiagramot a 2004-es év öt legnagyobb napilapja példányszámának feltüntetésével!
b) Készítsük el a két évre vonatkozóan a halmozott, majd a 100%-ig halmozott oszlopdiagramokat is!
c) Készítsük el a megfelelő kördiagramokat az öt legnagyobb napilap példányszámának a feltüntetésével!

1.13. Az alábbi táblázatban 1990-ben, 2001-ben és 2002-ben a Magyarországon kiadott szépirodalmi könyvek számát tüntettük fel, a szerzők állampolgársága szerint csoportosítva. Elemezzük az adatokat! Milyen tendenciák figyelhetők meg a táblázat alapján?

Állampolgárság	2003	2004	2005	példányszám (2005, ezer db)
amerikai (USA)	475	621	651	5497
angol	126	99	138	534
cseh	9	25	25	79
francia	73	75	98	383
lengyel	8	8	13	22
magyar	1092	1177	1409	2614
német	117	111	105	503
olasz	23	16	32	150
orosz	7	22	35	79
összesen	2050	2319	2670	10 420

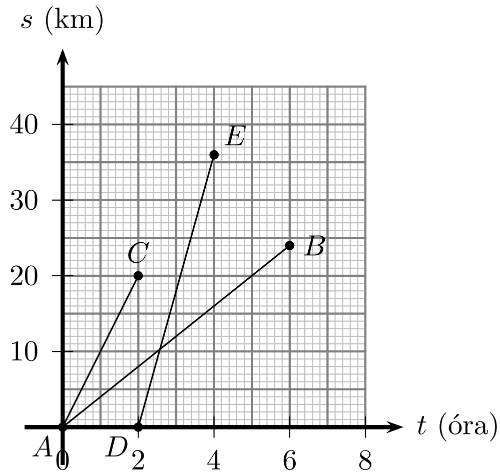
a) A felsorolt 9 országon kívüli szerzőktől hány mű jelent meg az egyes években?

b) Hány százalékkal részesedtek az egyes nemzetiséges szerzői 2005-ben a teljes példányszámból?

c) Mennyi volt az amerikai, angol stb. szerzők műveinek átlagos példányszáma 2005-ben?

d) Ábrázoljuk a magyar szerzők szépirodalmi műveinek alakulását a három évben! (Szemléltethetünk különböző ábrázolási módokkal.)

1.14. Közös koordinátarendszerben megrajzoltuk egy gyalogos, egy kocogó és egy kerékpáros út-idő grafikonját (lásd az 1. ábrát, ahol az egyes pontok koordinátái: $A(0;0)$, $B(6;24)$, $C(2;20)$, $D(2;0)$, $E(4;36)$).



1.14.1. ábra.

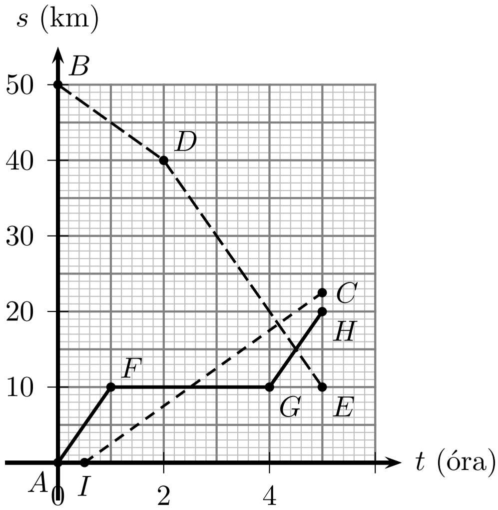
Elemezzük a grafikont! (Mi jellemzi az indulási időket és a megtett útszakaszokat, mekkorák a sebességek?)

1.15. Az A és B városokat összekötő úton halad egy gyalogos, egy kocogó és egy kerékpáros. Az út-idő grafikonon ábrázoltuk a mozgásukat (lásd az 1. ábrát), ezek: az $AFGH$ és BDE töröttvonalak, valamint az IC szakasz.

Jellemezzük a mozgásokat, s próbáljuk meghatározni az egyes találkozási időpontokat!

1.16. Pisti fürödni ment. Az 1. grafikonon a fürdőkádban lévő vízszint magasságát tüntettük fel, az eltelt idő függvényében. Mi történhetett az egyes időszakokban?

1.17. Az 1. út-idő grafikonon három test mozgását ábrázoltuk. Elemezzük a grafikont! (Mi jellemzi az indulási időket és a megtett útszakaszokat, mekkorák a sebességek?)



1.15.1. ábra.

1.18. Az 1 ábrán három függvény grafikonja látható. Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

1.19. Az f függvény képe a derékszögű koordináta rendszerben az AB és CD szakaszokból áll, $A(-5;-8)$, $B(2;7)$, $C(3;3)$, $D(6;11)$. Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, ha

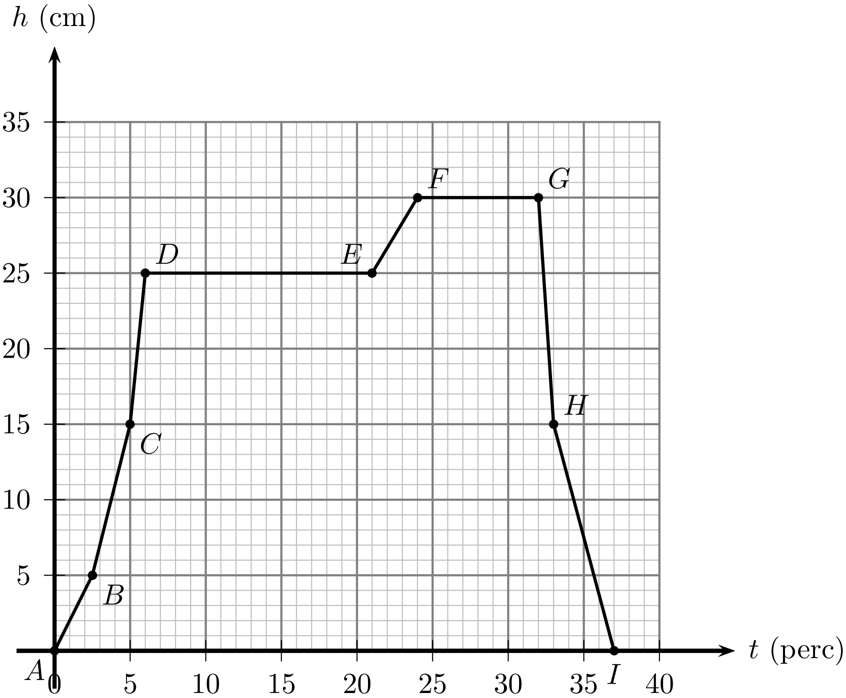
a) $A(-5;-3), B(-2;-1), C(1;0), D(6;11)$;
b) $A(-5;-3), B(2;7), C(3;3), D(6;6)$;
c) $A(-5;-3), B(2;5), C(0;4), D(6;7)$.

1.20. Mely pontban metszik a derékszögű koordináta rendszer y tengelyét az alábbi függvények görbéi?

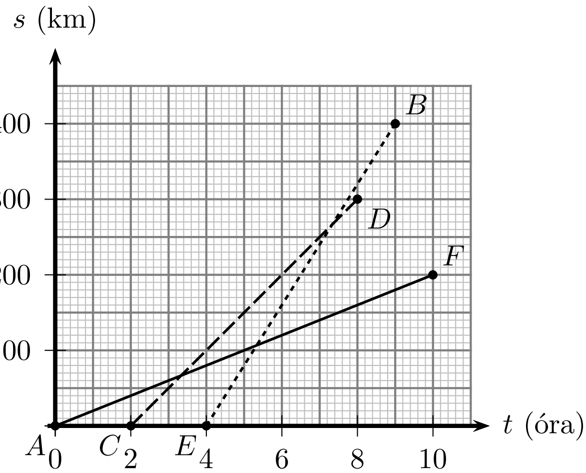
a) $a(x) = 2x - 5$;
b) $b(x) = \frac{4}{x-5} + 3,\ x \in [-2;2]$;
c) $c(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$;
d) $d(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 7x - 6$;
e) $e(x) = (x+2)^3,\ x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
f) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2}$;
g) $g(x) = \frac{2x^2-3x}{x}$.

1.21. Mely pontban metszik a derékszögű koordináta rendszer x tengelyét az alábbi függvények görbéi?

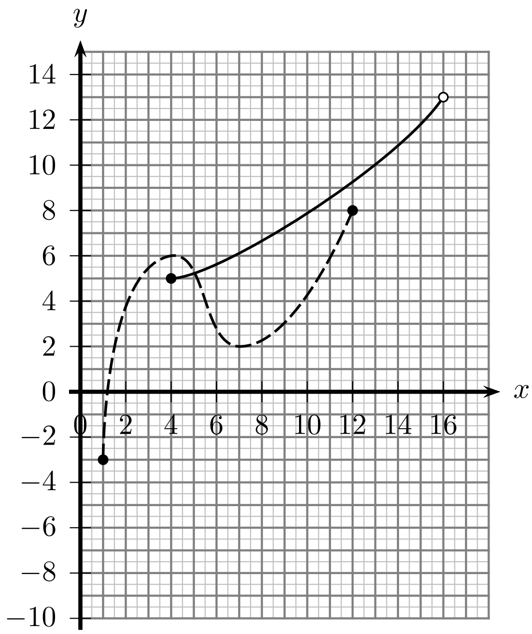
a) $a(x) = 2x - 5$;
b) $b(x) = -3x + \sqrt{2},\ x \in [-1;1]$;
c) $c(x) = -3x + \sqrt{18},\ x \in [-1;1]$;
d) $c(x) = x^2 - 9$;
e) $d(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2}$;
f) $e(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$;
g) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} + \frac{2x}{x}$.



1.16.1. ábra.



1.17.1. ábra.



1.18.1. ábra.

2. FEJEZET

Geometriai transzformációk

2.1. Adott a $P(4;1)$ pont. Hajtsuk végre a P ponttal az alábbi transzformációkat, s adjuk meg P képének koordinátáit!

a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
b) tengelyes tükrözés az y tengelyre;
c) középpontos tükrözés az origóra;
d) középpontos tükrözés a $Q(2;6)$ pontra.
Oldjuk meg a feladatot P helyett az $R(-4;6)$ ponttal is!

2.2. Adott a $P(-5;2)$ pont. Hajtsuk végre a P ponttal az alábbi transzformációkat, s adjuk meg P képének koordinátáit!

a) $\lambda = 2$ arányú nagyítás az origóból;
b) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú kicsinyítés az origóból;
c) $\lambda = -3$ arányú nagyítás az origóból;
d) $\lambda = 2$ arányú nagyítás a $C(-1;-2)$ pontból;
e) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú kicsinyítés a $C(-1;-2)$ pontból.
Oldjuk meg a feladatot P helyett a $Q(4;6)$ ponttal is!

2.3. Adott a $P(8;-5)$ pont. Toljuk el P-t a

a) $(3;0)$; **b)** $(0;-2)$; **c)** $(1;2)$; **d)** $(-100;211)$

vektorral, s adjuk meg P képének koordinátáit!
Oldjuk meg a feladatot P helyett a $Q(-4;6)$ ponttal is!

2.4. Adott a $P(10;-6)$ pont. Hajtsuk végre a P ponton azt a merőleges affinitást, amelynek tengelye az x tengely, aránya pedig

a) $\lambda = 2$ **b)** $\lambda = \frac{1}{2}$ **c)** $\lambda = -2$.

Adjuk meg a P pont képének koordinátáit!
Oldjuk meg a feladatot P helyett a $Q(-4;6)$ ponttal is!

2.5. Alkalmazzunk olyan merőleges affinitást, amelynek tengelye az y tengely, aránya pedig

a) $\lambda = 2$; **b)** $\lambda = \frac{1}{2}$; **c)** $\lambda = -2$.

Határozzuk meg a $P(10;-6)$ pont képét ezeknél a transzformációknál!
Oldjuk meg a feladatot P helyett a $Q(4;6)$ ponttal is!

2.6. Adott a $P(-5;-2)$ pont. Vetítsük merőlegesen P-t az

a) x; **b)** y

tengelyre, s adjuk meg P képének koordinátáit!
Oldjuk meg a feladatot P helyett a $Q(4;6)$ ponttal is!

2.7. Adott a $P(5;2)$ pont. Forgassuk el P-t az origó körül

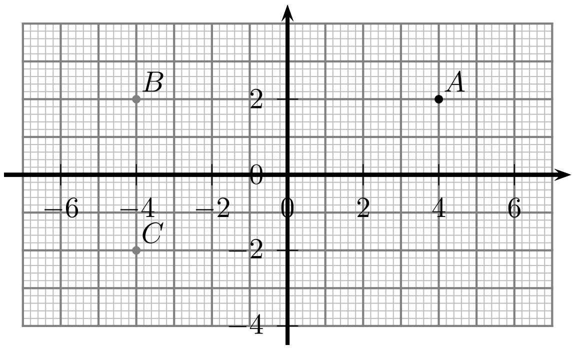
a) $90°$-kal; **b)** $-90°$-kal; **c)** $180°$-kal

s adjuk meg P képének koordinátáit!
Oldjuk meg a feladatot P helyett a $Q(-4;6)$ ponttal is!

2.8. Adott a $P(5;2)$ pont. Forgassuk el P-t a $O(10;6)$ pont körül
a) 90°-kal; **b)** −90°-kal; **c)** 180°-kal
s adjuk meg P képének koordinátáit!
Oldjuk meg a feladatot P helyett a $Q(-4;6)$ ponttal is!

2.9. Adott a $P(8;0)$ pont. Forgassuk el P-t az origó körül
a) 60°-kal; **b)** 120°-kal; **c)** −60°-kal; **d)** −45°-kal; **e)** 135°-kal
s adjuk meg P képének koordinátáit!
Oldjuk meg a feladatot P helyett a $Q(0;12)$ ponttal is!

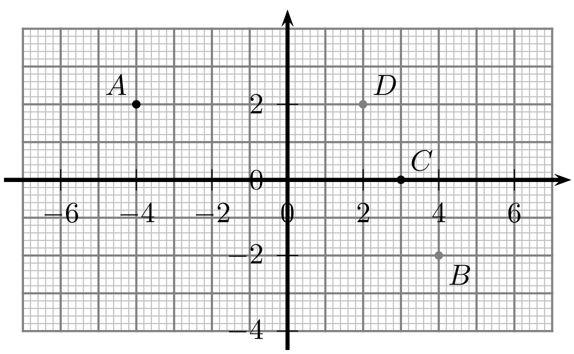
2.10. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel az $A(4;2)$ pontot. Az A pont y tengelyre vonatkozó tükörképe legyen B, a B pont x tengelyre vonatkozó tükörképe pedig C. Ezután változtassuk az A pont helyzetét (ezt mi a Geogebra program segítségével végezzük el)!



2.10.1. ábra.

a) Hogyan változik a B pont két koordinátája?
b) Hogyan változik a C pont két koordinátája?
c) Milyen sejtést fogalmazhatunk meg C koordinátáinak a változása alapján?
d) Próbáljuk igazolni a sejtést!

2.11. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel az $A(-4;2)$ és $C(3;0)$ pontokat. Az A pontot tükrözzük az origóra, így kapjuk a B pontot; majd a B-t tükrözzük C-re, ekkor keletkezik a D pont. Ezután változtassuk az A pont helyzetét (ezt mi a Geogebra program segítségével végezzük el)!



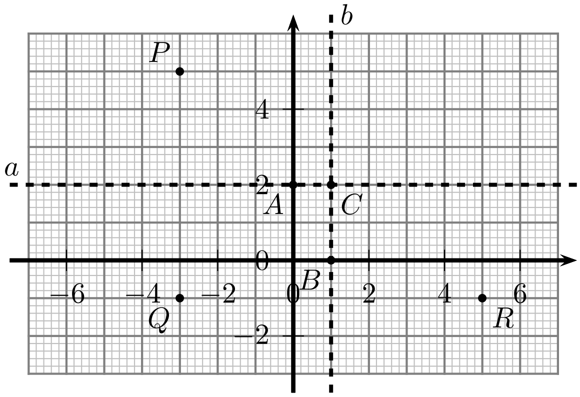
2.11.1. ábra.

a) Hogyan változik a D pont két koordinátája?

b) Milyen sejtést fogalmazhatunk meg D koordinátáinak a változása alapján?

c) Ezután változtassuk a C pont helyzetét az x tengelyen. Hogyan változik a D pont két koordinátája? Ez alapján milyen újabb sejtést fogalmazhatunk meg?

2.12. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel a $P(-3;5)$ pontot, és az ábra szerinti a és b egyeneseket. (Az a egyenes merőleges az y tengelyre, és átmegy az $A(0;2)$ ponton; a b egyenes merőleges az x tengelyre, és a $B(1;0)$ ponton halad át.) Az a és b egyenesek metszéspontja a C pont. A P pontot az a egyenesre tükrözve kapjuk a Q pontot; majd Q-t tükrözve b-re, keletkezik az R pont. Ezután változtassuk a P pont helyzetét (ezt mi a Geogebra program segítségével végezzük el)!



2.12.1. ábra.

a) Határozzuk meg Q és R kezdeti koordinátáit! (Tehát amikor P koordinátái $(-3;5)$.)

b) Hogyan változik P mozgatásakor az R pont két koordinátája?

c) Milyen sejtést fogalmazhatunk meg R koordinátáinak a változása alapján?

d) Ezután változtassuk az a egyenes helyzetét, például az A pont mozgatásával az x tengelyen. Hogyan változnak a Q, R pontok koordinátái?

e) Végül változtassuk a b egyenes helyzetét, például a B pont mozgatásával az y tengelyen. Hogyan változnak ekkor a Q, R pontok koordinátái?

f) Fogalmazzunk meg sejtéseket a fenti mozgatások alapján, s próbálkozzunk meg ezek igazolásával!

2.13. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel az $A(-4;2)$ és $B(3;0)$ pontokat. Alkalmazzunk $\lambda = -0{,}5$ arányú origó centrumú középpontos hasonlóságot (ekkor az A pont képe C), majd $\lambda = -2$ arányú B centrumú középpontos hasonlóságot (ekkor C képe D). Ezután változtassuk az A pont helyzetét (ezt mi a Geogebra program segítségével végezzük el)!

a) Határozzuk meg a C és D pontok kezdeti koordinátáit! (Tehát amikor A koordinátái $(-4;2)$.)

b) Hogyan változnak A mozgatásakor C és D koordinátái?

c) Ezután változtassuk a B pont helyzetét az x tengelyen. Hogyan változnak a C, D pontok koordinátái?

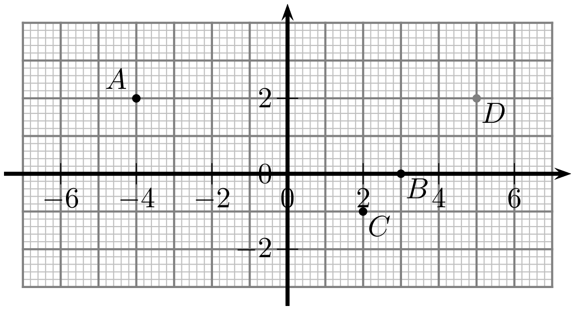
d) Fogalmazzunk meg sejtéseket a fenti mozgatások s D koordinátáinak a változása alapján, és próbálkozzunk meg ezek igazolásával!

2.14. Adott két pont, $A(8;3)$ és $B(-4;7)$. Határozzuk meg az AB szakasz

a) hosszát;

b) F felezőpontjának koordinátáit;

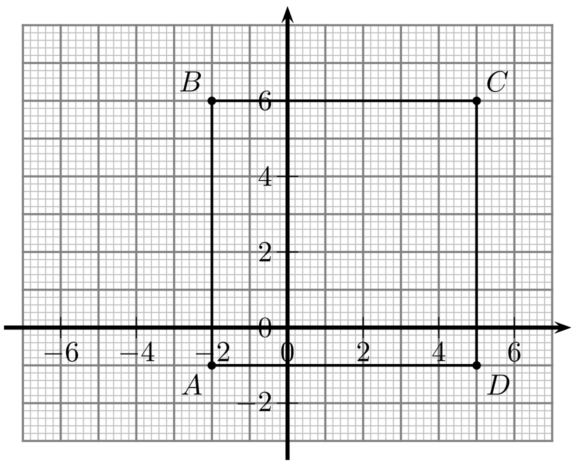
c) az A végpontjához közelebbi H harmadoló pontjának a koordinátáit!



2.13.1. ábra.

d) Oldjuk meg az a-c) feladatokat A és B helyett az $A\prime(-4;-6)$ és $B\prime(8;1)$ pontokkal is!

2.15. Hajtsuk végre az 1. ábrán látható $ABCD$ négyzettel az alábbi geometriai transzformációkat, s adjuk meg a keletkezett csúcsok koordinátáit.



2.15.1. ábra.

A transzformációk:
a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
b) középpontos tükrözés az origóra;
c) középpontos tükrözés a $(2;3)$ pontra;
d) eltolás a $(-1;-3)$ vektorral;
e) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás, melynek tengelye az x tengely;
f) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás, melynek tengelye az y tengely;
g) forgatás 90°-kal az origó körül;
h) forgatás $-90°$-kal a $(2;3)$ pont körül.
i) Oldjuk meg az a-h) feladatokat $ABCD$ helyett az $EFGH$ négyzettel, melynek csúcsai: $E(-3;2)$, $F(3;4)$, $G(5;-2)$, $H(-1;-4)$.

2.16. Adott az $O(3;4)$ középpontú kör, melynek sugara 5 egység hosszú. Hajtsuk végre a körrel az alábbi geometriai transzformációkat, s határozzuk meg a keletkezett körök középpontjának a koordinátáit, valamint a körök sugarainak a hosszát!
A transzformációk: **a)** Tengelyes tükrözés az y tengelyre;
b) középpontos tükrözés az origóra;

c) középpontos tükrözés a $(2;3)$ pontra;
d) eltolás az $(1;-6)$ vektorral;
e) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás, melynek tengelye az y tengely;
f) $\lambda = -3$ arányú merőleges affinitás, melynek tengeyle az x tengely;
g) forgatás $90°$-kal az origó körül;
h) forgatás $-90°$-kal a $(-2;-3)$ pont körül.

2.17. Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x;y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak:

a) $x = 1$;
b) $y \leq -4$;
c) $x \cdot y \geq 0$;
d) $x^2 + y^2 = 0$;
e) $x + y = 0$;
f) $x^2 - y^2 = 0$;
g) $x > 0$ és $x + y = 1$;
h) $|x + y| \leq 2$;
i) $|x| + |y| = 4$;
j) $|x| = 1$ vagy $|y| = 1$.

Tükrözzük a ponthalmazokat először az x, majd az y tengelyre, végül az origóra (ez három különböző feladat). Az így kapott ponthalmazokat (alakzatokat, görbéket) adjuk meg egyenlettel vagy egyenlőtlenség segítségével!

3. FEJEZET

Geometriai transzformációk (teszt)

3.1. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(20;7)$ pont. A P ponttal a következő transzformációkat hajtjuk végre:

– (1) Tengelyes tükrözés az x tengelyre – a transzformáció eredménye az X pont;

– (2) tengelyes tükrözés az y tengelyre – a transzformáció eredménye az Y pont;

– (3) középpontos tükrözés az origóra – a transzformáció eredménye a Q pont;

– (4) középpontos tükrözés a $C(-4;11)$ pontra – a transzformáció eredménye az R pont.

Az alábbi állítások a P pont képének a koordinátáira vonatkoznak. Melyik helyes az állítások közül?

A)

$$X(20;7), Y(-20;7), Q(-20;7), R(-20;-14)$$

B)

$$X(20;-7), Y(-20;7), Q(-20;-7), R(-28;15)$$

C)

$$X(20;-7), Y(20;7), Q(-20;-7), R(-28;-14)$$

D)

$$X(20;-7), Y(-20;7), Q(-20;7), R(-28;15)$$

E) Egyik sem.

3.2. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(-20;8)$ pont. A P ponttal a következő transzformációkat hajtjuk végre:

– (1) $\lambda = 2$ arányú nagyítás az origóból – a transzformáció eredménye az A pont;

– (2) $\lambda = -0{,}5$ arányú kicsinyítés az origóból – a transzformáció eredménye a B pont;

– (3) $\lambda = -2$ arányú nagyítás a $Q(7;-4)$ pontból – a transzformáció eredménye a C pont;

– (4) $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú kicsinyítés az $R(-2;-4)$ pontból – a transzformáció eredménye a D pont.

Az alábbi állítások a P pont képének a koordinátáira vonatkoznak. Melyik hamis az állítások közül?

A) $A(-40;16)$ **B)** $B(10;-4)$ **C)** $C(61;-27)$ **D)** $D(-8;0)$

E) Egyik sem.

3.3. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(-20;-8)$ pont. A P pontot eltoljuk a $(6;0)$ vektorral; az így kapott A pontot eltoljuk a $(0;-3)$ vektorral; végül az így kapott B pontot eltoljuk az $(5;9)$ vektorral, s kapjuk a C pontot. Az alábbi állítások a pontok koordinátáira vonatkoznak. Melyik igaz az állítások közül?

A) Az A tükörképe az x tengelyre a $(14;8)$ pont. **B)** $B(-14;-10)$ **C)** $C(-9;-2)$

D) B tükörképe az y tengelyre a $(14;10)$ pont. **E)** Egyik sem.

3.4. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(-20;-8)$ pont. A P ponttal a következő transzformációkat hajtjuk végre:

– (1) $\lambda = 2$ arányú merőleges nyújtás (affinitás) az x tengelyre – a transzformáció eredménye az A pont;

– (2) $\lambda = 0{,}5$ arányú merőleges zsugorítás (affinitás) az x tengelyre – a transzformáció eredménye a B pont;

– (3) $\lambda = -0{,}2$ arányú merőleges zsugorítás (affinitás) az y tengelyre – a transzformáció eredménye a C pont;

– (4) $\lambda = -1$ arányú merőleges affinitás előbb az x tengelyre, majd a P pont képére $\lambda = -1$ arányú merőleges affinitás alkalmazása az y tengelyre is – a transzformáció eredménye a D pont.

Az alábbi állítások a P pont képének a koordinátáira vonatkoznak. Melyik hamis az állítások közül?

A) $A(-20;-16)$ **B)** Az AB távolság 12 egység.
C) $C(4;-8)$ **D)** P középpontos tükörképe az origóra D.
E) Egyik sem.

3.5. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(-13;7)$ pont. A P ponttal a következő transzformációkat hajtjuk végre:

– (1) Merőleges vetítés az x tengelyre, majd eltolás a $v(12;3)$ vektorral – a transzformációk szorzatának az eredménye az A pont.

– (2) Eltolás a $v(12;3)$ vektorral, majd merőleges vetítés az x tengelyre – a transzformációk szorzatának az eredménye a B pont.

– (3) Merőleges vetítés az y tengelyre, majd eltolás a $v(12;3)$ vektorral – a transzformációk szorzatának az eredménye a C pont.

– (4) Merőleges vetítés az y tengelyre, majd tükrözés az x tengelyre – a transzformáció eredménye a D pont.

Az alábbi állítások a P pont képének a koordinátáira vonatkoznak. Melyik hamis az állítások közül?

A) $A(-1;3)$ **B)** $C(12;10)$ **C)** $D(0;0)$, függetlenül P kezdeti helyzetétől. **D)** A és B megegyezik. **E)** A merőleges vetítés nem kölcsönösen egyértelmű transzformáció.

3.6. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(12;-7)$ pont. A P ponttal a következő transzformációkat hajtjuk végre:

– (1) Forgatás az O origó körül 90°-kal – a transzformáció eredménye az A pont.

– (2) Forgatás az O origó körül 180°-kal – a transzformáció eredménye a B pont.

– (3) Forgatás az O origó körül 270°-kal – a transzformáció eredménye a C pont.

Az alábbi állítások a P pont képének a koordinátáira vonatkoznak. Melyik hamis az állítások közül?

A) $A(7;12)$ **B)** $B(-12;7)$ **C)** C az A pontnak O-ra vonatkozó középpontos tükörképe, függetlenül P kezdeti helyzetétől. **D)** A P pont origó körüli, $-90°$-os elforgatottja megegyezik C-vel. **E)** Egyik sem.

3.7. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(8;3)$ és $Q(2;5)$ pontok. A P ponttal a következő transzformációkat hajtjuk végre:

– (1) Forgatás a Q pont körül 90°-kal – a transzformáció eredménye az A pont.

– (2) Forgatás a Q pont körül 180°-kal – a transzformáció eredménye a B pont.

– (3) Forgatás a Q pont körül 270°-kal - a transzformáció eredménye a C pont.

Az alábbi állítások a P pont képének a koordinátáira vonatkoznak. Melyik hamis az állítások közül?
A) $A(4;11)$ **B)** $B(-4;7)$ **C)** $C(0;-1)$ **D)** C az A pontnak Q-ra vonatkozó középpontos tükörképe, függetlenül P kezdeti helyzetétől. **E)** Egyik sem.

3.8. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(10;0)$ pont. Forgassuk el P-t az origó körül 60°-kal. Mik az így kapott P' pont koordinátái?
A) $P'(10;5)$ **B)** $P'(5;10)$ **C)** $P'(5;-10\sqrt{3})$ **D)** $P'(5;5\sqrt{3})$
E) $P'(5;-5\sqrt{3})$

3.9. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(0;10)$ pont. Forgassuk el P-t az origó körül 135°-kal. Mik az így kapott P' pont koordinátái?
A) $(-10\sqrt{2};-10\sqrt{2})$ **B)** $(10\sqrt{2};-10\sqrt{2})$ **C)** $(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$
D) $(-5\sqrt{2};-\frac{10}{\sqrt{2}})$ **E)** Egyik sem.

3.10. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(12;6)$ pont. Forgassuk el P-t az origó körül $-60°$-kal. Mik az így kapott P' pont koordinátái?
A) $(-6;12)$ **B)** $(6-4\sqrt{3};6\sqrt{3}+4)$ **C)** $(6+4\sqrt{3};-6\sqrt{3}+4)$
D) $(-3\sqrt{3};6\sqrt{3})$ **E)** Egyik sem.

3.11. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(-10;6)$ pont. Tükrözzük P-t az $A(0;3)$ pontra, képe P'; majd a P' pontot tükrözzük a $B(0;-3)$ pontra, így kapjuk a P'' pontot. Az alábbi állítások közül hány hamis?

– (1) A P' pont koordinátái $(10;0)$.

– (2) A P'' pont koordinátái $(-10;-6)$.

– (3) A $PP'P''$ háromszög egyenlő szárú.

– (4) A P'' pont a P pont x tengelyre vonatkozó tengelyes tükörképe, függetlenül P kezdeti helyzetétől.

– (5) A P'' pont a P pont vektorral eltolt képe, függetlenül P kezdeti helyzetétől.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

3.12. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $P(-12;6)$ pont. Alkalmazzunk $\lambda = \frac{1}{3}$ arányú középpontos hasonlóságot az $A(0;3)$ centrummal (ekkor a P pont képe P'); majd alkalmazzunk $\mu = 3$ arányú középpontos hasonlóságot a $B(0;-3)$ középponttal, ekkor P' képe P''. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) A P' pont koordinátái $(-4;4)$.

– (2) A P'' pont koordinátái $(-12;18)$.

- (3) A $PP'P''$ és $AP'B$ háromszögek hasonlók, a megfelelő oldalak aránya $1:3$.
- (4) A P'' pont a P pont $2\overrightarrow{AB}$ vektorral eltolt képe, függetlenül P kezdeti helyzetétől.
- (5) Ha $|\lambda\mu = 1$, akkor a két transzformáció eredménye egybevágósági (távolságtartó) leképezés, függetlenül az A és B pontok kezdeti helyzetétől.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

3.13. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott két pont, $A(12;-8)$ és $B(-6;16)$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- (1) Az AB szakasz hossza 20 egység.
- (2) Az AB szakasz F felezőpontjának a koordinátái $(3;4)$.
- (3) Az AF szakasz hossza 10 egység.
- (4) Az AB szakasz A végpontjához közelebbi H harmadolópontjának a koordinátái $(6;0)$.
- (5) A HB szakasz hossza 20 egység.

A) (2) és (4) **B)** (2), (4) és (5) **C)** Csak (5) hamis.
D) (1), (2) és (3) **E)** Csak (2) hamis.

3.14. (M) Az $O(-2;9)$ középpontú, 5 egység sugarú k kört tükrözzük a $C(1;6)$ pontra, így kapjuk a k' kört. Az alábbi állítások között hány igaz állítás van?

- (1) Az $A(2;6)$ pont rajta van a k körön.
- (2) A k' kör középpontja $(4;3)$.
- (3) A $B(7;7)$ pont rajta van a k' körön.
- (4) A k és k' körök területe megegyezik.
- (5) A k' kör átmegy az origón.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

3.15. (M) A derékszögű koordináta-rendszer $P(x;y)$ pontjain három halmazt definiálunk:

$$A = P(x;y); x \cdot y < 0; \quad B = P(x;y); x^2 \cdot y^2 > 0; \quad C = P(x;y); |x| = 2.$$

Az alábbi állítások között hány hamis állítás van?

- (1) Egyik ponthalmaz sem korlátos.
- (2) $A \subset B$.
- (3) $C \subset B$.
- (4) A C halmaz képe két egyenes.
- (5) Van olyan egyenes a koordináta-rendszerben, amelynek nincs közös pontja A-val.
- (6) Bármely – az x, y tengelyekkel nem párhuzamos – egyenesnek van közös pontja B-vel.
- (7) Bármely – az x, y tengelyekkel nem párhuzamos – egyenesnek van közös pontja C-vel.
- (8) A $\overline{B}$ (B komplementer halmaza) az x tengely.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

4. FEJEZET

Lineáris függvény

Ahol külön nem jelezzük, ott a függvények értelmezési tartománya a valós számok lehető legbővebb részhalmaza.

4.1. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
a) $a(x) = 0$; **b)** $b(x) = -3$; **c)** $c(x) = x + 2{,}5$; **d)** $d(x) = \frac{1}{3}x - 3$;
e) $e(x) = -2x + 5$; **f)** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

g) Hogyan helyezkednek el az a)-f) feladatrészekben kapott függvénygörbékhez képest az
$A_1(2; 1)$, $A_2(6; -3)$, $A_3(-4; -1)$, $A_4(10000; 20000)$,
$A_5(-10000; 20000)$
pontok? (Melyik pont van az adott görbe „felett”, a görbe „alatt”, vagy esetleg rajta a görbén?)

h) A $P(3; y)$ pont második koordinátáját nem ismerjük. Mit állíthatunk y-ról, ha a P pont rajta van az a)-f) feladatrészekben adott függvény grafikonján? Adjunk választ külön-külön mind a hat esetre!

Mely y értékekre lesz P a görbe „felett”, illetve a görbe „alatt” az a) - f) esetekben?

i) Oldjuk meg a h) feladatrészt P helyett a $Q(-4; y)$ pontra is!

j) Oldjuk meg a h)-i) feladatokat, ha most a P, Q pontok első koordinátáit nem ismerjük. Legyen például $P(x; 5)$ és $Q(x; -4)$!

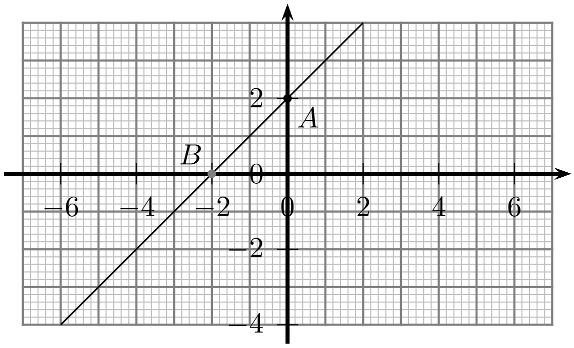
4.2. Ábrázoljuk az $f(x) = mx$ függvény grafikonját, ha
a) $m = -4$, **b)** $m = -1$, **c)** $m = 0{,}5$, **d)** $m = 2$.
Mi a kapott függvénygörbék közös jellemzője?

4.3. Ábrázoljuk az $f(x) = x + b$ függvény grafikonját, ha
a) $m = -2$, **b)** $m = 0$, **c)** $m = 0{,}7$, **d)** $m = 3$.
Mi a kapott függvénygörbék közös jellemzője?

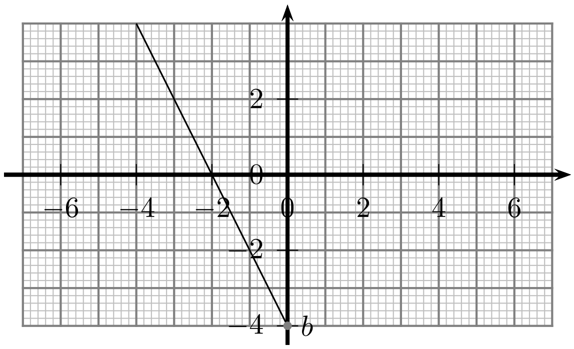
4.4. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel az $A(0; 2)$ pontot, majd ezen keresztül az 1 meredekségű e egyenest (ez az egyenes az x tengelyt a B pontban metszi). Ezután változtassuk az A pont helyzetét az y tengelyen (ezt mi a Geogebra program segítségével végezzük el) úgy, hogy a rajta átmenő e egyenes meredeksége ne változzzék! Mi jellemzi az így kapott egyeneseket? Hogyan mozog a B pont?

4.5. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel az $y = -2x + b$ egyenletű egyenest, ahol $b = -4$. Ezután b értékét változtassuk rendre $b = -1$; $b = 2$; $b = 5$-re. (Ezt mi a Geogebra programban, egy csúszka segítségével végezzük el.) Mi jellemzi az így kapott egyeneseket?

4.6. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel a $y = mx + 1$ egyenletű egyenest, ahol $m = -0{,}5$. Ezután változtassuk m értékét! Legyen rendre
a) $m = 0{,}5$, **b)** $m = 1$, **c)** $m = 1{,}5$, **d)** $m = 2$!
(Ezt mi a Geogebra programban, egy csúszka segítségével végezzük el.) Mi jellemzi az így kapott egyeneseket?



4.4.1. ábra.



4.5.1. ábra.

4.7. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a $h(x) = c(x - 2)$ alakú függvényeket, ahol rendre

a) $c = -1$, **b)** $c = 0$, **c)** $c = 1$, **d)** $c = 2$!

(Ezt mi a Geogebra programban, egy csúszka segítségével végezzük el.)

a) Mi jellemzi az így kapott egyeneseket?

b) Milyen sejtést fogalmazhatunk meg az egyenesek illeszkedésével kapcsolatban?

c) Igaz-e a sejtés tetszőleges c valós szám esetén?

4.8. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete?

a) $x \in [-5; 2]$, $a(x) = 3$.

b) $x \in [-4; 3[$, $b(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

c) $c(x) = \begin{cases} 3x, & \text{ha } x \geq 0; \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

d) $d(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, & \text{ha } 5 < x \leq 8; \\ x - 2, & \text{ha } 8 < x \leq 11. \end{cases}$

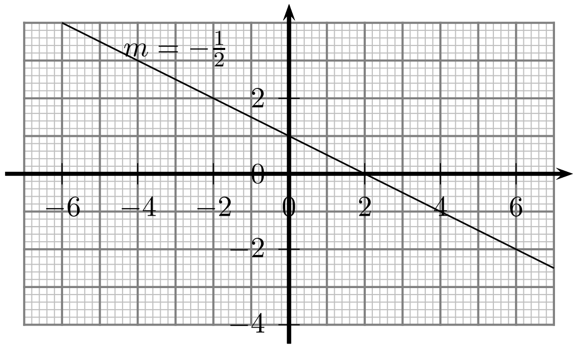
e) $e(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, & \text{ha } 2 < x \leq 5; \\ x - 4, & \text{ha } 5 < x \leq 8. \end{cases}$

f) $f : x \longrightarrow x + 3$, ha $x \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

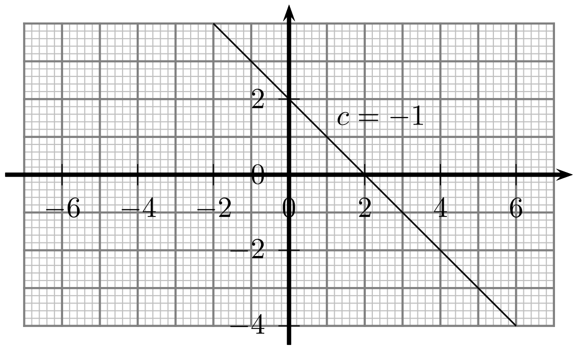
4.9. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete?

a) $a(x) = \frac{x-2}{x-2}$, **b)** $b(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$,

c) $c(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+2}$, $(x \in [-3; 4])$,



4.6.1. ábra.



4.7.1. ábra.

d) $d(x) = \frac{x^2+9-(x+2)^2}{5-4x}$, **e)** $e(x) = \frac{3x+4}{(x-1)^2-(1-x)^2}$.

4.10. Mi az 1. ábrán látható *a–d* függvények hozzárendelési szabálya?

4.11. Az x és y mennyiségek egyenesen arányosak egymással. Melyik grafikon ábrázolhatja ezt a függvénykapcsolatot? Mennyi az arányossági tényező az egyes esetekben?

4.12. Adjunk meg olyan képleteket, amelyek segítségével a Celsius-hőmérő, a Fahrenheit-hőmérő és a Réaumur-hőmérő értékeit átválthatjuk!

– A Celsius-skálán 0° C jelöli a víz fagyáspontját, 100° C a forráspontját;
– ugyanezen értékek a Fahrenheit-skálán 32° F, ill. 242° F;
– ugyanezen értékek a Réaumur-skálán 0° R, ill. 80° R;
– továbbá mindhárom skála lineáris beosztású.

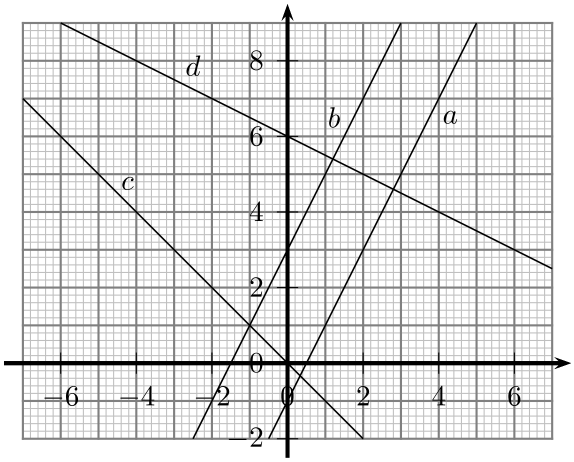
Egyenesen arányosak a Celsius-, a Fahrenheit-, illetve a Réaumur-fokban mért értékek?

4.13. Határozzuk meg, hogy milyen hőmérsékletnél lesz a Fahrenheit-fokban mért hőmérséklet mérőszáma

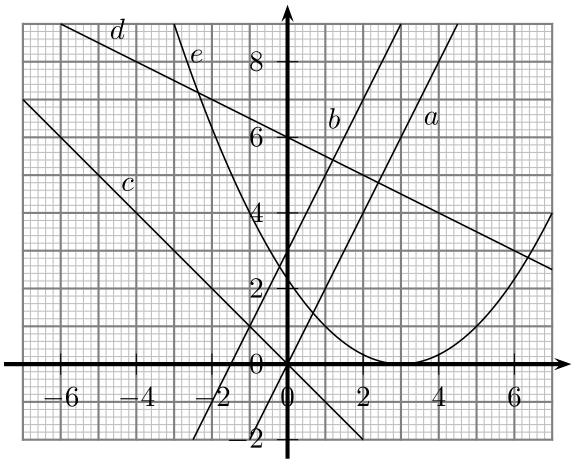
a) 10-szer; **b)** 5-ször; **c)** 2-szer

akkora, mint a Celsius-fokban mért hőmérséklet mérőszáma. A kapott eredmények alapján először becsüljük meg, majd számítsuk is ki, hogy milyen hőmérsékletnél lesz a Fahrenheit-fokban és a Celsius-fokban mért hőmérséklet mérőszáma egyenlő. Milyen érdekességet tapasztalunk?

4.14. Közös koordinátarendszerben megrajzoltuk az egy helyről induló, egyenletes sebességgel haladó kerékpár, motorkerékpár és személygépkocsi út-idő grafikonját.



4.10.1. ábra.



4.11.1. ábra.

Jellemezzük a görbéket!

a) Melyik görbe melyik járműhöz tartozik?

b) Mekkora az egyes járművek átlagsebessége?

c) Mi a járművek indulási sorrendje?

d) Mikor találkoztak egymással az egyes járművek?

4.15. Egy r sugarú körbe írt szabályos háromszög kerülete k.

a) Hogyan függ r-től a k értéke? Határozzuk meg a függvénykapcsolatot!

b) Egyenes arányosság-e a kapott függvény?

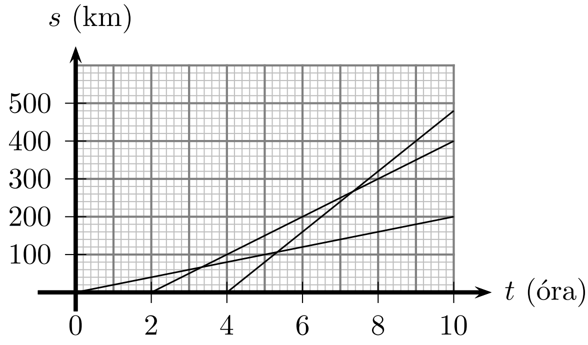
Oldjuk meg a feladatot háromszög helyett az r sugarú körbe írt szabályos n-szöggel, ha

b) $n = 4$; **c)** $n = 6$; **d)** $n = 8$; **e)** $n = 12$.

4.16. Az f függvény képe a derékszögű koordináta rendszerben az A és B ponton átmenő egyenes, $A(-2; 2)$, $B(4; 8)$.

a) Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát!

b) Mely pontban metszi az egyenes az x és melyikben az y tengelyt?



4.14.1. ábra.

4.17. Írjunk fel először $s = At$, majd $s = At + B$ alakú lineáris út-idő kapcsolatot az alábbi, két mérési adatpárt tartalmazó táblázat alapján, s magyarázzuk meg a kapott eredményt:

$t(s)$	1	2
$s(m)$	3	6

4.18. Van-e olyan $f(x) = ax + b$ alakú függvény, amelyre teljesül, hogy

a) $f(0) = -3$ és $f(4) = 5$; **b)** $f(-1) = 5$ és $f(4) = 5$;

c) a függvénygörbe áthalad az $A(-6; 1)$, $B(9; 6)$ pontokon;

d) a függvénygörbe áthalad az $A(-6; 1)$, $B(9; 6)$, $C(21; 8)$ pontokon?

e) Változtassuk meg a d) feladatban C második koordinátáját úgy, hogy az $f(x)$ függvénygörbe áthaladjon mindhárom ponton!

f) Mely pontban metszik az így kapott görbék az x tengelyt?

4.19. Az országút mentén fekvő A és B városok távolsága 210 km. Reggel 8 órakor elindul A-ból B-felé egy kerékpáros $v_1 = 15$ km/h átlagsebességgel, 9 órakor B-ből A-felé egy másik kerékpáros, $v_2 = 30$ km/h átlagsebességgel.

a) Ábrázoljuk a két kerékpáros mozgását út - idő grafikonon!

b) Mikor találkoznak a kerékpárosok?

c) Oldjuk meg az előző feladatokat akkor is, ha a kerékpáros A-ból nem B város felé, hanem azzal ellentétes irányban indul el!

4.20. Az f függvény képe a derékszögű koordináta rendszerben az AB szakaszból áll, $A(-5; -2)$, $B(4; 16)$. Adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát!

4.21. Az 1. ábrán a $f(x) = ax - 2a + 1$ függvény grafikonja látható az $a = -1.5$ esetben. Változtassuk a értékét! Rajzoljuk meg közös koordinátarendszerben az alábbi értékeknek megfelelő eseteket!

a) $a = -2{,}5$; **b)** $a = -0{,}5$; **c)** $a = 0{,}5$; **d)** $a = 1{,}5$.

(Használhatjuk a Geogebra programot is.)

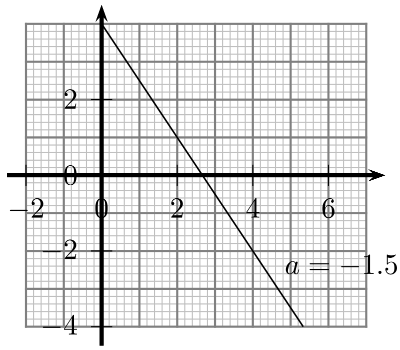
a) Milyen sejtést fogalmazhatunk meg az egyenesek illeszkedésével kapcsolatban?

b) Igaz-e a sejtés tetszőleges a valós szám esetén?

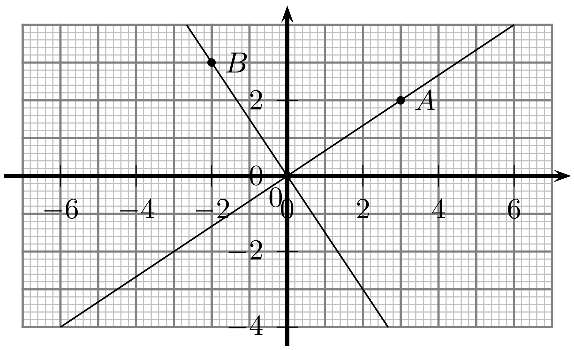
4.22. Vegyük fel a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(3; 2)$ pontot, valamint az O origón és az A ponton átmenő a egyenest. Szerkesszünk az origóban merőlegest a-ra, így kapjuk a b egyenest; ezen pedig úgy vegyük fel a B pontot, hogy $OA = OB$ teljesüljön (1. ábra). (A B pont két lehetséges helyzetéből mi azt választottuk, amikor az AOB irányított szög 90°.) Ezután változtassuk az A pont helyzetét! (A szerkesztést a Geogebra program segítségével végezzük el.)

a) Hogyan módosul az a és b egyenesek egyenlete, valamint a B pont két koordinátája?

b) Milyen sejtést fogalmazhatunk meg az a és b egyenesek meredekségével kapcsolatban?



4.21.1. ábra.



4.22.1. ábra.

4.23. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül a derékszögű koordináta-rendszerben?

a) Ha két egyenes párhuzamos, akkor meredekségük megegyezik.

b) Ha x és y egyenesen arányos mennyiségek, akkor a két mennyiség közötti függvénykapcsolat képe egy egyenes.

c) Ha az x és y mennyiségek közötti függvénykapcsolat képe egy egyenes, akkor x és y egyenesen arányos mennyiségek.

d) Az $f(x) = mx + b$ függvénykapcsolat képe minden m és b esetén egyenes.

e) Minden egyenes egyenlete $y = mx + b$ alakú.

f) Bármely egyenesnek van meredeksége.

g) Ha két merőleges egyenes meredeksége m_1 és m_2, akkor $m_1 \cdot m_2 = -1$.

h) Ha az m_1 és az m_2 meredekségű egyenes merőleges egymásra, akkor $m_1 \cdot m_2 = -1$.

4.24. Mekkora szöget zárnak be az x, illetve az y tengellyel az alábbi egyenesek?

a) $y = x$;

b) $y = -x + 2$;

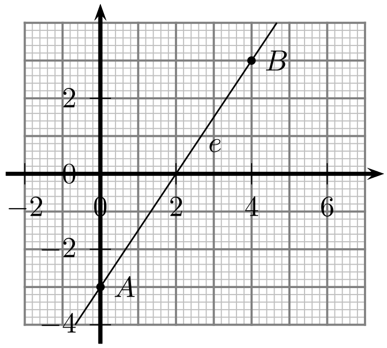
c) $x = -2$;

d) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 1$;

e) $y = -\sqrt{3}x + 1{,}5$.

4.25. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel az $A(0; -3)$ és $B(4; 3)$ pontokat, majd vegyük fel az A és B pontot összekötő e egyenest.

a) Határozzuk meg az e egyenes egyenletét!



4.25.1. ábra.

b) Változtassuk a koordináta-rendszerben a B pont helyzetét (ezt mi a Geogebra program segítségével végezzük el). Határozzuk meg az így kapott egyenes egyenletét!

c) Változtassuk az A pont helyzetét az y tengelyen, s határozzuk meg az ekkor kapott egyenesek egyenletét is!

d) Most A és B a koordináta-rendszer tetszőleges rácspontjai lehetnek. Adjuk meg az A és B pontot összekötő egyenes egyenletét, s miközben a pontok helyzetét változtatjuk, elemezzük az egyenes egyenletének a változását!

4.26. Ábrázoljuk az alábbi ponthalmazokat a derékszögű koordináta-rendszerben:

a) $x = 3$, ha $x \leq -4$;
b) $x = 3$, ha $y \leq -4$;
c) $x + y < 1$;
d) $(x - y)(x - 1) = 0$;
e) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$;
f) $\frac{x-1}{y-1} = 0$;
g) $\frac{y-x}{y+1} \geq 0$.

5. FEJEZET

Lineáris függvény (teszt)

5.1. (M) Az alábbi kifejezések közül hány elsőfokú?

(1) $2x + 3y + 4z - 1$ (2) $xy + 2$ (3) $|x - 2| - 3$ (4) $\frac{2x}{3} + \frac{5}{6} - y$

(5) $2x + \frac{3}{x} - 4$ (6) $\frac{x^2}{x} + 2y - 3$

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

5.2. (M) Az alábbi $a - d$ függvények között hány lineáris függvény található?

(1) $a: y = 2x - 3$ (2) $b: \frac{x}{2} - 2y + 4 = 0$

(3) $c: y = 3$ (4) $d: y = -0{,}3x + 2$, ha $-3 < x$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5.3. (M) Az alábbi $a - d$ egyenletek között hány olyan van, amely a derékszögű koordináta-rendszerbeli egyenesnek az egyenlete?

(1) $a: y = -2x + 1{,}3$, ha $x > 2$ (2) $b: -x + 0{,}5y + 3 = 0$

(3) $c: y = -2{,}3$ (4) $d: x = -1{,}7$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5.4. (M) Adott a $P(8; -13)$ pont, valamint az $e: y = mx + b$ egyenes. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Ha $m = -2$ és $b = 4$, akkor az e egyenes átmegy P-n.

– (2) Ha $m = 0{,}5$ és $b = -15$, akkor a P pont az e egyenes „alatt” van.

– (3) Bármely m értékhez található olyan b, amelyre az e egyenes átmegy P-n.

– (4) Az y tengely bármely B pontján áthaladhat az e egyenes úgy, hogy átmegy a P ponton is.

– (5) Az x tengely bármely C pontján áthaladhat az e egyenes úgy, hogy átmegy a P ponton is.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

5.5. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott három egyenes: $e: y = 3x + 1$; $f: y = 10x - 4$ és $g: y = -0{,}5x + 1$; valamint adott három pont: $A(2; 10)$, $B(-1; -14)$ és $C(-8; 5)$. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Az egyenesek között nincs párhuzamos.

– (2) Az A pont mindhárom egyenes „felett” van.

– (3) A B pont rajta van valamelyik adott egyenesen.

– (4) A g egyenes áthalad valamelyik adott ponton.

– (5) A három egyenes által közrefogott háromszög nem tartalmaz rácspontot.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

5.6. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott négy egyenes: $a: y = 2x + 3$; $b: y = -0{,}5x - 2$; $c: y = -0{,}5x + 1$; és $d: y = x + 1$. Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) Az egyenesek között vannak azonos tengelymetszetűek.
- (2) Az egyenesek között vannak azonos meredekségűek.
- (3) Az egyenesek között vannak párhuzamosak.
- (4) Az egyenesek között vannak merőlegesek.
- (5) Van olyan pont, amelyre három egyenes illeszkedik.
- (6) A $(0; -1)$ pont mindegyik egyenes „alatt” van.

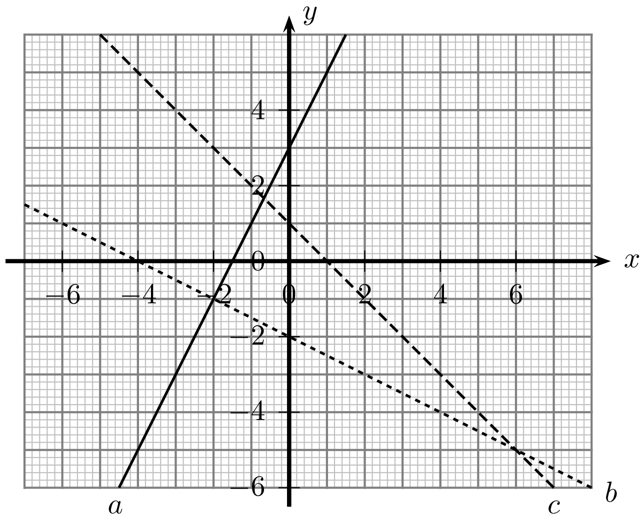
A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

5.7. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben adott két egyenes: $e: y = 0{,}5x + 1$; $f: y = -3x + 15$. Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) Az e egyenes y tengelymetszete $+1$.
- (2) Az f egyenes x tengelymetszete $(0; 5)$.
- (3) Ha a két egyenes metszéspontja $M(p; q)$, akkor $p + q = 7$.
- (4) Az e egyenes x tengelymetszete $x = -2$-nél van.
- (5) Az f egyenes és a koordináta-tengelyek által bezárt háromszög területe 75 egység.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

5.8. (M) Az 1. ábrán az a, b, c függvények képe látható, az állítások a függvénygörbék egyenleteire vonatkoznak. Melyik helyes közülük?



5.8.1. ábra.

A) $a: y = x + 3; b: y = -x - 2$ **B)** $a: y = 2x + 3; c: y = x$

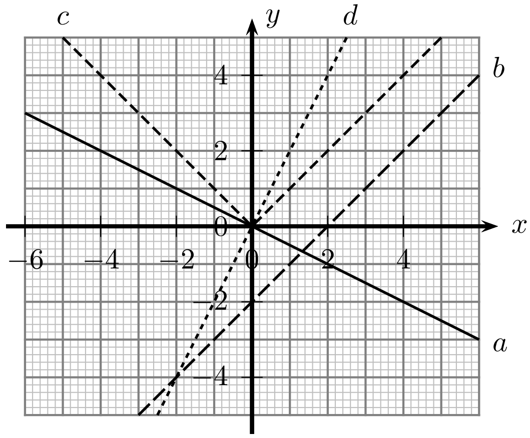
C) $b: y = -0{,}5x + 2; c: y = x + 1$ **D)** $a: y = 2x + 3; c: y = -x + 1$

E) $b: y = -0{,}5x - 2; c: y = x + 1$

5.9. (M) Az alábbi összefüggések között hány olyan van, amelyben a két változó x és y mennyiség egyenesen arányos egymással? (1) $y = 2x$; (2) $y = -0{,}4x$; (3) $y = x + 3$; (4) $y + 7x = 0$; (5) $xy = 6$; (6) $\frac{x}{y} = 11$

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

5.10. (M) Az 1. ábrán látható $a - d$ grafikonok közül hány ábrázol egyenes arányosságot?



5.10.1. ábra.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5.11. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben tekintsük az $a : y = x - 1$ és $b : y = mx + 2$ egyeneseket (m paraméter). Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Az a egyenes 135°-os szöget zár be a koordináta-tengelyekkel.

– (2) Az origó és a b egyenes távolsága legfeljebb 2.

– (3) Van olyan pont a koordináta-rendszerben, amelyen a b egyenes (m-től függetlenül) biztosan áthalad.

– (4) Az a egyenes bármely M pontja előállhat, mint az a és b egyenesek metszéspontja.

– (5) Ha az a és b egyenesek merőlegesek, akkor metszéspontjuk $M(1{,}5; 0{,}5)$.

– (6) Ha a b egyenes merőleges valamelyik tengelyre, akkor $m = 0$.

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

5.12. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben tekintsük az $e : y = -x + 3$ és $f : y = 2x + b$ egyeneseket (b paraméter). Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Ha az e és f egyenesek y tengelymetszete megegyezik, akkor szükségképpen $b = 3$.

– (2) Az O origó és az e egyenes távolsága $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

– (3) Az f egyenes és az x tengely bezárt szöge 60° (b-től függetlenül).

– (4) Ha $b = 0$, akkor a két egyenes M metszéspontjára $OM = \sqrt{5}$.

– (5) Van olyan b érték, amelyre e és f párhuzamosak.

– (6) Van olyan b érték, amelyre e és f az x tengelyen metszik egymást.

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

5.13. (M) Adott három függvény: $f(x) = -2x + 7$, ha $x \in [-4; 3]$; $g(x) = 0{,}5x + 1$, ha $x \geq$ ≥ 0; végül $h(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. Az alábbi kijelentések a függvényekre, valamint az értékkészletükre vonatkoznak. Hány igaz állítás szerepel közöttük?

– (1) R_f végtelen elemszámú halmaz.

– (2) R_g nem korlátos halmaz.

– (3) Az $[1; 7]$ intervallum mindhárom értékkészletnek a részhalmaza.

– (4) R_f maximuma 16.

– (5) Van olyan függvény a felsoroltak között, amelynek a képe szakasz.

– (6) Van olyan függvény a felsoroltak között, amelynek a képe félegyenes.

– (7) Van olyan függvény a felsoroltak között, amelynek a képe egyenes.

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

5.14. (M) Egy f lineáris függvény (hiányos) értéktáblázata a következő:

x	5	13	19
$f(x)$	7	23	

Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Az $y = f(x)$ egyenes meredeksége 2.

– (2) A táblázat üresen hagyott helyéről a 35 hiányzik.

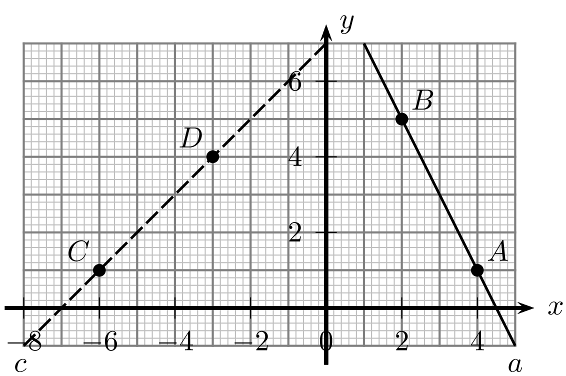
– (3) $f(0)$ bármilyen értéket felvehet.

– (4) $f(-4) = -11$.

– (5) Az f függvénykapcsolat lehet egyenes arányosság.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5.15. (M) Az 1. ábrán az $a(x)$ és $c(x)$ függvényeket ábrázoltuk, melyek képe az A és B, illetve C és D pontokon áthaladó egyenes.



5.15.1. ábra.

Az alábbi állítások közül hány hamis?

– (1) A $c = CD$ egyenes 45°-os szöget zár be a tengelyekkel.

– (2) Az $a = AB$ egyenes x tengelymetszete $x = 4{,}5$.

– (3) Az a és c egyenesek merőlegesek egymásra.

– (4) Az $a = AB$ egyenes y tengelymetszete $y = 8$.

– (5) Ha az a és c egyenesek metszéspontja $M(p; q)$, akkor $p + q = 8$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5.16. (M) A következő négy $a - d$ függvény között hány olyan van, amelynek a képe a derékszögű koordináta-rendszerben félegyenes?

– (1) $a(x) = |x - 4|$, ha $x < 6$

– (2) $b(x) = \sqrt{(x+1)^2}$, $x \leq -4$.

– (3) $c(x) = 3$, ha $x \geq 7$.

– (4) $d(x) = \frac{x^2+6x+9}{x+3}$, $x \geq -5$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5.17. (M) Az f függvény képe a derékszögű koordináta rendszerben az AB szakasz, $A(-6; 2)$, $B(8; 24)$. Az alábbi állítások közül hány igaz? (1) $D_f = [-6; 8]$ (2) $R_f = [-6; 30]$ (3) Az AB szakasz meredeksége 3. (4) Az f függvény hozzárendelési szabálya $x \longrightarrow 2x + 20$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

5.18. (M) A derékszögű koordináta-rendszer $P(x; y)$ pontjain három halmazt definiálunk:

$$A = \{P(x; y); x + y < 4\}; \quad B = \{P(x; y); (x - y)(x - 4) = 0\};$$

$$C = \{P(x; y); (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0\}.$$

Az alábbi állítások között hány hamis van?

– (9) Egyik ponthalmaz sem korlátos.

– (10) Az A ponthalmaz félsík.

– (11) A B halmaz képe két egyenes.

– (12) $C \subset A$.

– (13) Van olyan negatív meredekségű egyenes a koordináta-rendszerben, amelynek nincs közös pontja A-val.

– (14) Bármely egyenesnek van közös pontja B-vel.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

6. FEJEZET

Abszolútérték függvény

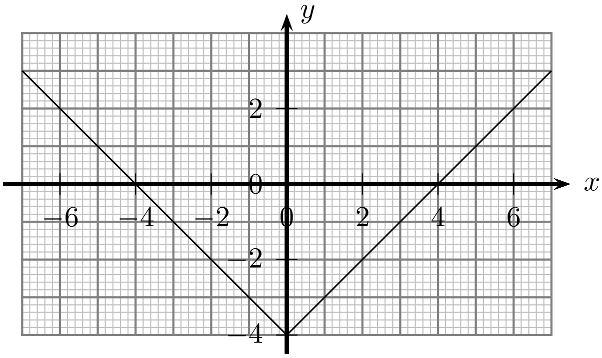
Ahol külön nem jelezzük, ott a függvények értelmezési tartománya a valós számok lehető legbővebb részhalmaza.

6.1. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete?
a) $a(x) = |x|$;
b) $b(x) = \sqrt{x^2}$;
c) $c(x) = |-x|$ a $[-4; 4]$ intervallumon;
d) $d(x) = 2|x|$;
e) $e(x) = -|x|$, ha $x \in [-6; 7[$.

6.2. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete?
a) $a(x) = |x| - 2$;
b) $b(x) = |x - 2|$, ha $-8 < x \le 10$;
c) $c(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$;
d) $d(x) = |-2x|$, ha $x \in [-5; 5]$;
e) $e(x) = \sqrt{4x^2}$.

6.3. Hogyan helyezkednek el a 6.1.,6.2. feladatokban kapott függvénygörbékhez képest az $A_1(5; 4)$, $A_2(5; -6)$, $A_3(-7; -6)$, $A_4(10000; 20000)$, $A_5(-10000; 20000)$ pontok? (Melyik pont van az adott görbe „felett", a görbe „alatt", vagy esetleg rajta a görbén?)

6.4. Az 1. ábrán az $y = |x| + b$ egyenletű abszolútérték-függvény grafikonja látható a $b = -3$ esetben. Változtassuk b értékét! Készítsük el az alábbi eseteknek megfelelő grafikonokat közös koordinátarendszerben!
a) $b = -1$; **b)** $b = 1$; **c)** $b = 3$;

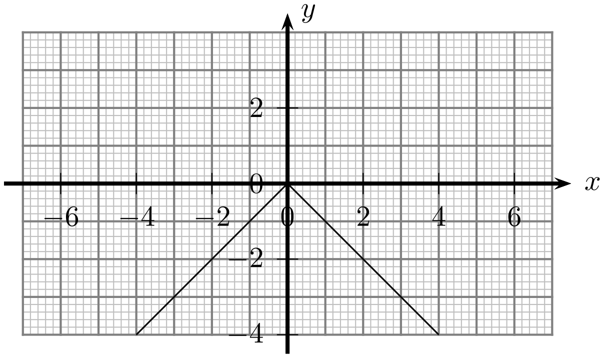


6.4.1. ábra.

(Használhatjuk a GeoGebra programot is!) Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?

6.5. Az 1. ábrán az $y = c \cdot |x|$ egyenletű abszolútérték-függvény grafikonja látható a $c = -1$ esetben. Változtassuk c értékét! Készítsük el az alábbi eseteknek megfelelő grafikonokat közös koordinátarendszerben!

a) $c = -2$; **b)** $c = 0$; **c)** $c = 1$; **d)** $c = 2$;

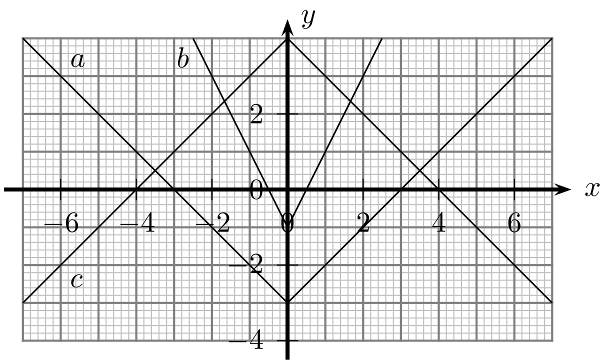


6.5.1. ábra.

(Használhatjuk a GeoGebra programot is!) Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?

6.6. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete?
a) $a(x) = 2|x-3|$;
b) $-\frac{1}{3}|x+3|$;
c) $c(x) = -1{,}5|x-1|+2$, ha $x \in]-4;5[$;
d) $d(x) = \sqrt{x^2+4x+4} - 3$;
e) $e(x) = -2\sqrt{x^2-2x+1} + 3$, ha $-3 < x \leq 5$.

6.7. Mi az 1. ábrán látható a–c függvények hozzárendelési szabálya?

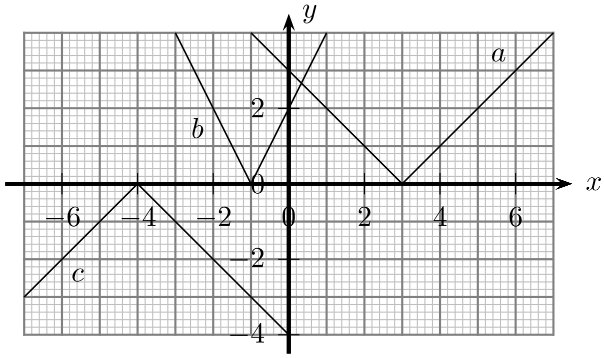


6.7.1. ábra.

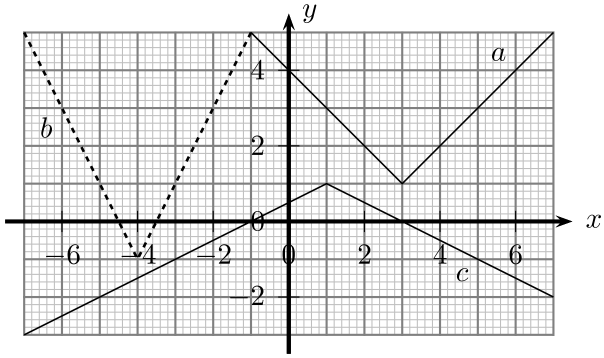
6.8. Mi az 1. ábrán látható a–c függvények hozzárendelési szabálya?

6.9. Mi az 1. ábrán látható a–c függvények hozzárendelési szabálya?

6.10. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete?
a) $a(x) = \frac{|x|}{x}$;
b) $b(x) = \frac{2x^2}{|x|^2}$, ha $-6 < x \leq 7$;
c) $c(x) = \frac{3x^3}{-x^3}$.



6.8.1. ábra.



6.9.1. ábra.

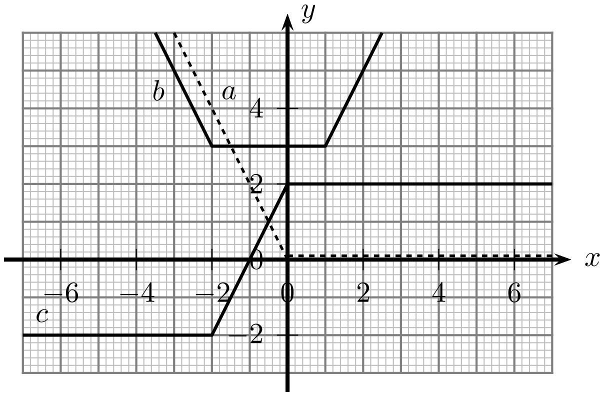
6.11. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
 a) $a(x) = |x| + x$;
 b) $b(x) = |x - 1| + 2x$, ha $x \in [-5; 4]$;
 c) $c(x) = -2|x + 3| + 3x - 1$;
 d) $d(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - x + 2$, ha $x \in]-5; 4]$.

6.12. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
 a) $a(x) = |x + 3| + |x - 1|$;
 b) $b(x) = |x + 3| - |x - 1|$;
 c) $c(x) = 2|x + 3| - |x - 1|$.

6.13. Mi az 1. ábrán látható a–c függvények hozzárendelési szabálya?

6.14. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete?
 a) $a(x) = \frac{x^2-4}{|x|-2}$;
 b) $b(x) = \frac{x^2-2|x|+1}{|x|-1}$, ha $x \in [-4; 4]$;
 c) $c(x) = \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{2x-1}$.

6.15. Egy pontszerű test kezdetben a koordinátarendszer $(-16; 0)$ pontjában van. Ezután a test két egységnyi egyenletes sebességgel halad az x tengely pozitív irányába. Mekkora a test távolsága t idő múlva
 a) az origótól; **b)** a (12; 0) ponttól; **c)** a (b; 0) ponttól?

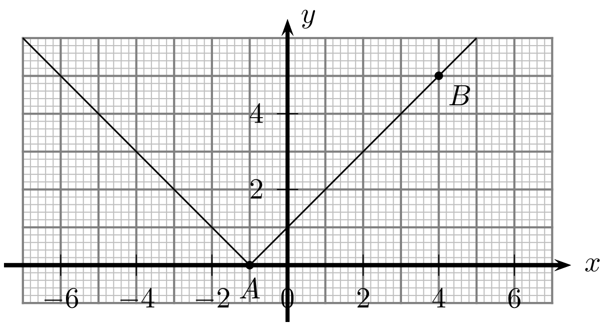


6.13.1. ábra.

6.16. **a)** Határozzuk meg a értékét, ha az $f(x) = a|x|$ függvény esetén $f(8) = 4$.
b) Határozzuk meg b értékét, ha az $f(x) = |x - b|$ függvény esetén $f(8) = 4$.
c) Határozzuk meg c értékét, ha az $f(x) = |x| + c$ függvény esetén $f(8) = 4$.
d) Határozzuk meg a és b értékét, ha az $f(x) = a|x-b|$ függvény esetén $f(4) = 2$ és $f(8) = 10$.
e) Határozzuk meg a és c értékét, ha az $f(x) = a|x| + c$ függvény esetén $f(2) = -1$ és $f(4) = -5$.
f) Határozzuk meg b és c értékét, ha az $f(x) = |x+b|+c$ függvény esetén $f(0) = 5$ és $f(4) = 3$.

6.17. Az $f(x) = a|x + b| + c$ abszolútérték-függvény képe a derékszögű koordináta rendszerben „felfelé nyitott” V-betű alakú, melynek csúcsa a $(3; 4)$ pontban van. Határozzuk meg a, b és c értékét, ha a függvénygörbe átmegy a $(2; 2)$ ponton!

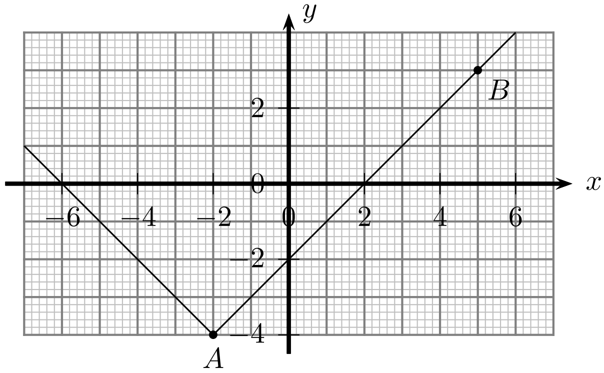
6.18. Az $f(x) = a|x - b|$ abszolútérték-függvény grafikonjának csúcsa az $A(-1; 0)$ pont és a grafikon átmegy a $B(4; 5)$ ponton is. Az f függvény grafikonja látható az 1. ábrán.



6.18.1. ábra.

a) Határozzuk meg f egyenletét, azaz az a, b paraméterek értékét!!
b) Változtassuk a koordináta-rendszerben a B pont helyzetét! Határozzuk meg az így kapott abszolútérték-függvények képének az egyenletét! (Alkalmazhatjuk a GeoGebra programot is!)
c) Változtassuk az A pont helyzetét az x tengelyen, s határozzuk meg az ekkor kapott egyenleteket is!

6.19. Módosítjuk a 6.18. feladatot. Most A és B a koordináta-rendszer tetszőleges rácspontjai lehetnek. (Legyen például kezdetben $A(-2; -4)$ és $B(5; 3)$. mint az 1. ábrán.) Adjuk meg az A csúcsú, a Bponton áthaladó abszolútérték-függvény grafikonját, s miközben a pontok helyzetét változtatjuk, elemezzük a függvény egyenletének változását! (Használhatjuk a GeoGebra programot is.)



6.19.1. ábra.

6.20. Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x;y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül az alábbi feltétel:

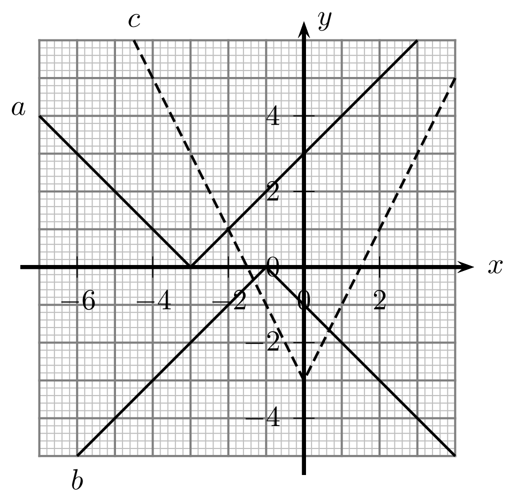
a) $|2x+y|=5$; **b)** $|2x+y|<5$; **c)** $|x|-|y|=5$;

d) $||x|-|y||=5$; **e)** $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}=0$; **f)** $|x|+|y|=4$;

g) $|x|\leq 1$ vagy $|y|\leq 1$.

7. FEJEZET
Abszolútérték függvény (teszt)

7.1. (M) Az 1. ábrán, a derékszögű koordináta-rendszerben megrajzoltuk az a, b és c függvények görbéit. Az alábbi állítások között hány hamis van?



7.1.1. ábra.

(1) $a(x) = |x - 3|$; (2) $-\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; (3) $c(x) = |2x - 3|$; (4) $a(x) = |x + 3|$ és $b(x) = -|x + 1|$; (5) $c(x) = ||2x| - 3|$; (6) $b(x) = -| - x - 1|$ és $c(x) = 2|x| - 3$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

7.2. (M) Adott az $f(x) = 2|x| - 100$, $-100 < x \leq 40$ függvény. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Az f függvény az y tengelyt a -100 pontban metszi.

– (2) Az f függvénynek két zérushelye van.

– (3) Az f függvény értékkészlete $y \in [-100; 100]$.

– (4) A $P(-80; 50)$ pont az f függvénygörbe „alatt" van.

– (5) A $P(80; 70)$ pont az f függvénygörbe „felett" van.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

7.3. (M) Tekintsük az $f : y = |x| + a$ és $h : y = |x + c|$ egyenletű függvényeket, ahol az a, c paraméterek nemnegatív számok. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Van olyan a és c érték, amelyekre az $f(x) = h(x)$ egyenletnek végtelen sok megoldása van.

– (2) Végtelen sok olyan $(a; c)$ értékpár található, amelyekre az f és h függvénygörbéknek pontosan egy közös pontja van.

– (3) Az f függvény görbéje nem metszi az y tengelyt.

– (4) Tetszőleges c értékre igaz, hogy a h függvény görbéje metszi az y tengelyt.

– (5) Van olyan a paraméter, amelyre (tetszőleges c-re) R_f és R_h megegyezik.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

7.4. (M) Tekintsük a $g : y = b \cdot |x|$ és $h : y = |x + c|$ egyenletű függvényeket, ahol a b, c paraméterek pozitív számok. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Van olyan b és c érték, amelyekre a $g(x) = h(x)$ egyenletnek végtelen sok megoldása van.

– (2) Végtelen sok olyan $(b; c)$ értékpár található, amelyekre a g és h függvénygörbéknek pontosan egy közös pontja van.

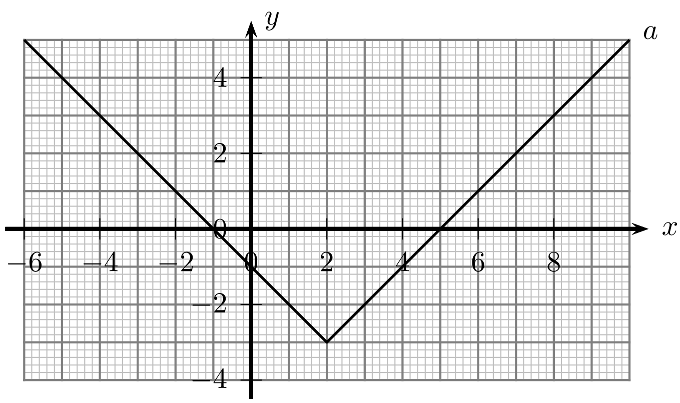
– (3) Van olyan c érték, amelyre a h függvény görbéje nem metszi az y tengelyt.

– (4) Tetszőleges b értékre igaz, hogy a g függvény görbéje metszi az y tengelyt.

– (5) Tetszőleges $(b; c)$ értékpár esetén R_g és R_h megegyezik.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

7.5. (M) Mi az 1. ábrán látható függvény egyenlete?



7.5.1. ábra.

A) $a(x) = |x + 2| - 3$ **B)** $a(x) = |x + 2| + 3$ **C)** $a(x) = 2|x| - 3$
D) $a(x) = |x - 2| + 3$ **E)** $a(x) = |x - 2| - 3$

7.6. (M) Adott az $-\sqrt{x^2 - 6x + 9}$, $x \in [-1; 5]$ függvény. Az alábbi állítások közül melyik hamis?

A) Az f függvény y tengelymetszete -3. **B)** Az f függvény x tengelymetszete 3.

C) $0 \in D_f$. **D)** $-6 \in R_f$.

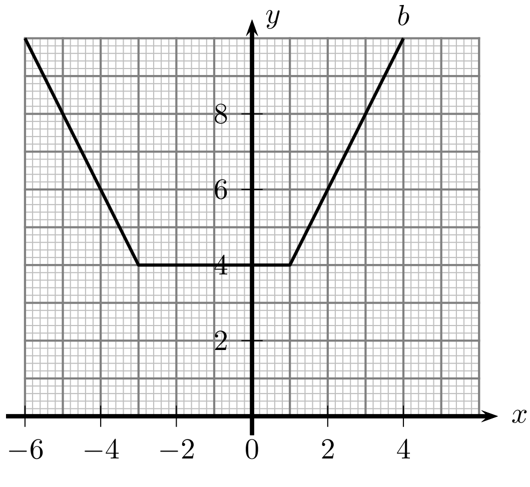
E) Egyik sem.

7.7. (M) Adott az $f(x) = |x+3| - |x-1|$ függvény. Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) Az f függvény y tengelymetszete 4.
- (2) Az f függvénynek nincs zérushelye.
- (3) Az f függvény értéke a $[2;5]$ intervallumon konstans.
- (4) Az f függvény értékkészlete $[-4;4]$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

7.8. (M) Mi az 1. ábrán látható b függvény egyenlete?



7.8.1. ábra.

A) $b(x) = |x-3| + |x+1|$ **B)** $b(x) = |x+3| + |x-1|$
C) $b(x) = |x+3| - |x-1|$ **D)** $b(x) = |x+3| - |x+1|$
E) $b(x) = 2|x+3| + |x-1|$

7.9. (M) Az $f(x) = a|x+b|$ abszolútérték-függvény görbéje az x tengelyt a -3, az y tengelyt a -12 pontban metszi. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

A) $(a;b) = (-4;-3)$ **B)** $(a;b) = (-4;3)$ **C)** $(a;b) = (-6;2)$
D) $(a;b) = (6;-2)$ **E)** Egyik sem.

7.10. (M) A H halmaz a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x;y)$ pontok halmaza, amelyek koordinátáira teljesül a $|3x+y| = 10$ egyenlet. Az alábbi állítások közül melyik hamis?

- (1) A $P(10;-40)$ pont eleme a H halmaznak.
- (2) A H halmaz tartalmazza az $y = -3x - 10$ egyenletű egyenes pontjait.
- (3) Tetszőleges y esetén van olyan x, amelyre $(x;y) \in H$.
- (4) H képe két párhuzamos egyenes.

A) (1) **B)** (2) **C)** (3) **D)** (4)
E) Egyik sem.

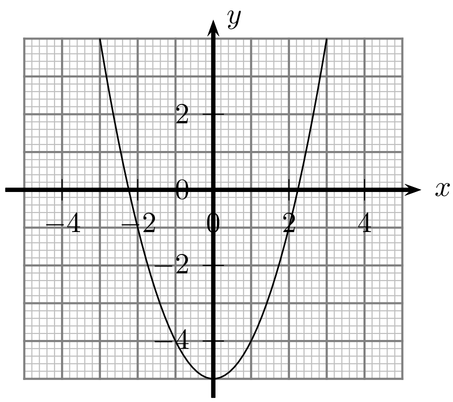
8. FEJEZET

Másodfokú függvény

Ahol külön nem jelezzük, ott a függvények értelmezési tartománya a valós számok lehető legbővebb részhalmaza.

8.1. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
  a) $a(x) = x^2$;
  b) $b(x) = x^2 - 3$;
  c) $\frac{1}{2}x^2$;
  d) $d(x) = -2x^2$;
  e) $e(x) = (x + 2)^2$.

8.2. Az 1. ábrán az $y = x^2 + b$ másodfokú függvény grafikonja látható a $b = -5$ esetben. Változtassuk b értékét és ábrázoljuk az így kapott függvény grafikonját! Legyen rendre
  a) $b = -3$; **b)** $b = -1$; **c)** $b = 1$; **d)** $b = 3$!
  (Alkalmazhatjuk a GeoGebra programot.)

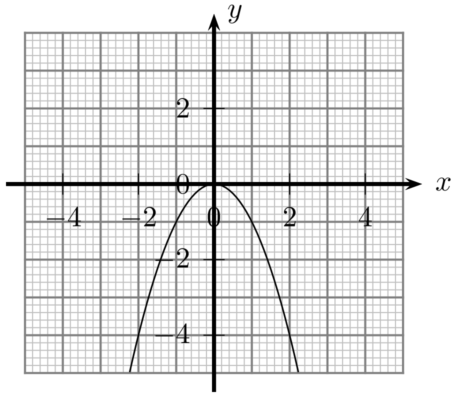


8.2.1. ábra.

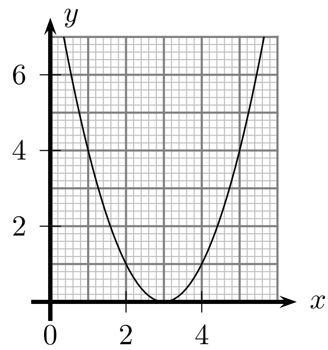
Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?

8.3. Az 1. ábrán az $y = c \cdot x^2$ másodfokú függvény grafikonja látható, a $c = -1$ esetben. Változtassuk c értékét és ábrázoljuk az így kapott függvény grafikonját az alábbi esetekben:
  a) $c = -0{,}5$; **b)** $c = 0$; **c)** $c = 0{,}5$; **d)** $c = 1$! **e)** $c = 1{,}5$!
  (Alkalmazhatjuk a GeoGebra programot.)
  Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?

8.4. Az 1. ábrán az $y = (x + d)^2$ másodfokú függvény grafikonja látható, a $d = -3$ esetben. Változtassuk d értékét és ábrázoljuk az így kapott függvény grafikonját az alábbi esetekben:
  a) $d = -2$; **b)** $d = -1$; **c)** $d = 0$; **d)** $d = 1$! **e)** $d = 2$!
  (Alkalmazhatjuk a GeoGebra programot.)
  Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?



8.3.1. ábra.



8.4.1. ábra.

8.5. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
a) $a(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2$;
b) $b(x) = (x+2)^2 - 1$;
c) $c(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$;
d) $d(x) = -(x-2)^2 + 1$.

8.6. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya?

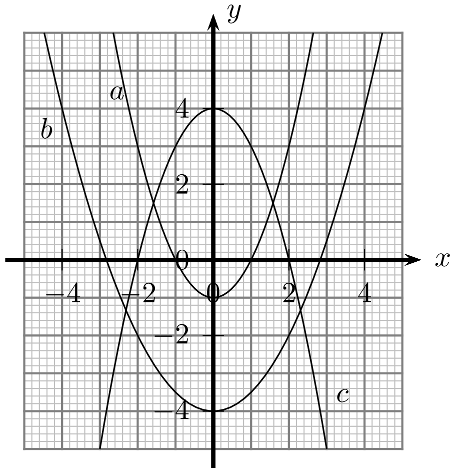
8.7. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya?

8.8. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya?

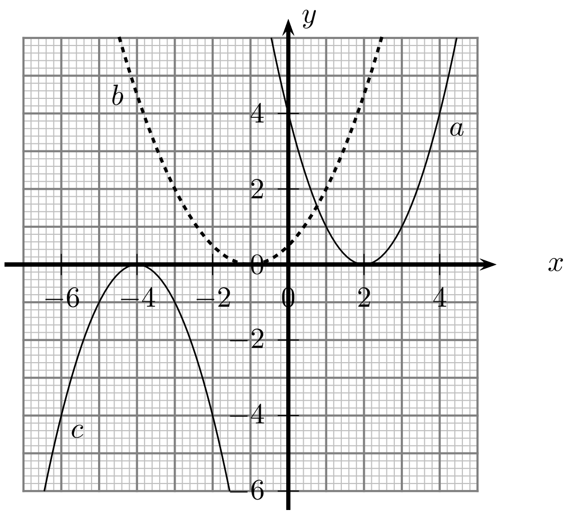
8.9. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete? (Ha szükséges, alkalmazzuk a teljes négyzetté alakítás módszerét!)
a) $a(x) = x^2 - 4x + 4$; **b)** $b(x) = x^2 - 4x + 5$; **c)** $d(x) = x^2 - 4x$;
d) $e(x) = x^2 + 2x + 1$; **e)** $f(x) = x^2 + 2x + 5$; **f)** $h(x) = x^2 + 2x$;
g) $c(x) = x^2 - 4x + 3$, ha $x \in]-4; 3]$; **h)** $g(x) = x^2 + 2x - 3$, ha $-3 \leq x < 5$.

8.10. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értékkészlete? Határozzuk meg a függvénygörbék tengelymetszeteit is!
a) $a(x) = 2x^2 + 4x + 2$; **b)** $b(x) = -x^2 + 8x + 9$; **c)** $c(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3$;
d) $d(x) = -\frac{1}{3}(x+3)^2 + 3$.

8.11. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya?



8.6.1. ábra.



8.7.1. ábra.

8.12. Az egyváltozós másodfokú függvény általános alakja:

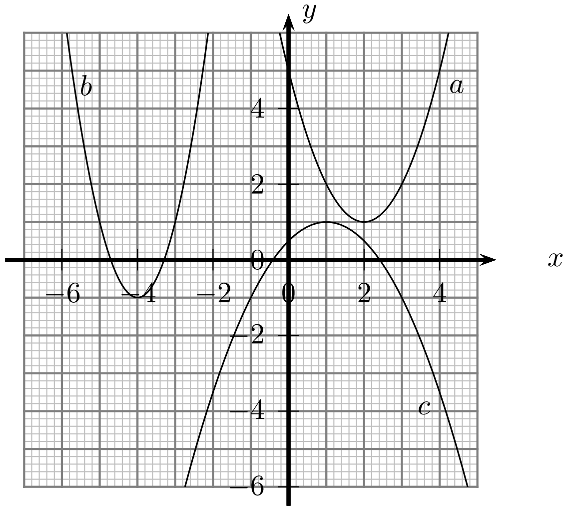
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0. \tag{1}$$

a) Igaz-e, hogy minden egyváltozós másodfokú függvény grafikonja parabola?
b) Milyen helyzetű a parabola tengelye?
c) Mitől függ az, hogy a parabola melyik irányban nyitott?
d) Mitől függ a parabola nyitottságának mértéke?
e) Hogyan jellemezhetjük – közös pontjaik száma alapján – a parabola és a vele egysíkú egyenes kölcsönös helyzetét?

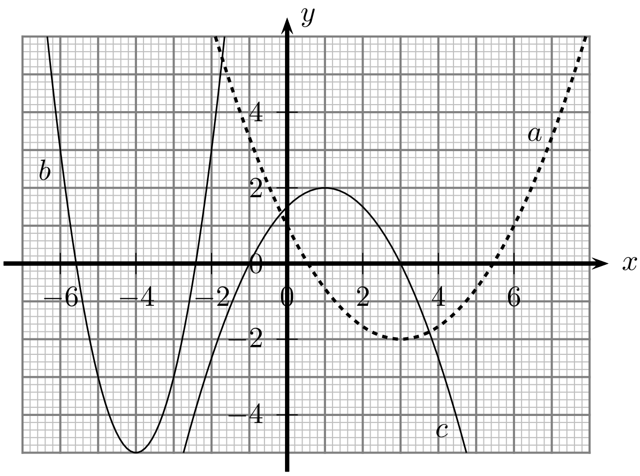
8.13. Az 1. ábrán az $y = x^2 + bx$ másodfokú függvény grafikonja látható, a $b = -4$ esetben. Változtassuk b értékét és ábrázoljuk az így kapott függvények grafikonját közös koordinátarendszerben! Vizsgáljuk pl. az alábbi konkrét eseteket:

a) $b = -3$; **b)** $b = -2$; **c)** $b = -1$; **d)** $b = 0$! **e)** $b = 1$!

(Alkalmazhatjuk a GeoGebra programot.)
Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?



8.8.1. ábra.



8.11.1. ábra.

8.14. Az $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ másodfokú kifejezés hiányos, ha $b = 0$ vagy $c = 0$. Mi jellemzi a hiányos másodfokú függvények képét?

8.15. Van-e olyan másodfokú függvény ($ax^2 + bx + c$, ahol $a \neq 0$), amelynek értékkészlete

a) a teljes valós számhalmaz;

b) a negatív számok halmaza;

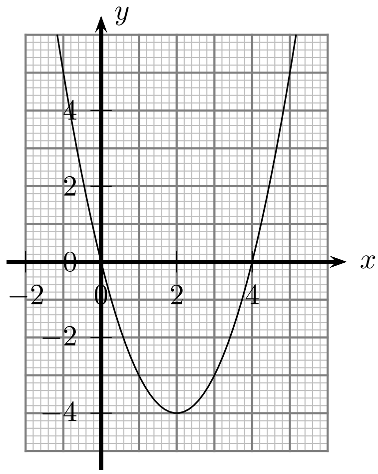
c) a nemnegatív számok halmaza;

d) $[-5; \infty[$?

8.16. **a)** Írjunk fel először (1) $s = At^2$, majd (2) $s = At^2 + Bt$, (3) $s = At^2 + C$, végül (4) $s = At^2 + Bt + C$ alakú út-idő kapcsolatot az alábbi, két mérési adatpárt tartalmazó táblázat alapján, s magyarázzuk meg a kapott eredményt:

$t(s)$	1	2
$s(m)$	3	6

Oldjuk meg az előző feladatot az alábbi, három mérési adatpárt tartalmazó b) és c) táblázat alapján is:



8.13.1. ábra.

b)

$t(s)$	1	2	3
$s(m)$	3	6	9

c)

$t(s)$	1	2	3
$s(m)$	3	6	11

8.17. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényre $f(0) = 4$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$. Határozzuk meg az a, b, c együtthatók értékét!

8.18. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény két zérushelye $x_1 = -1$ és $x_2 = 4$. Határozzuk meg az a, b és c együtthatók értékét, ha a függvény görbéje átmegy az $(1; -12)$ ponton!

8.19. Adott az $f : x \longrightarrow x^2 + 6x + c$ függvény. Hogyan kell c értékét megválasztani, hogy
a) a függvénynek két zérushelye legyen;
b) a függvénynek egy zérushelye legyen;
c) a függvénynek ne legyen zérushelye;
d) a függvény egyik zérushelye az $x = 5$ helyen legyen;
e) a függvény szélsőértéke $y = 4$ legyen;
f) a függvény minden felvett értéke pozitív legyen;
g) a függvény minden felvett értéke negatív legyen?

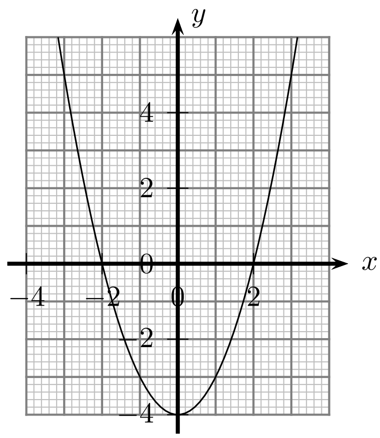
8.20. Egyenletesen gyorsuló személygépkocsi álló helyzetből indulva 1 perc alatt 100 km/h sebességet ér el.
a) Mekkora utat tesz meg ez alatt az idő alatt?
b) Ábrázoljuk a jármű mozgását az út-idő grafikonon!
c) Mennyi idő alatt teszi meg az autó a gyorsulási útszakasz felét?

8.21. **a)** Egy kavicsot 20 m/s kezdősebességgel függőleges irányban felfelé elhajítunk. Állapítsuk meg, hogyan függ a kavics föld felszínétől mért távolsága, s ábrázoljuk a távolságot az idő függvényében! (A közegellenállást elhanyagolhatjuk, $g \approx 10$ m/s^2.)
B) Oldjuk meg a feladatot abban az esetben is, amikor a kavicsot egy 10 méter magas ház tetejéről hajítjuk el, függőleges irányban felfelé!

8.22. Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak:
a) $(y - x^2)(x + 1) = 0$;
b) $(y - x^2 - 2x + 3)(x^2 - y - 1) = 0$;
c) $x^2 + y^2 = 9$;

d) $(y - x^2)^2 + (x^2 - 3y - 4)^2 = 0.$

8.23. A derékszögű koordináta-rendszerben vegyük fel az $A(0; -4)$ és $B(2; 0)$ pontokat, majd rajzoljuk meg annak az A csúcsú p másodfokú függvénynek a grafikonját, amelynek görbéje (parabola) átmegy a B ponton, és tengelye párhuzamos az y tengellyel!

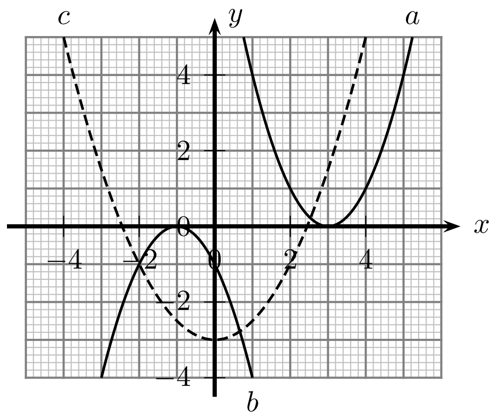


8.23.1. ábra.

a) Határozzuk meg p egyenletét!
b) Változtassuk a koordináta-rendszer x tengelyén a B pont helyzetét! Határozzuk meg az így kapott másodfokú görbék egyenletét! (Alkalmazhatjuk a GeoGebra programot is.)
c) Változtassuk a koordináta-rendszer y tengelyén az A pont helyzetét, s határozzuk meg az így kapott parabolák egyenletét is!
d) A b) - c) feladatokat annyiban módosítjuk, hogy most A és B a koordináta-rendszer tetszőleges rácspontjai lehetnek. Adjuk meg az így kapott másodfokú függvények egyenletét, s miközben a pontok helyzetét változtatjuk, elemezzük az egyenletek változását.

9. FEJEZET
Másodfokú függvény (teszt)

9.1. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben megrajzoltuk az a, b és c függvények görbéit (lásd az 1. ábrát). Az alábbi állítások között hány hamis van?



9.1.1. ábra.

(1) $a(x) = (x+3)^2$

(2) $b(x) = -(x-1)^2$

(3) $c(x) = x^2 - 3$

(4) $a(x) = (x-3)^2$ és $b(x) = -x^2 - 2x - 1$

(5) $c(x) = (x-2{,}5)(x+2{,}5)$

(6) $b(x) = -(x+1)^2$ és $c(x) = 0{,}5x^2 - 3$

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

9.2. (M) Adott az $f(x) = -2x^2 + 50$, $-10 < x \leq 4$ függvény. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Az f függvény az y tengelyt az 50 pontban metszi.

– (2) Az f függvénynek két zérushelye van.

– (3) Az f függvény értékkészlete $y \in [-150; 50]$.

– (4) A $P(-8; -70)$ pont az f függvénygörbe „alatt” van.

– (5) A $P(8; 70)$ pont az f függvénygörbe „felett” van.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

9.3. (M) Adott az $f: y = x^2 - 4x + 3$ függvény. Az alábbi állítások közül melyik hamis?

– (1) A derékszögű koordináta-rendszerben a függvény képe „felfelé nyitott” parabola.

– (2) A függvény görbéje metszi az y tengelyt.

– (3) A függvény görbéje két pontban metszi az x tengelyt.

– (4) A függvény görbéje átmegy a $P(5; 8)$ ponton.

A) (1) **B)** (2) **C)** (3) **D)** (4)
E) Egyik sem.

9.4. (M) Adott az $f : y = 2x^2 + 5x - 7$ függvény. Az alábbi állítások közül melyik hamis?

– (1) A függvény egy zérushelye $-3{,}5$.

– (2) A függvény értékkészlete $y \leq 3{,}875$.

– (3) A függvény x tengelymetszete -7.

– (4) A függvény maximuma az $x = -1{,}25$ helyen van.

A) (1) **B)** (2) **C)** (3) **D)** (4)
E) Egyik sem.

9.5. (M) Tekintsük az $f : y = x^2 + a$ és $g : y = (x + b)^2$ egyenletű függvényeket, ahol az a, b paraméterek nemnegatív számok. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Van olyan a és b érték, amelyekre az $f(x) = g(x)$ egyenletnek van két megoldása.

– (2) Van olyan a és b érték, amelyekre az $f(x) = g(x)$ egyenletnek pontosan két megoldása van.

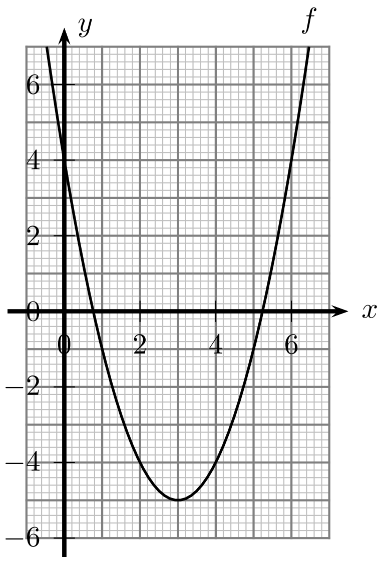
– (3) Az f függvény görbéje nem metszi az y tengelyt.

– (4) Tetszőleges b értékre igaz, hogy a g függvény görbéje metszi az y tengelyt.

– (5) Van olyan a paraméter, amelyre (tetszőleges b-re) R_f és R_h megegyezik.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9.6. (M) Mi az 1. ábrán látható függvény egyenlete?



9.6.1. ábra.

A) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ **B)** $f(x) = (x + 3)^2 - 5$
C) $f(x) = (x - 3)^2 + 4$ **D)** $f(x) = (x - 0{,}8)(x + 0{,}8)$
E) $f(x) = (x - 3)^2 - 5$

9.7. (M) Az alábbi állítások az egyváltozós, másodfokú függvény ($f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$) grafikonjára vonatkoznak. Az állítások közül hány igaz?

- (1) Az f függvény képe olyan parabola, melynek tengelye párhuzamos az y tengellyel.
- (2) Ha $a < 0$, akkor a parabola lefelé nyitott.
- (3) Ha $c = 0$, akkor a függvény görbéje átmegy az origón.
- (4) Lehetséges, hogy a függvény értékkészlete a valós számok halmaza.
- (5) Lehetséges, hogy $R_f = \mathbb{R}^-$.
- (6) Ha $b = 0$, akkor a függvény szélsőérték helye $x = 0$.
- (7) Ha $a \cdot c < 0$, akkor a függvény görbéje két pontban metszi az x tengelyt.

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

9.8. (M) Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény görbéje átmegy az $A(-2; -3), B(2; 9)$ és $C(3; 22)$ pontokon. Mennyi lehet $a + b + c$ értéke?
A) 8 **B)** -3 **C)** 0 **D)** 2,5
E) Egyik sem.

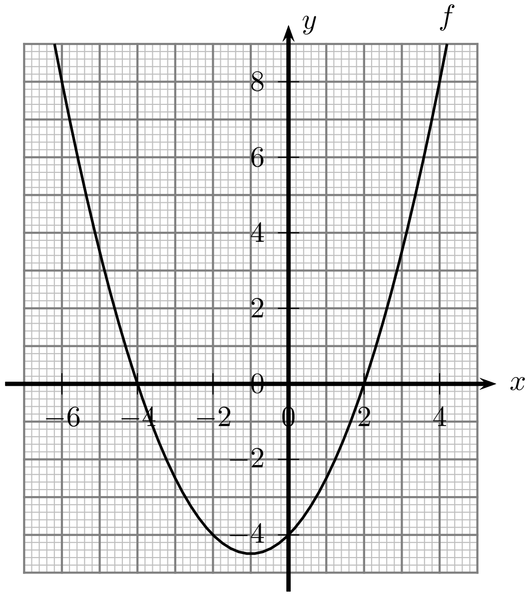
9.9. (M) Adott az $x \longrightarrow x^2 + 4x + c$ függvény. Hány hamis az alábbi állítások közül?

- (1) Ha $c < -1$, akkor a függvénynek 2 zérushelye van.
- (2) Ha a függvénynek 2 zérushelye van, akkor $c < -1$.
- (3) Ha $c = 4$, akkor f értékkészlete a nemnegatív számok halmaza.
- (4) Ha $c > 3$, akkor a függvénynek nincs zérushelye.
- (5) Ha $c = 0$, akkor az f függvény görbéje két különböző helyen metszi az x tengelyt.
- (6) Ha az f függvény görbéje két különböző helyen metszi az x tengelyt, akkor $c = 0$.
- (7) A függvény görbéje tükrös helyzetű az $x = -2$ egyenesre.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9.10. (M) Mi az 1. ábrán látható függvény egyenlete?
A) $f(x) = (x-1)^2 - 4{,}5$ **B)** $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 4{,}5$
C) $f(x) = (x+1)^2 - 4{,}5$ **D)** $f(x) = 0{,}5(x+4)(x-2)$
E) Egyik sem.

9.11. (M) Egyenletesen gyorsuló személygépkocsi álló helyzetből indulva 20 másodperc alatt 30 m/s sebességet ér el. Melyik igaz az alábbi állítások közül?
A) Az autó átlagsebessége 20 m/s. **B)** Az autó által megtett út 600 m.
C) Az autó gyorsulása $-1{,}5$ m/s^2. **D)** Az autó által megtett út 300 m.
E) Egyik sem.



9.10.1. ábra.

9.12. (M) A H halmaz a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x;y)$ pontok halmaza, amelyek koordinátáira teljesül az $(y-x^2)(x+y)=0$ egyenlet. Az alábbi állítások közül melyik hamis?
A) Az $(1;1)$ és $(1;-1)$ pontok elemei a H halmaznak. **B)** A H halmaz tartalmazza az $y=-x$ egyenletű egyenes pontjait. **C)** Tetszőleges pozitív x esetén van két különböző y_1 és y_2 érték is, amelyre $(x;y_1)\in H$ és $(x;y_2)\in H$. **D)** Tetszőleges negatív x esetén van két különböző y_1 és y_2 érték is, amelyre $(x;y_1)\in H$ és $(x;y_2)\in H$. **E)** Egyik sem.

10. FEJEZET

Racionális törtfüggvény

Ahol külön nem jelezzük, ott a függvények értelmezési tartománya a valós számok lehető legbővebb részhalmaza.

10.1. Egy medence 20 azonos keresztmetszetű, vékony csövön keresztül tölthető meg. Ha egy csövön keresztül engedjük be a vizet, akkor a medence 60 óra alatt telik meg.

a) Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha 2, 3, 4, …, illetve 20 csövön keresztül engedjük bele a vizet?

b) Milyen kapcsolat van a megnyitott csövek száma és a medence feltöltéséhez szükséges idő között?

c) Ábrázoljuk a töltési időt a megnyitott csövek számának függvényében!

10.2. Egy feldolgozó üzemben egy dolgozó átlagosan két óra alatt készül el a rá bízott termékkel. Összesen 40 termék elkészítése a feladat.

a) Mennyi idő alatt készül el a munkával 1, 2, 3, …, 10 dolgozó?

b) Milyen kapcsolat van a dolgozók száma és a termékek elkészítéséhez szükséges idő között?

c) Ábrázoljuk a termékek elkészítéséhez szükséges időt a dolgozók számának a függvényében!

10.3. Mi jellemzi a fordított arányosság grafikonját?

10.4. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

a) $a(x) = \frac{1}{x}$;

b) $b(x) = \frac{6}{x}$, ha $-3 \le x < 5$;

c) $c(x) = -\frac{1}{2x}$;

d) $d(x) = \frac{1}{x-3}$; ha $x \in]-5; 3]$;

e) $e(x) = \frac{3}{x-1}$.

10.5. Az 1. ábrán az $y = \frac{1}{x} + b$ egyenletű törtfüggvény grafikonját láthatjuk a $b = -3$ esetben. Változtassuk b értékét! Rajzoljuk meg b alábbi értékei esetén a függvény grafikonját! Dolgozhatunk közös koordinátarendszerben ill. alkalmazhatjuk a GeoGebra programot is.

a) $b = -1$; **b)** $b = 1$; **c)** $b = 3$.

Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?

10.6. Az 1. ábrán az $y = \frac{c}{x}$ egyenletű törtfüggvény grafikonját láthatjuk a $c = -3$ esetben. Változtassuk c értékét! Rajzoljuk meg c alábbi értékei esetén a függvény grafikonját! Dolgozhatunk közös koordinátarendszerben ill. alkalmazhatjuk a GeoGebra programot is.

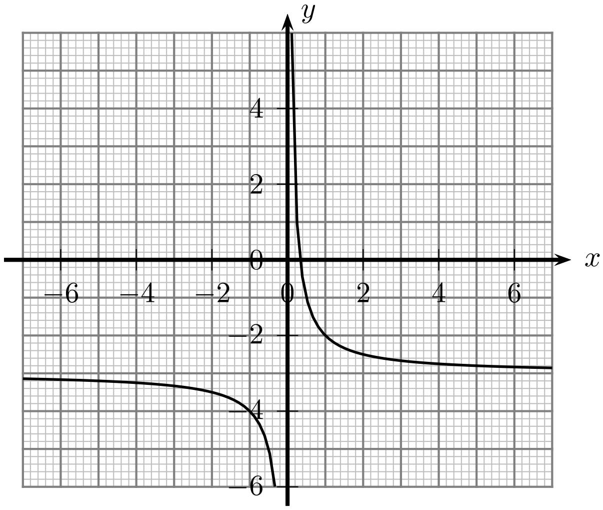
a) $c = -1$; **b)** $c = 1$; **c)** $c = 3$.

Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?

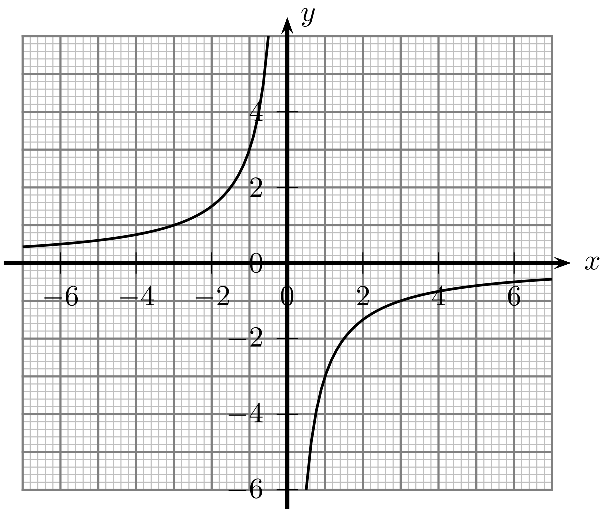
10.7. Az 1. ábrán az $y = \frac{1}{x+d}$ egyenletű törtfüggvény grafikonját láthatjuk a $d = -3$ esetben. Változtassuk d értékét! Rajzoljuk meg d alábbi értékei esetén a függvény grafikonját! Dolgozhatunk közös koordinátarendszerben ill. alkalmazhatjuk a GeoGebra programot is.

a) $d = -1$; **b)** $d = 1$; **c)** $d = 3$.

Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?



10.5.1. ábra.



10.6.1. ábra.

10.8. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

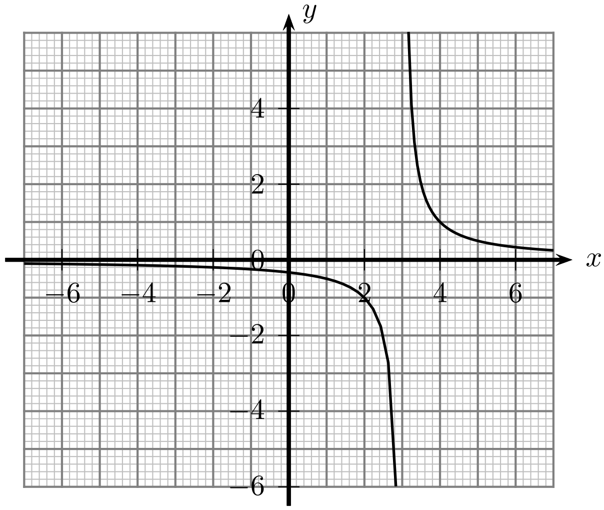
a) $a(x) = -2 + \frac{3}{x-1}$, ha $-5 \leq x \leq 3$;
b) $b(x) = \frac{2x-1}{x-1}$;
c) $c(x) = \frac{1-3x}{x+1}$, ha $x \in]-5;3]$;
d) $d(x) = \frac{|x|}{x^2}$.

10.9. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya? (A görbék hiperbolák.)

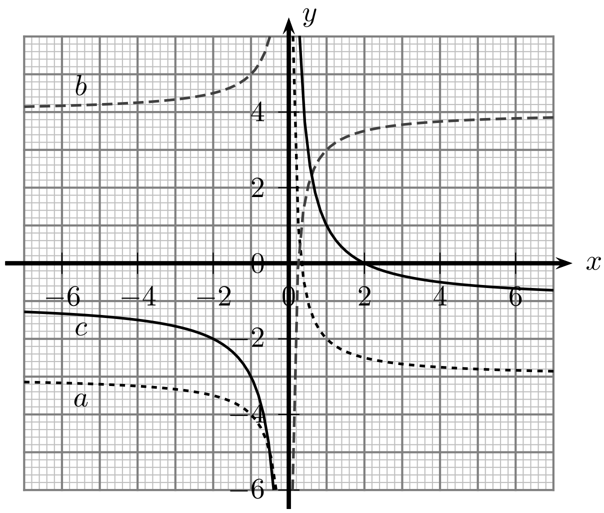
10.10. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya? (A görbék hiperbolák.)

10.11. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya? (A görbék hiperbolák.)

10.12. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját! Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?



10.7.1. ábra.



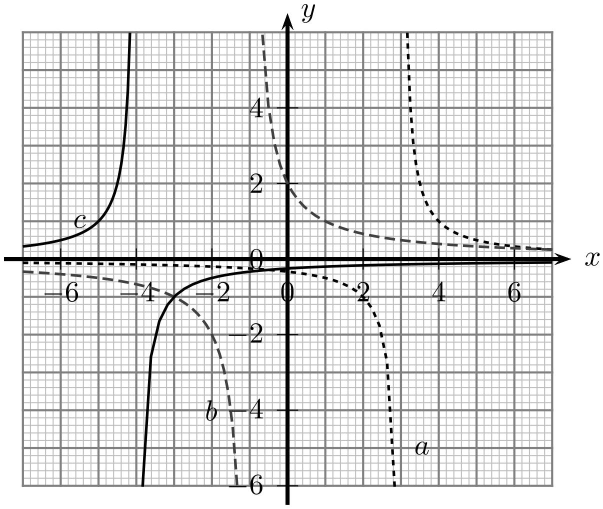
10.9.1. ábra.

a) $a(x) = \frac{x+4}{x^2-16}$;
b) $b(x) = \frac{(x-2)(x+5)}{x^2-4}$;
c) $a(x) = \frac{(x-1)(2x+5)}{x^2-2x+1}$.

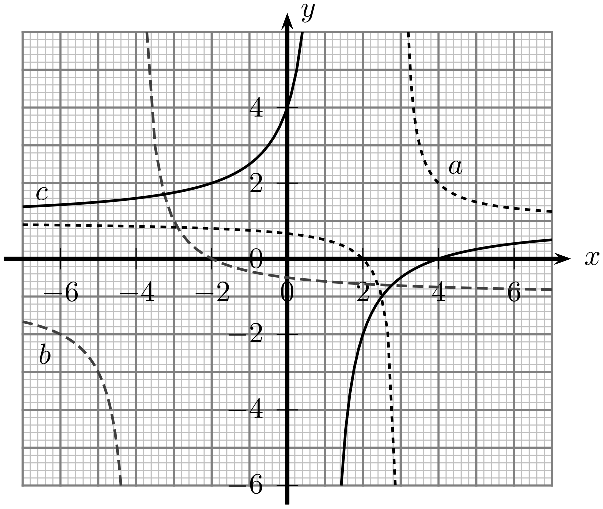
10.13. Egy fordított arányosság értelmezési tartománya $D = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 10\}$. Az arányosság grafikonja illeszkedik a $(6;10)$ pontra. Vázoljuk a függvény grafikonját!

10.14. Van-e olyan egyenes vagy fordított arányosság, melynek grafikonjára illeszkedik az A és a B pont, ha:

a) $A(5;8), B(9;9)$; **b)** $A(-6;-2), B(3;4)$; **c)** $A(-2;-3), B(2;3)$.



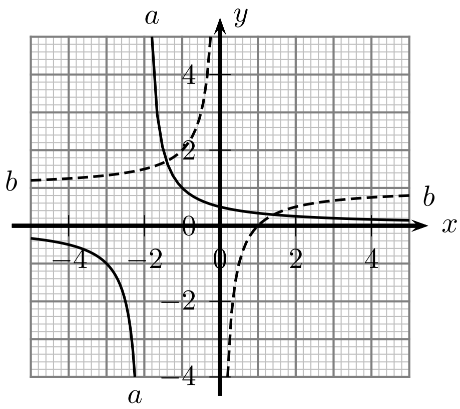
10.10.1. ábra.



10.11.1. ábra.

11. FEJEZET
Racionális függvény (teszt)

11.1. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben megrajzoltuk az a és b függvények görbéit (lásd az 1. ábrát). Az alábbi állítások között hány hamis van?



11.1.1. ábra.

(1) $a(x) = \frac{1}{x-2}$; (2) $b(x) = \frac{1}{x}$; (3) $b(x) = \frac{1}{x} + 1$ és $a(x) = \frac{1}{x+2}$; (4) $a(x) = \frac{1}{x-2}$ és $b(x) = -\frac{1}{x} + 1$; (5) $D_a = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; (6) $R_b = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

11.2. (M) Adott az $f(x) = \frac{2}{x} - 4$, $-1 < x \leq 0{,}4$, $x \neq 0$ függvény. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Az f függvény az y tengelyt a -4 pontban metszi.

– (2) Az f függvénynek van zérushelye.

– (3) Az f függvény értékkészlete tartalmazza az $y = 1000000$ értéket.

– (4) A $P(-0{,}5; -10)$ pont az f függvénygörbe „alatt” van.

– (5) A $P(0{,}5; 10)$ pont az f függvénygörbe „felett” van.

– (6) A függvénynek nincs minimuma.

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

11.3. (M) Mi az 1. ábrán látható f függvény egyenlete?

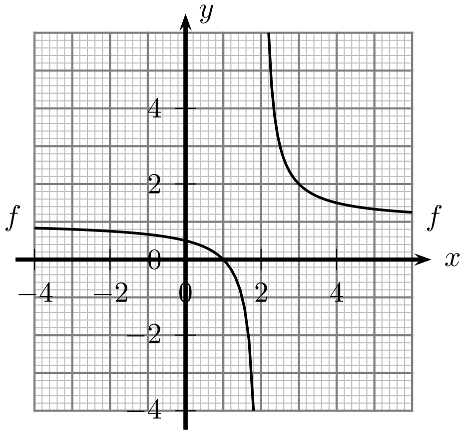
A) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ **B)** $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$ **C)** $f(x) = \frac{x}{x-2}$

D) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ **E)** Egyik sem.

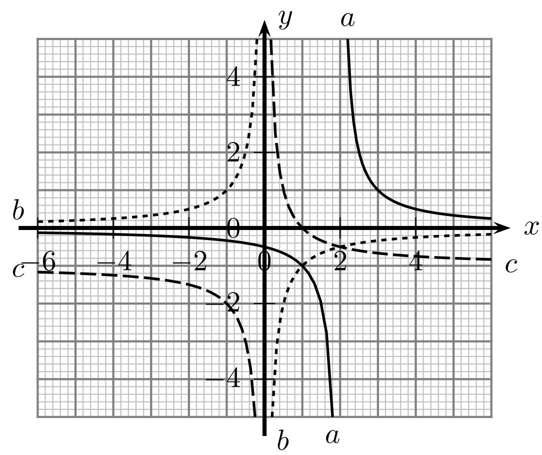
11.4. (M) Melyik lehet az 1. ábrán látható a, b, c görbék közül fordított arányosság grafikonja?

A) Csak a. **B)** Csak b. **C)** Csak c. **D)** a és b.

E) Egyik sem.



11.3.1. ábra.

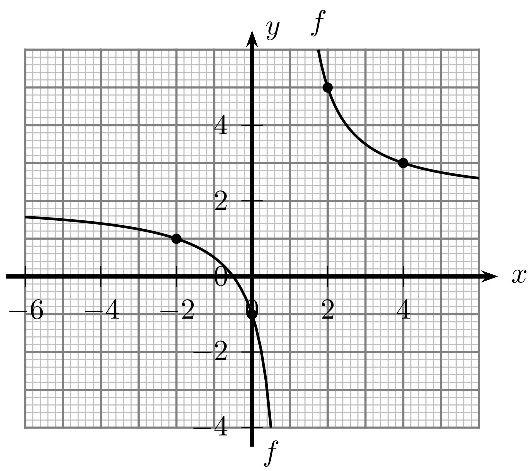


11.4.1. ábra.

11.5. (M) Mi az 1. ábrán látható f függvény egyenlete?

A) $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ **B)** $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$ **C)** $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

D) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$ **E)** Egyik sem.



11.5.1. ábra.

12. FEJEZET

Négyzetgyök függvény

Ahol külön nem jelezzük, ott a függvények értelmezési tartománya a valós számok lehető legbővebb részhalmaza.

12.1. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

a) $a(x) = \sqrt{x}$; **b)** $b(x) = \sqrt{x} - 4$, ha $x < 13$;

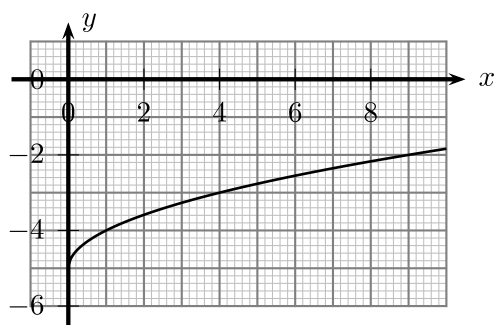
c) $c(x) = 3\sqrt{x}$; **d)** $d(x) = -2\sqrt{x}$.

12.2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

a) $a(x) = \sqrt{x+4}$; **b)** $\sqrt{4x}$, ha $x \in [0{,}5; 4]$; **c)** $\sqrt{-4x}$.

12.3. Az 1. ábrán az $y = \sqrt{x} + b$ egyenletű négyzetgyök-függvény grafikonját láthatjuk a $b = -5$ esetben. Változtassuk b értékét! Rajzoljuk meg b alábbi értékei esetén a függvény grafikonját! Dolgozhatunk közös koordinátarendszerben ill. alkalmazhatjuk a GeoGebra programot is.

a) $b = -3$; **b)** $b = -1$; **c)** $b = 1$, **d)** $b = 3$.



12.3.1. ábra.

Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?

12.4. Az 1. ábrán az $y = c\sqrt{x}$ egyenletű négyzetgyök-függvény grafikonját láthatjuk a $c = -3$ esetben. Változtassuk c értékét! Rajzoljuk meg c alábbi értékei esetén a függvény grafikonját! Dolgozhatunk közös koordinátarendszerben ill. alkalmazhatjuk a GeoGebra programot is.

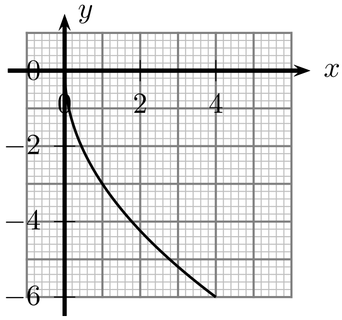
a) $c = -2$; **b)** $c = -1$; **c)** $c = 1$, **d)** $c = 2$, **e)** $c = 3$.

Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?

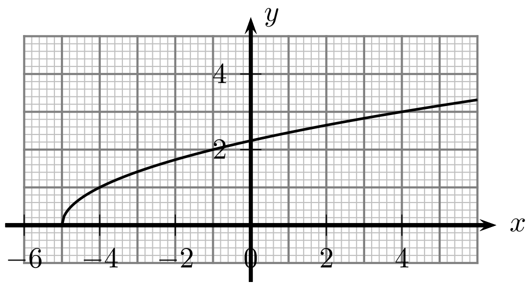
12.5. Az 1. ábrán az $y = \sqrt{x + d}$ egyenletű négyzetgyök-függvény grafikonját láthatjuk a $d = 5$ esetben. Változtassuk d értékét! Rajzoljuk meg d alábbi értékei esetén a függvény grafikonját! Dolgozhatunk közös koordinátarendszerben ill. alkalmazhatjuk a GeoGebra programot is.

a) $d = 3$; **b)** $d = 1$; **c)** $d = -1$, **d)** $d = -3$, **e)** $d = -5$.

Mi jellemzi az így kapott függvénygörbéket?



12.4.1. ábra.



12.5.1. ábra.

12.6. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, tengelymetszeteit!

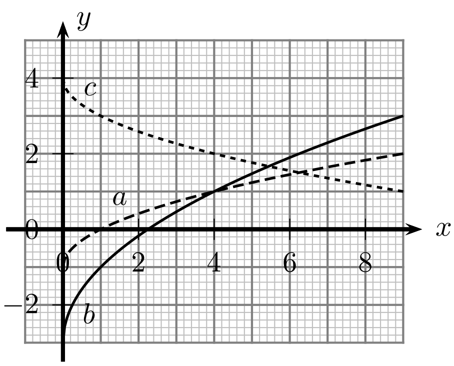
a) $a(x) = 3\sqrt{x+1}$;

b) $b(x) = -2\sqrt{x-1} + 3$, ha $x \in [2; 15]$;

c) $c(x) = \sqrt{2x+4} - 3$;

d) $d(x) = -\sqrt{8-4x} + 3$.

12.7. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya?

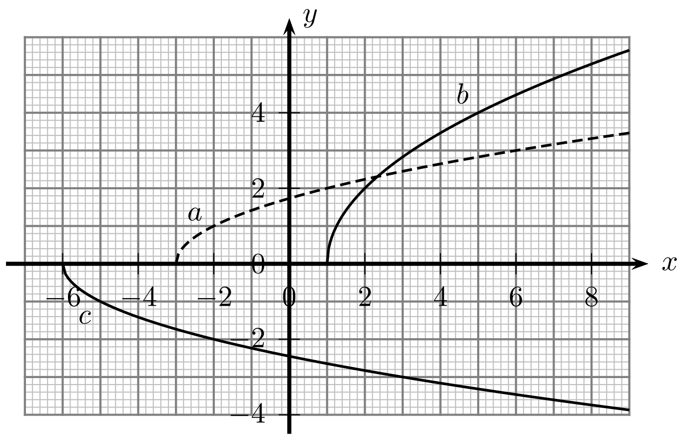


12.7.1. ábra.

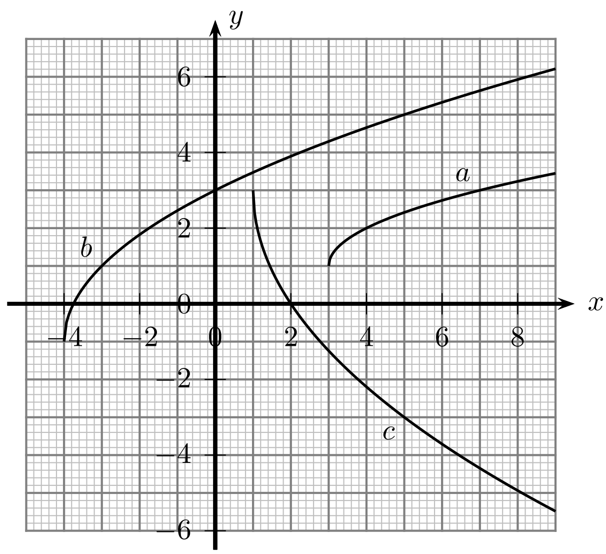
12.8. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya?

12.9. Mi az 1. ábrán látható *a*–*c* függvények hozzárendelési szabálya?

12.10. Az álló helyzetből egyenletes gyorsulással induló tehervonat 20 s alatt 200 m utat tett meg. Mennyi idő alatt tett meg 10 m-t, 20 m-t, ..., 200 m-t? Ábrázoljuk a menetidőt a megtett



12.8.1. ábra.



12.9.1. ábra.

út függvényében!

12.11. A matematikai inga h hosszúságú fonálra függesztett, mß tömegű testből álló rendszer (lásd az 1. ábrát). Ha az egyensúlyi helyzetből $\alpha < 90°$-kal kimozdított ingát elengedjük, a test függőleges síkban, egy körív mentén periodikus mozgást végez. Az inga lengésidejének azt az időtartamot nevezzük, amely alatt először ér vissza kezdőhelyzetébe a kitérített test.

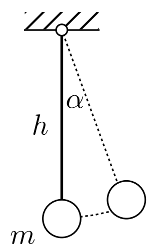
A T lengésidőt jó közelítéssel a $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ képlet segítségével határozhatjuk meg, ahol g a nehézségi gyorsulás. (A Föld felszínén $g \approx 9{,}81$ m/s.) A modell érvényességi körét (a képlet pontosságát) az határozza meg, hogy milyen közelítéseket alkalmazunk a mozgás leírásakor.

a) Milyen feltételek teljesülése esetén kapunk pontos eredményt?

b) Elemezzük a képletet! Mitől függ a lengésidő? Mitől nem függ?

c) A pontosan járó ingaóra ingájának láncát meghosszabbítjuk. Hogyan változik meg a lengésidő?

d) Hogyan változik meg a Földön pontosan járó ingaóra lengésideje a Holdon?

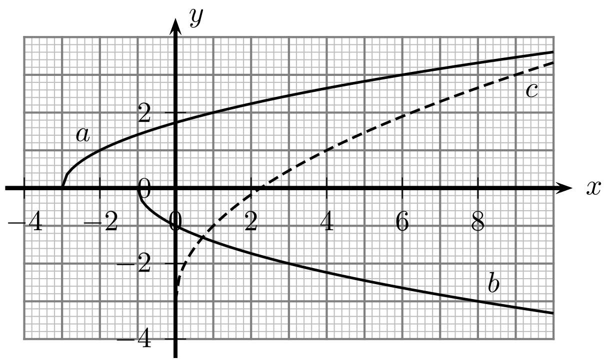


12.11.1. ábra.

13. FEJEZET

Négyzetgyök függvény (teszt)

13.1. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben megrajzoltuk az a, b és c függvények görbéit (lásd az 1. ábrát). Az alábbi állítások között hány hamis van?



13.1.1. ábra.

(1) $a(x) = \sqrt{x-3}$; (2) $b(x) = -\sqrt{x-1}$; (3) $c(x) = \sqrt{x} - 3$; (4) $a(x) = 2\sqrt{x+3}$ és $b(x) = -$ $-\sqrt{x+1}$; (5) $a(x) = 2\sqrt{x+3}$ és $c(x) = 2\sqrt{x} - 3$; (6) $b(x) = -\sqrt{x+3}$ és $c(x) = 2\sqrt{x} - 3$

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

13.2. (M) Adott az $f(x) = -10\sqrt{x} + 30$, $4 < x \leq 100$ függvény. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Az f függvény grafikonja az y tengelyt a 30 pontban metszi.

– (2) Az f függvénynek van zérushelye.

– (3) Az f függvény értékkészlete $y \in [-70; 10[$.

– (4) A $P(81; -50)$ pont az f függvénygörbe „alatt” van.

– (5) A $P(1; 30)$ pont az f függvénygörbe „felett” van.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

13.3. (M) Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x} + a$ és $g(x) = b\sqrt{x}$ egyenletű függvényeket, ahol az a, b paraméterek pozitív számok. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Van olyan a és b érték, amelyekre az $f(x) = g(x)$ egyenletnek van megoldása.

– (2) Van olyan b érték, amelyekre az $f(x) = g(x)$ egyenletnek nincs megoldása (a-tól függetlenül).

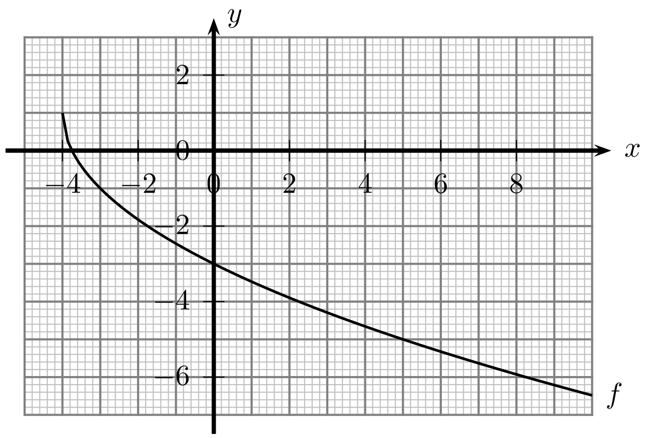
– (3) Az f függvény görbéje nem metszi az x tengelyt.

– (4) Tetszőleges b értékre igaz, hogy a g függvény görbéje metszi az y tengelyt.

– (5) Van olyan a és b paraméter, amelyre R_f és R_h megegyezik.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

13.4. (M) Mi az 1. ábrán látható f függvény egyenlete?



13.4.1. ábra.

A) $f(x) = \sqrt{x-4}+1$ **B)** $f(x) = -2\left(\sqrt{x-4}+1\right)$

C) $f(x) = -\sqrt{x-4}+1$ **D)** $f(x) = -2\sqrt{x+4}+1$

E) Egyik sem.

13.5. (M) Az $f(x) = a\sqrt{x+1}+b$ függvény görbéje átmegy az $A(0;-1)$ és $B(3;-3)$ pontokon. Mennyi lehet $2a+3b$ értéke?

A) 2 **B)** -1 **C)** 0 **D)** 4,5

E) Egyik sem.

13.6. (M) Egyenletesen gyorsuló személygépkocsi álló helyzetből indulva, 200 méter út megtétele után 20 m/s sebességet ér el. Hány igaz az alábbi állítások közül?

– (1) Az autónak ehhez 20 másodpercre volt szüksége.

– (2) Az autó átlagsebessége 10 m/s.

– (3) Az autó gyorsulása 1 m/s^2.

– (4) Állandó gyorsulással haladva 40 m/s eléréséhez 400 méter út megtételére van szükség.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

14. FEJEZET

Előjel, törtrész, egészrész

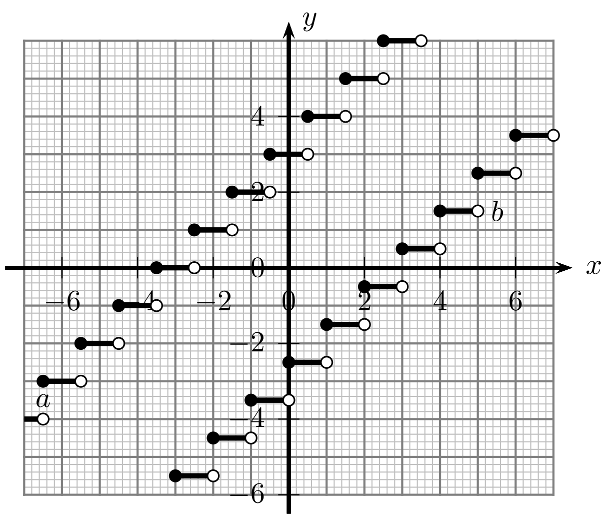
14.1. Ábrázoljuk az $x \longrightarrow \operatorname{sgn} x$ előjelfüggvényt!

14.2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:
a) $a(x) = \operatorname{sgn}(x-4)$; **b)** $b(x) = \operatorname{sgn}(3x)$; **c)** $c(x) = \operatorname{sgn}(-2x+8)$.

14.3. (M) Ábrázoljuk az $x \longrightarrow [x]$ egészrészfüggvényt!

14.4. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:
a) $a(x) = [x-4]$; **b)** $b(x) = [2x]$; **c)** $\left[\frac{x}{2} - 3\right]$;
d) $d(x) = [-2x+6]$.

14.5. Mi az 1-2. ábrákon látható a–d függvények hozzárendelési szabálya?

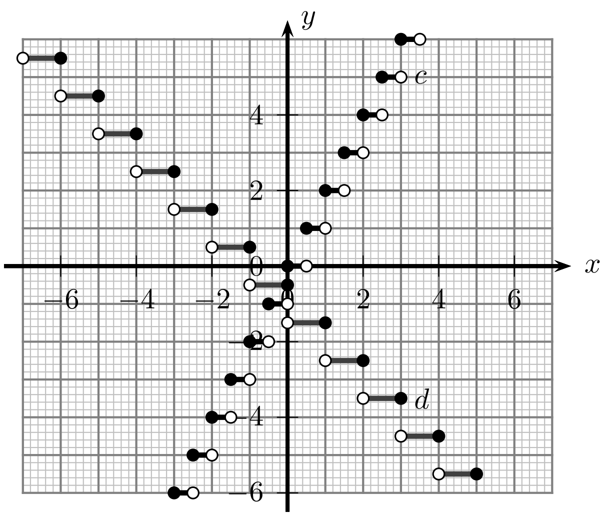


14.5.1. ábra.

14.6. (M) Ábrázoljuk az $x \longrightarrow \{x\}$ törtrészfüggvényt!

14.7. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:
a) $a(x) = \{x-2\}$; **b)** $b(x) = \{2x\}$; **c)** $c(x) = \{-2x+0{,}5\}$.

14.8. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:
a) $a(x) = x - [x]$; **b)** $b(x) = x + [x]$; **c)** $c(x) = [x] + \{x\}$; **d)** $d(x) = [x] - \{x\}$.



14.5.2. ábra.

15. FEJEZET
Előjel, törtrész, egészrész (teszt)

15.1. (M) Az alábbi állítások közül hány igaz?

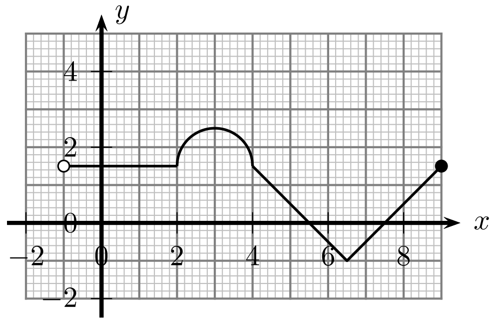
- (1) Az $f(x) = 2\left[\frac{x}{2} + 1{,}7\right]$ függvény értékkészlete az egész számok halmaza.
- (2) A $g(x) = \left\{\frac{x}{2} + 1{,}7\right\}$ függvény értékkészlete $[0; 2]$.
- (3) A $h(x) = [x - 2{,}3]$ függvénynek végtelen sok zérushelye van.
- (4) Az $a(x) = \{x\}$ és $b(x) = \{x + 2\}$ függvények megegyeznek.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

16. FEJEZET

Függvénytranszformációk

16.1. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvény képe látható.



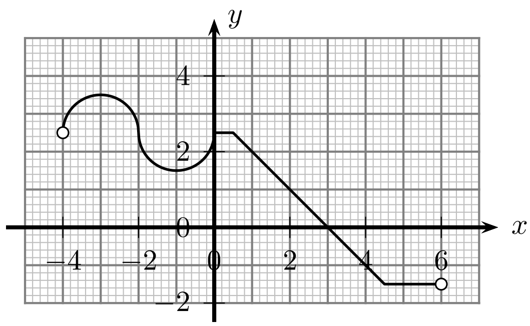
16.1.1. ábra.

Végezzük el az alábbi függvényérték-transzformációkat, s ez alapján vázoljuk a függvények grafikonját:

a) $y = f(x) - 3$; **b)** $y = f(x) + 2$; **c)** $y = 2f(x)$; **d)** $y = 0{,}5f(x)$;
e) $y = -f(x)$; **f)** $y = -3f(x)$; **g)** $y = |f(x)|$.

Mi az eredeti függvény értelmezési tartománya és értékkészlete? Mi az értelmezési tartománya és az értékkészlete a transzformált függvényeknek?

16.2. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvény képe látható.



16.2.1. ábra.

Végezzük el az alábbi függvényérték-transzformációkat, s ez alapján vázoljuk a függvények grafikonját:

a) $y = f(x - 1)$; **b)** $y = f(x + 5)$; **c)** $y = f(3x)$; **d)** $y = f(0{,}5x)$;
e) $y = f(-x)$; **f)** $y = f(-2x)$; **g)** $y = f(|x|)$

Mi az eredeti függvény értelmezési tartománya és értékkészlete? Mi az értelmezési tartománya és az értékkészlete a transzformált függvényeknek?

16.3. Ábrázoljuk az $x \longrightarrow -2|x+3|-4$ függvényt az alábbi 1– 5. transzformációs lépések sorozatával! (A 3., 4. lépések egyszerre is elvégezhetők.)

1.) $x \longrightarrow |x|$; **2.)** $x \longrightarrow |x+3|$; **3.)** $x \longrightarrow 2|x+3|$;
4.) $x \longrightarrow -2|x+3|$; **5.)** $x \longrightarrow -2|x+3|-4$.

16.4. Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az alábbi függvényeket!
a) $a(x) = 0{,}5|x+3|-5$, ha $x \in [-6; 2]$;
b) $b(x) = -\frac{1}{3}|x-2|+5$;
c) $c(x) = -3|x-3|+2$, ha $x \in [-1; 4]$.
Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete? Határozzuk meg a függvénygörbék tengelymetszeteit is!

16.5. Ábrázoljuk az $x \longrightarrow -2(x+3)^2+3$ függvényt az alábbi 1 - 5. transzformációs lépések sorozatával! (A 3. és 4. lépések egyszerre is elvégezhetők.)

1.) $x \longrightarrow x^2$; **2.)** $x \longrightarrow (x+2)^2$; **3.)** $x \longrightarrow 2(x+2)^2$;
4.) $x \longrightarrow -2(x+2)^2$; **5.)** $x \longrightarrow -2(x+2)^2+3$.

16.6. Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az alábbi függvényeket!
a) $a(x) = 0{,}5(x+3)^2-5$, ha $x \in [-6; 2]$;
b) $b(x) = -\frac{1}{3}(x-2)^2+5$
c) $c(x) = -0{,}2(x-3)^2-1$, ha $x \in [-4; 1]$;
d) $d(x) = 2x^2+3x-5$.
Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete? Határozzuk meg a függvénygörbék tengelymetszeteit is!

16.7. Ábrázoljuk a $x \longrightarrow -\frac{2}{x+2}+3$ függvényt az alábbi 1– 5. transzformációs lépések sorozatával! (A 3., 4. lépések egyszerre is elvégezhetők.)

1.) $x \longrightarrow \frac{1}{x}$; **2.)** $x \longrightarrow \frac{1}{x+2}$; **3.)** $x \longrightarrow \frac{2}{x+2}$; **4.)** $x \longrightarrow -\frac{2}{x+2}$;
5.) $x \longrightarrow -\frac{2}{x+2}+3$.

16.8. Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az alábbi függvényeket!
a) $a(x) = \frac{2}{x+3}-5$, ha $x \in [-5; 3]$; **b)** $b(x) = \frac{3}{x-2}+4$;
c) $c(x) = \frac{4}{2x-1}+3$, ha $x \in [-4; 2]$; **d)** $d(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.
Mi a függvények értelmezési tartománya és értékkészlete? Határozzuk meg a függvénygörbék tengelymetszeteit is!

16.9. Ábrázoljuk az $x \longrightarrow -2\sqrt{x-1}+3$ függvényt az alábbi 1 - 5. transzformációs lépések sorozatával! (A 3., 4. lépések egyszerre is elvégezhetők.)

1.) $x \longrightarrow \sqrt{x}$; **2.)** $x \longrightarrow \sqrt{x-1}$; **3.)** $x \longrightarrow 2\sqrt{x-1}$;
4.) $x \longrightarrow -2\sqrt{x-1}$; **5.)** $x \longrightarrow -2\sqrt{x-1}+3$.

16.10. Ábrázoljuk az $x \longrightarrow -3\sqrt{-2(x+1)}+5$ függvényt az alábbi transzformációs lépések sorozatával! (A 3., 4. valamint a 6., 7. lépések egyszerre is elvégezhetők.)

1.) $x \longrightarrow \sqrt{x}$; **2.)** $x \longrightarrow \sqrt{x+1}$;
3.) $x \longrightarrow \sqrt{2(x+1)}$; **4.)** $x \longrightarrow \sqrt{-2(x+1)}$;
5.) $x \longrightarrow 3\sqrt{-2(x+1)}$; **6.)** $x \longrightarrow -3\sqrt{-2(x+1)}$;
7.) $x \longrightarrow -3\sqrt{-2(x+1)}+5$;

16.11. Ábrázoljuk transzformációs lépések segítségével az alábbi függvényeket!

a) $a(x) = 3\sqrt{x+2} - 5$, ha $x \leq 14$;
b) $b(x) = -\sqrt{x-4} + 6$, ha $x \in [6; 10]$;
c) $c(x) = \sqrt{\frac{1}{3}(x+1)} - 2$;
d) $d(x) = -2\sqrt{6-2x} + 3$;

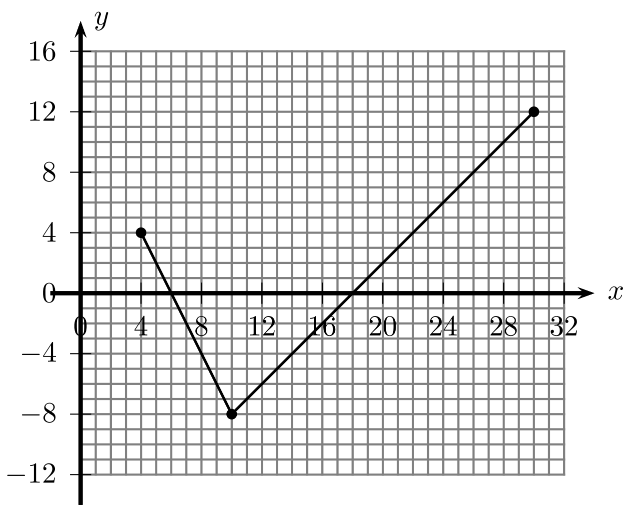
16.12. Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt, majd adjuk meg a függvény képének az egyenletét, ha az alábbi geometriai transzformációkat hajtjuk végre! (Minden esetben függvényt kapunk?)

a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
b) tengelyes tükrözés az y tengelyre;
c) középpontos tükrözés az origóra;
d) középpontos tükrözés a $(2; 1)$ pontra;
e) eltolás a $(3; 0)$ vektorral;
f) eltolás a $(0; -4)$ vektorral;
g) eltolás a $(3; -2)$ vektorral;
h) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
i) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
j) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
k) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
l) $\lambda = 3$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
m) $\lambda = -3$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
n) forgatás 90°-kal az origó körül;
o) forgatás $-90°$-kal a $(2; 1)$ pont körül.

16.13. Végezzük el a 16.12. feladat geometriai transzformációit az alábbi alapfüggvényekkel is:

a) $a(x) = |x|$;
b) $b(x) = \frac{1}{x}$;
c) $c(x) = \sqrt{x}$.

16.14. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvény képe látható. Végezzük el az alábbi geometriai transzformációkat, s ez alapján vázoljuk a függvények grafikonját!



16.14.1. ábra.

a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
b) tengelyes tükrözés az y tengelyre;
c) középpontos tükrözés az origóra;
d) középpontos tükrözés a $(2; 1)$ pontra;

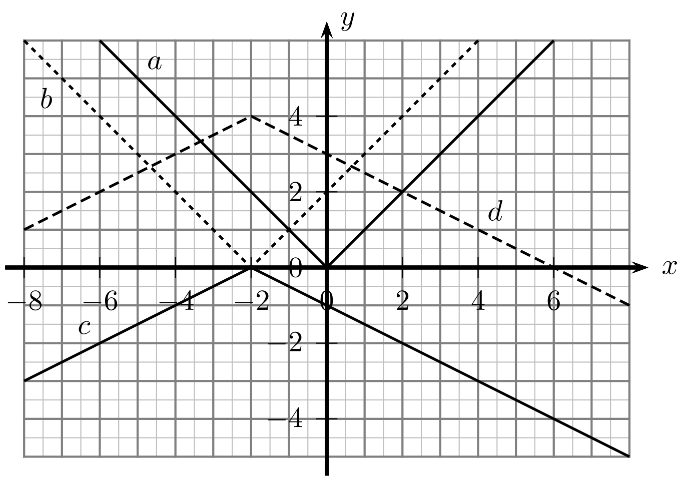
e) eltolás a $(3; 0)$ vektorral;
f) eltolás a $(0; -4)$ vektorral;
g) eltolás a $(3; -2)$ vektorral;
h) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
i) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges zsugorítás az x tengelyre;
j) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
k) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
l) $\lambda = -3$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
m) $\lambda = -3$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
Mi az eredeti függvény értelmezési tartománya és értékkészlete? Mi az értelmezési tartománya és az értékkészlete a transzformált függvényeknek?

16.15. Adjuk meg az $f(x) = x^2$ függvény képének az egyenletét $y = g(x)$ alakban az alábbi transzformációk elvégzése után.
a) $\lambda = 2$ arányú nagyítás az origóból;
b) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú kicsinyítés az origóból;
c) $\lambda = -3$ arányú nagyítás az origóból;
d) tengelyes tükrözés az $y = x$ egyenletű egyenesre.

16.16. Végezzük el a 16.15. feladat transzformációit az alábbi alapfüggvényekkel is:
a) $a(x) = |x|$; **b)** $b(x) = \frac{1}{x}$; **c)** $c(x) = \sqrt{x}$.

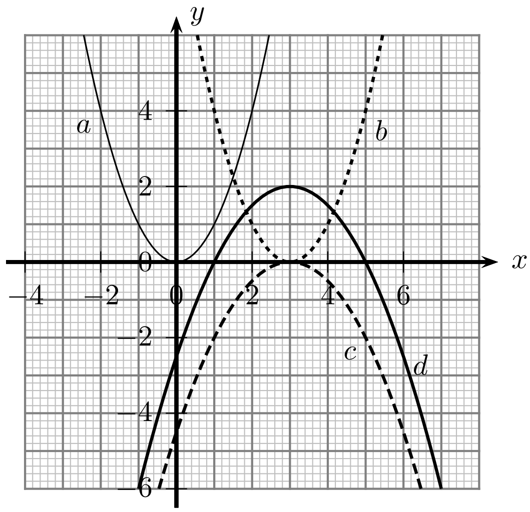
16.17. Adjuk meg az $f(x) = x^3$ függvény képének az egyenletét, ha a függvény grafikonján rendre az alábbi transzformációkat hajtjuk végre:
a) tengelyes tükrözés az y tengelyre;
b) eltolás a $(3; 2)$ vektorral;
c) középpontos tükrözés az $(1; 2)$ pontra;
d) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre.

16.18. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével ábrázoltuk. Határozzuk meg az $a - d$ függvényeket, s jellemezzük a végrehajtott transzformációs lépéseket! (Több megoldás is lehetséges, attól függően, hogy a függvény változóját, vagy a függvény értékét transzformáltuk.)



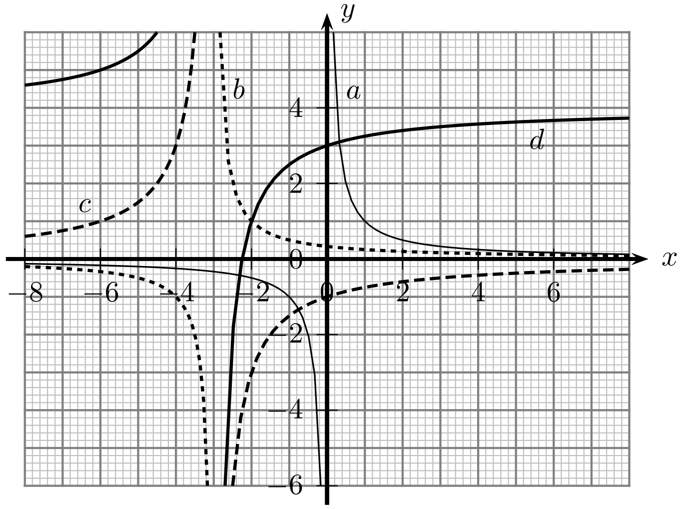
16.18.1. ábra.

16.19. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével ábrázoltuk. Határozzuk meg az $a - d$ függvényeket, s jellemezzük a végrehajtott transzformációs lépéseket! (Több megoldás is lehetséges, attól függően, hogy a függvény változóját, vagy a függvény értékét transzformáltuk.)



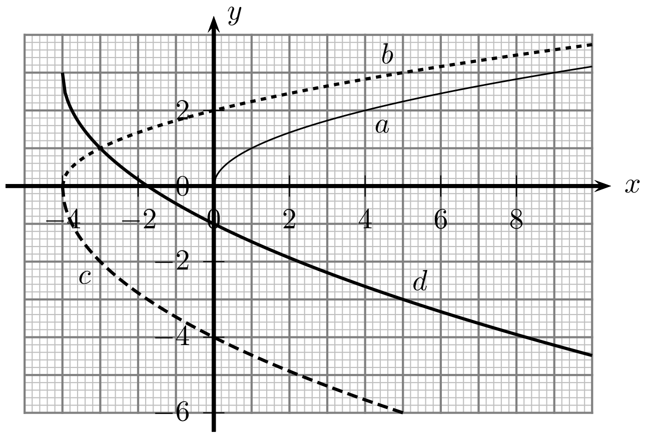
16.19.1. ábra.

16.20. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével ábrázoltuk. Határozzuk meg az $a - d$ függvényeket, s jellemezzük a végrehajtott transzformációs lépéseket! (Több megoldás is lehetséges, attól függően, hogy a függvény változóját, vagy a függvény értékét transzformáltuk.)



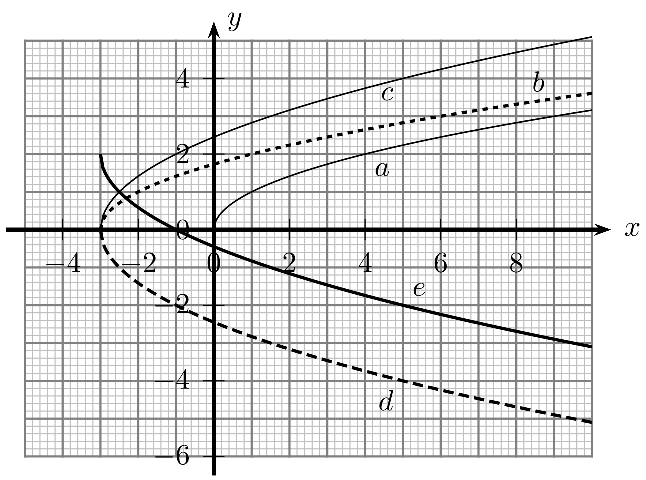
16.20.1. ábra.

16.21. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével ábrázoltuk. Határozzuk meg az $a - d$ függvényeket, s jellemezzük a végrehajtott transzformációs lépéseket! (Több megoldás is lehetséges, attól függően, hogy a függvény változóját, vagy a függvény értékét transzformáltuk.)



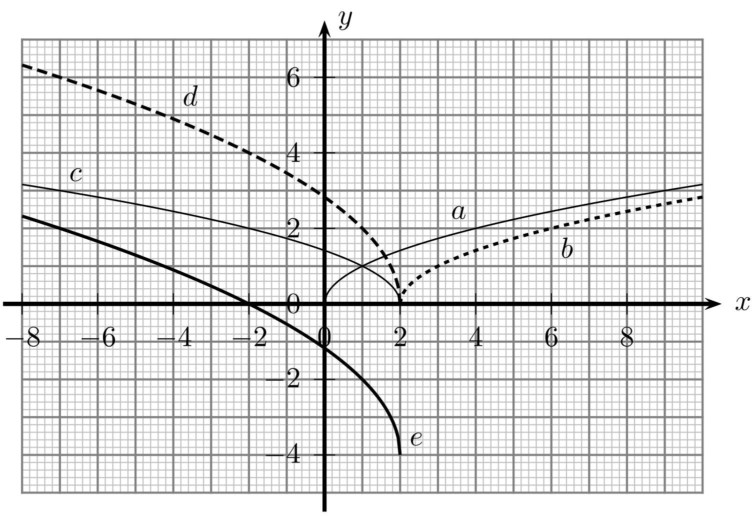
16.21.1. ábra.

16.22. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével ábrázoltuk. Határozzuk meg az $a - e$ függvényeket, s jellemezzük a végrehajtott transzformációs lépéseket! (A b és c lépésben a függvény változóját, a d és e lépésben a függvény értékét transzformáltuk.)



16.22.1. ábra.

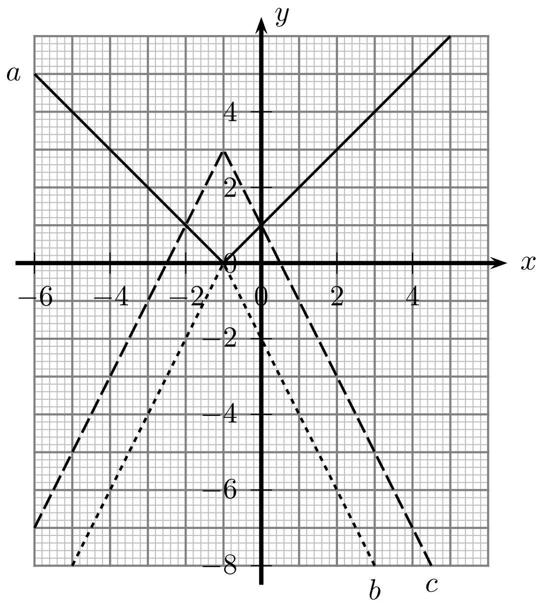
16.23. Az 1. ábrán az $y = f(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével ábrázoltuk. Határozzuk meg az $a - e$ függvényeket, s jellemezzük a végrehajtott transzformációs lépéseket! (A b és c lépésben a függvény változóját, a d és e lépésben a függvény értékét transzformáltuk.)



16.23.1. ábra.

17. FEJEZET
Függvénytranszformációk (teszt)

17.1. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben függvénytranszformációk segítségével megrajzoltuk az f függvény görbéjét. Melyik transzformációs lépések függvényei láthatók az 1. ábrán?



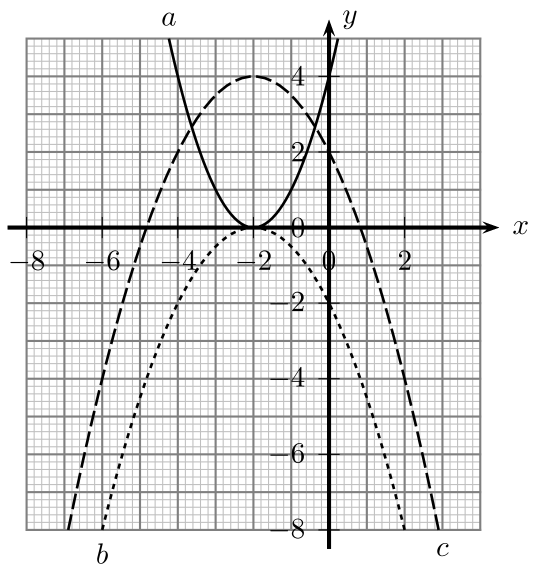
17.1.1. ábra.

A) $a(x) = |x-1|, b(x) = -|x-1|$ **B)** $a(x) = |x+1|, b(x) = -|x+1|$
C) $a(x) = |x+1|, f(x) = -2|x+1|+3$ **D)** $b(x) = -|x+1|, f(x) = -2|x+1|+3$
E) Egyik sem.

17.2. (M) A derékszögű koordináta-rendszerben függvénytranszformációk segítségével megrajzoltuk a g függvény görbéjét. Melyik transzformációs lépések függvényei láthatók az 1 ábrán?
A) $a(x) = (x-2)^2, b(x) = -(x-2)^2$ **B)** $a(x) = (x+2)^2, b(x) = -(x+2)^2$ **C)** $a(x) = (x+2)^2, g(x) = -0{,}5(x+2)^2$ **D)** $b(x) = -0{,}5(x+2)^2, g(x) = -(x+2)^2+4$ **E)** Egyik sem.

17.3. (M) Az $a(x) = |2x-4|+3$ és $b(x) = 2x^2-8x-10$ függvényeket – ábrázolás előtt – transzformációs alakra hozzuk úgy, hogy a függvénygörbe elemi transzformációs lépésekkel ábrázolható legyen. Az alábbi egyenletek a függvények transzformációs alakjaira vonatkoznak. Melyik egyenlet alakítható még tovább, egyszerűbben ábrázolható alakba?
A) $a(x) = 2|x-2|+3$ **B)** $b(x) = 2(x^2-4x-5)$ **C)** $b(x) = 2((x-2)^2-9)$ **D)** $b(x) = 2(x-2)^2-18$ **E)** Egyik sem érdemes már alakítani, elemi lépésekkel ábrázolható a függvény.

17.4. (M) A $c(x) = -\sqrt{8-4x}+3$ és $d(x) = \frac{2x+5}{x-1}$ függvényeket – ábrázolás előtt – transzformációs alakra hozzuk úgy, hogy a függvénygörbe elemi transzformációs lépésekkel ábrázolható



17.2.1. ábra.

legyen. Az alábbi egyenletek a függvények transzformációs alakjaira vonatkoznak. Melyik egyenletet nem érdemes már tovább alakítanunk, hogy egyszerűbben ábrázolható alakot kapjunk?
A) $c(x) = -\sqrt{-(4x-2)}+3$ **B)** $c(x) = -2\sqrt{2-x}+3$ **C)** $d(x) = \frac{2(x-1)+7}{x-1}$ **D)** $d(x) = 2 + \frac{7}{x-1}$ **E)** Mindegyiket érdemes még tovább alakítani.

17.5. (M) Mi lesz az $a(x) = |x|$ függvény képének az egyenlete, ha a függvénnyel rendre az alábbi (1) – (4) geometriai transzformációkat hajtjuk végre? (A sorrend rögzített.)

– (1) Eltolás a $(3; 0)$ vektorral;

– (2) $\lambda = 2$ arányú merőleges nyújtás (affinitás) az x tengelyre;

– (3) tengelyes tükrözés az x tengelyre;

– (4) eltolás a $(0; -4)$ vektorral.

A) $y = -0{,}5|x+3| - 4$ **B)** $y = -2|x-3| - 4$ **C)** $y = -0{,}5|x+3| + 4$
D) $y = 2|x-3| - 4$ **E)** Egyik sem.

17.6. (M) Mi lesz a $b(x) = x^2$ függvény képének az egyenlete, ha a függvénnyel rendre az alábbi (1) – (4) geometriai transzformációkat hajtjuk végre? (A sorrend rögzített.)

– (1) Eltolás a $(-3; 0)$ vektorral;

– (2) $\lambda = 0{,}4$ arányú merőleges zsugorítás (affinitás) az x tengelyre;

– (3) eltolás a $(0; 5)$ vektorral;

– (4) tengelyes tükrözés az x tengelyre.

A) $y = -0{,}4(x-3)^2 - 5$ **B)** $y = 0{,}4(-x-3)^2 + 5$ **C)** $y = -0{,}4(x+3)^2 + 5$
D) $y = -\left(0{,}4(x+3)^2 + 5\right)$ **E)** Egyik sem.

17.7. (M) Mi lesz a $c(x) = \sqrt{x}$ függvény képének az egyenlete, ha a függvénnyel rendre az alábbi (1) – (4) geometriai transzformációkat hajtjuk végre? (A sorrend rögzített.)

– (1) $\lambda = 0{,}5$ arányú merőleges zsugorítás (affinitás) az y tengelyre;

– (2) $\lambda = 2$ arányú merőleges nyújtás (affinitás) az x tengelyre;

– (3) eltolás a $(0;3)$ vektorral;

– (4) tengelyes tükrözés az x tengelyre.

A) $y = -\sqrt{8x} - 3$ **B)** $y = -2\sqrt{0{,}5x} + 3$ **C)** $y = -2\sqrt{0{,}5x} - 3$
D) $y = -2\sqrt{2x} + 3$ **E)** Egyik sem.

17.8. (M) Mi lesz a $d(x) = \frac{1}{x}$ függvény képének az egyenlete, ha a függvénnyel rendre az alábbi (1) – (4) geometriai transzformációkat hajtjuk végre? (A sorrend rögzített.)

– (1) Középpontos tükrözés az origóra;

– (2) eltolás a $(0;5)$ vektorral;

– (3) tengelyes tükrözés az y tengelyre;

– (4) eltolás a $(4;0)$ vektorral.

A) $y = 5 - \frac{1}{4-x}$ **B)** $y = -5 - \frac{1}{4-x}$ **C)** $y = \frac{1}{x-4} - 5$ **D)** $y = 5 - \frac{1}{x-4}$
E) Egyik sem.

17.9. (M) Az $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$ függvény képét eltoltuk a $v(-5;2)$ vektorral. Melyik g függvény képét kaptuk meg így?
A) $g(x) = 4 + \frac{1}{x-8}$ **B)** $g(x) = \frac{1}{x-8}$ **C)** $g(x) = 4 + \frac{1}{x+2}$ **D)** $g(x) = \frac{1}{x+2}$
E) Egyik sem.

17.10. (M) Az f függvény képét eltoltuk a $v(3;-2)$ vektorral, így a g függvény képét kaptuk. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) $D_f = D_g$.

– (2) $R_f = R_g$.

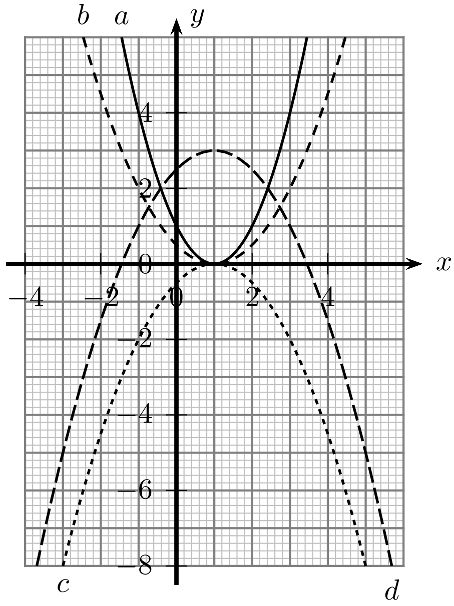
– (3) Ha $D_f = \mathbb{R}$, akkor $D_f = D_g$.

– (4) Ha $R_f = [-7{,}1; 5{,}3]$, akkor $R_g = [-9{,}1; 3{,}3]$.

– (5) Ha $D_f = [-5{,}4; 3{,}7]$, akkor $D_g = [-8{,}4; 0{,}7]$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

17.11. (M) Az $f(x) = |x-2| + 7$ függvény képére origó középpontú, $\lambda = -3$ arányú nagyítást alkalmaztunk. Mi az így kapott függvény képének az egyenlete?
A) $y = |x-2| + 21$ **B)** $y = |x+6| - 21$ **C)** $y = -|x-6| - 21$
D) $y = -|x+6| - 21$ **E)** Egyik sem.



17.12.1. ábra.

17.12. (M) Az $y = f(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével ábrázoltuk (lásd az 1 ábrát). Az a –d függvényekre vonatkozó alábbi állítások közül hány igaz?

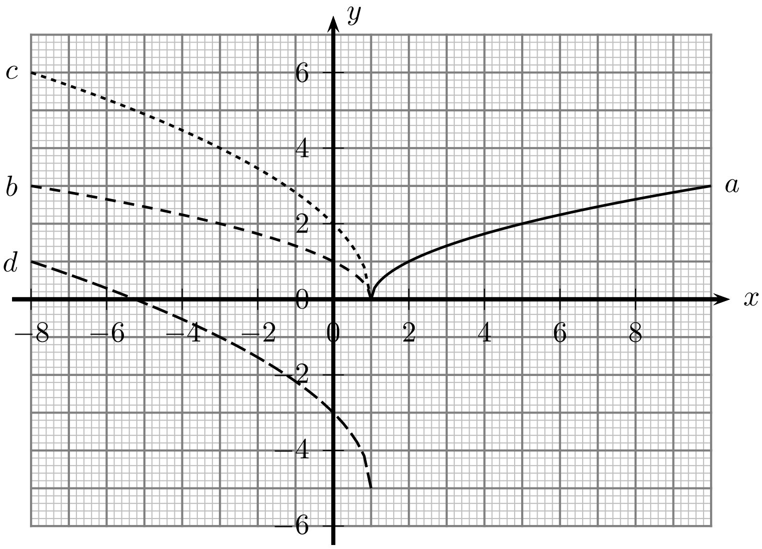
- (1) Az a és c függvénygörbék tükrös helyzetűek.
- (2) Az a és b függvénygörbék affin helyzetűek.
- (3) A b és d függvénygörbék egymás eltolásából származtathatók.
- (4) A b függvénygörbe az $y = x^2$ függvény képének eltoltja.
- (5) A c és d függvénygörbék egymás eltolásából származtathatók.
- (6) Az $y = x^2$ függvény képéből eltolással és affinitással származtatható c.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17.13. (M) Az $y = f(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével ábrázoltuk (lásd az 1 ábrát). Az a – d függvényekre vonatkozó alábbi állítások között hány hamis van?

- (1) Az a és b függvénygörbék affin helyzetűek.
- (2) Az a és b függvénygörbék tükrös helyzetűek.
- (3) A b és d függvénygörbék egymás eltolásából származtathatók.
- (4) A c és d függvénygörbék egymás eltolásából származtathatók.
- (5) Az a függvénygörbe az $y = \sqrt{x}$ függvény képének eltoltja.
- (6) $b(x) = \sqrt{1 - x}$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

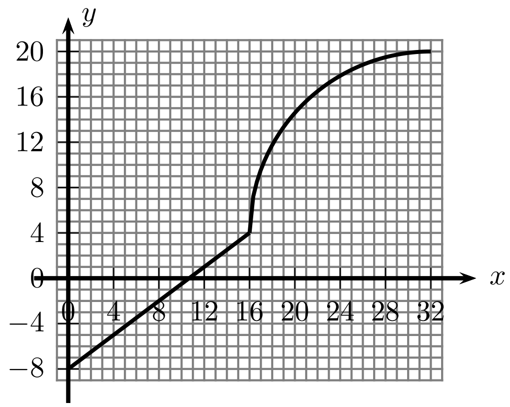


17.13.1. ábra.

18. FEJEZET

Összetett függvények

18.1. Az 1 ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható, értelmezési tartománya: $D_f = [0; 32]$.



18.1.1. ábra.

Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

a) $a(x) = |f(x)|$, $D_a = [0; 32]$; **b)** $b(x) = f(|x|)$, $D_b = [-32; 32]$;

c) $c(x) = |f(|x|)|$, $D_c = [-32; 32]$.

Mi az értékkészlete az így kapott függvényeknek?

18.2. Ábrázoljuk az összetett függvény ábrázolási módszerével az $f \circ g$ függvényt, ha $g(x) = x$ és

a) $f(x) = |x|$; **b)** $f(x) = x^2$; **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$; **d)** $f(x) = \sqrt{x}$;

e) $f(x) = [x]$; **f)** $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$.

18.3. Oldjuk meg a 18.2 feladatot, ha

a) $g(x) = x - 4$; **b)** $g(x) = -2x + 6$.

18.4. Ábrázoljuk az összetett függvény ábrázolási módszerével az $f \circ g$ függvényt, ha $g(x) = |x|$ és

a) $f(x) = x^2$; **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$; **c)** $f(x) = \sqrt{x}$; **d)** $f(x) = [x]$;

e) $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$.

18.5. Oldjuk meg a 18.4 feladatot, ha

a) $g(x) = |x - 4|$; **b)** $g(x) = |-2x + 6|$.

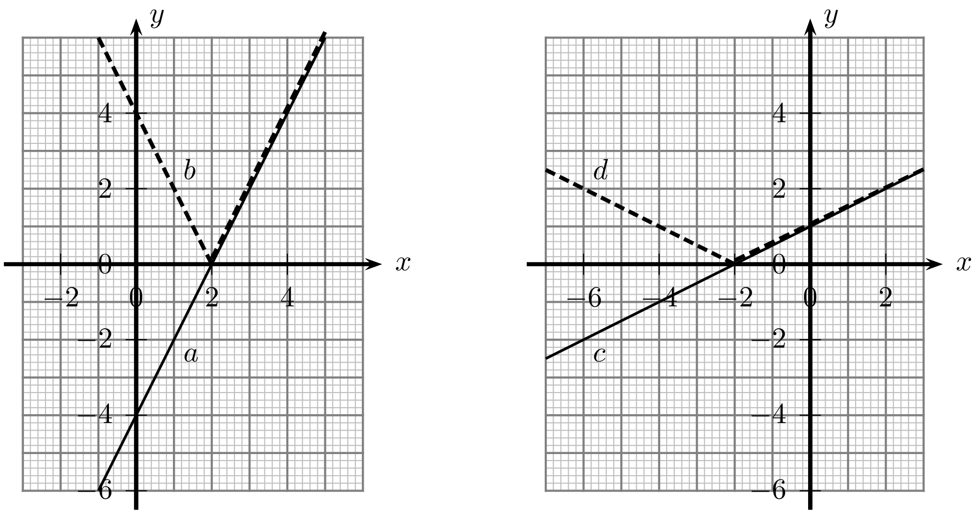
18.6. Ábrázoljuk összetett függvényként az alábbi függvényeket. Mit vehetünk észre?

a) $a(x) = |x|$; **b)** $b(x) = |-x|$; **c)** $c(x) = |3 - x|$; **d)** $d(x) = |x - 3|$;
e) $e(x) = x^2$; **f)** $f(x) = (-x)^2$; **g)** $g(x) = |x|^2$; **h)** $h(x) = (x - 3)^2$;
i) $i(x) = (3 - x)^2$.

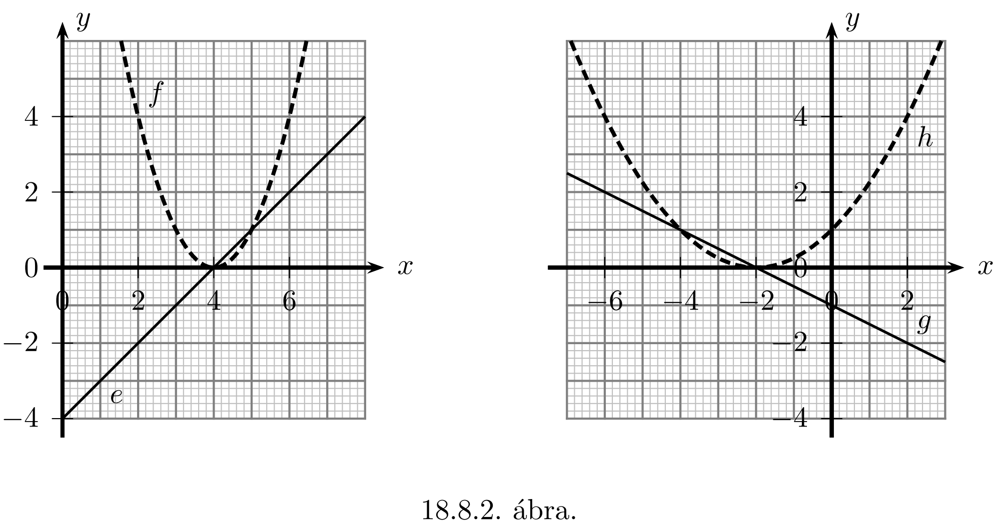
18.7. Írjuk fel az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvények hozzárendelési szabályát, határozzuk meg az értelmezési tartományukat és értékkészletüket, majd ábrázoljuk a függvényeket:

a) $f(x) = 3x - 1$; $g(x) = 2x + 5$;
b) $f(x) = |x|$; $g(x) = -2x + 4$;
c) $f(x) = x^2$; $g(x) = 3x - 1$;
d) $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = -x + 2$;
e) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -2x + 4$.

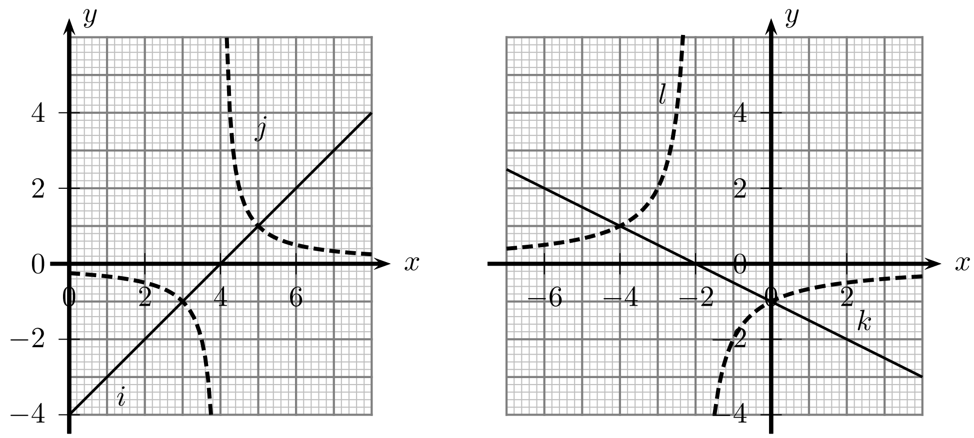
18.8. Az 1- 4 ábrákon a $b(x)$, $d(x)$, $f(x)$, $h(x)$, $j(x)$, $l(x)$, $n(x)$, $p(x)$ függvények grafikonját az összetett függvény ábrázolási módszerével készítettük el. Határozzuk meg az a–p függvényeket, s jellemezzük az ábrázolás lépéseit!



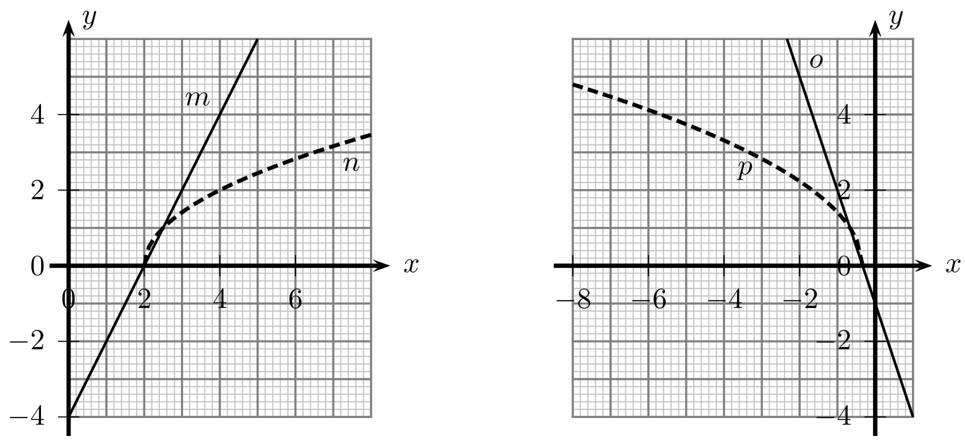
18.8.1. ábra.



18.8.2. ábra.



18.8.3. ábra.



18.8.4. ábra.

18.9. Írjuk fel az $f \circ (g \circ h)$ függvény hozzárendelési szabályát, s ábrázoljuk az így kapott függvényt az alábbi esetekben:

a) $f(x) = |x|$, $\quad g(x) = 2x - 3$, $\quad h(x) = x + 1$;
b) $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = |x|$, $\quad h(x) = x - 5$;
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad g(x) = |x|$, $\quad h(x) = 2x + 1$;
d) $f(x) = |x|$, $\quad g(x) = \frac{1}{x} + 2$, $\quad h(x) = x - 4$;
e) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $\quad g(x) = \frac{1}{x} + 2$, $\quad h(x) = x - 3$.

18.10. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, s ahol lehet, alkalmazzuk az összetett függvény ábrázolási módszerét:

a) $a(x) = \big||x| - 1\big|$; **b)** $b(x) = \Big|\big||x| - 1\big| - 1\Big|$;

c) $c(x) = \Bigg|\Big|\big||x| - 1\big| - 1\Big| - 1\Bigg|$;

18.11. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, s ahol lehet, alkalmazzuk az összetett függvény ábrázolási módszerét:

a) $a(x) = |x^2 - 6x + 5|$; **b)** $b(x) = |x^2 - 6|x| + 5|$; **c)** $c(x) = |x^2 + 6x + 8|$;
d) $d(x) = |x^2 + 6|x| + 8|$.

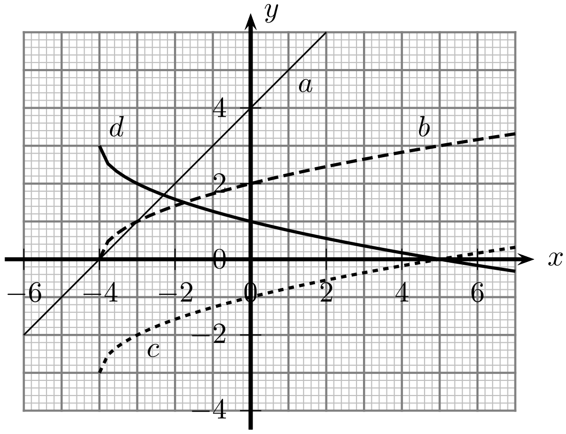
18.12. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, s ahol lehet, alkalmazzuk az összetett függvény ábrázolási módszerét:

a) $\left|\frac{1}{x-3}-2\right|$; **b)** $\left|\frac{1}{|x-3|}-2\right|$; **c)** $\left|\frac{1}{|x|-3}-2\right|$; **d)** $\left|\frac{1}{\big||x|-3\big|}-2\right|$.

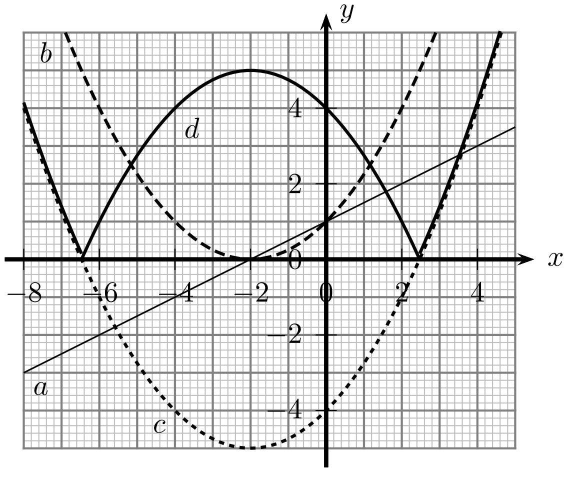
18.13. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, s ahol lehet, alkalmazzuk az összetett függvény ábrázolási módszerét:

a) $|\sqrt{x-2}|$; **b)** $\left|\sqrt{|x-2|}\right|$; **c)** $\left|\sqrt{|x|-2}\right|$; **d)** $\left|\sqrt{\big||x|-2\big|}\right|$.

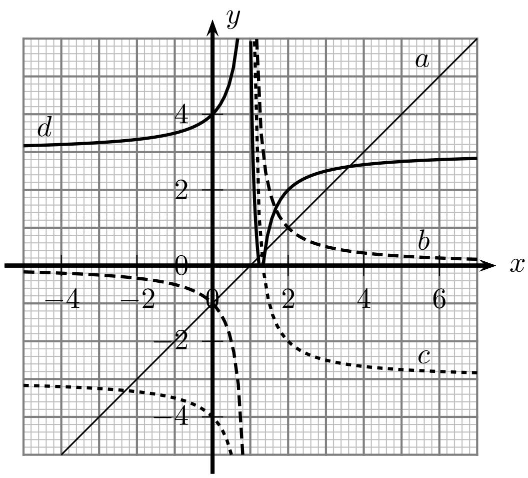
18.14. Az 1-3 ábrákon az $y = d(x)$ függvényt transzformációs lépések segítségével, illetve az összetett függvény módszerével ábrázoltuk. Határozzuk meg az a–d függvényeket, s jellemezzük a végrehajtott ábrázolási lépéseket mind a három esetben!



18.14.1. ábra.



18.14.2. ábra.



18.14.3. ábra.

19. FEJEZET

Összetett függvények (teszt)

19.1. (M) Tekintsük az $f(x) = x - 3$ és $g(x) = x^2 - 4$ függvényeket. Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) Az $f \circ g$ függvény hozzárendelési szabálya $x \longrightarrow (x-3)^2 - 4$.
- (2) A $g \circ f$ függvény hozzárendelési szabálya $x \longrightarrow x^2 - 6x + 5$.
- (3) $|f(-5)| = 2$.
- (4) Az $|g(x)|$ függvény értékkészlete $y \geq 0$.
- (5) Az $f(|x|)$ függvény -5 helyen felvett helyettesítési értéke $y = 2$.
- (6) $f(g(1)) = -6$.

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

19.2. (M) Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x+3}$ és $g(x) = 2x - 4$ függvényeket. Az alábbi állítások közül hány igaz?

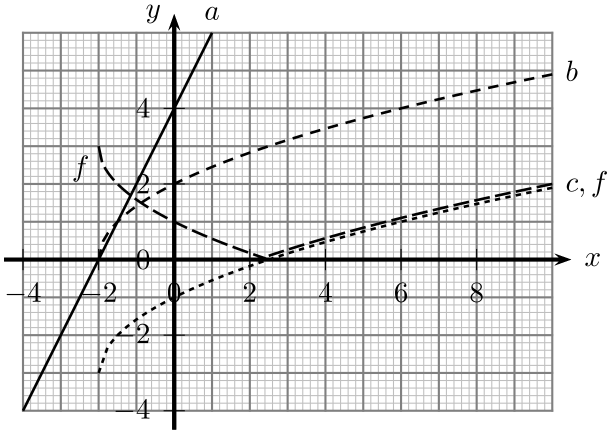
- (1) Az $f \circ g$ függvény hozzárendelési szabálya $x \longrightarrow \sqrt{2x-1}$.
- (2) A $g \circ f$ függvény hozzárendelési szabálya $x \longrightarrow 2\sqrt{x-1}$.
- (3) A $g \circ f$ függvény értékkészlete $y \geq -4$.
- (4) Az $f(|x|)$ függvény értelmezési tartománya $x \geq 0{,}5$.
- (5) $|f(x)| = f(x)$.
- (6) $g(f(1)) = 0$.

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

19.3. (M) Tekintsük az $f(x) = |x|$, $g(x) = 2x - 1$ és $h(x) = x + 3$ függvényeket. Az alábbi állítások közül hány hamis?

- (1) Az $f \circ (g \circ h)$ függvény hozzárendelési szabálya $x \longrightarrow |2x + 5|$
- (2) $f \circ (g \circ h) = f \circ (g \circ h)$.
- (3) Az $(f \circ g) \circ h$ függvény értékkészlete $y \geq 3$.
- (4) $f(h(g(2))) < g(h(f(-1)))$.
- (5) Van olyan x érték, amelyre $g(f(x)) > h(f(x))$, és olyan z érték is, amelyre $g(f(z)) <$ $< h(f(z))$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4



19.4.1. ábra.

19.4. (M) Az f függvény grafikonját transzformációs lépések segítségével, illetve az összetett függvény ábrázolási módszerével vázoltuk (lásd az 1 ábrát). Az a – c függvényekre vonatkozó alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) $b(x) = \sqrt{a(x)}$ ha $a(x) \geq 0$.

– (2) A b és c függvénygörbék egymás eltolásából származtathatók.

– (3) $c(x) = \sqrt{x+2} - 3$.

– (4) $f(x) = |c(x)|$.

– (5) $f(0) = 1$.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

19.5. (M) Az alábbi állítások az $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 2|x| - 3$ és $h(x) = |x^2 - 2|x| - 3|$ függvényekre vonatkoznak. Az állítások közül hány hamis?

– (1) $f(x) = g(x)$, ha $x > 4$.

– (2) Ha $f(x) = g(x)$, akkor $x > 4$.

– (3) Az f és g függvények minimum helye megegyezik.

– (4) Az f és g függvények minimuma megegyezik.

– (5) Van olyan x érték, amelyre $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

– (6) $R_h = [0; +\infty[$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

20. FEJEZET
Tulajdonságok, műveletek

Ahol külön nem jelezzük, ott a függvények értelmezési tartománya a valós számok lehető legbővebb részhalmaza.

20.1. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát!

a) $\sqrt{x+5}$; **b)** $-2\sqrt{3-x}+4$;

c) $\sqrt{x+5}-2\sqrt{3-x}+4$; **d)** $\sqrt{x+5}\cdot|-2\sqrt{3-x}+4|$;

e) $\sqrt{x+5}^2$; **f)** $\frac{\sqrt{x+5}}{-2\sqrt{3-x}+4}$;

g) $\sqrt{-2\sqrt{3-x}+4}$.

20.2. Adott három függvény:

$$f(x)=(x-3)(x-1)x, \quad g(x)=(x-3)x(x+2), \quad h(x)=(x-1)x(x+6).$$

Határozzuk meg az alábbi függvények zérushelyeit!

a) $f(x)+g(x)$; **b)** $f(x)+g(x)+h(x)$; **c)** $f(x)g(x)h(x)$;

d) $\frac{f(x)}{g(x)}$; **e)** $\frac{f(x)g(x)}{h(x)}$; **f)** $\frac{f(x)}{g(x)h(x)}$;

g) $f^2(x)+g^2(x)+h^2(x)$.

20.3. Az f és g függvények értelmezési tartománya D_f és D_g, zérushelyeik halmaza Z_f és Z_g. Mi az alábbi függvények értelmezési tartománya?

a) $c\cdot f$ $(c\in\mathbb{R})$; **b)** $f+g$; **c)** $f\cdot g$; **d)** $\frac{1}{f}$;

e) $\frac{f}{g}$.

20.4. Adottak az alábbi f és g függvények. Határozzuk meg az $u=f+g$ és $v=f\cdot g$ függvényeket, s vázoljuk közös koordinátarendszerben az f, g, u, v függvények grafikonját!

a) $f(x)=-2x+4$, $g(x)=x+1$;
b) $f(x)=|x-3|$, $g(x)=|x-4|$;
c) $f(x)=\sqrt{x-3}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$;
d) $f(x)=x^2$, $g(x)=2x$;
e) $f(x)=x$, $\frac{1}{x}$;
f) $f(x)=x^2$, $\frac{1}{x}$;

20.5. Adjuk meg az $x\longrightarrow -\frac{x}{2}+1$ függvény olyan leszűkítését, amelynek az értékkészlete

a) $[0;10]$;
b) $]-20;30]$;
c) az egész számok halmaza;
d) a természetes számok halmaza;
e) a racionális számok halmaza.

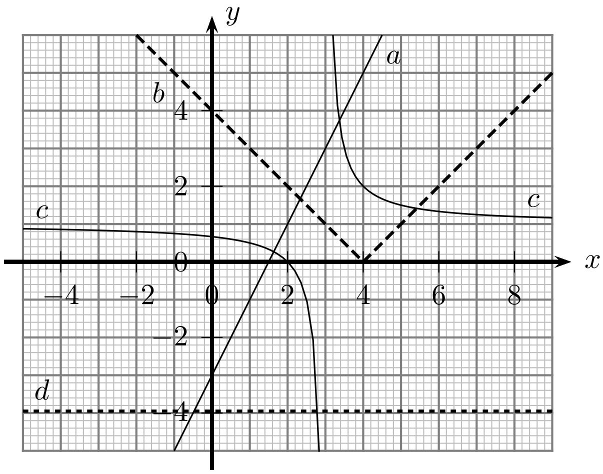
20.6. Adjuk meg a $x\longrightarrow -x^2+9$, $x\in[1;4]$ függvény egy olyan leszűkítését vagy kiterjesztését, amelynek az értékkészlete

a) $[-10;9[$; **b)** $[0;3]$; **c)** $]-\infty;-16]$.

20.7. Magyarázzuk meg, mit jelentenek az alábbi fogalmak! (Az f függvény az $]a;b[$ intervallumon értelmezett.)

a) f monoton növekvő;
b) f szigorúan monoton csökkenő;
c) f nem monoton csökkenő.

20.8. Melyik monoton növekvő, szigorúan monoton növekvő, monoton csökkenő és szigorúan monoton csökkenő az alábbi ábrán látható függvények közül?



20.8.1. ábra.

20.9. Értelmezési tartományuk melyik részhalmazán monoton növekvők, illetve monoton csökkenők az alábbi függvények? Melyik korlátos alulról, illetve felülről?

$a(x) = 2x + 4$; $b(x) = |2x + 4|,\ x \in [-3; 5]$; $c(x) = x^2 + 2x + 3$;

$d(x) = \sqrt{2x - 8}$; $e(x) = \frac{2}{x-3}$; $f(x) = \left|\frac{2x-1}{x-1}\right|$;

$g(x) = [x + 2]$.

20.10. Legyen f és g szigorúan monoton növekvő függvény, értékkészletük a pozitív valós számok részhalmaza. Mit állíthatunk monotonitás szempontjából az alábbi függvényekről?

a) $f + g$; **b)** $2f$; **c)** cf $(c \in \mathbb{R}^+)$; **d)** $-f$;

e) fg; **f)** $\frac{1}{f}$.

Szükséges-e a fenti esetek mindegyikében feltenni, hogy f és g értékkészlete a *pozitív* valós számok halmaza?

20.11. Oldjuk meg a 20.10 feladatot akkor is, ha f és g szigorúan monoton csökkenő!

20.12. Adjunk meg olyan függvényt, amelyik szigorúan monoton nő, értékkészlete $H =]-\infty; 2]$, és értelmezési tartománya

a) $\mathbb{R}$; **b)** $]-\infty; 10]$; **c)** $]-10; 10]$;

d) Oldjuk meg a feladatot – válaszoljunk az a)-c) esetek mindegyikére – akkor is, ha $H =]-2; 6]$!

20.13. Az alábbiakban az f és g függvényeket rendezett párok segítségével adtuk meg. Mi a függvények inverze?

a) $f : (1, 1), (2, 4), (3, 9)$; **b)** $g : (a, 3), (b, -2), (7, c)$.

20.14. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül?

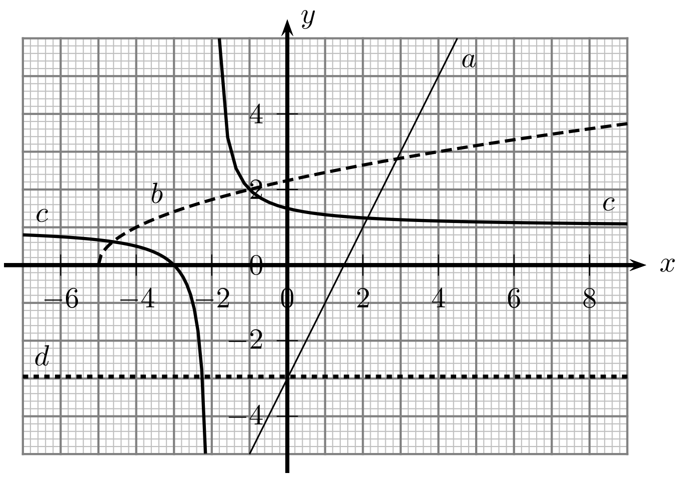
a) Ha egy függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor van inverze.
b) Ha egy függvény invertálható, akkor kölcsönösen egyértelmű.
c) Ha egy függvény szigorúan monoton növekvő, akkor van inverze.
d) Ha egy függvény monoton csökkenő, akkor van inverze.

20.15. Határozzuk meg az alábbi függvények inverzeit, majd ábrázoljuk a függvényeket és inverzüket ugyanabban a koordináta-rendszerben!

$a(x) = x + 5$; $b(x) = 2x - 5$; $c(x) = -2x + 1$;
$d(x) = |x + 5|$, $x \in [-3; 5]$; $e(x) = x^2 - 6x$, ha $x \geq 3$; $f(x) = \sqrt{2x - 3}$;
$g(x) = \frac{5}{x}$, ha $x \leq -1$;

Melyik függvény korlátos alulról, ill. felülről?

20.16. Mely függvények grafikonja látható az 1. ábrán? Határozzuk meg az a - d függvények képletét, adjuk meg inverzüket és ábrázoljuk az inverzfüggvények grafikonját!



20.16.1. ábra.

20.17. Adjunk meg néhány függvényt, melyek azonosak az inverzükkel! Mi jellemzi e függvények grafikonját?

20.18. Az alábbi lineáris függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

$a(x) = 0$; $b(x) = 5$; $c(x) = 2x$;
$d(x) = 2x + 1$; $h(x) = 5$, $x \in [-1; 4]$; $i(x) = -x$, $x \in [-1; 3]$.

20.19. Az alábbi abszolútérték-függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

$a(x) = |x|$; $b(x) = |x - 3|$; $c(x) = |x| - 3$;
$d(x) = |2x|$, $x \in [-4; 5]$.

20.20. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

$a(x) = x^2$; $b(x) = (x - 3)^2$; $c(x) = 2x^2 - 3$; $d(x) = \frac{1}{x}$;
$e(x) = -\frac{3}{x} + 2$; $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{|x|} - 3$; $h(x) = \sqrt{x^2} - 4$.

20.21. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

$a(x) = x^3$; $b(x) = \sqrt[3]{x}$;

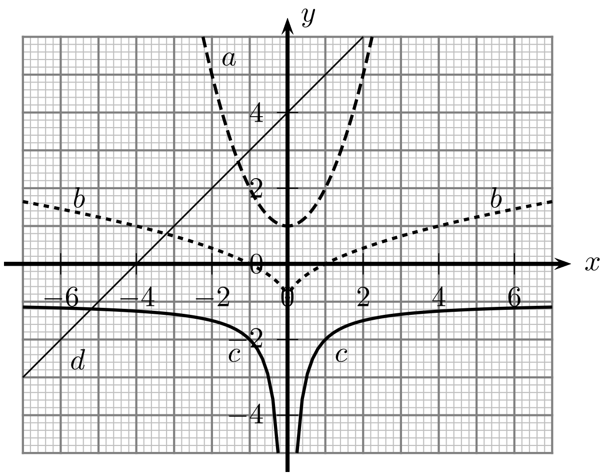
$c(x) = 2x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$; $d(x) = -3x^7 + 2x^5 - x^3 + 4x - 2$;

$e(x) = \frac{1}{x^2+1} - 3$; $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$.

20.22. Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?

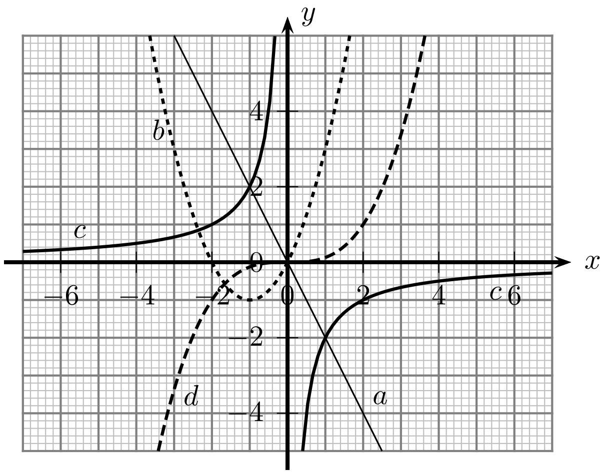
$a(x) = \sqrt{|x-3|}$; $b(x) = \sqrt{|x|-3}$; $c(x) = \frac{2x^2-7}{x^2+3}$; $d(x) = \frac{3|x|-4}{|x|+2}$.

20.23. Az a–d függvények grafikonja az 1. ábrán látható. A négy függvény közül melyek párosak?



20.23.1. ábra.

20.24. Az a–d függvények grafikonja az 1. ábrán látható. A négy függvény közül melyek páratlanok?



20.24.1. ábra.

20.25. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül?

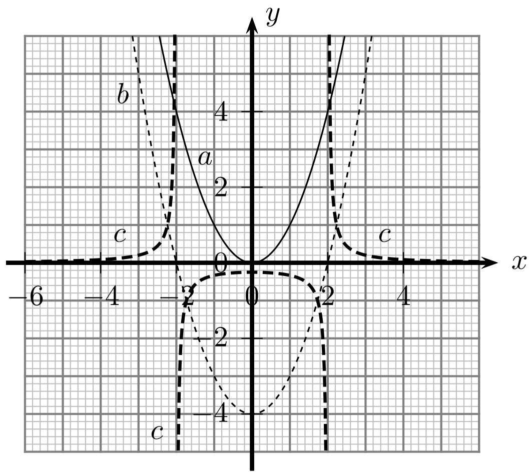
a) Ha egy f páratlan függvény az $x = 0$ helyen értelmezett, akkor $f(0) = 0$.

b) Ha egy páros függvény görbéje szimmetrikus az x tengelyre, akkor a függvény páratlan is.

c) Van olyan függvény, ami páros is és páratlan is.
d) Ha egy polinomfüggvényben csak páros kitevőjű tagok vannak, akkor a függvény páros.
e) Ha egy polinomfüggvényben csak páratlan kitevőjű tagok vannak, akkor a függvény páratlan.
f) Minden páros vagy páratlan függvény értelmezési tartománya szimmetrikus a 0-ra.
g) Van olyan páros és páratlan függvény is, amelyik értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
h) Ha egy f függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, akkor a függvény nem lehet sem páros, sem páratlan.

20.26. Legyen f és g páros függvény, $D_f = D_g$.
A) Az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan?
a) $2f$; **b)** $-f$; **c)** $3f - 2g$; **d)** $f \cdot g$; **e)** $\frac{1}{f}$;
f) $\frac{f}{g}$;
B) Mit állíthatunk a fenti a) - f) függvényekről, ha f páros és g páratlan függvény?
C) Mit állíthatunk a fenti a) - f) függvényekről, ha f és g is páratlan függvény (és egyik sem az azonosan 0 függvény, ill. annak valamilyen leszűkítése)?

20.27. Az 1. ábrán három lépésben ábrázoltuk az $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ függvényt. Mi az a - c függvények hozzárendelési szabálya?

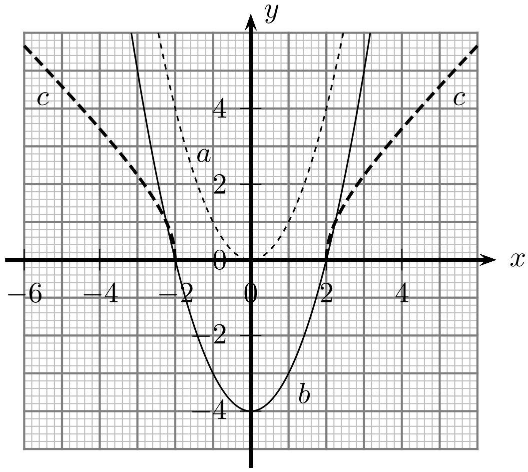


20.27.1. ábra.

20.28. A 20.27. feladatban látottakhoz hasonlóan ábrázoljuk lépésenként a következő függvényeket:
$a(x) = \frac{1}{x^2-1}$; $b(x) = \frac{1}{x^2-0{,}5}$; $c(x) = \frac{1}{x^2}$; $d(x) = \frac{1}{x^2+0{,}1}$; $e(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

20.29. Az 1. ábrán három lépésben ábrázoltuk az $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ függvényt. Mi az a - c függvények hozzárendelési szabálya?

20.30. A 20.29. feladatban látottakhoz hasonlóan ábrázoljuk lépésenként a következő függvényeket:
$a(x) = \sqrt{x^2-1}$; $b(x) = \sqrt{x^2}$; $c(x) = \sqrt{x^2+0{,}5}$; $d(x) = \sqrt{x^2+4}$;
$e(x) = \sqrt{|x^2-1|}$; $f(x) = \sqrt{|x^2-4|}$.



20.29.1. ábra.

20.31. A 20.29-a 20.30. feladatokhoz hasonlóan ábrázoljuk lépésenként a következő függvényeket:

$a(x) = \sqrt{1-x^2}$; $b(x) = \sqrt{4-x^2}$; $c(x) = \sqrt{9-x^2}$;

$d(x) = \sqrt{|4-x^2|}$; $e(x) = \sqrt{|(x-3)(8-x)|}$.

20.32. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ elsőfokú polinomfüggvény, hogy minden x-re

a) $f(x) + f(x+1) = 2x + 6$; **b)** $f(x+1) - f(x-1) = 10$;

c) $f(x+2) + f(x) = 12x$; **d)** $f(2x) + f(x+1) = 12x + 4$;?

Van-e megoldás akkor, ha $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény lehet (nem szükségképpen polinom)?

20.33. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy minden x-re

a) $f(x) - f(-x) = x + 1$; **b)** $f(x) - f(-x) = ax^2 + c$ $(a, c \in \mathbb{R})$;

c) $f(x-1) - f(1-x) = x$?

20.34. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy minden x-re

a) $2f(x) + 3f(1-x) = 6x - 1$; **b)** $2f(x) + 3f(2-x) = 2x - 7$;

c) $f(x) + (x+1)f(1-x) = 1$; **d)** $7f(x-1) + 5f(-x) = 12x - 10$;

e) $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 2$?

21. FEJEZET
Tulajdonságok, műveletek (teszt)

21.1. (M) Adott az $f(x) = -\sqrt{x+5}+1$ és $g(x) = 2\sqrt{x-3}$ függvény. Melyik hamis az alábbi állítások közül?

- (1) A $h = f \cdot g$ függvény értelmezési tartománya $x \geq 3$.
- (2) A $h = \frac{f}{g}$ függvény értelmezési tartománya $x > 3$.
- (3) A $h = \sqrt{f}$ függvény értelmezési tartománya $x \leq -4$.
- (4) $g^2(x) = 4(x-3)$.

A) (1) **B)** (2) **C)** (3) **D)** (4)
E) Egyik sem.

21.2. (M) Az f és g függvények értelmezési tartománya D_f és D_g, zérushelyeik halmaza Z_f és Z_g. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

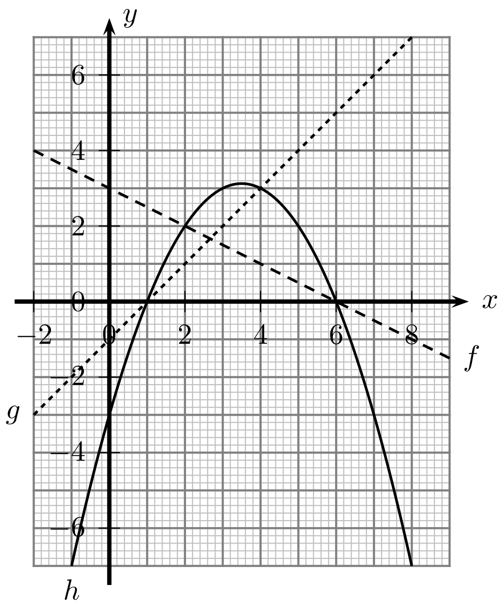
- (1) $c \cdot f$ zérushelyeinek halmaza Z_f (c tetszőleges konstans).
- (2) Az $f + g = 0$ egyenlet megoldásainak a száma $|Z_f| + |Z_g|$.
- (3) Az $f \cdot g = 0$ egyenlet megoldásainak a száma $|Z_f| + |Z_g|$.
- (4) $\frac{f}{g}$ zérushelyeinek halmaza $Z_f \setminus Z_g$.

A) (1) **B)** (2) **C)** (3) **D)** (4)
E) Egyik sem.

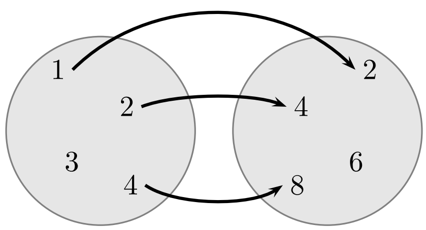
21.3. (M) Az 1. ábrán az f, g, h függvények képeit vázoltuk.
Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 2$.
- (2) $h = f \cdot g$.
- (3) Az $|f| = g$ egyenletnek 2 megoldása van.
- (4) Az f függvényt leszűkítjük a $[-0{,}5; +\infty[$ intervallumra. Az így kapott f' függvény értékkészlete megegyezik h értékkészletével.
- (5) Az $x \longrightarrow 2f(x) + g(x)$ függvény értékkészlete véges halmaz.
- (6) Az $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 1$ egyenletnek több, mint két megoldása van.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



21.3.1. ábra.



21.4.1. ábra.

21.4. (M) Adott az A és a B halmaz, $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$. Az f függvény az A halmaz minden elemének megfelelteti a B halmaz egy-egy elemét az 1. (hiányos) ábrának megfelelően.

A következő állítások közül hány hamis?

– (1) Ha $f(3) = 6$, akkor f monoton növekvő.

– (2) Ha f monoton növekvő, akkor $f(3) = 6$.

– (3) Ha $f(3) = 4$, akkor f nem szigorúan monoton növekvő.

– (4) Ha f invertálható, akkor $f(3) = 6$.

– (5) Ha egy g függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor van inverze.

– (6) Ha egy g függvénynek van inverze, akkor szigorúan monoton csökkenő.

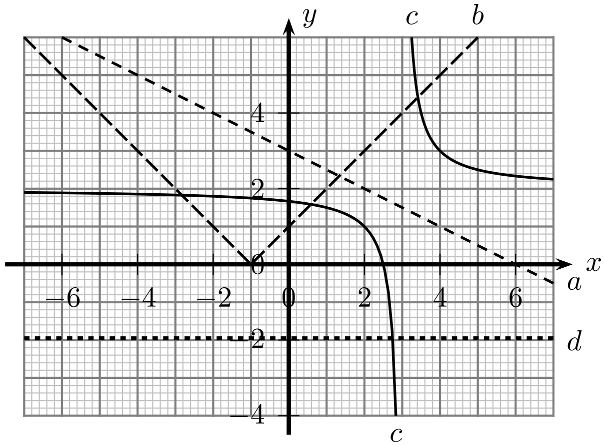
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

21.5. (M) Az 1. ábrán az a, b, c, d függvények képeit vázoltuk.

Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) Az a függvény szigorúan monoton csökkenő.

– (2) Ha $u < v < 0$, akkor az $[u; v]$ intervallumra leszűkített b függvény monoton csökkenő.



21.5.1. ábra.

- (3) A b függvényt valamely (tetszőleges) véges intervallumra leszűkítjük; az így kapott függvény korlátos.
- (4) A d függvény monoton növekvő.
- (5) Ha egy f függvény szigorúan monoton növekvő, akkor a $d \cdot f$ függvény is az.
- (6) Az $a + c$ függvény szigorúan monoton csökkenő a $]-\infty; 2]$ intervallumon.

A) 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

21.6. (M) A valós számhalmazon értelmezett $x \longrightarrow f(x)$ függvény szigorúan monoton nő, az ugyanott értelmezett $x \longrightarrow g(x)$ függvény szigorúan monoton csökken. Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) Az $a(x) = f(x) + 2$ függvény monoton nő.
- (2) A $b(x) = f(x)+g(x)$ függvény lehet szigorúan monoton csökkenő és szigorúan monoton növekvő is.
- (3) A $c \cdot g$ függvény szigorúan monoton csökkenő ($c \neq 0$).
- (4) Az $x \longrightarrow f^2(x)$ függvény szigorúan monoton nő.
- (5) A $d(x) = -2 \cdot f(x) + 3$ függvénynek nincs minimuma.
- (6) Az $e(x) = 3 \cdot g(x) - 5$ függvénynek nincs alsó korlátja.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

21.7. (M) Adott három függvény: $f(x) = 2x-1$; $g(x) = |x-1|$, ha $x > 0$; végül $h(x) = \sqrt{x-1}$. Az alábbi állítások közül hány hamis?

- (1) Az f függvény inverze $f^{-1}(x) = 0{,}5x + 1$.
- (2) g inverze nem létezik.
- (3) $h^{-1}(2) = 1$.
- (4) A g függvénynek van olyan leszűkítése, amelyen invertálható.

– (5) Ha $x > 0$, akkor az $f + g$ függvénynek van inverze.

– (6) A h és h^{-1} függvények görbéinek nincs közös pontja.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

21.8. (M) Az alábbi állítások közül melyik két állítás igaz?

– (1) Ha $f(0) = 2$, akkor f nem páratlan.

– (2) Ha egy p polinomfüggvényben szerepel páratlan kitevőjű tag, akkor p páratlan.

– (3) Ha egy f függvény véges számú, páros sok helyen értelmezett, akkor nem lehet páros.

– (4) Ha egy f páratlan függvény véges sok, páratlan számú helyen értelmezett, akkor $f(0) = 0$.

– (5) Ha egy függvény monoton növekvő, akkor nem lehet páros.

– (6) Ha egy függvény monoton növekvő, akkor nem lehet páratlan.

A) (1) és (2) **B)** (3) és (4) **C)** (5) és (6) **D)** (1) és (4) **E)** (2) és (5)

21.9. (M) Az alábbi állítások között hány igaz szerepel?

– (1) Az $a(x) = x2$, $x \in [-3; 4]$ függvény páros.

– (2) Ha f és g páratlan függvények, akkor $h = 2f - 3g$ is páratlan függvény.

– (3) Ha f páratlan, akkor f^2 páros függvény.

– (4) Ha f^2 páros függvény, akkor f vagy páros, vagy páratlan (de az egyik biztosan).

– (5) Ha f páratlan, akkor $|f|$ is az.

– (6) Ha $D_f = \mathbb{R}$, akkor az $x \longrightarrow (|x|)$ függvény páros.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

21.10. (M) Az alábbi állítások az $f(x) = x + 2$ és a $g(x) = x^2 - 4$ függvényekre vonatkoznak. Az állítások között hány igaz van?

– (1) $\frac{1}{f}$ képe hiperbola.

– (2) $\frac{g}{f}$ képe egyenes.

– (3) A g függvény leszűkítése a $[3; 100[$ intervallumra monoton csökkenő függvény.

– (4) Az $f \circ g$ és g függvények egymás eltoltjai.

– (5) Az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvények egymás eltoltjai.

– (6) Az $f^2 - g$ függvény egyetlen zérushelye $x = -2$.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

21.11. (M) Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ elsőfokú polinomfüggvényre teljesül, hogy minden x-re $f(x+2) + f(x) = 10x$. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

A) $f(x) = 2x - 2$. **B)** $f(2) = 4 + f(0)$.

C) $f(5) = 20$. **D)** Ilyen függvény nem létezik.

E) Egyik állítás sem igaz.

21.12. (M) Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ elsőfokú polinomfüggvényre teljesül, hogy minden x-re $f(x+1) - f(x-1) = 2c$ (ahol c valós paraméter). Melyik hamis az alábbi állítások közül?
A) Lehet $f(x) = cx - 1$ a függvény egyenlete. **B)** Lehet $f(x) = cx + 2c - 4$ a függvény egyenlete. **C)** Lehet, hogy $f(0) = 0$. **D)** Ilyen függvény nem létezik. **E)** Egyik állítás sem hamis.

21.13. (M) Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy minden x-re $f(x) - f(-x) = c$ (ahol c adott szám). Melyik hamis az alábbi állítások közül?
A) Alkalmas c esetén lehet $f(x) = k$ (konstans) a függvény egyenlete. **B)** Ha $c = 1$, akkor ilyen függvény nem létezik. **C)** Alkalmas c esetén bármely páros függvény lehet f. **D)** Ilyen függvény nem létezik. **E)** Egyik állítás sem hamis.

21.14. (M) Az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy minden x-re $2f(x) + 3f(1-x) = 6x - 5$. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

A) $f(x) = -6x + 2$. **B)** $f(0) = 2{,}5$.

C) $f(3) = f(5) - 10$. **D)** Ilyen függvény nem létezik.

E) Egyik állítás sem igaz.

22. FEJEZET

Grafikus megoldás

22.1. Határozzuk meg az alábbi egyenletek megoldásainak a számát, a megoldások konkrét előállítása nélkül!

a) $|x| = 2x + 1$; **b)** $|x + 2| = -3x - 6$; **c)** $\sqrt{-2x + 6} = 23x - 1$;
d) $\sqrt{-2x + 6} = x - 3$; **e)** $\sqrt{-2x + 6} = |x - 2|$; **f)** $x^2 - 6 = 100x$;
g) $x^2 = 111x + 222$; **h)** $(x - 2)^2 = |x + 1| - 1$; **i)** $\frac{3}{x-1} = -23x + 34$;
j) $\left|\frac{1}{x}\right| = -x + \sqrt{2}$;

22.2. Rajzoljuk meg a jobb ill.a bal oldalon látható függvény grafikonját és olvassuk le az egyenlőtlenség megoldását az ábráról!

a) $|2x - 4| \geq 2x + 4$; **b)** $\frac{1}{x} \leq x$; **c)** $\frac{1}{x} \geq \frac{x}{4}$;
d) $\left|\frac{1}{x}\right| > -x$; **e)** $\frac{1}{x} > |-4x|$; **f)** $\sqrt{-2x + 4} < x + 2$;
g) $\sqrt{-x + 3} \geq -|x| + 3$; **h)** $\sqrt{-x + 3} \geq |-x + 3|$.

22.3. Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenlet két gyöke u és v.
Hogyan látható ez a tény az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonján?
Milyen kapcsolat van a gyökök és a függvény szélsőérték helye között?

22.4. Ábrázoljuk az $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ függvényt, s a grafikon alapján állapítsuk meg az
a) $f(x) > 0$; **b)** $f(x) \leq 0$
egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

22.5. Adott az $f(x) = 2x^2+3x-5$ és a $g(x) = -x^2+2x-9$ függvény. Oldjuk meg az $f(x) \leq g(x)$ egyenlőtlenséget!

22.6. Hogyan függ a p valós paraméter értékétől az alábbi $f(x) = p$ egyenlet megoldásainak száma az alábbi esetekben?

a) $f(x) = |x - 1|$; **b)** $f(x) = ||x - 1| - 2|$;
c) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; **d)** $f(x) = |x^2 - 6x + 8|$;
e) $f(x) = x^2 - 6|x| + 8$; **f)** $f(x) = |x2 - 6|x| + 8|$;
g) $f(x) = \sqrt{-2x + 4}$; **h)** $f(x) = |\sqrt{-2x + 4} - 3|$;
i) $f(x) = \left|\sqrt{|-2x + 4|} - 3\right|$; **j)** $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$;
k) $f(x) = \left|\frac{2x-1}{x-1}\right| - 3$; **l)** $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+8}$;
m) $f(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{2-x}$;

22.7. Határozzuk meg a 22.6. feladatbeli a) - m) egyenletek megoldásainak számát akkor is, ha
a) $f(x) = px$; **b)** $f(x) = x + p$; **c)** $f(x) = -2x + p$!

22.8. Határozzuk meg az összes a, b valós számpárt, amelyre az $||x|+x-4| = ax+b$ egyenletnek végtelen sok megoldása van!

22.9. Határozzuk meg az alábbi $a-d$ kifejezések értékkészletét $(4 < n \in \mathbb{Z}^+)$!
$a(x) = |x-1|$;
$b(x) = |x-1| + |x-2|$;
$c(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$;
$d(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \ldots + |x-n|$.

22.10. Határozzuk meg a derékszögű koordináta-rendszerben azon $P(x;y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesülnek az alábbiak:
a) $|x| \cdot |y| \geq 0$;
b) $|xy| > 0$;
c) $|x-1| \cdot |y| = 1$;
d) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$;
e) $4x^2 - 4xy + y^2 - 9 = 0$.

22.11. Hány megoldása van az alábbi egyenletrendszereknek? (Válaszoljunk a megoldások konkrét előállítása nélkül!)
a) $2x + y = 3, \quad y = -2x + 4$;
b) $3x + 2y = 4, \quad 2x - y = 5$;
c) $x - 2y = 4, \quad 2x - 8 = 4y$.

22.12. Hogyan függ a p valós paraméter értékétől az alábbi a) - c) egyenletrendszerek megoldásainak száma?
a) $3x + y = 5, \quad y = -3x + p$;
b) $3x + y = 5, \quad y = px + 5$;
c) $3x + y = 5, \quad y = 2px - 4p - 1$.

22.13. Hogyan függ a p valós paraméter értékétől az alábbi a) - d) egyenletrendszerek megoldásainak száma?
a) $x^2 + y^2 = 4, \quad x + y = p$;
b) $x^2 + y^2 = p^2, \quad x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$;
c) $xy = 1, \quad x + y = p$;
d) $|x| + |y| = 4, \quad y = x + p$.

22.14. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket! (x, y valós számok.)
a) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-5} = 2$;
b) $\sqrt{9-x} + \sqrt{x-5} = 2$;
c) $\sqrt{x-10} + \sqrt{x-9} + \sqrt{x-5} = 3$;
d) $x^2 - 4 = \sqrt{x+4}$;
e) $\sqrt{2x-8} + \sqrt{x-3} + \sqrt{3x-11} = 2 - y^2$;
f) $x^2 + 1 = 2x - \sqrt{3-y}$;
g) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2 - y^2$;
h) $x + \frac{1}{x} = 2 - y^2$, ha $x > 0$.

22.15. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszert az egész számok halmazán!

$$x + 3y < 15, \qquad x + 2y > 14, \qquad 2x - y < 5.$$

22.16. **a)** Mi az $A = 2x + 3y$ kifejezés értékkészlete, ha az

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad x + 2y \leq 10, \qquad x + y \leq 6, \qquad x - 4 \leq 0$$

feltételek teljesülnek?
b) Mi a $2x - y = 3$ feltétel mellett a $B = x^2 + 2y^2$ kifejezés értékkészlete?
c) Mi az $x^2 + 4y^2 = 16$ feltétel mellett a $3x + y$ kifejezés értékkészlete?

22.17. Egy összejövetelre üdítőt és szendvicset vásárolunk, mindkettőből legalább nyolcat. Az üdítő 80 Ft-ba, a szendvics 60 Ft-ba kerül. Legfeljebb mennyit vásárolhatunk az egyes termékekből, ha 1800 Ft-unk van ezekre a költségekre?

22.18. Egy édességbolt tulajdonosa kétféle húsvéti csomagot akar összeállítani. 120 darab csoki tojás, 60 darab csoki nyuszi és 40 darab csoki bárány van a raktárban. Mindkét csomagba 5 darab csoki tojást, az egyikbe 3 csoki nyuszit és 1 bárányt (A csomag), a másikba 1 csoki nyuszit és 2 csoki bárányt (B csomag) tesz a tojások mellé.

a) Legfeljebb hány csomagot tud készíteni?

b) Ha az A csomagon 300 forint a haszna, a B csomagon 250 forint, akkor mekkora a legnagyobb haszon, amit el tud érni? Mennyit kell ehhez az egyes csomagokból készítenie?

22.19. Egy iskolai bulira kétféle szendvicset készítenek, sajtosat és sonkásat. Az elsőhöz darabonként 2 dkg sajtot, 3 dkg paprikát, 4 dkg kenyeret és 1 dkg vajat használnak fel. A sonkáshoz darabonként ugyanannyi kenyér és vaj kell, valamint 2 dkg sonka és 1 dkg sajt. Rendelkezésre áll 3 kg kenyér, öt darab 10 dkg-os vaj, 60 dkg sajt, 90 dkg sonka és 3 kg paprika.

a) Legfeljebb hány szendvics készíthető?

b) A sajtos szendvicset 160, a sonkásat 140 Ft-ért árulják. Melyikből mennyit készítenek, ha a tervezett bevétel a lehető legnagyobb?

c) Mennyibe kerüljön a sajtos szendvics (a sonkás ára marad 140 Ft), hogy csak az egyik fajtát legyen érdemes készíteni?

22.20. Egy gazdaságban az etetési program szerint egy-egy állatnak naponta az A tápanyagból legalább 45, a B tápanyagból legalább 60, a C tápanyagból legalább 5 dkg-ot kell kapnia. A vízfogyasztás közömbös. A gazdaságnak kétféle takarmánya van. Az első takarmány 10 dkg A, 10 dkg B tápanyagot és 80 dkg vizet, a második takarmány 10 dkg A, 20 dkg B, 5 dkg C tápanyagot és 65 dkg vizet tartalmaz kilogrammonként.

a) Milyen etetési program mellett lesz a költség minimális, ha az első takarmány ára 60 Ft/kg, a második takarmány ára pedig 240 Ft/kg?

b) Milyen program mellett lesz az etetési veszteség minimális, ha az első takarmánynál 10 %, a másodiknál 20 % a veszteség?

c) Van-e olyan program, amely mellett mind a két követelmény egyszerre érhető el, és mit kap ekkor egy állat?

22.21. Legyen $0 < a < b$. Mit állíthatunk az alábbi A, B kifejezések nagyságrendi viszonyáról?

a) $A = \frac{|a|+|b|}{2}$, $\quad B = \left|\frac{a+b}{2}\right|$;

b) $A = \frac{a^2+b^2}{2}$, $\quad B = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$;

c) $A = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$, $\quad B = \sqrt{\frac{a+b}{2}}$;

d) $A = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$, $\quad B = \frac{2}{a+b}$.

23. FEJEZET
Grafikus megoldás (teszt)

23.1. (M) Az alábbi egyenletek közül hánynak van egynél több megoldása?

(1) $|x+3| = 100x + 4$; (2) $\sqrt{x-3} = -x + 3$; (3) $\sqrt{-2x+4} = 100x$;

(4) $x^2 - 5 = 100x$; (5) $(x-1)^2 = |x-1|$; (6) $\frac{2}{x-5} = 100x + 100$;

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

23.2. (M) Az $f(x) = x^2 + bx + c = 0$ egyenlet két gyöke u és v $(u < v)$ Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) Az f függvény képe parabola.
- (2) Az f függvény egyik zérushelye u.
- (3) Az f kifejezésnek maximuma van.
- (4) Az f függvény szélsőérték helye $x = \frac{u+v}{2}$.
- (5) Ha $u < x$ vagy $x < v$, akkor $f(x) < 0$.
- (6) Az f függvény y tengelymetszete c-nél van.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

23.3. (M) Legyen $f(x) = x + 3$ és $g(x) = \sqrt{-2x+9}$. Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) Az $f(x) = g(x)$ egyenletnek egyetlen megoldása van.
- (2) Ha $x < -2$, akkor $f(x) < g(x)$.
- (3) Ha $f(x) < g(x)$, akkor $x < -2$.
- (4) Ha $f(x) > g(x)$, akkor $0 < x < 4{,}5$.
- (5) Ha $f(z) = g(z)$, akkor $f^2(z) = g^2(z)$.
- (6) Ha $f^2(z) = g^2(z)$, akkor $f(z) = g(z)$.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

23.4. (M) Adott az $f(x) = \left|(x-5)^2 - 6\right|$ függvény. Az alábbi állítások közül hány hamis?

- (1) Az $f(x) = p$ egyenletnek (p valós paraméter) lehet pontosan 3 megoldása.
- (2) Az $f(x) = f(0)$ egyenletnek 2 megoldása van.
- (3) Ha $p > 8$, akkor az $f(x) = p$ egyenletnek 2 megoldása van.
- (4) Ha az $f(x) = p$ egyenletnek 2 megoldása van, akkor $p > 8$.
- (5) Van olyan p érték, amelyre az $f(x) = p$ egyenletnek 5 megoldása van.
- (6) Van olyan p érték, amelyre az $f(x) = p^2$ egyenletnek nincs megoldása.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

23.5. (M) Adott az alábbi egyenletrendszer:
(1) $-4x + y = 2$, (2) $y = p^2x + p$.
Melyik állítás a hamis?
A) Ha $p = 1$, akkor az egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása. **B)** Ha $p > 0$, akkor az egyenletrendszernek van megoldása. **C)** Van olyan p érték, amelyre az egyenletrendszernek nincs megoldása. **D)** Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor $|p| \neq 2$. **E)** Egyik sem.

23.6. (M) A következő függvények közül hánynak van minimuma?

- (1) $x \in [-8; 2], a(x) = |x - 10|$
- (2) $x \in]-8; 2], b(x) = x^2 + 6x$
- (3) $x \in [-8; 2[, c(x) = -\frac{1}{x+10}$
- (4) $x \in]-8; 2[, d(x) = \sqrt{x + 10}$
- (5) $x \in]-8; 2], e(x) = -b(x)$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

23.7. (M) Tekintsük az $x^2 + 4 = 4x - \sqrt{3 - y}$ egyenletet. Az alábbi állítások közül melyik igaz? **A)** Az egyenletnek két megoldása van. **B)** Az egyenletnek végetlen sok megoldása van. **C)** Ha $(x; y)$ megoldás, akkor $x + y = 5$. **D)** Van olyan negatív x, amelyre az egyenletnek van megoldása. **E)** Egyik sem.

23.8. (M) Tekintsük a $\sqrt{x - 5} + \sqrt{x - 1} = y$ egyenletet. Az alábbi állítások közül hány igaz?

- (1) Ha $y < 0$, akkor nincs megoldás.
- (2) Ha nincs megoldás, akkor $y < 0$.
- (3) Ha $(x; y)$ megoldás, akkor $x \geq 5$.
- (4) Ha $y \geq 3$, akkor végtelen sok megoldás van.
- (5) Ha az $(x; y)$ megoldás egyértelmű, akkor $x + y = 7$.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

24. FEJEZET
Függvénykapcsolatok

24.1. A gyerekek súlyát az életkor függvényében az $s(x) = \frac{67{,}5x^2+4{,}5}{x^2+8x+1}$ (kg) közelítő képlet írja le, ahol x az életkor években. Mi lehet a függvény értelmezési tartománya?

24.2. A H halmazban lévő 20 szám átlaga 18,2. Hogyan változik a számok átlaga, ha egy további x számot hozzáveszünk a halmazhoz? Ábrázoljuk x függvényében a számok átlagát!

24.3. Két város távolsága 1200 km. A pihenők számától és hosszától függően egy autó legkevesebb 40 km/h és legfeljebb 100 km/h átlagsebességgel teheti meg az utat.

a) Milyen kapcsolat van az út megtételéhez szükséges idő és az átlagos sebesség között?

b) Ábrázoljuk az út megtételéhez szükséges időt az átlagsebesség függvényében!

24.4. Az úszómedencét két befolyó csövön keresztül tölthetjük meg vízzel. Az első csövön keresztül 6 óra, a második csövön keresztül 8 óra alatt telik meg a medence.

a) Határozzuk meg, hogyan függ az egyes esetekben a medencében levő víz magassága a töltési időtől! (A medencében általában 160 cm-es víz van.)

b) Határozzuk meg a vízmagasság - idő függvénykapcsolatot, ha mindkét csövet kinyitjuk! Mennyi idő alatt telik meg a medence?

c) Ábrázoljuk az egyes esetekben a vízmagasság - idő függvényt! Egyenes arányosságot kaptunk?

24.5. Egy 12 cm magas gyertya 6 óra alatt, egy 9 cm-es gyertya 9 óra alatt ég el. Egyszerre meggyújtjuk mindkét gyertyát, amelyek ezután egyenletesen égnek (fogyásuk egyenletes).

a) Ábrázoljuk a gyertyák magasságát az eltelt idő függvényében!

b) Meggyújtásuk után hány perccel lesz kétszer akkora az egyik gyertya, mint a másik?

c) Adjunk választ az előző feladatokra abban az esetben is, ha az első gyertyát 2 órával a második után gyújtjuk meg!

d) Az azonos anyagú gyertyák egységnyi hosszának égési ideje közelítőleg egyenesen arányos a keresztmetszetükkel. Mekkora a két gyertya keresztmetszetének aránya?

24.6. A szilvának $v = \frac{4}{5}$ része víz, az aszalt szilvának már csak $w = \frac{2}{5}$ része. 100 kg aszalt szilvát készítünk.

a) Hány kilogramm nyers szilvát használunk fel ehhez?

b) Hogyan függ a felhasználandó nyers szilva mennyisége v-től?

c) Hogyan függ a felhasználandó nyers szilva mennyisége w-től?

24.7. $p = 10\%$-os árleszállítás után egy könyv eladásán $h = 8\%$ a haszon. A könyv x árától függően határozzuk meg, hogy

a) hány százalékos a könyvesbolt haszna árleszállítás előtt;

b) hogyan függ a könyv önköltsége p-től és h-tól; valamint, hogy

c) hogyan függ p-től és h-tól a haszon?

24.8. Egy pontszerű test kezdetben a koordinátarendszer $(a;0)$ pontjában van. Ezután a test v (egyenletes) sebességgel halad az x tengely pozitív irányába. Mekkora a test távolsága t idő múlva

a) az origótól; **b)** a $(12;0)$ ponttól; **c)** a $(b;0)$ ponttól?

24.9. Két pontszerű test egyenletes sebességgel halad a koordinátarendszer x tengelyén. Kezdeti helyzetük $(a;0)$, illetve $(b;0)$; sebességük v, illetve w. Mekkora a testek távolsága t idő múlva, ha

a) mindkét test az x tengely pozitív irányába halad;
b) mindkét test az x tengely negatív irányába halad;
c) a testek ellentétes irányban haladnak?

24.10. **a)** Egy útkereszteződésből egyszerre, két különböző irányban induló, egyenletes sebességgel haladó autók távolsága egy óra elteltével 20 km. Mekkora az autók távolsága 2, 3, 4, ..., t óra elteltével?

b) A kiindulási helyzetet annyiban változtatjuk meg, hogy az egyik autó sebességét a kétszeresre növeljük, s így az autók távolsága egy óra elteltével 30 km lett. Mekkora az autók távolsága 2, 3, 4, ..., t óra elteltével?

24.11. 50 km/h sebességgel haladó személygépkocsi fél perc alatt 120 km/h sebességre gyorsul fel. Mekkora utat tesz meg ez alatt az idő alatt? Ábrázoljuk a jármű mozgását az út-idő grafikonon! (A gyorsulás egyenletes.)

24.12. A föld felszínéről kilőtt lövedék levegőben megtett röppályáját a $h(x) = x - 0{,}1x^2$ függvény grafikonja írja le. (A függvény a felszíntől mért magasságot adja meg a vízszintes elmozdulás függvényében.)

a) Mi függvény értelmezési tartománya?
b) Mekkora a lőtávolság?
c) Mekkora a lövedék által elért legnagyobb magasság?
d) Ábrázoljuk a függvényt!

24.13. Egy autó gyorsulása útjának első 10 másodpercében $a_1 = 2\ \mathrm{m/s^2}$, majd a következő 10 másodpercben $a_2 = 4\ \mathrm{m/s^2}$ volt.

a) Mekkora utat tett meg ez alatt az autó?
b) Ábrázoljuk a jármű mozgását az út-idő grafikonon!
c) Mekkora volt az autó átlagos gyorsulása?
d) Oldjuk meg az a) - c) feladatot akkor is, ha az autó 100 méteres útszakaszon haladt $a_1 = 2\ \mathrm{m/s^2}$, majd a következő 100 méteren $a_2 = 4\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással!

24.14. Két egyenletes sebességgel haladó autó mozgását modellezzük. A modell alapján az első autó a koordinátarendszer $(0;0)$ pontjából indul, az x tengely pozitív irányába halad, és percenként 3 egységnyi utat tesz meg. A másik autó a $(0;12)$ pontból indul, az $y = \frac{4}{3}x + 12$ egyenletű egyenesen halad (távolodva az x tengelytől), és percenként 5 egységnyi utat tesz meg. Mekkora a két autó távolsága t perc múlva?

24.15. Pattogó labda földfelszíntől mért magasságát vizsgáljuk az idő függvényében. Egy modellben a labda minden ütközésnél sebessége 20 %-át elveszti. (A közegellenállástól eltekintünk, $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással számolunk, és az ütközések időtartamát nagyon rövidnek tételezzük fel (elhanyagoljuk)).

a) Ábrázoljuk a magasság-idő grafikonon a labda mozgását! (A labda kezdeti ejtési magassága 1 méter.)

b) Hányat pattan a labda? (A labda a földről már nem emelkedik fel, ha középpontja kevesebb, mint 5 cm-re van a felszíntől.)

24.16. Egy adatbankban N adat rendezéséhez szükséges idő az (1) és (2) eljárásban az alábbi:
(1) $t = 0{,}0001N^3 + 0{,}0002N$;
(2) $t = 0{,}002N^2 + 0{,}004N$.

Nagy N értékekre a (2) eljárás a gyorsabb. Mely $N \leq 2$ értékekre gyorsabb az (1) módszer?

24.17. Egy 10 cm $\times$ 10 cm méretű négyzet alakú kartonlap sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, s a papírból felül nyitott dobozt készítünk; jelöljük x-szel a levágott négyzetek cm-ben mért oldalának hosszát.

a) Határozzuk meg a doboz térfogatát x függvényében!

b) Ábrázoljuk az így kapott függvényt!

c) Mi a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

d) Mekkorának válasszuk x-et, hogy a doboz térfogata 62 cm^3 legyen?

e) Oldjuk meg az a) - d) feladatokat akkor is, ha a kartonlap kezdetben 10 cm $\times$ 20 cm méretű téglalap alakú!

24.18. Egy négyzet oldala 20 cm. Mennyivel csökkentsük az egyik oldalt, és növeljük ugyanannyival a vele szomszédos másik oldalt, hogy az így kapott téglalap területe

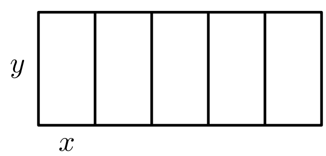
a) 360 cm^3;

b) 420 cm^3 legyen?

c) Hogyan függ a keletkezett téglalap kerülete és területe a változtatás x nagyságától?

d) Oldjuk meg az a) - c) feladatokat akkor is, ha az egyik oldalt x cm-rel csökkentjük, a vele szomszédos másik oldalt pedig $2x$ cm-rel növeljük. Hogyan függ ekkor x-től a keletkezett téglalap kerülete és területe? Ábrázoljuk az így kapott függvényeket, s határozzuk meg az értékkészletüket!

24.19. Egy téglalapot az 1. ábra szerint öt egybevágó részre osztottunk.



24.19.1. ábra.

a) Adjuk meg a téglalap k kerületét x függvényeként, ha területe 1200 m^2! Ábrázoljuk az így kapott függvényt, s határozzuk meg értékkészletét!

b) Adjuk meg a téglalap t területét y függvényeként, ha kerülete 1200 m! Ábrázoljuk az így kapott függvényt is, s határozzuk meg értékkészletét!

24.20. A folyóparton 120 m hosszú kerítéssel téglalap alakú területet kerítünk be három oldalról (a negyedik oldal a folyópart). A téglalap parttal párhuzamos oldalának hosszát jelöljük a-val, a partra merőleges oldalak hosszúságát b-vel!

a) Adjuk meg a területet nagyságát a, illetve b függvényében!

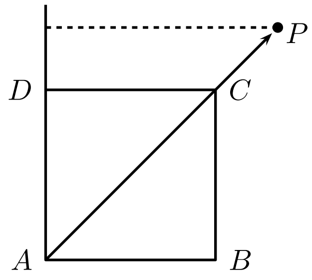
b) Hogyan válasszuk meg az a, b oldalak hosszúságát, hogy a bekerített terület a lehető legnagyobb legyen?

24.21. Az $ABCD$ négyzet oldala 20 cm hosszúságú. Egy P pont az 1. ábra szerinti AC egyenesen A-tól és C-től távolodva mozog v sebességgel úgy, hogy kezdetben a C pontban van.

Határozzuk meg az ABP háromszög kerületét és területét

a) az eltelt idő függvényében;

b) a P pontnak az AD egyenestől mért távolsága függvényében!



24.21.1. ábra.

24.22. Oldjuk meg a 24.21. feladathoz hasonló példát: $BAC\angle = 60°$, $AB = 20$ cm, és a P pont az AC egyenesen A-tól és C-től távolodva mozog v sebességgel úgy, hogy kezdetben a C pontban van. Határozzuk meg az ABP háromszög kerületét és területét

a) az eltelt idő függvényében;

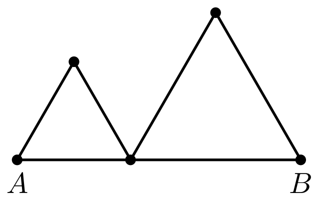
b) a P pontnak az AB egyenestől való távolsága függvényében!

24.23. Két autó mozgását a derékszögű koordinátarendszerben modellezhetjük. Ebben a modellben az A, B és C városok koordinátái $A(-7;2)$, $B(2;-9)$ és $C(8;9)$. A $t=0$ időpillanatban elindul A-ból egy autó, melynek sebességvektora $(2;1)$. A $t=2$ időpillanatban elindul egy másik autó B-ből C felé $\sqrt{40}$ egységnyi sebességgel. Határozzuk meg, hogy mely pontokban lesznek az autók

a) $t = 11$ időegység múlva;

b) akkor, amikor legközelebb kerülnek egymáshoz!

24.24. A 40 cm hosszú AB szakasz fölé rajzoljunk az 1. ábra szerint két szabályos háromszöget.



24.24.1. ábra.

Hogyan függ a két háromszög területének összege az első háromszög oldalának a hosszától? Hogyan válasszuk meg a háromszögek oldalainak hosszát, hogy területük összege

a) minimális; **b)** maximális

legyen?

24.25. Oldjuk meg az előző feladatot, ha a szabályos háromszögek helyett

a) két négyzetet; **b)** két félkört

írunk a szakaszok fölé!

24.26. Egy madár a föld felett h_1 magasságban állandó nagyságú és vízszintes irányú c sebességgel repül egy – a földhöz viszonyítva – h_2 magasságban lévő lámpa alatt.

a) Mekkora v sebességgel mozog a madár árnyéka a földön?

b) Ábrázoljuk a v sebességet c; majd h_1; végül h_2 függvényében!

24.27. Egyenlő szárú háromszög szárainak hossza 10 cm. Jelöljük a (változó) alap hosszát a-val, a hozzá tartozó magasságot m-mel, a szárak által bezárt szöget α-val, s fejezzük ki az $s = a+m$ összeget

a) a-val; **b)** m-mel; **c)** α-val!

d) Határozzuk meg az s függvény értékkészletét! Milyen a, m, α értékekre lesz s a lehető legnagyobb?

24.28. Határozzuk meg, hogyan függ a szabályos n-szög kerülete és területe a körülírt kör R sugarától az alábbi esetekben:

a) $n = 3$; **b)** $n = 4$; **c)** $n = 6$; **d)** $n = 8$; **e)** $n = 12$.

24.29. O középpontú, egységnyi oldalú szabályos n-szög kerületén állandó v sebességgel mozog egy P pont. Határozzuk meg az OP távolság időfüggését, ha a P pont a sokszög csúcsából indul, és

a) $n = 3$; **b)** $n = 4$; **c)** $n = 6$; **d)** $n = 8$; **e)** $n = 12$.

24.30. Egy $ABCD$ biliárd játékasztal méretei: $AB = 1{,}5$ m, $BC = 2{,}5$ m. Az asztal közepén lévő golyót a hosszabbik BC fal irányába lökjük $v = 3$ m/s sebességgel úgy, hogy ütközéskor a beesési szög 30°. Adjuk meg a golyó és a BC fal távolságát az idő függvényében, ha a golyó

a) egyenletes sebességgel gurul (idealizált eset);

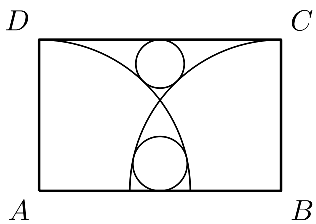
b) $a = 0{,}1$ m/s^2 egyenletes lassulással halad!

24.31. Egy kockacukor mindegyik éle $a = 1$ cm hosszúságú. A kockacukrot $V = 20$ cm^3 térfogatú vízbe tesszük, melyet folyamatosan keverünk. Így másodpercenként $h = 0{,}4$ mm vastag réteg oldódik le a kockacukor mindegyik oldalfelületről. Hogyan függ az eltelt időtől

a) a megmaradt kocka térfogata;

b) az oldat százalékos cukortartalma?

24.32. Az $ABCD$ téglalap oldalai$AB = a = 16$ cm és $BC = b = 10$ cm. Az A és B középpontú negyedkörívek a téglalap területét négy részre osztják (lásd az 1. ábrát).



24.32.1. ábra.

a) Mekkora ezen részek területe?

b) A 3 csúcsú részekbe az ábra szerint egy-egy további, belső érintőkört rajzolunk (ezek tehát érintik az AB, illetve CD oldalakat, valamint a két negyedkörívet). Mekkora ezen érintőkörök x és y sugara?

c) Mekkora területű részekre osztják az érintőkörök a téglalap területét?

d) Ha a $BC = b$ oldalt rögzítjük, s az $AB = a$ oldalt változtatjuk ($b \leq a$), milyen a/b arány esetén teljesül az $x = y$ egyenlőség?

24.33. Az x, y valós számokhoz az $M(x;y) = \frac{|x-y|+x+y}{2}$ utasítással rendelünk értéket. Hogyan adhatjuk meg egyszerűbben ezt a kétváltozós függvényt?

24.34. Az a, b pozitív számok összege 1.

a) Határozzuk meg, hogyan függ b-től a két szám köbének a különbsége!

b) Mi az így kapott függvény értékkészlete?

24.35. Az f függvény bármely valós x értékre x-nek a $[0;2]$ intervallum legtávolabbi egész értékétől való távolságát veszi fel (x a számegyenes tetszőleges pontja).

a) Ábrázoljuk és írjuk fel az f függvényt képlettel!

b) Oldjuk meg a feladatot, ha a legtávolabbi egész érték helyett a legközelebbi (nem szükségképpen egész) értéktől való távolságot tekintjük!

24.36. Bizonyítsuk be, hogy bármely x valós számnak a legközelebbi egész számtól való távolsága $\frac{1}{2} - \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$!

24.37. Tekintsük a $]0;1[$ intervallumban lévő számokat és mindegyiknek a saját köbétől való eltérését! Ábrázoljuk az így kapott függvényt! Mely számnál kapjuk a legnagyobb eltérést?

25. FEJEZET

Függvénykapcsolatok (teszt)

25.1. (M) Egy 160 cm vízmélységű úszómedencét két befolyó csövön keresztül tölthetjük meg vízzel. Az első csövön keresztül 10 óra, a második csövön keresztül 12 óra alatt telik meg a medence. A következő állítások közül hány hamis?

– (1) Ha csak az első cső nyitott, a 120 cm vízmagasság eléréséhez 7 óra 30 percre van szükség.

– (2) Ha az első csövet 3, a másodikat pedig 4 óráig tartjuk nyitva, akkor a medence több, mint félig megtelik.

– (3) Ha az első csövet 3, a másodikat pedig 4 óráig tartjuk nyitva, akkor a medencében több, mint 100 cm lesz a vízmagasság.

– (4) Ha mindkét cső nyitott, akkor a medence $\frac{10+12}{2} : 2 = 5{,}5$ órányi idő alatt telik meg.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

25.2. (M) Egy pontszerű test kezdetben a koordinátarendszer $(12; 8)$ pontjában van. Ezután a test 2 egységnyi (egyenletes) sebességgel halad az y tengely negatív irányával párhuzamosan. A következő állítások közül melyik igaz?
A) Az eltelt idő növekedtével a test origótól való távolsága csökken. **B)** t idő múlva a test távolsága az origótól $122 + (8 - 2t)^2$. **C)** Az origóhoz legközelebb 8 egységnyi idő múlva érkezik a test. **D)** 12 egységnyi idő múlva a test távolsága az origótól 20 egység. **E)** Egyik sem.

25.3. (M) Egy $u = 30$ m/s kezdősebességgel, függőlegesen elhajított test földfelszíntől mért távolsága h. (Számoljunk $g \approx 10$ m/s^2 nehézségi gyorsulással; a közegellenállás elhanyagolható.) Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) A mozgás kezdeti szakaszán (pl. $t?2$ s) a test sebessége $v(t) = 30 - 5t$.

– (2) Ha $t = 2$s, akkor $h = 40$ (m).

– (3) Ha $h = 40$ méter, akkor $t = 2$s.

– (4) A test maximális emelkedési magassága $h_{\max} = 45$ méter.

– (5) A mozgás folyamán a test gyorsulásának változik az iránya.

A) 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

25.4. (M) Egy 30 cm $\times$30 cm méretű négyzet alakú kartonlap sarkaiból egybevágó négyzeteteket vágunk le, s a papírból felül nyitott dobozt készítünk. Jelöljük x-szel a levágott négyzetek cm-ben mért oldalának a hosszát. Az alábbi állítások közül hány hamis?

– (1) x hossza tetszőleges.

– (2) x növelésével a doboz térfogata nő.

– (3) Ha $x = 3$, akkor a doboz térfogata 1728 cm^3.

– (4) x alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a doboz térfogata 1,8 liter legyen.

– (5) A doboz térfogata $4x(15-x)^2$.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

25.5. (M) A folyóparton 600 m hosszú kerítéssel téglalap alakú szántóföldet kerítünk be három oldalról (a negyedik oldal a folyópart). A téglalap parttal párhuzamos oldalának hosszát jelöljük x-szel, a partra merőleges oldalak hosszúságát y-nal. Az alábbi állítások közül hány igaz?

– (1) $y < 300$ méter.

– (2) A szántóföld területének a nagysága $T = 2y(300-y)$.

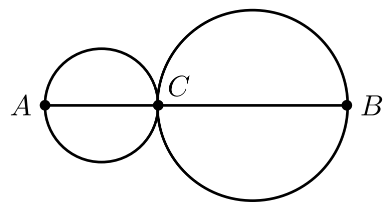
– (3) A szántóföld területének a nagysága $T = \frac{x(600-x)}{2}$.

– (4) x alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a szántóföld területe 25000 m^2 legyen.

– (5) A szántóföld területe maximális, ha $x = y$.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

25.6. (M) Egy 12 cm hosszú AB szakasz fölé az 1. ábra szerint két kört rajzolunk.



25.6.1. ábra.

Melyik hamis az alábbi állítások közül?
A) A két kör kerületének összege 12π cm. **B)** A két kör területének összege lehet 100 cm^2. **C)** A két kör területének összege maximális, ha C az AB szakasz felezőpontja. **D)** A körök területe legalább 9π cm^2. **E)** Egyik sem.

25.7. (M) Két pozitív szám, x és y összege 12. Hány hamis az alábbi állítások közül?

– (1) A két szám szorzata $x(12-x)$.

– (2) Az $x \cdot y$ kifejezésnek van minimuma.

– (3) $x \cdot y^2$ maximális, ha $x = y = 6$.

– (4) $x \cdot y^2$ lehet 200.

– (5) $x^2 + y^2$ legalább 72.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

25.8. (M) Egy háromszög két oldala $a = 6$ cm és $b = 8$ cm, a két oldal bezárt szöge γ. Hány igaz az alábbi állítások közül?

- (1) A háromszög területe egyenesen arányos γ-val.
- (2) A háromszög területe legfeljebb 24 cm^2.
- (3) A háromszög kerülete lehet 15 cm.
- (4) A háromszöget lefedő kör területe lehet 50 cm^2.
- (5) A γ szög növelésével a háromszög beírt körének nő a sugara.
- (6) A γ szög növelésével a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal hossza csökken.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

26. FEJEZET

Vegyes feladatok

26.1. Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}$ függvény értelmezési tartományát!

26.2. Adott két függvény:

$$f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}, \qquad g(x)=\sqrt{-x^2-2x+8}.$$

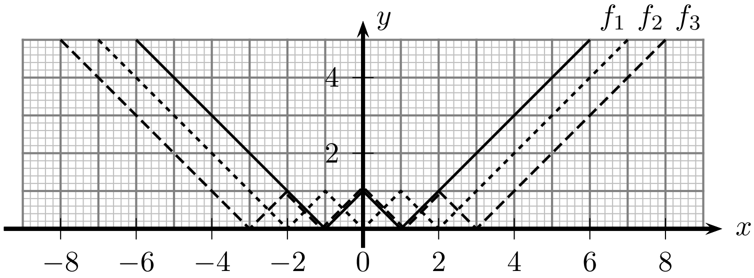
Legyen D_f, ill. D_g a függvények értelmezési tartománya, s határozzuk meg az alábbi halmazokat:
$A=\{x\in\mathbb{R}; x\in D_f$ és $x\in D_g\}$;
$B=\{x\in\mathbb{R}; x\in D_f$ vagy $x\in D_g\}$;
$C=\{x\in\mathbb{R}; x$ legalább az egyik halmaznak eleme(D_f és D_g közül)$\}$;
$D=\{x\in\mathbb{R}; x$ legalább D_g-nek eleme (D_f és D_g közül)$\}$;
$E=\{x\in\mathbb{R}; x$ legfeljebb az egyik halmaznak eleme (D_f és D_g közül)$\}$;
$F=\{x\in\mathbb{R}; x$ legfeljebb D_g-nek eleme (D_f és D_g közül)$\}$;
$G=\{x\in\mathbb{R}; x$ csak az egyik halmaznak eleme (D_f és D_g közül)$\}$;
$H=\{x\in\mathbb{R}; x$ csak D_g-nek eleme (D_f és D_g közül)$\}$;
$I=\{x\in\mathbb{R}; x$ pontosan az egyik halmaznak eleme (D_f és D_g közül)$\}$;
$J=\{x\in\mathbb{R}; x$ pontosan D_g-nek eleme (D_f és D_g közül)$\}$;
$K=\{x\in\mathbb{R};$ ha x eleme az egyik halmaznak, akkor eleme a másik halmaznak is$\}$;
$L=\{x\in\mathbb{R};$ ha $x\in D_f$, akkor $x\in D_g\}$;
$M=\{x\in\mathbb{R}; x$ nem eleme egyik halmaznak sem (D_f és D_g közül)$\}$;
$N=\{x\in\mathbb{R}; x$ nem eleme D_g-nek$\}$.

26.3. Adjuk meg az $f(x)=\frac{1}{3}x-4$ függvény képének az egyenletét, ha az alábbi geometriai transzformációkat hajtjuk végre.
a) Tengelyes tükrözés az x tengelyre;
b) tengelyes tükrözés az y tengelyre;
c) középpontos tükrözés az origóra;
d) középpontos tükrözés a $(2;3)$ pontra;
e) eltolás a $(2;-1)$ vektorral;
f) $\lambda=2$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
g) $\lambda=-\frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az x tengelyre;
h) $\lambda=-2$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
i) $\lambda=-\frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az y tengelyre;
j) $90°$-kal való forgatás az origó körül;
k) $-90°$-kal való forgatás a $(2;3)$ pont körül.

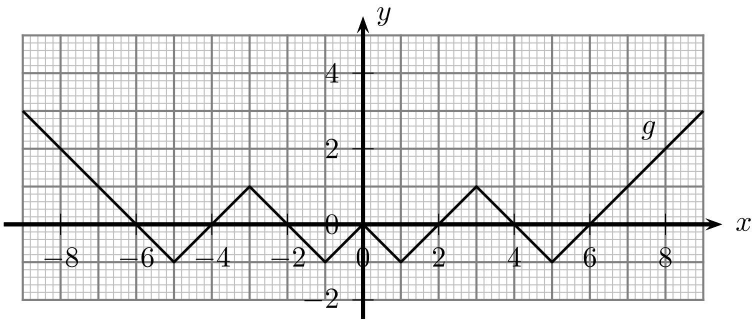
26.4. Oldjuk meg a 26.3. feladatot a $g(x)=\sqrt{x-3}$ és a $h(x)=x^2-6x$, $(x\geq 3)$ függvényekkel is.

26.5. Mi lehet az 1. ábrán látható f_1-f_3 „fűrészfüggvények” hozzárendelési szabálya?
Ezek alapján adjuk meg egy n-fogú „fűrészfüggvény” képletét!

26.6. Mi lehet az 1. ábrán látható fűrészszerű g függvény hozzárendelési szabálya?



26.5.1. ábra.



26.6.1. ábra.

26.7. Hogyan változik meg az $A(x) = x^2 + bx + c$ kifejezés szélsőértéke és szélsőérték helye, ha a kifejezéssel az alábbi műveleteket végezzük:

a) a kifejezés szorzása 3-mal;
b) szorzás -2-vel;
c) pozitív konstans hozzáadása, kivonása;
d) négyzetre emelés;
e) a kifejezés reciprokát vesszük;
f) a kifejezés abszolútértékét vesszük.

26.8. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
$a(x) = x^2 + 2|x| - 8$; $b(x) = |x^2 - 2|x| - 8|$; $c(x) = |x^2 + 2|x| - 8|$.

26.9. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
$a(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{x^2-4}{x+2}\right)$; $b(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)$; $c(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 9)$;
$d(x) = \operatorname{sgn}(2x^2 + 5x - 3)$.

26.10. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
$a(x) = \frac{1}{|x|-2}$; $b(x) = \left|\frac{1}{|x|-2}\right|$; $c(x) = \left|\frac{2x-1}{x+1}\right|$.

26.11. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket a $[-4; 5]$ intervallumon:
$a(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$; $b(x) = \frac{-x^2+x+1}{2-x}$; $c(x) = \frac{x^3-2x^2-9x+18}{x-2}$;
$d(x) = \frac{|x^2-x|}{x^3-x^2}$.

26.12. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:

$a(x)=\sqrt{|x|+2}$; $b(x)=\left|-2\sqrt{|x|+1}+3\right|$; $c(x)=\sqrt{x+4\sqrt{x+1}+5}$;
$d(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$; $e(x)=\sqrt{|x+1|+|x+2|}$.

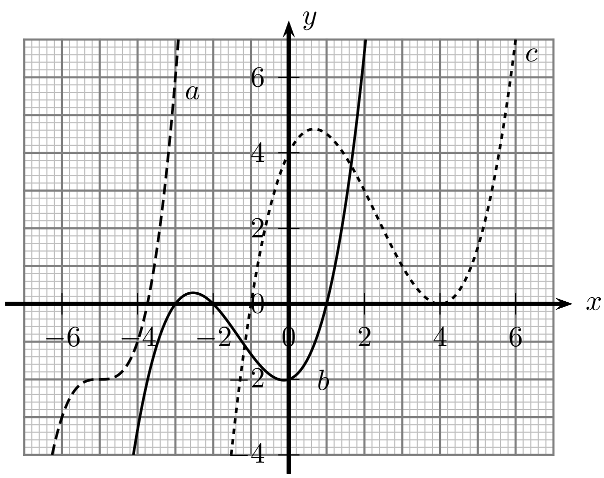
26.13. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:
$a(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$; $b(x)=\sqrt{-4x^2+24x-35}$; $c(x)=\sqrt{x^2-4x}$.

26.14. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket a $[0;1]$, majd a $[-2;2]$ intervallumon, s állapítsuk meg nagyságrendi viszonyaikat!
$a(x)=x$; $b(x)=x^2$; $c(x)=x^3$; $d(x)=x^4$; $e(x)=\sqrt{x}$;
$f(x)=\sqrt[3]{x}$; $g(x)=\sqrt[4]{x}$;

26.15. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját, s határozzuk meg y tengelymetszetüket!
$a(x)=-\frac{x^3}{2}+1$; $b(x)=-\frac{(x-2)^3}{8}+3$;
$c(x)=-\frac{1}{6}(x-3)(x-1)(x+2)$; $d(x)=(x-1)^2(x+2)$;
$e(x)=x^3+2x^2-3x$; $f(x)=-x(x-2)$.

26.16. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját:
$a(x)=\sqrt[3]{x+5}$; $b(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}-1$; $c(x)=|x|^3-2$; $d(x)=|x-2|^3$;
$e(x)=|2-x^3|$.

26.17. Mi az 1. ábrán látható a – c harmadfokú polinomfüggvények hozzárendelési szabálya?

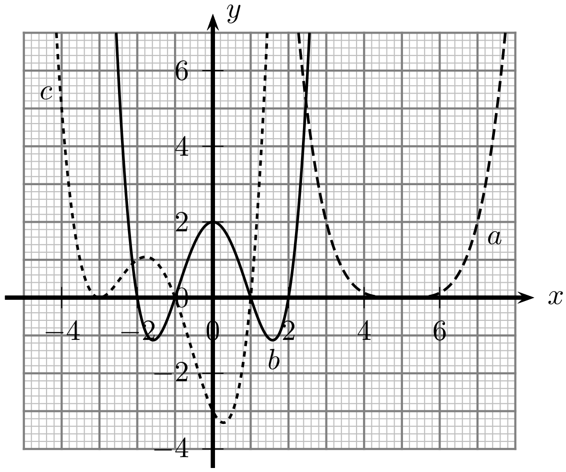


26.17.1. ábra.

26.18. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!
$a(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$; $b(x)=\frac{x^3-x^2}{|x-1|}$; $c(x)=\sqrt{(x-3)^2(x-8)^2}$.

26.19. Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját, s határozzuk meg értékkészletüket!
$a(x)=2|x-1|+3|x-2|+4|x-3|+|x-4|$, $x\in[-6;8]$;
$b(x)=2x(x-1)(x-2)$, $x\in[0{,}3;3]$;
$c(x)=x(x-2)(x+5)+1$, $x\in[-5{,}2;2{,}2]$;
$d(x)=(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$, $x\in[1{,}8;8{,}1]$.

26.20. Mi az 1. ábrán látható a – c polinomfüggvények hozzárendelési szabálya?



26.20.1. ábra.

26.21. Oldjuk meg grafikus úton az alábbi egyenlőtlenségeket:
a) $\operatorname{sgn}(x) < x$; **b)** $2\operatorname{sgn}(x) > |x|$; **c)** $\operatorname{sgn}^2(x) \leq |\operatorname{sgn}(x)|$;
d) $\operatorname{sgn}^2(x) \geq \operatorname{sgn}|x|$!

26.22. Oldjuk meg algebrai és grafikus módszerrel az alábbi egyenleteket:
a) $[2x-3] = 5$; **b)** $[2x-3] = x$; **c)** $[x-3{,}7] = 2x+2{,}4$!

26.23. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:
$a(x) = [|x|]$; $b(x) = |[x]|$; $c(x) = \{|x|\}$; $d(x) = |\{x\}|$.

26.24. Hány rácsponton megy át az alábbi függvények görbéje? (A derékszögű koordinátarendszer $P(x;y)$ pontját akkor nevezzük rácspontnak, ha x és y egész szám.)
$a(x) = 3x$, $(x \in [-100;100])$; $b(x) = \frac{x}{2} - 3$, $(x \in [-100;100])$;
$c(x) = \frac{3x+9}{x-1}$, $(x \in [-20;20])$; $d(x) = \frac{3x+1}{2x-2}$;
$e(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $(x \in [-20;20])$.

26.25. Az alábbi táblázatban minden számot koordinátákkal jellemezhetünk, attól függően, hogy a szám melyik sorban található, és a soron balül balról számítva hanyadik elem. Például a 8 koordinátái $(4;2)$. (A táblázat n. sorában n darab szám van.)

1					
2	3				
4	5	6			
7	8	9	10		
11	12	13	14	15	stb.

a) Melyik szám koordinátái $(30;13)$?
b) Melyik szám koordinátái $(n;k)$ $(k,n \in \mathbb{Z}^+, k \leq n)$?
c) Mik az 1000 koordinátái?

26.26. A páratlan számokat a 26.25. feladathoz hasonlóan táblázatba rendezzük. A táblázatban minden számot koordinátákkal jellemezhetünk, attól függően, hogy a szám melyik sorban található, és a soron balül balról számítva hanyadik elem. Például a 15 koordinátái $(4;2)$. (A táblázat n. sorában n darab szám van.)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 3 & & 5 & & & \\ & & 7 & & 9 & & 11 & & \\ & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\ 21 & & 23 & & 25 & & 27 & & 29 \quad \text{stb.} \end{array}$$

a) Melyik szám áll a 21. sor közepén?
b) Milyen szám áll az n. sor k. helyén ($k, n \in \mathbb{Z}^+, k \leq n$)?
c) Számítsuk ki a századik sorban álló számok összegét!
d) Számítsuk ki az első száz sorban álló számok összegét!

26.27. Ha az $f(x) = 2x^2+x-3$ polinomban az x helyébe egy másik $g(x)$ polinomot helyettesítünk, akkor a $h(x) = 2x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 45x + 25$ polinomot kapjuk.
a) Határozzuk meg a $g(x)$ polinom együtthatóinak összegét!
b) Határozzuk meg $g(-1)$ értékét!
c) Határozzuk meg $g(2)$ értékét!
d) Határozzuk meg a $g(x)$ polinomot!

26.28. Adott két pont, A és B. Egy derékszögű koordinátarendszerben, amelyben az egység a két tengelyen egyenlő, a két pont koordinátái: $A(3;2)$ és $B(7;5)$. Sajnos, a koordinátarendszer eltűnt; szerkesszük meg újra a tengelyeket és az egységet!

26.29. Az $f(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2$ kifejezés két helyettesítési értéke, $f(1) = -2$ és $f(2) = 10$, ellentétes előjelű. Határozzuk meg $f(x)$-nek az $[1;2]$ intervallumba eső zérushelyét két tizedesjegy pontossággal!
(Alkalmazzuk az intervallum-felezéses eljárást, melynek lényege a következő:

– meghatározzuk a kiindulásul vett $[a;b]$ intervallum felezőpontját, ez lesz c;

– megvizsgáljuk az $f(a) \cdot f(c)$, $f(c) \cdot f(b)$ szorzatok előjelét;

– ha pl. $f(a) \cdot f(c) \leq 0$, akkor az $[a;c]$ intervallumban helyezkedik el a keresett gyök;

– így az eljárást az $[a;c]$ intervallummal folytatjuk (felezés, előjelvizsgálat).

– Hasonlóan járhatunk el $f(c) \cdot f(b) \leq 0$ esetén a $[c;b]$ intervallummal.)

26.30. Adjunk meg olyan f függvényt, amely a $H = [0{,}1]$ intervallumon értelmezett, és
a) nincs maximuma;
b) nincs maximuma, de korlátos!

26.31. Adjunk meg olyan f függvényt, amely minden valós számra értelmezve van, és minden valós értéket pontosan kétszer vesz fel!

26.32. Adjunk meg olyan függvényt (leképezést, transzformációt), amely az A ponthalmazt kölcsönösen egyértelműen leképezi a B halmazra!
a) $A =$ egy 10 cm hosszúságú szakasz pontjai,
$B =$ egy 20 cm hosszúságú szakasz pontjai;
b) $A =$ egy 10 cm hosszúságú szakasz pontjai,
$B =$ egy 20 cm átmérőjű félkörív pontjai;
c) $A =$ egy 10 cm átmérőjű zárt körlemez pontjai,
$B =$ egy 20 cm átmérőjű zárt körlemez pontjai;
d) $A =$ egy 10 cm hosszúságú félig zárt szakasz pontjai,
$B =$ egy egyenes pontjai;
e) $A =$ egy 10 cm hosszúságú félig zárt szakasz pontjai,
$B =$ egy félegyenes pontjai.

26.33. Az f függvény értelmezési tartománya a $[-a, a]$ intervallum ($a \in \mathbb{R}$). Igaz-e, hogy f felbontható egy páros és egy páratlan függvény összegére?

26.34. Bontsuk fel egy páros és egy páratlan függvény összegére az alábbi függvényeket!
$a(x) = -2x + 3$; $b(x) = 2(x-3)^2 - 4$; $c(x) = \frac{2x+5}{x+1}$, $x \neq \pm 1$;
$d(x) = [x]$..

26.35. Igaz-e, hogy ha f szigorúan monoton, akkor $f \circ f$ szigorúan növekvő?

26.36. Az f függvény értékkészlete $R_f = [0; 2]$, és $f(f(2)) = 0$. Igazoljuk, hogy f nem lehet szigorúan monoton függvény!

26.37. Van-e olyan (nem azonosan 0) $f(x)$ polinomfüggvény, melyre teljesül, hogy minden egész x-re
a) $x \cdot f(x-1) = (x+1) \cdot f(x)$; **b)** $(x-1) \cdot f(x+1) = (x+2) \cdot f(x)$?

26.38. Az $f(x; y)$ kétváltozós függvény változói pozitív egész számok. A függvényre három tulajdonság teljesül:
1. $f(x; y) = f(y; x)$; 2. $f(x; x) = x$; 3. $f(x; x+y) = f(x; y)$.
Mennyi lehet $f(5; 100)$, illetve $f(2^k; n)$ ($k \in \mathbb{Z}^+$)?

26.39. Van-e olyan, a valós számokon értelmezett folytonos f függvény, amely racionális helyen irracionális, irracionális helyeken racionális értékeket vesz fel?

27. FEJEZET

Lineáris programozás

27.1. (M) Egy bulira üdítőt és szendvicset vásárolunk, mindkettőből legalább nyolcat. Legalább másfélszer annyi üdítőt, mint szendvicset. Az üdítő 80 Ft-ba, a szendvics 60 Ft-ba kerül. Összesen 1800 forintunk van.

a) Legfeljebb mennyit vásárolhatunk az egyes termékekből?

b) Összesen legfeljebb mennyit költhetünk, ha csak ezekre a termékekre költünk?

c) Van-e fölösleges feltétel?

d) Ha van hogyan kell megváltoztatni, hogy befolyásolja a kérdéses tartományt, illetve a megoldást?

Segítség, útmutatás

1. Grafikonok

A fejezetben a statisztikai adatokat a KSH kiadványaiból válogattuk.

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

2. Geometriai transzformációk

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Geometriai transzformációk (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

4. Lineáris függvény

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

5. Lineáris függvény (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

6. Abszolútérték függvény

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

7. Abszolútérték függvény (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

8. Másodfokú függvény

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

9. Másodfokú függvény (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

10. Racionális törtfüggvény

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

11. Racionális függvény (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

12. Négyzetgyök függvény

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

13. Négyzetgyök függvény (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

14. Előjel, törtrész, egészrész

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

15. Előjel, törtrész, egészrész (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

16. Függvénytranszformációk

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

17. Függvénytranszformációk (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

18. Összetett függvények

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

19. Összetett függvények (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

20. Tulajdonságok, műveletek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

21. Tulajdonságok, műveletek (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

22. Grafikus megoldás

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

23. Grafikus megoldás (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

24. Függvénykapcsolatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

25. Függvénykapcsolatok (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

26. Vegyes feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

27. Lineáris programozás

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

Megoldások

1. Grafikonok

A fejezetben a statisztikai adatokat a KSH kiadványaiból válogattuk.
Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

2. Geometriai transzformációk

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

3. Geometriai transzformációk (teszt)

3.1. B
A, C, D, E $\rightarrow$ 2.1.

3.2. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 2.2.

3.3. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 2.3.

3.4. E
A, B, C, D $\rightarrow$ 2.4, 2.5.

3.5. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 2.6.

3.6. E
A, B, C, D $\rightarrow$ 2.7.

3.7. E
A, B, C, D $\rightarrow$ 2.8.

3.8. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 2.9.

3.9. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 2.9.

3.10. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 2.9.

3.11. B
A, C, D, E $\rightarrow$ 2.11.

3.12. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 2.13.

3.13. B
A, C, D, E $\rightarrow$ 2.14.

3.14. E
A, B, C, D $\rightarrow$ 2.16.

3.15. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 2.17.

4. Lineáris függvény

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

5. Lineáris függvény (teszt)

5.1. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 4.1.

5.2. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 4.1.

5.3. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 4.1.

5.4. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 4.1.

5.5. A
B, C, D, E $\rightarrow$ 4.1.

5.6. B
A, C, D, E $\rightarrow$ 4.4, 4.5, 4.6, 4.7.

5.7. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.16.

5.8. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 4.10.

5.9. B
A, C, D, E $\rightarrow$ 4.11, 4.12.

5.10. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 4.11, 4.12.

5.11. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 4.14, 4.24.

5.12. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 4.14, 4.24.

5.13. C
A, B, D, E → 4.5, 4.7.

5.14. D
A, B, C, E → 4.16, 4.18.

5.15. D
A, B, C, E → 4.14, 4.24, 4.16, 4.17, 4.18.

5.16. C
A, B, D, E → 4.8, 4.9.

5.17. C
A, B, D, E → 4.20.

5.18. B
A, C, D, E → 4.26.

6. Abszolútérték függvény

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

7. Abszolútérték függvény (teszt)

7.1. C
A, B, D, E → 6.7, 6.8.

7.2. D
A, B, C, E → 6.1, 6.2, 6.3.

7.3. E
A, B, C, D → 6.4, 6.5.

7.4. D
A, B, C, E → 6.4, 6.5.

7.5. E
A, B, C, D → 6.9.

7.6. D
A, B, C, E → 6.10, 6.14.

7.7. C
A, B, D, E → 6.11, 6.12.

7.8. B
A, C, D, E → 6.13.

7.9. B
A, C, D, E → 6.16, 6.17.

7.10. C
A, B, D, E → 6.20.

8. Másodfokú függvény

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

9. Másodfokú függvény (teszt)

9.1. B
A, C, D, E → 8.2, 8.3, 8.4, 8.6, 8.7.

9.2. E
A, B, C, D → 8.9, 8.10.

9.3. E

9.4. C
A, B, D, E → 8.9.

9.5. C
A, B, D, E → 8.10.

9.6. E
A, B, C, D, E → 8.11.

9.7. C
A, B, D, E → 8.12, 8.14, 8.15.

9.8. C
A, B, D, E → 8.16, 8.17, 8.18.

9.9. C
A, B, D, E → 8.19.

9.10. D

9.11. D
A, B, C, E → 8.20, 8.21.

9.12. D
A, B, C, E → 8.22.

10. Racionális törtfüggvény

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

11. Racionális függvény (teszt)

11.1. C
A, B, D, E → 10.4, 10.5, 10.6, 10.7.

11.2. B
A, C, D, E → 10.8.

11.3. E
A, B, C, D → 10.9, 10.10, 10.11.

11.4. B
A, C, D, E → 10.13, 10.14.

11.5. D
A, B, C, E → 10.9, 10.10, 10.11.

12. Négyzetgyök függvény

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

13. Négyzetgyök függvény (teszt)

13.1. C
A, B, D, E → 12.1, 12.7, 12.8.

13.2. D
A, B, C, E → 12.2, 12.6.

13.3. D
A, B, C, E → 12.3, 12.4, 12.5.

13.4. D
A, B, C, E → 12.7, 12.8, 12.9.

13.5. B

13.6. D
A, B, C, E → 12.9, 12.10.

14. Előjel, törtrész, egészrész

14.3. Lásd az 1. ábrát!

14.6. Lásd az 1. ábrát!

15. Előjel, törtrész, egészrész (teszt)

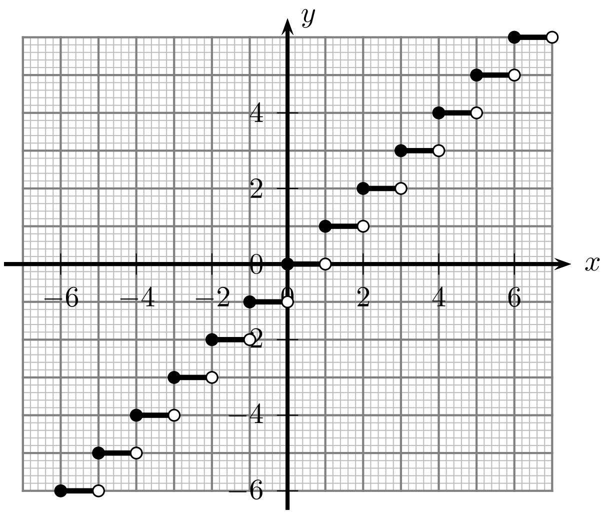
15.1. C
A, B, D, E → 14.3, 14.4, 14.5, 14.6, 14.7, 14.8.

16. Függvénytranszformációk

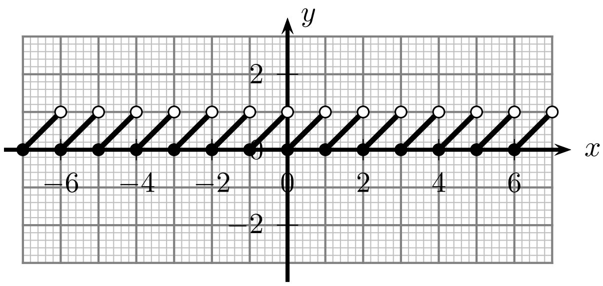
Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

17. Függvénytranszformációk (teszt)

17.1. C
A, B, D, E → 16.3, 16.4.



14.3M.1. ábra.



14.6M.1. ábra.

17.2. E
A, B, C, D → 16.5, 16.6.

17.3. B
A, C, D, E → 16.5, 16.6.

17.4. B
A, C, D, E → 16.7, 16.8, 16.9, 16.10, 16.11.

17.5. B
A, C, D, E → 16.12, 16.13.

17.6. D
A, B, C, E → 16.12, 16.13.

17.7. A
B, C, D, E → 16.12, 16.13.

17.8. D
A, B, C, E → 16.12, 16.13.

17.9. C
A, B, D, E → 16.12, 16.13.

17.10. C
A, B, D, E → 16.14.

17.11. D
A, B, C, E → 16.15, 16.16.

17.12. C
A, B, D, E → 16.18, 16.19, 16.20, 16.21, 16.22, 16.23.

17.13. B
A, C, D, E → 16.18, 16.19, 16.20, 16.21, 16.22, 16.23.

18. Összetett függvények

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

19. Összetett függvények (teszt)

19.1. C
A, B, D, E → 18.1, 18.2, 18.3, 18.4, 18.5, 18.6, 18.7.

19.2. C
A, B, D, E → 18.1, 18.2, 18.3, 18.4, 18.5, 18.6, 18.7.

19.3. B
A, C, D, E → 18.9.

19.4. B
A, C, D, E → 18.14.

19.5. C
A, B, D, E → 18.11.

20. Tulajdonságok, műveletek

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

21. Tulajdonságok, műveletek (teszt)

21.1. D
A, B, C, E → 20.1.

21.2. D
A, B, C, E → 20.3.

21.3. C
A, B, D, E → 20.4, 20.5, 20.6.

21.4. B
A, C, D, E → 20.7, 20.13, 20.14.

21.5. B
A, C, D, E $\rightarrow$ 20.8, 20.9, 20.10.

21.6. B
A, C, D, E $\rightarrow$ 20.8, 20.9, 20.10.

21.7. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 20.15.

21.8. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 20.25, 20.26.

21.9. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 20.18, 20.19, 20.20, 20.21, 20.22.

21.10. A
B, C, D, E $\rightarrow$ 20.27, 20.28, 20.29, 20.30, 20.31.

21.11. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 20.32.

21.12. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 20.32.

21.13. E
A, B, C, D $\rightarrow$ 20.33.

21.14. E
A, B, C, D $\rightarrow$ 20.34.

22. Grafikus megoldás

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

23. Grafikus megoldás (teszt)

23.1. B
A, C, D, E $\rightarrow$ 22.1.

23.2. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 22.2, 22.3, 22.4.

23.3. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 22.2, 22.3, 22.4, 22.5.

23.4. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 22.6, 22.7.

23.5. D
A, B, C, E $\rightarrow$ 22.11, 22.12, 22.13.

23.6. C
A, B, D, E $\rightarrow$ 22.15.

23.7. C
A, B, D, E → 22.14.

23.8. C
A, B, D, E → 22.14.

24. Függvénykapcsolatok

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

25. Függvénykapcsolatok (teszt)

25.1. B
A, C, D, E → 24.4.

25.2. D
A, B, C, E → 24.8, 24.9.

25.3. C
A, B, C, E → 24.12.

25.4. B
A, C, D, E → 24.17.

25.5. D
A, B, C, E → 24.20.

25.6. D
A, B, C, E → 24.25.

25.7. B
A, C, D, E → 24.34.

25.8. B
A, C, D, E → 24.27.

26. Vegyes feladatok

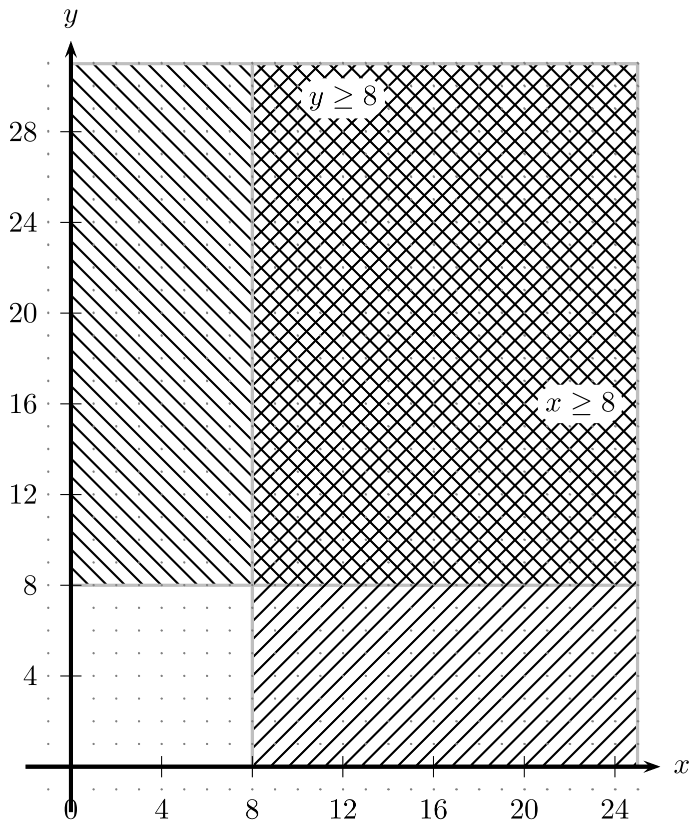
Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

27. Lineáris programozás

27.1. Legyen a megvásárolt üdítők száma x; a szendvicseké y. A feltételek szerint:

$$\begin{aligned} x &\geq 8, \\ y &\geq 8, \\ x &\geq \frac{3}{2}y, \\ 80x + 60y &\leq 1800. \end{aligned}$$

Keressük meg az egyes egyenlőtlenségek megoldáshalmazát a koordinátarendszerben! Az első két egyenlőtlenség megoldáshalmaza az 1. ábrán, az utolsó kettőé pedig a 2. ábrán látható.



27.1M.1. ábra.

A négy egyenlőtlenség közös megoldáshalmaza a 3. ábrán szürkén jelölt ABC háromszög tartomány. Ennek egyes csúcsait az alábbi egyenletrendszerek megoldása adja:

A:
$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 90 \\ x &= \tfrac{3}{2}y \end{aligned}\right\}$$
$A(15{,}10)$

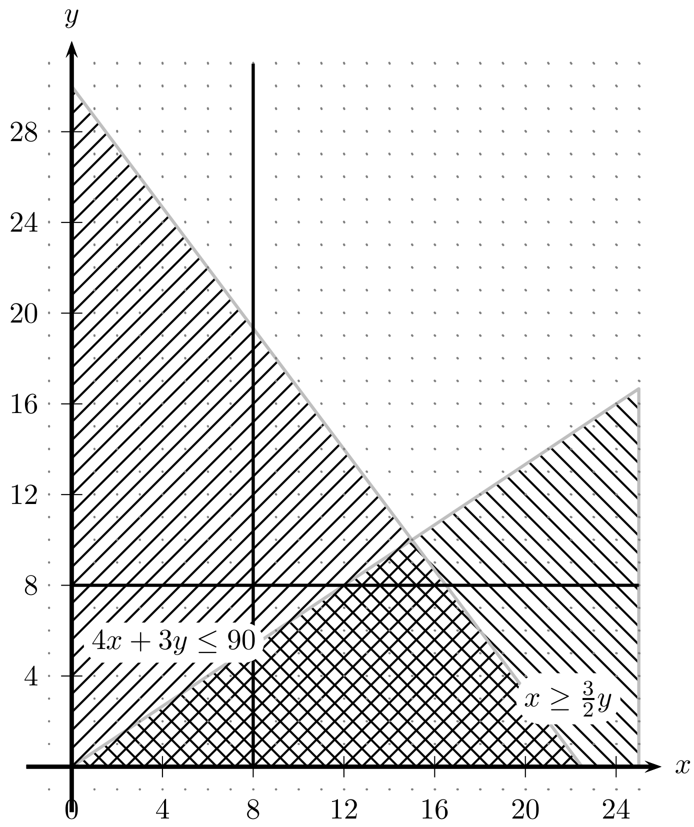
B:
$$\left.\begin{aligned} y &= 8 \\ x &= \tfrac{3}{2}y \end{aligned}\right\}$$
$B(12{,}8)$

C:
$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 90 \\ y &= 8 \end{aligned}\right\}$$
$C(16.5{,}8)$

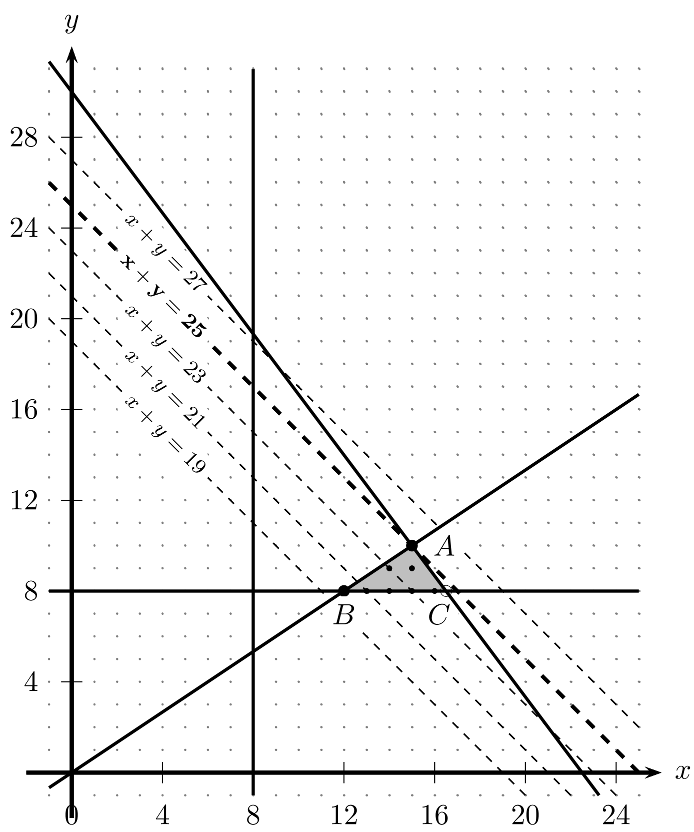
a) Az ábráról leolvasható, hogy legfeljebb 16 üdítőt vehetünk. 16 üdítőt csak úgy vehetünk, hogy mellé 8 szendvicset veszünk. Szendvicsből maximum 10-et vásárolhatunk, ennyit akkor, ha mellé 15 üdítőt veszünk.

b) CÉL az $(x+y)$ mennyiség legnagyobb értékének meghatározása azokra az (x, y) egészekből álló párokra, amelyek teljesítik a fenti négy feltételt, azaz (x, y) a háromszög tartomány rácspontja. A 3. ábrán az $x + y$ függvény néhány szintvonalát is barajzoltuk, azaz néhány $x + y = c$ egyenletű egyenest. Meg kell határoznunk azt a legnagyobb c értéket, amelyre az egyenesnek van közös pontja a háromszög tartománnyal. Látható, hogy ez az az egyenes, amely átmegy a hátomszög $(15, 10)$ csúcsán, azaz a $c = 25$ értékhez tartozó egyenes. Tehát legfeljebb 15 darab üdítőt és 10 darab szendvicset vásárolhatunk.

c-d) Az ábráról leolvasható, hogy $x \geq 8$ feltétel nem befolyásolja a tartományt. Ha $x > 12$ akkor a tartományt, ha $x > 15$ akkor a megoldást is befolyásolja a feltétel.



27.1M.2. ábra.



27.1M.3. ábra.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...