



Függvények

11–12. évfolyam

Szerkesztette:
Hraskó András, Surányi László

2018. december 9.

Technikai munkák

(MatKönyv project, T_EX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| Feladatok | 3 |
| 1. Harmadfokú függvények | 3 |
| 1.1. A harmadfokú függvény | 3 |
| 1.2. A harmadfokú függvény szimmetriája | 3 |
| 1.3. A harmadfokú függvény konvexitása | 3 |
| 1.4. A harmadfokú függvény valós gyökeinek száma I. | 4 |
| 1.5. A harmadfokú függvény monotonitása és helyi szélsőértékei | 4 |
| 1.6. Összefoglalás és még egy geometriai tulajdonság | 4 |
| 2. Az érintő | 7 |
| 3. Függvényvizsgálat | 9 |
| 4. Szélsőérték | 11 |
| 5. Egyenlőtlenségek | 13 |
| 6. Alapvető integrálok | 15 |
| 6.1. Trigonometriai alapösszefüggések ismétlése | 15 |
| 6.2. Parciális integrálás | 15 |
| 6.3. Parciális törtekre bontás | 16 |
| 6.4. Helyettesítéses integrálás | 16 |
| 7. Görbék | 17 |
| 7.1. Görbék paraméterezése | 17 |
| 7.2. Görbék tulajdonságai | 18 |
| 8. Furcsa függvények | 21 |
| 9. Vegyes feladatok | 25 |
| 9.1. Elliptikus integrálok | 26 |
| Segítség, útmutatás | 29 |
| 1. Harmadfokú függvények | 29 |
| 2. Az érintő | 29 |
| 3. Függvényvizsgálat | 29 |
| 4. Szélsőérték | 30 |
| 5. Egyenlőtlenségek | 30 |
| 6. Alapvető integrálok | 30 |
| 7. Görbék | 30 |
| 8. Furcsa függvények | 30 |
| 9. Vegyes feladatok | 30 |
| Megoldások | 31 |
| 1. Harmadfokú függvények | 31 |
| 2. Az érintő | 33 |
| 3. Függvényvizsgálat | 33 |
| 4. Szélsőérték | 38 |
| 5. Egyenlőtlenségek | 41 |
| 6. Alapvető integrálok | 45 |

| | |
|--|-----------|
| 7. Görbék | 52 |
| 8. Furcsa függvények | 59 |
| 9. Vegyes feladatok | 61 |
| Alkalmazott rövidítések | 67 |
| Könyvek neveinek rövidítései | 67 |
| Segítség és megoldás jelzése | 67 |
| Hivatkozás jelzése | 67 |
| Irodalomjegyzék | 69 |

1. FEJEZET

Harmadfokú függvények

1.1. A harmadfokú függvény

Ebben a fejezetben a harmadfokú függvény grafikonjának egyszerű geometriai tulajdonságait vizsgáljuk. A másodfokú függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus, és ez egyszerű függvénytranszformációval következik abból, hogy az x^2 függvény páros függvény, így tengelyesen szimmetrikus. Az x^3 függvény páratlan, tehát az origóra középpontosan szimmetrikus. Ezért azt remélnénk, hogy minden harmadfokú függvény középpontosan szimmetrikus. Csakhogy itt a helyzet bonyolultabb, mert nem kaphatunk meg minden harmadfokú függvényt az x^3 függvényből. A másodfokú függvéynél a "teljes négyzetté alakítás" alapján tudunk minden másodfokú függvényt előállítani az x^2 függvényből. Először tehát azt vizsgáljuk meg, hogy a hasonló eljárás segítségével mennyire egyszerűsíthető a harmadfokú függvény alakja.

Ezután a függvény konvexitási tartományait, majd a monotonitási tartományait keressük meg. Mindkettőhöz használni fogjuk a differenciahányadost:

Definíció. Az x és y pontokban értelmezett f függvénynek e két ponthoz tartozó *differenciahányadosa* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Szavakkal: a függvény grafikonjának az x és y abszcisszájú pontokhoz tartozó pontjait összekötő húr meredeksége.

Használni fogjuk a következő egyszerű tényeket:

Tétel. Az (a, b) intervallumon értelmezett f függvény ebben az intervallumban pontosan akkor nő monotonan (szigorúan monotonan), ha az intervallum bármely rögzített x pontjára az $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ függvény nem negatív (pozitív). Ezt a függvényt az f függvénynek az x pontjához tartozó differenciahányados függvényének nevezzük. Az f függvény pontosan akkor konvex ezen az intervallumon, ha minden x ponthoz tartozó differenciahányados függvény monoton nő.

A csökkenésre és a konkavításra vonatkozó állításokat -1 -gyel való szorzással kapjuk a fenti tételből.

1.2. A harmadfokú függvény szimmetriája

1.1. (S) Igazoljuk, hogy alkalmas $x' = x + t$ választással az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvény $a(x_1^3 + px_1 + q)$ alakra hozható

1.2. (M) Az 1.1 feladat szerint elég az $y = x^3 + px + q$ függvény grafikonjának a geometriai tulajdonságát vizsgálnunk.

Igazoljuk, hogy az $y = x^3 + px + q$ függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus és keressük meg a szimmetria középpontját!

1.3. (S) Van-e szimmetria középpontja az általános $ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvénynek (a nem nulla)?

1.3. A harmadfokú függvény konvexitása

1.1. (M) Igazoljuk, hogy az $x^3 + px$ függvény a szimmetria középpontja "után" a grafikon konvex (a grafikon fölötti tartomány konvex), "előtte" konkáv (azaz a grafikon alatti tartomány konvex).

1.2. (S) állapítsuk meg az általános $ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvény (a nem nulla) konvexitási (és konkávitási) tartományait!

1.4. A harmadfokú függvény valós gyökeinek száma I.

1.1. (M) Igazoljuk, hogy ha az $x^3 - ax^2 + bx - c$ polinomban $a^2 < 3b$, akkor a polinomnak csak egy valós gyöke van.

1.2. (S) Igazoljuk, hogy ha az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomban $b^2 < 3ac$, akkor a polinomnak csak egy valós gyöke van.

1.5. A harmadfokú függvény monotonitása és helyi szélsőértékei

1.1. (M) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x számra $-5x^3 - 2x^2 + 3x \leq \frac{16}{27}$.

1.2. (M) Igazoljuk, hogy minden nem negatív x számra $x(4 - x^2) \leq \frac{16}{3\sqrt{3}}$.
Mikor áll fenn az egyenlőség?

1.3. (S) Bizonyítsuk be, hogy

$$x(p - x^2) \leq \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}},$$

ha x pozitív. Egyenlőség $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ esetén van.

1.4. (M) Tekintsük most az $x^3 - px + q$ harmadfokú függvényt. A ?? feladatban láttuk, hogy ennek a függvénynek egyetlen inflexiós pontja van, mégpedig az $x = 0$ abszcisszájú pontban. A monotonitásáról a következőket tudjuk:

Ha $p \leq 0$, akkor ez a függvény szigorúan monotonan növekszik az egész számegyenesen.

Ha $p > 0$, akkor eddig azt láttuk be, hogy a pozitív félegyenesen az ellentettjének pontosan egy maximuma van, az $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ pontban. (Lásd az 1.3, tehát ennek a függvénynek a pozitív félegyenesen ugyanitt minimuma van.)

Bizonyítsuk be, hogy a függvény a $0 < x < \sqrt{\frac{p}{3}}$ intervallumon szigorúan monotonan csökken, az $x > \sqrt{\frac{p}{3}}$ félegyenesen szigorúan monotonan növekszik.

A negatív félegyenesen pont fordítva viselkedik a függvény, mert páratlan.

1.6. Összefoglalás és még egy geometriai tulajdonság

1.1. (S) Összefoglalás.

Tekintsük az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvényt, ahol a nem nulla. Igazoljuk a következőket:

Az f függvény szimmetrikus a $\frac{-b}{3a}$ abszcisszájú pontjára. Ha a pozitív, akkor a kisebb abszcisszájú pontok alkotta félegyenesen konkáv, az ellenkező félegyenesen konvex. Ha a negatív, akkor pont fordítva.

Ha $b^2 > 3ac$, akkor pozitív (negatív) a esetén az egész számegyenesen szigorúan monotonan nő (csökken). Ezekben az esetekben pontosan egy nullhelye van a függvénynek. (Egyenlőség esetén lehet háromszoros nullhely is.)

Ha $b^2 > 3ac$, akkor pozitív (negatív) a esetén az f függvény

az $x \leq \frac{-b}{3a} - \sqrt{\frac{b^2-3ac}{3a^2}} = x_0$ félegyenesen szigorúan monotonan nő (csökken), az $x_0 \leq \frac{-b}{3a} + \sqrt{\frac{b^2-3ac}{3a^2}} = x_1$ intervallumon szigorúan monotonan csökken (nő), az $x_1 < x$ félegyenesen ismét szigorúan nő (csökken).

1.2. (S) Az 1.1 jelöléseit használva húzzunk párhuzamost az x -tengellyel az x_0 abszcisszájú ponton át, messe ez másodszor az x'_0 abszcisszájú pontban a függvény grafikonját. Hasonlóan definiáljuk az x'_1 pontot. Bizonyítsuk be, hogy

$$x'_0 = -2x_0 \text{ és } x'_1 = -2x_1.$$

Mivel x_0 és x_1 egyenlő távol van $\frac{-b}{3a}$ -tól (a szimmetria középpont abszcisszájától), ezért a fenti állítás geometriailag azt jelenti, hogy az 1.1 ábrán szereplő négy téglalap egybevágó.

E megjegyzés alapján kipróbálhatjuk, tudunk-e spontán módon olyan függvénygrafikont rajzolni, amelyik hasonlít egy harmadfokú függvényére.

1.3. (S) Milyen valós q számokra van három gyöke az $x^3 - px + q$ polinomnak?

2. FEJEZET

Az érintő

2.1. [12] Határozzuk meg az $y = x^2 + 2x + 2$ parabola $x = 1$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!

2.2. [12] Határozzuk meg az $y = 1 + x \ln x$ görbéhez egységnyi ordinátájú pontjában húzott érintő egyenletét!

2.3. [12] Határozzuk meg az $y = x^3 + 1$ görbe azon érintőinek egyenletét, melyek az $y = 3x + 1$ egyenessel párhuzamosak!

2.4. [12] Mekkora területű háromszöget alkot a koordinátatengelyekkel az $xy = 1$ hiperbola $x = a$ abszcisszájú pontjához húzott érintője?

3. FEJEZET

Függvényvizsgálat

A fejezet nagyrészt a Somogyi László által a budapesti István Gimnázium speciális matematika tagozatos osztályában 1984-85-ben tartott órák jegyzete alapján készült.

3.1. (M) Vizsgáljuk az

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f_2(x) = e^{8x-x^2-14}$$

$$f_3(x) = xe^{-x}$$

$$f_4(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$$

$$f_5(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{10}$$

$$f_6(x) = x \ln^2 x$$

függvényeket az alábbi szempontok szerint:

I. Értelmezési tartomány meghatározása;

II. Globális tulajdonságok: paritás, szimmetria, periódus;

III. Zérushely, előjel;

IV. Határérték az ÉT „szélein”;

V. Derivált;

VI. A derivált előjele, lokális és globális szélsőértékek, monotonitási intervallumok;

VII. Értékkészlet;

VIII. Második derivált;

IX. A második derivált előjele, konvexitás;

X. Grafikon megrajzolása.

3.2. Vizsgáljuk az

$$g_1(x) = \ln^2 x - 4 \ln x$$

$$g_2(x) = e^x(3 - x^2)$$

$$g_3(x) = \sin x + \cos 2x$$

$$g_4(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$g_5(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$$

$$g_6(x) = \ln \sin x$$

függvényeket a 3.1. feladatban leírt szempontok szerint!

4. FEJEZET

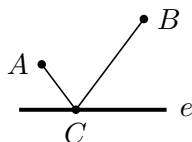
Szélsőérték

4.1. (M) [6] Adott egyenes körkúpba írjunk maximális felszínű hengert!

4.2. [4] 1 literes henger alakú bádoggal edényt akarunk készíteni. Hogyan válasszuk a méreteit, hogy a legkevesebb bádogra legyen szükségünk?

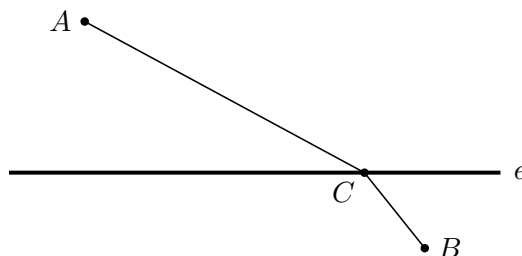
4.3. [4] Egy négyzet alakú papírlapból a maximális térfogatú nyitott dobozt akarjuk készíteni. A sarkokon kis négyzeteket vágunk le, és az oldalt keletkező részeket felhajtjuk. Határozzuk meg a nagy és a levágandó kis négyzet oldalának arányát!

4.4. [4] Hogyan lehet A -tól B -be az e egyenes érintésével az ACB alakú legrövidebb úton eljutni (a 4.0.1. ábra)?



4.4.1. ábra.

4.5. [4] A -ból B -be akarunk jutni a legrövidebb idő alatt; az e egyenesig c_A egyenletes sebességgel haladunk, az e egyenesen túl pedig c_B egyenletes sebességgel (a 4.0.1. ábra). Milyen úton menjünk?



4.5.1. ábra.

4.6. [4] Egy r sugarú kerek asztal közepe fölött van egy föl- és letolható lámpa. Milyen magasra kell a lámpát helyezni, hogy az asztal körül ülők a legjobban lássanak? (A fénytárból ismeretes, hogy a fényerősség a távolság négyzetével fordítottan, a fénysugaraknak az asztal síkjával alkotott szöge szinuszával pedig egyenesen arányos.)

4.7. [4] Adva van egy r sugarú körlap (itatós papirosból). Mekkora nyílású körcikket vágjunk ki belőle, hogy a készítendő tölcser alakú szűrő maximális térfogatú legyen?

4.8. [4] Tapasztalásból tudják a mérnökök, hogy adott hosszúságú gerenda hordképessége egyenesen arányos a szélességével és a vastagságának a négyzetével. Hogyan vágjunk ki egy henger alakú fatörzsből olyan gerendát, melynek hordképessége maximális?

4.9. [4] n galvánelemből állítunk elő telepet, és pedig olyan módon, hogy x elemet párhuzamosan és így $y = \frac{n}{x}$ csoportot sorba kapcsolunk. Hogyan kell az x -et megválasztanunk, hogy az így keletkező telep áramerőssége maximális legyen?

4.10. [4] Egy adott körbe rajzolható derékszögű négyszögek közül melyiknek van maximális területe?

4.11. [4] Hogyan kell egy adott gömbbe olyan hengert állítani, amelynek térfogata maximális?

4.12. [4] Egy adott egyenes körkúpba helyezhető körhengerek közül melyiknek van maximális térfogata? (A henger alapja a kúp alapján legyen.)

4.13. [4] Melyik az a négyzet alapú maximális

a) térfogatú,

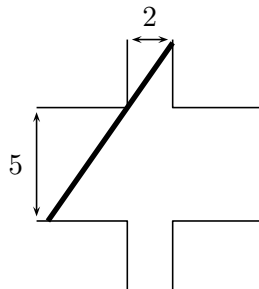
b) felületű

gúla, melynek mindegyik oldaléle a hosszúságú?

4.14. Határozzuk meg az $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$ sorozat legnagyobb elemét!

4.15. Milyen hosszú kamion fordulhat be a kereszteződésben?

Legfeljebb milyen hosszú lehet az a szakasz, amely áttolható egy 5 egység szélességű sávból egy arra merőleges 2 egység szélességű sávba (lásd a 4.0.1. ábrát)?



4.15.1. ábra.

5. FEJEZET

Egyenlőtlenségek

5.1. [10] Adjuk meg az alábbi egyenletek valós megoldásainak számát az a paraméter függvényében!

- a) $x^3 - 3x = a$, b) $3x^5 - 50x^3 + 135x = a$, c) $x^2 e^x = a$,
d) $a^x = x$,

5.2. [10] Mely a valós számokhoz található olyan b pozitív paraméterérték, amelyre az $x^2 + a = 2b \ln x$ egyenletnek pontosan egy megoldása van (x -ben)?

5.3. (S) [10] Mutassuk meg, hogy ha az a, b pozitív számok összege 1, akkor bármely x, y számokra teljesül az $x^a y^b \leq ax + by$ egyenlőtlenség!

5.4. Mutassuk meg, hogy $0 \leq x$ esetén

- a) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!
d) Mely x számok esetén konvergens az $l_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ sorozat?
e) Határozzuk meg $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ végtelen sor összegét!
f) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban és b)-ben $-1 < x < 0$ esetén?

5.5. [13] Igazoljuk, hogy $0 < x_1 < x_2$ esetén

$$\frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_2}{x_1}} < \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

5.6. Mutassuk meg, hogy $0 \leq x$ esetén

- a) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ és $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$.
b) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ és $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.
c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!
d) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban, b)-ben és c)-ben $x < 0$ esetén?
e) Mutassuk meg, hogy az

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

sorozatok tetszőleges x valós szám esetén konvergensnek és határértékük $\sin x$ illetve $\cos x$.

5.7. Igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén

- a) $1 + x < e^x$; b) $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$!
c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!
d) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban és b)-ben $x < 0$ esetén?

5.8. a) Igazoljuk, hogy $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\operatorname{tg} x \geq x + \frac{x^3}{3}$.

b) Adjunk meg minél nagyobb olyan a valós számot, amelyre $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\operatorname{tg} x \geq x + \frac{x^3}{3} + ax^5$.

5.9. Igazoljuk, hogy $0 \leq x < 1$ esetén $1 + \frac{x}{2} \geq \sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

5.10. (M) a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a $(0; \infty)$ jobbról végtelen intervallumon alulról nézve (szigorúan) konvex!

b) Igazoljuk a számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenséget n db pozitív számra!

5.11. (M) a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2$ függvény alulról nézve (szigorúan) konvex \mathbb{R} -en!

b) Igazoljuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget n db pozitív számra!

5.12. (M) Melyik háromszögben

a) maximális

b) minimális

a

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$$

kifejezés értéke, ahol α, β és γ a háromszög három belső szögét jelöli?

5.13. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyiknek

a) maximális

b) minimális

a kerülete?

5.14. Adott sugarú körbe írt n -szögek közül melyiknek

a) maximális

b) minimális

a kerülete?

5.15. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyiknek

a) maximális

b) minimális

a területe?

5.16. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyikben maximális az oldalak négyzetösszege?

5.17. (M) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenség bármely valós a, b, c számokra teljesül!

6. FEJEZET

Alapvető integrálok

6.1. Trigonometriai alapösszefüggések ismételése

6.1. (M) Fejezzük ki $\cos \alpha$ -t

a) $\cos \frac{\alpha}{2}$ és $\sin \frac{\alpha}{2}$; b) $\cos \frac{\alpha}{2}$;

c) $\sin \frac{\alpha}{2}$; d) $tg \frac{\alpha}{2}$

függvényeként!

6.2. (M) Fejezzük ki $ch \alpha$ -t

a) $ch \frac{\alpha}{2}$ és $sh \frac{\alpha}{2}$; b) $ch \frac{\alpha}{2}$;

c) $sh \frac{\alpha}{2}$; d) $th \frac{\alpha}{2}$

függvényeként!

6.3. (M) Fejezzük ki $\sin \alpha$ -t

a) $\cos \frac{\alpha}{2}$ és $\sin \frac{\alpha}{2}$; b) $\cos \frac{\alpha}{2}$;

c) $\sin \frac{\alpha}{2}$; d) $tg \frac{\alpha}{2}$

függvényeként! Adjuk meg, hogy melyik formula mely intervallumon érvényes!

6.4. (M) Fejezzük ki $sh \alpha$ -t

a) $ch \frac{\alpha}{2}$ és $sh \frac{\alpha}{2}$; b) $ch \frac{\alpha}{2}$;

c) $sh \frac{\alpha}{2}$; d) $th \frac{\alpha}{2}$

függvényeként! Adjuk meg, hogy melyik formula mely intervallumon érvényes!

6.5. (M) Fejezzük ki

a) $tg \alpha$ -t $tg \frac{\alpha}{2}$;

b) $th \alpha$ -t $th \frac{\alpha}{2}$

függvényeként!

6.6. (MS) *arshx* logaritmikus alakja

Fejezzük ki a *arshx* értékét x -szel a logaritmusfüggvény segítségével!

6.2. Parciális integrálás

6.1. (M)

a) Számítsuk ki az $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ integrált!

b) Mutassuk meg, hogy az $\{I_n\}$ sorozat monoton fogyó!

c) (*Wallis formula*)

Legyen

$$J_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \quad (1)$$

Igazoljuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

6.3. Parciális törtekre bontás

6.1. (M) Adjuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

- a) $\int \frac{x^3+x^2-4x-6}{(x^2+2x+2)(x+2)^2} dx$
 b) $\int \frac{3x^3-11x^2+10x-1}{(x-2)^2} dx$
 c) $\int \frac{x^3-x^2+9x+7}{(x^2+2x+2)(x^2-x+1)} dx$
 d) $\int \frac{-x^3+7x^2-12x+18}{(x^2+x-2)(x^2-2x+5)} dx$

6.4. Helyettesítéssel integrálás

6.1. (M) Adjuk meg az $\int \sqrt{1-x^2} dx$ határozatlan integrált!

6.2. (M) Adjuk meg az $\int \sqrt{1+x^2} dx$ határozatlan integrált!

6.3. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{\sin x} dx$ határozatlan integrált!

6.4. (S) Adjuk meg az $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx$ határozatlan integrált!

6.5. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+(\sqrt{1+x})^3} dx$ határozatlan integrált!

6.6. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ határozatlan integrált!

6.7. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ határozatlan integrált!

6.8. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$ határozatlan integrált!

6.9. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} dx$ határozatlan integrált!

6.10. (MS) Adjuk meg az $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ határozott integrált!

7. FEJEZET

Görbék

7.1. Görbék paraméterezése

7.1. Melyik nevezetes görbe paraméterezését adja meg a $\gamma(t) = (cht; sht)$ képlet?

7.2. (M) *ciklois*

Egy kerék csúszásmentesen gördül az egyenes talajon. Írjuk le a kerék egy pontjának pályáját!

Tegyük fel, hogy a kerék a számegyenes origójából indul, és kezdetben a vizsgált pont épp az origóban van. A t időpillanatban a kerék érintési pontja a számegyenesen legyen épp t -ben. Adjuk meg a mozgó pont koordinátáit t függvényében!

7.3. (M) *Asztrois*

Egy r sugarú kör belsejében csúszásmentesen gördül egy negyedakkora sugarú kör. A kisebb kör egy pontjának pályáját elemezzük. Legyen a nagy kör középpontja a koordinátarendszer origója, és a $t = 0$ időpontban a vizsgált mozgó pont legyen a két kör érintési pontja, a $\gamma(0) = (r; 0)$ pont.

a) Vázoljuk a görbét!

b) Tételezzük fel, hogy t idő alatt a két kör érintési pontja az origó körül t radián szöget fordult el. Írjuk fel a vizsgált pont koordinátáit!

c) Algebrai görbe-e az asztrois? Van-e olyan kétváltozós polinom, $p(x; y)$, amelynek zérushelyeinek halmaza épp a fent definiált görbe?

7.4. (M) *Arkhimédieszi spirális*

Egy pont egyenletesen mozog egy egyenesen, amely egyenletesen forog egy pontja körül. Írjuk le a mozgó pont pályáját!

a) Vázoljuk a görbét!

b) Legyen kezdetben a forgó egyenes az x -tengely, rajta a mozgó pont kezdetben az origó, a forgási középpont pedig mindig az origó. Jelölje a az egyenesen való haladási sebesség és az egyenes forgási szögsebességének hányadosát. Paraméterezzük a spirálist az egyenes origó körüli elfordulásának θ szögével!

c) Algebrai görbe-e az Arkhimédieszi spirális? Van-e olyan kétváltozós polinom, $p(x; y)$, amelynek zérushelyeinek halmaza épp a fent definiált görbe?

7.5. (M) *Bernoulli-féle Lemniskáta*

a) Alább négy definíciót olvashatunk. Mutassuk meg, hogy mind a négy ugyanazt a görbét definiálja!

Def. 1. Azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek az $F_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ pontoktól való távolságának szorzata $\frac{1}{2}$.

Def. 2. Az $ABCD$ rúdszerkezet az AB , BC , CD , DA rudakból és az A , B , C , D pontokban található csuklókból áll. Az AB , CD rudak hossza $\sqrt{2}$ egység, míg a BC , DA rudaké 1 egység. Az A , B pontokat az $F_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ pontokhoz rögzítjük, míg C és D mozog. Hol helyezkedhet el a CD szakasz felezőpontja amikor a szerkezet átmetszi önmagát?

Def. 3. Invertáljuk az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbolát az origó körüli egység sugarú körre!

Def. 4. Állítsunk merőlegest az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola érintőire az origóból. Mi a talppontok mértani helye?

b) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta egyenlete Descartes koordinátarendszerben:

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2. \quad (1)$$

c) Adjuk meg a P pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy illeszkedik a fenti lemniszkátára és az origótól való távolsága t !

7.6. (M) *Logaritmikus spirál*

A logaritmikus spirál egyenlete polárkoordinátákban: $r = a \cdot e^{b\phi}$, ahol a és b konstansok.

a) Mutassuk meg, hogy tetszőleges α, β szögek esetén a görbe $\phi \in [0; \alpha]$ íve hasonló a $\phi \in [\beta, \beta + \alpha]$ ívhez!

b) Vázoljuk a spirált!

7.2. Görbék tulajdonságai

7.1. (M) Számítsuk ki az origó középpontú egység sugarú kör $x \in [0; \xi]$ intervallum fölötti ívének hosszát az integrálszámítás segítségével!

7.2. Számítsuk ki a 7.2. feladatban megadott ciklois $t_1 = 2, t_2 = 3$ paraméterértékek közés eső részének területét!

7.3. (M) Számítsuk ki a 7.3. feladatban megadott asztrois

a) teljes ívének hosszát;

b) által határolt tartomány területét!

c) Mutassuk meg, hogy az asztrois érintőjének a koordinátatengelyek közé eső darabja állandó hosszúságú! (A fal mellett lecsúszó pálca asztroist érint.)

7.4. A sík egy pontját megadja az origótól való r távolsága és helyvektorának az x -tengely pozitív félegyenesével bezárt φ (polár)szöge. Azt mondjuk, hogy megadtuk a görbe *poláris egyenletét*, ha meghatároztuk az $r(\varphi)$ függvényt, tehát kifejeztük a sugarat a polárszög függvényében.

a)

Fejazzük ki a $r(\varphi)$ poláris egyenlettel megadott görbe $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ közti ívének hosszát!

7.5. (M) *Arkhimédészi spirális*

a) Határozzuk meg a 7.4. feladatban megadott Arkhimédészi spirális első teljes (a $\varphi = 0, \varphi = 2\pi$ értékek közé eső) ívének hosszát!

b) Számítsuk ki a sugár és az érintő szögét, azaz adjuk meg a φ paraméter függvényében a az origót a görbe φ paraméterű P_φ pontjával összekötő egyenes és a spirál P_φ pontjához húzott érintő egyenes szögét!

c) *A kör négyszögesítése*

Adott egy Arkhimédészi spirál a síkon és egy kör. Szerkesszük a körrel egyenlő területű téglalapot!

d) *Szögharmadolás*

Adott egy Arkhimédészi spirál a síkon és egy szög. Szerkesszük meg a szög harmadát!

7.6. Forgassuk meg az $y = x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt tartományt az $x = 0$ és $x = 1$ értékek között az x -tengely körül és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát!

7.7. Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény x -tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest $1 \leq x \leq 2$ abszcisszájú pontok által határolt részének térfogatát!

7.8. *Hengerek áthatása*

Két r sugarú körhenger úgy helyezkedik el, hogy forgástengelyük egy síkban fekszik és merőleges egymásra. Határozzuk meg a két henger közös részének térfogatát!

7.9. *Paraméterezett görbe forgatása*

Adjuk meg a $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ paraméterezett görbe $t = \alpha$, $t = \beta$ paraméterértékekhez tartozó pontjai közti ívének x -tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogatát (feltételezzük, hogy ott y az x függvénye)!

7.10. (M) *Parabola ívhossza*

Számítsuk ki az $y = x^2$ normálparabola $x = 0$ és $x = 1$ abszcisszájú pontjai közti ívének hosszát!

7.11. (M) *Exponenciális fv. grafikonjának ívhossza*

Számítsuk ki az $y = e^x$ exponenciális függvény $x = 0$ és $x = 1$ abszcisszájú pontjai közti ívének hosszát!

7.12. (M) *Ciklois ívhossza, területe*

Határozzuk meg egy teljes ciklois ív (lásd a 7.2. feladatot)

a) hosszát;

b) alatti terület nagyságát!

7.13. (M) *Logaritmikus spirál*

a) Határozzuk meg, hogy az $r = a \cdot e^{b\varphi}$ egyenletű logaritmikus spirál (lásd a 7.6. feladatot) mekkora szöget zár be azzal a sugáregyenessel, amit éppen metsz! (Tehát a görbe adott pontbeli érintőjének és a pontot az origóval összekötő egyenesnek a szögét kell meghatározni.)

b) Számítsuk ki a görbe egy teljes ívének, a $\varphi \in [0; 2\pi]$ paramétertartományhoz tartozó ívnek a hosszát!

8. FEJEZET

Furcsa függvények

8.1. (M) Van-e olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a) függvény,

b) folytonos függvény,

amelyre $f(x)$ pontosan akkor racionális, ha $f(x+1)$ irracionális?

8.2. (M) Van-e olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek lokális szélsőértékhelyei:

a) $X_0 = -2$ (minimum), $X_1 = 0$ (maximum), $X_2 = 2$ (minimum);

b) $X_0 = -2$ (minimum), $X_1 = 2$ (minimum);

és más lokális szélsőérték helye nincs? Van-e a mindenhol deriválható függvények között ilyen?

8.3. (M) Legyen f az $x_0 \in \mathbb{R}$ szám egy környezetében értelmezett függvény. Tekintsük a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

határértékeket. Szemléltessük jelentésüket! Melyikük létezéséből következtethetünk a másik létezésére? Milyen kapcsolat van a két határérték között, ha mindkettő létezik?

8.4. Legyen f az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy U környezetében értelmezett, x_0 -ban differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy ha $\{\alpha_n\} \subset U$, $\{\beta_n\} \subset U$ tetszőleges sorozatok, melyekre $\alpha_k \neq \beta_k$ ($k \in \mathbb{N}$) és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = x_0,$$

akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha_k) - f(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k} = f'(x_0).$$

8.5. Az alábbi függvények 0-n kívül minden valós számon értelmezettek. Közülük melyiket lehet úgy értelmezni 0-ban, hogy ott

a) folytonos b) differenciálható

legyen?

$$f_1(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

8.6. A 8.0.1 ábrán a g függvény grafikonja látható. A grafikon darabjai 3 ill. (-3) meredekségű szakaszok, végpontjaik az x -tengelyen ill. az $y = x$ egyenesen vannak. Legyen $g(0) = 0$.

a) Mutassuk meg, hogy g a $[-4; 4]$ intervallumban folytonos!

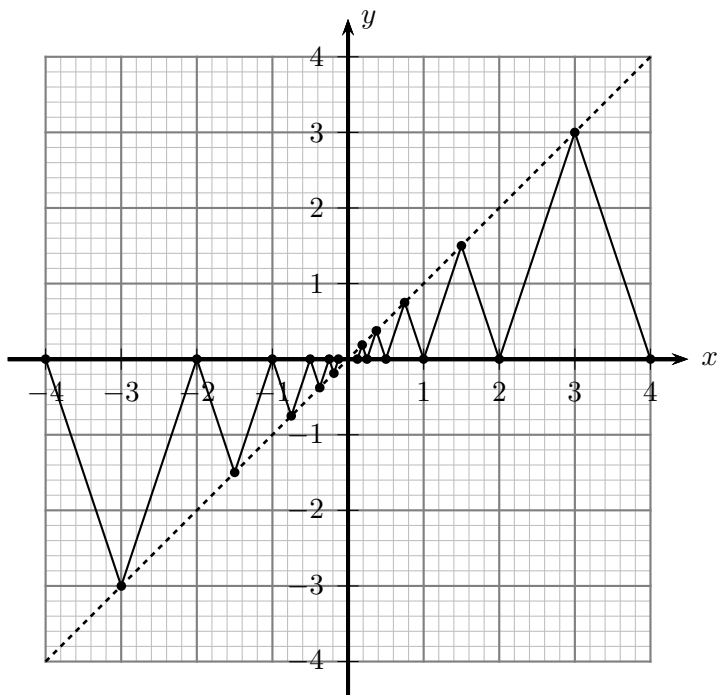
b) Mutassuk meg, hogy g a $(-4; 4)$ intervallumban végtelen sok helyen nem differenciálható!

Jelölje $G(x)$ a g függvény grafikonja az x tengely és az $x = -4$ egyenes által határolt rész előjeles területét (az x tengely alatti területrészek negatívan, az a fölöttiek pozitívan számolandók). Tehát pl $G(-4) = G(4) = 0$.

c) Mutassuk meg, hogy G a $(-4; 4)$ intervallum minden pontjában differenciálható!

d) Határozzuk meg $G'(0)$ értékét!

e) Mutassuk meg, hogy G -nek minimuma van 0-ban, de a 0 egyik bal oldali környezetében sem igaz, hogy $G'(x) < 0$!



8.6.1. ábra.

8.7. [7] Mutassuk meg, hogy a

$$h(x) = \begin{cases} x + x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x - x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$$

függvény

- a) a 0-ban differenciálható;
- b) $h'(0) > 0$;
- c) 0 egyik környezetében sem monoton.

8.8. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek folytonosak illetve differenciálhatóak az

$$\text{a) } x = 0, \quad \text{b) } x = 1, \quad \text{c) } x = \sqrt{2}$$

pontban!

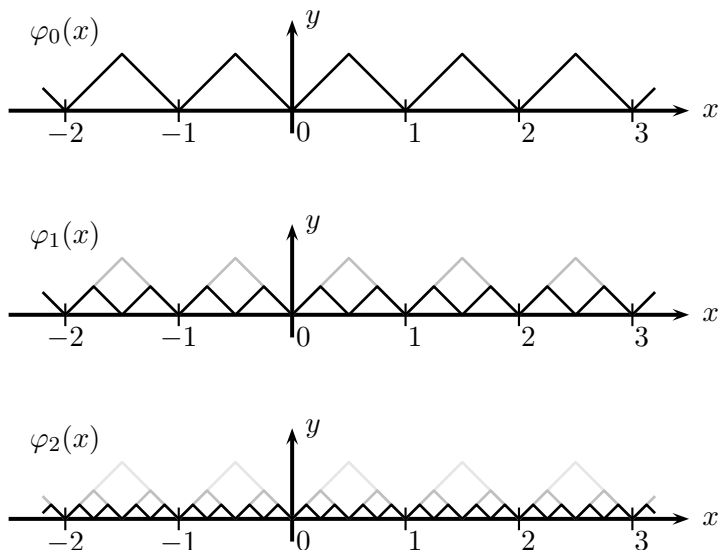
- I. $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$
- II. $f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$
- III. $f_3(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$
- IV. $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{q^3}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, (p, q) = 1, \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

8.9. Van-e olyan függvény, amely az $[0; 1]$ intervallumon folytonos, kontinuum sok helyen zérus, de nincs olyan nem üres nyílt intervallum, amelyen azonosan 0?

8.10. (M) [5] Van-der-Waerden függvénye

A φ_0 függvény grafikonja a 8.0.1. ábra felső részén látható, φ_0 periódusa 1, értékészlete a $[0; \frac{1}{2}]$ intervallum. A grafikon szimmetrikus az $x = \frac{k}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) egyenesekre. Legyen $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n} \varphi_0(2^n x)$ ($n \in \mathbb{N}^+$). A φ_1, φ_2 függvények grafikonja feketével húzva látható az alábbi ábra középső ill. alsó részén. Legyen továbbá

$$\Phi_n(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x).$$



8.10.1. ábra.

- Rajzoljuk meg a Φ_1, Φ_2, Φ_3 függvények grafikonját!
- Mutassuk meg, hogy Φ_k grafikonja egyenes szakaszokból áll és ezek meredeksége olyan egész, amelynek paritása $(k + 1)$ paritásával egyezik meg.
- Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x)$ határérték minden $x \in \mathbb{R}$ -re létezik!
- Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x)$ függvény minden $x \in \mathbb{R}$ -ben folytonos!
- Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x)$ függvény semelyik $x \in \mathbb{R}$ -ben sem differenciálható!
- Határozzuk meg $\Phi(x)$ maximumát!
- Adjuk meg $\Phi(x)$ összes maximumhelyét!

9. FEJEZET

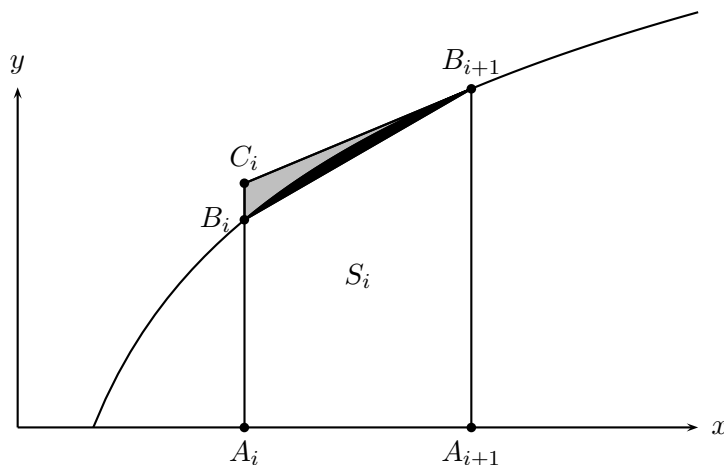
Vegyes feladatok

9.1. [9] Az f folytonos és monoton növekedő függvény a $[0; 1]$ intervallumban értelmezett, és értékészlete is ugyanez az intervallum, továbbá $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy a függvény grafikonját le lehet fedni n darab egyenként $\frac{1}{n^2}$ területű téglalappal (a téglalapok oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel)!

9.2. (M) [11] *Stirling formula*

Alább a logaritmus görbe alatti, 1 és n abszcisszák közés eső I_n területének vizsgálatából $n!$ értékére nyerünk aszimptotikus formulát.

Legyen $i \in \mathbb{N}^+$ esetén $A_i(i; 0)$, $B_i(i; \ln i)$, valamint jelölje C_i a logaritmus görbe B_{i+1} -beli érintőjének i abszcisszájú pontját és S_i , T_i , t_i rendre az $A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$ négyszög, a $B_i B_{i+1} C_i$ háromszög (az ábrán a szürke és fekete tartomány együtt) illetve a $B_i B_{i+1}$ húr és a logaritmus-görbe közti tartomány (a 9.0.1. ábrán a fekete tartomány) területét.



9.2.1. ábra.

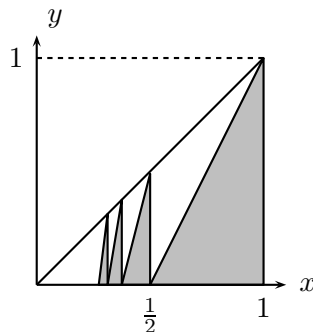
- Fejezzük ki n -nel I_n értékét!
- Fejezzük ki i -vel S_i értékét!
- Fejezzük ki $n!$ értékét az I_n -re és S_i -re kapott formulákból és a t_i területekkel!
- Mutassuk meg, hogy a $\tau_n = \sum_{i=1}^n T_i$ sorozat konvergens!
- Mutassuk meg, hogy a $\tau'_n = \sum_{i=1}^n t_i$ sorozat konvergens!
- Határozzuk meg a $c_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$ sorozat határértékét ($c_n = 1 - \tau'_n$)!
- Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1. \quad (1)$$

9.3. (M) [6] *Egy fűrészfog*

Alább (lásd a 9.0.1. ábrát) egy „fűrészfogat” vizsgálunk, amely végtelen sok f„fog”-ból áll. A fogak az x tengely $[0; 1]$ intervalluma és az $y = x$ függvény grafikonja között található. A fogak derékszögű háromszögek, melyek két befogója vízszintes illetve függőleges az ábra szerint.

A háromszög átfogója az origó felé haladva egyre meredekebb. A legnagyobb, az $(1; 1)$ pontban cégződő fűrészfog bal oldala 2 meredekségű, a következő fog bal oldala már 4 meredekségű, majd 6 meredekségű fog következik, és így tovább.



9.3.1. ábra.

- a) Mutassuk meg, hogy a fogazat (a ferde átfogók x tengellyel alkotott metszéspontjai) tartanak az origóhoz ($x = 0$ -hoz)!
- b) Határozzuk meg a háromszögek területének összegét!

9.1. Elliptikus integrálok

9.1. (M) Ez a feladat az $I_0(\xi) = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integrálról szól, amely az origó középpontú egységkör azon ívének hosszát adja meg, amelynek x tengelyre eső vetülete a $[0; \xi]$ intervallum. A primitívfüggvény felhasználása nélkül számítsuk ki az

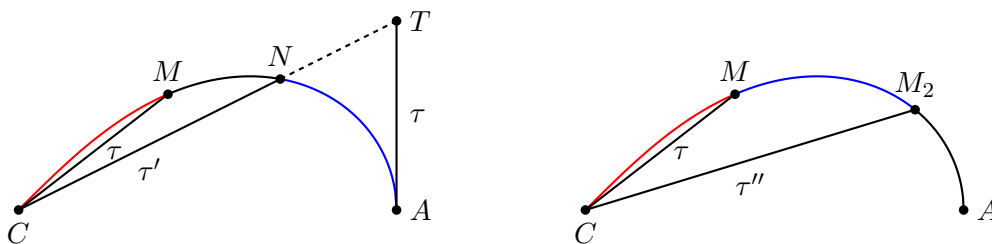
- a) $x = \sqrt{1-u^2}$,
- b) $x = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}$ $(0 \leq x, \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}})$

helyettesítéssel adódó új integrandusokat $(0 \leq u, z \leq 1)$, és az integrálás határait. Értelmezzük a kapott eredményt!

9.2. (Fagnano a lemniszkátáról)

a) Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-féle lemniszkáta (lásd a 7.5. feladatot) origóból induló τ hosszú húrjához tartozó ívének hossza (lásd a 9.1.1. ábrát):

$$\int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{1}$$



9.2.1. ábra.

b) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta görbén a $CM = \tau$ hosszúságú és a

$$CN = \tau' = \sqrt{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}$$

hosszúságú húrhoz tartozó ívek negyedívre egészítik ki egymást, azaz a \widehat{CM} ív az \widehat{AN} ívvel, a \widehat{CN} ív pedig az \widehat{AM} ívvel egyenlő hosszú.

c) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta görbén a $CM = \tau$ hosszúságú húrhoz tartozó ív hosszának kétszeresével egyenlő a

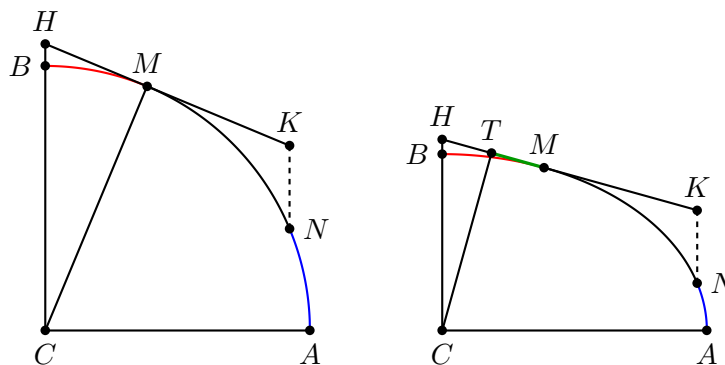
$$CM_2 = \tau'' = \frac{2\tau\sqrt{1-\tau^4}}{1+\tau^4}$$

hosszúságú húrhoz tartozó ív hossza.

d) Mutassuk meg, hogy ha a lemniszkáta CA tengelyére merőlegest állítunk az A végpontban és erre felmérjük az $AT = CM$ szakaszt, akkor a CT félegyenes kimetszi a lemniszkátából azt az N pontot, amelyre a \widehat{CM} , \widehat{NA} lemniszkátaívek egyenlő hosszúak.

9.3. (M) (Fagnano és az ellipszis)

a) Tekintsük a C középpontú r sugarú k kör \widehat{AB} negyedkörívét és rajta a tetszőlegesen felvett M pontot (lásd a 9.1.1. ábrát). A k kör M -beli érintőjén vegyünk fel a H , K pontokat úgy, hogy H a CB félegyenes metszéspontja legyen, míg K a H -tól M felé helyezkedjék el H -tól r távolságra. Messe a K -n át húzott CB -vel párhuzamos egyenes a negyedkörívet az N pontban. Mutassuk meg, hogy a kör \widehat{BM} , \widehat{NA} ívei egyenlők.



9.3.1. ábra.

b) (Fagnano pont, mint extrémum)

Most egy k ellipszist vizsgálunk, melynek középpontja C , fél nagytengelye CA , fél kistengelye CB . Tekintsük az ellipszis \widehat{AB} negyedívén egy tetszőleges M pontot és legyen a C középpont merőleges vetülete az ellipszis M -beli érintőjén T . Határozzuk meg az MT szakasz hosszának maximumát!

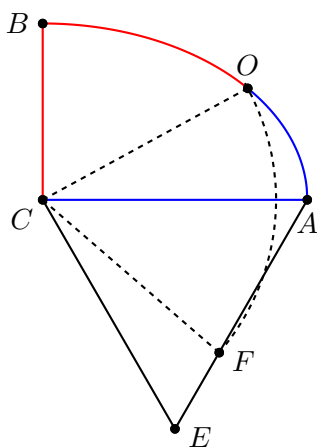
c) Tekintsük még az ellipszis M -beli érintőjén a H , K pontokat úgy, hogy H a CB félegyenes metszéspontja legyen, míg K a H -tól M felé helyezkedjék el H -tól a CA fél nagytengellyel egyenlő távolságra. Messe a K -n át húzott CB -vel párhuzamos egyenes a negyed ellipszisívet az N pontban. Mutassuk meg, hogy az ellipszis \widehat{BM} , \widehat{NA} íveinek különbsége a TM szakasz hosszával egyenlő.

d) (Fagnano pont, mint kerületfelező)

Ha az ACB ellipszisnegyed CA féltengelyére egy CAE egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk (lásd a 9.1.2. ábrát), és az AE oldalra felmérjük az $AF = CB$ féltengelyt, akkor a C középpontú F -en átmenő kör a \widehat{BA} ellipszisívet egy olyan O pontban metszi, amelyre

$$CA + \widehat{AO} = CB + \widehat{BO},$$

tehát a CA , CB féltengelyek és a BC ív alkotta zárt görbe kerületét felezi a CO egyenes.



9.3.2. ábra.

Segítség, útmutatás

1. Harmadfokú függvények

1.1. úgy kell t -t választanunk, hogy a másodfokú tag kiessen: $t = \frac{-b}{3a}$.

1.3. Az 1.1 feladatban látott módon "eltüntethető" a négyzetes tag és a főegyüttható kiemelése után alkalmazható a ?? feladat. Azt kapjuk, hogy a függvény az $x = \frac{-b}{3a}$ abszcisszájú pontra középpontosan tükrös.

1.2. A feladat deriválással könnyen megoldható. De megoldható "elemien is": a ?? feladatban alkalmazott, $\frac{b}{3a}$ -val való eltolás után látható, hogy ha a pozitív, akkor a szimmetria középpont előtt konkáv a függvény, utána konvex, ha a negatív, akkor pont fordítva.

1.2. Ismét az segít, ha a polinomot átrendezzük $x + \frac{b}{3a}$ hatványai szerint. A másodfokú tag eltűnik, az elsőfokú tag együtthatója $\frac{3ac-b^2}{a^2}$. Ha ez a szám pozitív, akkor a függvény szigorúan monotonan növekszik, tehát csak egy nullhelye van.

1.3. Az 1.2 mindkét megoldása célra vezet most is. Ráadásul mindkét esetben ugyanazzal az a paraméterrel.

1.1. Lényegében minden állítást beláttunk már korábban, x_0 és x_1 értékét úgy kapjuk, hogy alkalmazzuk az $x' = x + \frac{b}{3a}$ helyettesítést és az így kapott $f(x')$ függvényre alkalmazzuk az 1.4 feladatot.

1.2. Nyilvánvaló, hogy a szimmetria miatt elég az egyik állítást belátni. Az is könnyen megmondható, hogy elég az $x^3 - px$ alakú függvényekre ($p > 0$) belátni az állítást. Ez kétféleképp is történhet. Az egyik: kiszámoljuk a függvény értékét $\frac{\sqrt{p}}{3}$ és $-2\frac{\sqrt{p}}{3}$ pontban: mindkettőre $\frac{-2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$ -at kapunk.

A másik lehetőség: legyen az x_0 abszcisszájú ponton átmenő vízszintes egyenes az x -tengely. (Ehhez csak q -t kell jól választani az $x^3 - px + q$ függvényben.) Ekkor x_0 -ban a függvénynek kétszeres nullhelye van (mert nem előtte nő, utána csökken), a gyökök összege pedig nulla, tehát a harmadik gyök $-2x_0$.

1.3. Alkalmazzuk az 1.2 feladatban kapott eredményt. Pontosan akkor van három valós gyök, ha a függvény értéke x_0 -ban nem negatív, x_1 -ben nem pozitív. Kiszámolható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $(\frac{q}{2})^2 \leq (\frac{p}{3})^3$.

2. Az érintő

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Függvényvizsgálat

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

4. Szélsőérték

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

5. Egyenlőtlenségek

5.3. Legyen $t = \frac{x}{y}$. Az egyenlőtlenség az $f(t) = at - t^a + 1 - a$ függvény vizsgálatára vezet. Mutassuk meg, hogy $0 < t$ esetén ez $t = 1$ -ben minimális.

6. Alapvető integrálok

6.6. Ha $t = \operatorname{arsh} x$, akkor $\operatorname{sh} t = x$, azaz $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$. Oldjuk meg ezt az egyenletet a t ismeretlenre!

6.3. Alkalmazzuk a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítést!

6.4. Alkalmazzuk a $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$ helyettesítést vagy a 6.4. feladat eredménye alapján sejtjük meg az eredményt!

6.5. Alkalmazzuk a $t = \sqrt{x+1}$ helyettesítést!

6.6.

1. segítség, útmutatás. Próbálkozzunk egyfajta „maradékosan osztással”!

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzuk az $e^x = t$ helyettesítést!

6.7.

1. segítség, útmutatás. Alakítsuk a \sin függvényt \cos függvénnyé, majd a $\cos 2\alpha$ -ra vonatkozó megfelelő összefüggés alkalmazásával alakítsuk át a nevezőt!

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzuk a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítést!

6.8. Alkalmazzuk a $t = 1 + e^x$ helyettesítést!

6.9. Alkalmazzuk a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítést!

6.10. Alkalmazzuk a $t = \sqrt{x-1}$ helyettesítést!

7. Görbék

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

8. Furcsa függvények

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

9. Vegyes feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

Megoldások

1. Harmadfokú függvények

1.2. Az $y = x^3 + px$ függvény páratlan függvény, tehát van szimmetria középpontja: az origó. Ezt kell q -val "feltolni". Tehát a függvény a $(0|q)$ pontra szimmetrikus.

1.1. Deriválással természetesen könnyen adódik az állítás. De belátható elemien is. Most ez következik.

Nyilván elég az egyik állítást belátni. Pozitív x -ekre az x^3 függvény grafikonja konvex, a lineáris függvény pedig az egész számegyenesen konvex (és konkáv is!). Két konvex függvény összege is konvex.

Az x^3 függvény konvexitása a pozitív félegyenesen "elemien" (deriválás nélkül) a következőképpen látható be. Legyen z_0 rögzített pozitív szám, z pedig fusson a pozitív félegyenesen. A z_0 és a z abszcisszájú pontot összekötő szakasz meredeksége $\frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = z^2 + zz_0 + z_0^2$. A konvexitás ekvivalens azzal, hogy z növekedésével ez a meredekség növekszik, ami viszont nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi gondolat közvetlenül az $x^3 + px + q$ függvényre is alkalmazható. Ebben az esetben a meredekséghez a konstans p érték adódik hozzá, ami nem változtat a növekedésen.

1.1. Ha volna két valós gyök, akkor a hozzájuk tartozó két gyöktényező szorzatát, akkor egy elsőfokú valós együtthatós polinomot kapunk, amelynek valós a gyöke. Ha tehát volna két valós gyök, akkor három is volna. Ebben az esetben a három gyök összege a volna, a kettős szorzatok összege pedig b . A gyökök négyzetösszege $a^2 - 2b$ és három valós szám négyzetösszege legalább akkora, mint a kettős szorzataik összege, tehát a^2 nem kisebb $3b$ -nél.

Beláttuk, hogy a polinomnak legfeljebb egy valós gyöke van. Azt viszont tudjuk, hogy a valós együtthatós harmadfokú polinomnak legalább egy valós gyöke van.

1.1. A feladat könnyen megoldható deriválással, de itt most egy elemi utat mutatunk.

Az egyenlőtlenség bal oldala szorzattá alakítható, s ekkor azt kell belátnunk, hogy

$$x(1+x)(3-5x) \leq \frac{16}{27}.$$

A bal oldalon három tényezős szorzat áll, tehát megpróbálkozhatunk a számtani és mértani közép közötti összefüggés alkalmazásával. Ha x pozitív, akkor a bal oldalon vagy minden tényező pozitív (ha $x < \frac{3}{5}$, vagy az utolsó tényező nulla, vagy negatív, ekkor nincs mit bizonyítanunk. Feltehető tehát, hogy $x < 0,6$ és minden tényező pozitív, ez tehát nem akadály a alkalmazásnak. Nagyobb baj, hogy a három tényező összege nem állandó. Ezen segíthetünk, ha például az utolsó tényezőt a -val, az elsőt $5a - 1$ -gyel szorozzuk. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(5a - 1)x(1+x)(3a - 5ax) \leq \frac{(1+3a)^3}{27},$$

vagy másképp

$$x(1+x)(3-5x) \leq \frac{(1+3a)^3}{27a(5a-1)}.$$

Eddig a -t tetszőleges pozitív számnak választhattuk. A legélesebb becslést nyilván akkor kapjuk, ha egyenlőség is lehet. Ez a számtani és mértani közép között akkor áll fenn, ha a bal oldalon minden tényező egyenlő. Az első két tényező akkor lesz egyenlő, ha $x = \frac{1}{5a-2}$, a második és a harmadik akkor lesz egyenlő, ha $x = \frac{3a-1}{5a+1}$. Olyan a -t kell keresnünk, amelyre ez a két érték egyenlő. Így a

$$15a^2 - 16a + 1 = 0$$

egyenlethez jutunk, amelynek egyik megoldása $a = 1$. (A másik megoldás az $\frac{1}{15}$, ez negatív x értéket ad, ezért nem jó.) Behelyettesítve éppen a feladat állítását kapjuk.

1.2.

1. megoldás. Az állítás kijön deriválással, a bal oldal minimumát kell megkeresni pozitív x -ekre. Mi most ismét elemi megoldást mutatunk. Sőt, kettőt is. Az első pontosan úgy "működik", mint az 1.3 megoldása.

Az egyenlőtlenség bal oldala $x(2+x)(2-x)$ alakban írható. Ismét a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget akarjuk alkalmazni. Ebben az alakban biztos nem jutunk eredményre, hiszen a három szám tényező összege nem állandó.

Ezen azonban tudunk segíteni, ha az első tényezőt megszorozzuk egy a pozitív számmal, a másodikat pedig egy b pozitív számmal, amelyekre igaz, hogy

$$1 + a = b.$$

Ha ez teljesül, akkor a három tényező összege állandó, így - legalábbis minden nulla és kettő közötti x -re alkalmazható a számtani és mértani közép közötti összefüggés, és azt kapjuk, hogy

$$ax(2+x)(2b-2x) \leq 8(1+b)^3,$$

vagyis

$$x(4-x^2) \leq \frac{(2+a)^3}{27a(1+a)}.$$

Megjegyezzük még, hogy ha $x > 2$, akkor a bal oldal negatív, tehát a fenti egyenlőtlenség akkor is teljesül.

Eddig a -t tetszőlegesen választottuk. De hogyan válasszuk meg a -t, hogy a lehető legjobb felső becslést kapjuk? Ezt akkor kapjuk, ha van olyan pozitív x , amelyre a három tényező, ax , $2+x$ és $2b-2x$ egyenlő, azaz

$$ax = 2 + x = 2 + 2a - (1 + a)x.$$

Az első egyenletből $x = \frac{2}{a-1}$. A másodikból $x = \frac{2a}{2+a}$. Ennek a két értéknek kell egyenlőnek lennie. Ez $a^2 - 2a - 2 = 0$ esetén teljesül. Az egyenlet pozitív megoldása

$$a = 1 + \sqrt{3}.$$

Ezt behelyettesítve az $x(4-x^2)$ -re kapott becslésbe pontosan a feladat állítását kapjuk.

Egyenlőség akkor van, amikor $x = \frac{2}{a-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. megoldás. A nulla és kettő közötti x -ek esetében a "szerepek" ügyesebben is kiosztatók, ha a feladat bal oldalán álló szorzatot

$$x\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2}$$

alakba írjuk fel. Itt két tényező már eleve egyenlő, és elég az x tényezőt szoroznunk egy a számmal. Ekkor a számtani és mértani közép közötti összefüggés azt adja, hogy

$$ax\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2} = \sqrt{a^2x^2}\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2} \leq \left(\frac{a^2x^2 + 8 - 2x^2}{3}\right)^1, 5.$$

Ha itt a -t $\sqrt{2}$ -nek választjuk, akkor a jobb oldal állandó, $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, és ha az egyenlőtlenséget elosztjuk $a = \sqrt{2}$ -vel éppen a feladat állítását kapjuk. Egyenlőség akkor van, ha $2x^2 = 4 - x^2$, azaz $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

1.4. Az $f(x) = x^3 - px + q$ függvénynek egy tetszőleges x ponthoz tartozó differenciáhányados függvénye $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = y^2 + yx + x - p$. A $0 < x < \sqrt{\frac{p}{3}}$ intervallumon ez mindig negatív, így itt az f függvény szigorúan monotonan csökken. Az $x > \sqrt{\frac{p}{3}}$ félegyenesen ez az érték mindig pozitív, így itt az f függvény szigorúan monotonan nő.

2. Az érintő

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

3. Függvényvizsgálat

3.1. $f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$

I. ÉT: $x > 0$. **II.** –

$$\text{III. } f_1(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ = 0, & \text{ha } x = 1; \\ > 0, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$$

IV. Határértékek:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = -\infty$, mert $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, de $x > 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$, mert korábban vettük ($\ln x$ lassabban nő, mint x).

V. $f_1'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - (x)'\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$;

$$\text{VI. } f_1'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } e < x; \\ = 0, & \text{ha } x = e; \\ > 0, & \text{ha } x < e. \end{cases}$$

A derivált $e \approx 2,71828$ -ban előjelet vált (+-ből -), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $1/e \approx 0,36788$.

$(0, e)$ -ben f_1 szig. mon. nő, (e, ∞) -ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(-\infty; \frac{1}{e}]$.

VIII. $f_1''(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1 - \ln x)'x^2 - (x^2)'(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$;

$$\text{IX. } f_1''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < e^{\frac{3}{2}}; \\ = 0, & \text{ha } x = e^{\frac{3}{2}}; \\ > 0, & \text{ha } e^{\frac{3}{2}} < x. \end{cases}$$

$e^{\frac{3}{2}} \approx 4,48169$.

$f_1(x)$ alulról konkáv $(0; e^{\frac{3}{2}})$ -ben, míg alulról konvex $(e^{\frac{3}{2}}; \infty)$ -ben.

X. Grafikon: lásd a 3.1. ábrát!

$f_2(x) = e^{8x - x^2 - 14}$

I. ÉT: \mathbb{R} . **II.** $f_2(x) = e^{-(x-4)^2+2}$, így a grafikon $x = 4$ -re szimmetrikus: $f_2(x_1) = f_2(x_2)$, ha $\frac{x_1+x_2}{2} = 4$.

III. $f_2(x) > 0$, , ha $x \in \mathbb{R}$.

IV. Határértékek:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 0$.

V. $f_2'(x) = (8 - 2x)e^{8x - x^2 - 14}$;

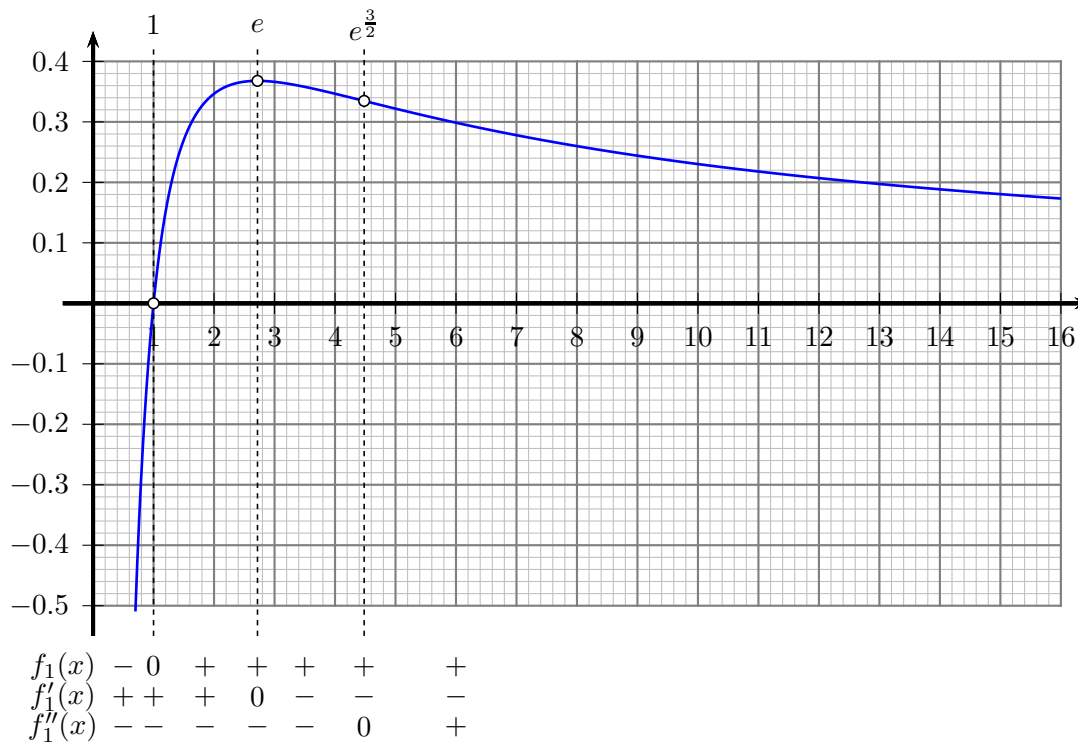
$$\text{VI. } f_2'(x) \begin{cases} > 0, & \text{ha } x > 4; \\ = 0, & \text{ha } x = 4; \\ < 0, & \text{ha } 4 < x. \end{cases}$$

A derivált $x = 4$ -ben előjelet vált (+-ből -), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $e^2 \approx 7,3891$. Mindez már a II-ben látott alakból is leolvasható.

$(-\infty, 4)$ -ben f_2 szig. mon. nő, $(4, \infty)$ -ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(0; e^2]$.

VIII. $f_2''(x) = \left((8 - 2x)e^{8x - x^2 - 14}\right)' = (8 - 2x)'e^{8x - x^2 - 14} + (8 - 2x)(e^{8x - x^2 - 14})' = -2 \cdot e^{8x - x^2 - 14} + (8 - 2x)^2 e^{8x - x^2 - 14} = (4(x - 4)^2 - 2)e^{8x - x^2 - 14}$;



3.1M.1. ábra.

IX. $f_2''(x) \begin{cases} > 0, & \text{ha } x \in \left(4 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \\ = 0, & \text{ha } x = 4 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ > 0, & \text{ha } x < 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ vagy } 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} < x. \end{cases}$

$4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 3,2929, \quad 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 4,7071.$

$f_2(x)$ alulról konvex $\left(4 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ -ben, míg konkáv $\left(-\infty; 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ -ben és konkáv $\left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$ -ben is.

X. Grafikon: lásd a 3.2. ábrát!

$f_3(x) = xe^{-x}$

I. ÉT: \mathbb{R} . II. -

III. $f_3(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < 0; \\ = 0, & \text{ha } x = 0; \\ > 0, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

IV. Határértékek: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_3(x) = 0.$
 $> 0, \quad \text{ha } x < 1;$

V. $f_3'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$; VI. $f_3'(x) = 0, \quad \text{ha } x = 1;$
 $< 0, \quad \text{ha } 1 < x.$

A derivált $x = 1$ -ben előjelet vált (+-ből -), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $1/e \approx 0,36788$.

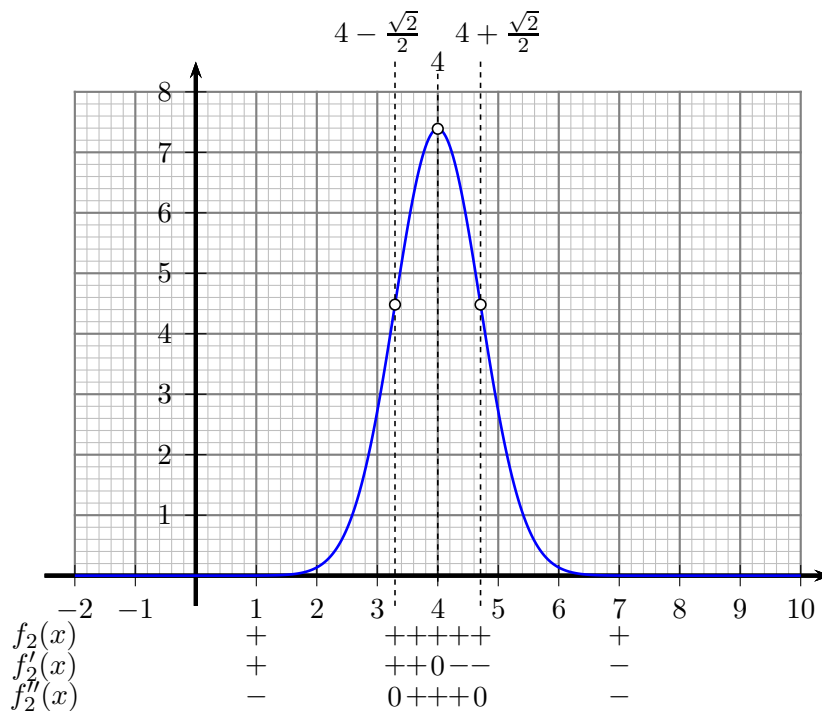
$(-\infty, 1)$ -ben f_3 szig. mon. nő, $(1, \infty)$ -ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(-\infty; 1/e]$.

VIII. $f_3''(x) = (x-2)e^{-x}$;

IX. $f_3''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < 2; \\ = 0, & \text{ha } x = 2; \\ > 0, & \text{ha } x > 2. \end{cases} \quad f_3(x) \text{ alulról konvex, ha } x > 2 \text{ és alulról konkáv, ha } 2 < x.$

X. Grafikon: lásd a 3.3. ábrát!



3.1M.2. ábra.

$$f_4(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$$

I. ÉT: \mathbb{R} . **II.** páratlan függvény, periódusa 2π . A továbbiakban a $[0; 2\pi]$ intervallumban vizsgáljuk.

$f_4(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) + \frac{\sin(4\pi - 2x)}{2} = -\sin(x) - \frac{\sin 2x}{2} = -f_4(x)$, tehát a grafikon szimmetrikus a $(\pi; 0)$ pontra.

III. $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} = \sin x + \sin x \cos x = \sin x(1 + \cos x)$

$$\sin x \begin{cases} < 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi; \\ = 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } \pi; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(1 + \cos x) \begin{cases} = 0, & \text{ha } x = \pi; \\ > 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$f_4(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi; \\ = 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } \pi; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

IV. Határértékek: -

V. $f_4'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x + 1)$;

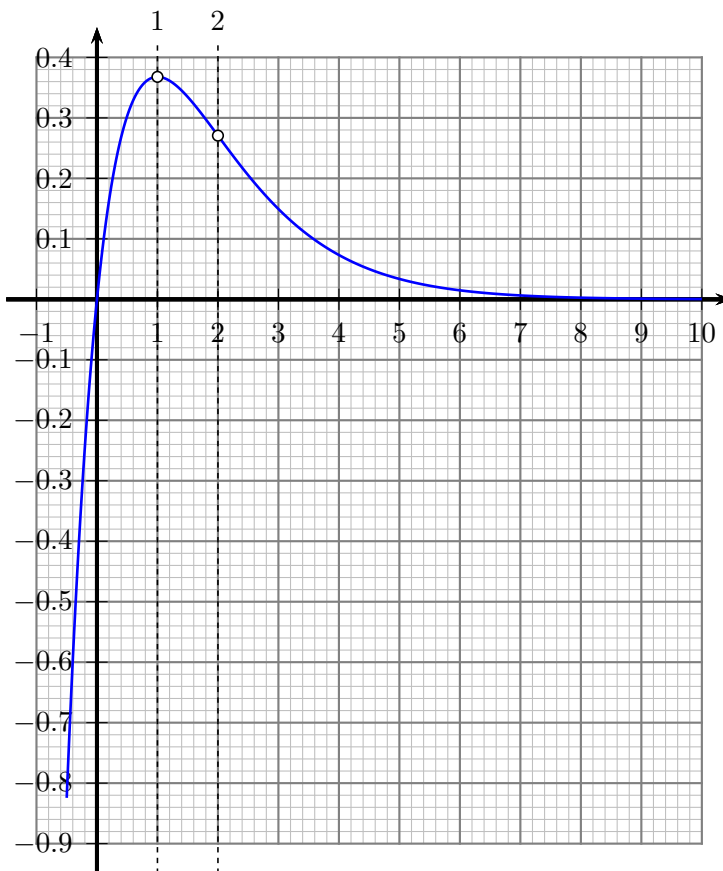
VI. $\cos x - \frac{1}{2} \begin{cases} < 0, & \text{ha } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3}; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi. \end{cases}$, $(1 + \cos x)$ előjele fent olvasható.

$$f_4'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } \frac{\pi}{3} < x < \pi \text{ vagy } \pi < x < \frac{5\pi}{3}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{\pi}{3} \text{ vagy } \pi \text{ vagy } \frac{5\pi}{3}; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi. \end{cases}$$

A derivált $x = \frac{\pi}{3}$ -ben és $x = \frac{5\pi}{3}$ -ben előjelet vált, előbbiben $+$ -ból $--$ -ba, utóbbiban fordítva, így előbbiben maximuma, utóbbiban minimuma van a függvénynek. A globális maximum, értéke

$$\sin \frac{\pi}{3} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,2990, \text{ a minimumé ennek ellentettje.}$$

$(0, \frac{\pi}{3})$ -ban f_4 szig. mon. nő, $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ -ben szig. mon. fogy, majd $(\frac{5\pi}{3}; \pi)$ -ben megint szig mon nő.



| | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_3(x)$ | - | 0 | + | + | + | + | + | + |
| $f_3'(x)$ | + | + | + | + | 0 | - | - | - |
| $f_3''(x)$ | - | - | - | - | - | 0 | + | + |

3.1M.3. ábra.

VII. ÉK: $[-\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}]$.

VIII. $f_4''(x) = -(1 + 4 \cos x) \sin x$;

IX. $1 + 4 \cos x = 0$, ha $x_1 = 1,8235$ vagy $x_2 = 4,4597$ radiánban.

$$f_4''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < x_1 \text{ vagy } \pi < x < x_2; \\ = 0, & \text{ha } x = 0, x_1, \pi, x_2; \\ > 0, & \text{ha } x_1 < x < \pi \text{ vagy } x_2 < x < 2\pi. \end{cases} \quad f_4(x) \text{ alulról konvex } (x_1; \pi)\text{-ben és } (x_2; 2\pi)\text{-ben is és alulról konkáv } (0; x_1)\text{-ben és } (\pi; x_2)\text{-ben is.}$$

ben is és alulról konkáv $(0; x_1)$ -ben és $(\pi; x_2)$ -ben is.

X. Grafikon: lásd a 3.4. ábrát!

$$f_5(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{10}$$

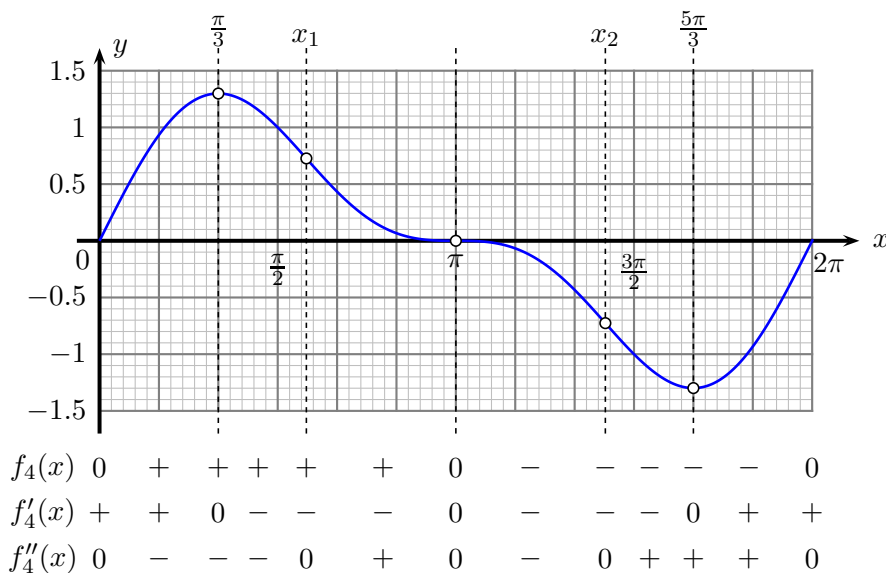
I. ÉT: \mathbb{R}^+ , de folytonosan kiterjeszthető 0-ra (lásd később). II. -

$$\text{III. } f_5'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < 10; \\ = 0, & \text{ha } x = 10; \\ > 0, & \text{ha } 10 < x. \end{cases}$$

IV. Határértékek: $\lim_{x \rightarrow 0} f_5(x) = 0$ (nem nyilvánvaló), $\lim_{x \rightarrow \infty} f_5(x) = \infty$.

$$\text{V. } f_5'(x) = x \ln \frac{x}{10} + \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \frac{1}{10} = x \cdot \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{x}{10} \right);$$

$$\text{VI. } f_5''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{10}{\sqrt{e}}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{10}{\sqrt{e}}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{10}{\sqrt{e}} < x. \end{cases} \quad \frac{10}{\sqrt{e}} \approx 6,0653$$



3.1M.4. ábra.

A derivált $x = \frac{10}{\sqrt{e}}$ előjelet vált, --ból +-ba, így ott globális minimuma van a függvénynek. A globális minimum értéke $-\frac{25}{e} \approx 9,1970$.

$(0, \frac{10}{\sqrt{e}})$ -ban f_5 szig. mon. fogy, $(\frac{10}{\sqrt{e}}, \infty)$ -ben szig. mon. nő.

VII. ÉK: $[-\frac{25}{e}; \infty)$.

VIII. $f_5''(x) = -\frac{3}{2} + \ln \frac{x}{10}$;

IX. $f_5''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{10}{\sqrt{e^3}}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{10}{\sqrt{e^3}}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{10}{\sqrt{e^3}} < x. \end{cases} \quad \frac{10}{\sqrt{e^3}} \approx 2,2313.$

$f_5(x)$ alulról konkáv $(0; \frac{10}{\sqrt{e^3}})$ -ben és alulról konvex $(\frac{10}{\sqrt{e^3}}; \infty)$ -ben.

X. Grafikon: lásd a 3.5. ábrát!

$f_6(x) = x \ln^2 x$

I. ÉT: \mathbb{R}^+ , de folytonosan kiterjeszthető 0-ra. II. – III. $f_6(x) > 0$ ($f_6(0) = 0$ a folyt. kiterjesztésénél);

IV. Határértékek: $\lim_{x \rightarrow 0} f_6(x) = 0$ (nem nyilvánvaló), $\lim_{x \rightarrow \infty} f_6(x) = \infty$.

V. $f'_6(x) = \ln^2 x + x \cdot (2 \ln x) \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x = \ln x \cdot (2 + \ln x)$;

VI. $\ln x \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ = 0, & \text{ha } x = 1; \\ > 0, & \text{ha } 1 < x. \end{cases} \quad 2 + \ln x \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{e^2}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{1}{e^2}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{1}{e^2} < x. \end{cases} \quad \frac{1}{e^2} \approx 0.1353;$

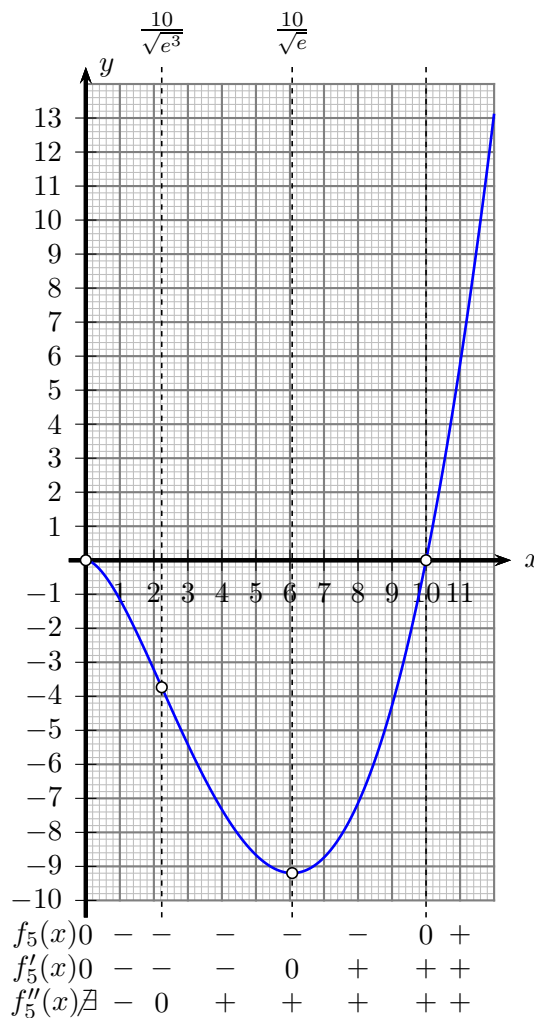
$f'_6(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } \frac{1}{e^2} < x < 1; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{1}{e^2} \text{ vagy } 1; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{e^2} \text{ vagy } 1 < x. \end{cases}$

A derivált $x = \frac{1}{e^2}$ -ben és $x = 1$ -ben előjelet vált, előbbiben +-ból --ba, így ott lokális maximum van (értéke $\frac{4}{e^2} \approx 0,5413$), utóbbiban --ból +-ba, így ott lokális minimum van (értéke 0). f_6 előjelét, határértékeit figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy f_6 globális minimuma 0, maximuma nincs.

$(0, \frac{1}{e^2})$ -ben f_6 szig. mon. nő, $(\frac{1}{e^2}; 1)$ -ben szig. mon. fogy, majd $(1; \infty)$ -ben újra szig. mon. nő.

VII. ÉK: $[0; \infty)$.

VIII. $f_6''(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$;



3.1M.5. ábra.

IX. $f''_6(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{e}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{1}{e}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{1}{e} < x. \end{cases} \quad \frac{1}{e} \approx 0,36788.$

$f_6(x)$ alulról konkáv $(0; \frac{1}{e})$ -ben és alulról konvex $(\frac{1}{e}; \infty)$ -ben.

X. Grafikon: lásd a 3.6. ábrát!

4. Szélsőérték

4.1. Legyen a kúp magassága M , alapkörének sugara R . A beírt henger magassága h , alap- és fedőkörének sugara r . A szélsőérték-feladatoknál szokásos módon az elfajuló eseteket is megengedjük. A henger adataira így

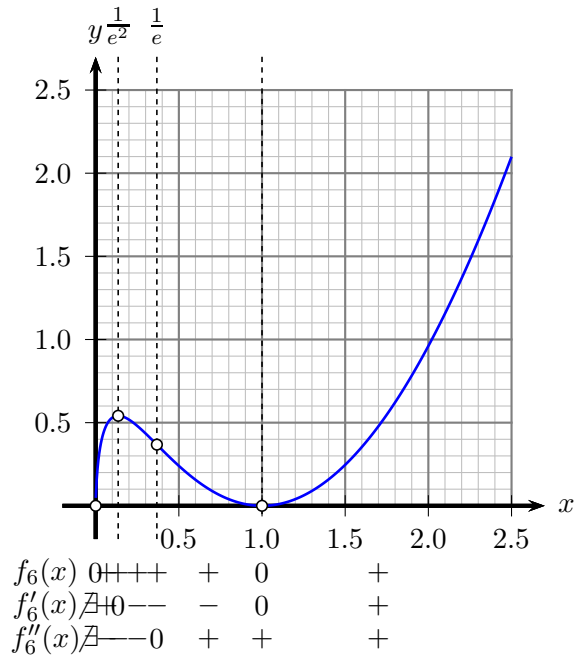
$$0 \leq h \leq M \text{ és } 0 \leq r \leq R.$$

Tekintsük először a kúp és a henger közös tengelyén átmenő ABC síkmetszetet a 4.1. ábra szerint.

A henger felszíne

$$A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

A felszínben szereplő elsőfokú változót, a henger h magasságát kifejezhetjük az r sugár és a kúp adatai segítségével. A síkmetszet jelöléseivel COB és ETB derékszögű háromszögek hasonlók,



3.1M.6. ábra.

a befogók aránya

$$\frac{h}{R-r} = \frac{M}{R}.$$

Ezt a kúp alakjára jellemző arányt λ -val jelölve

$$h = \lambda(R-r).$$

Helyettesítsük ezt a h -ra kapott kifejezést a felszín képletébe és a továbbiakban az egyszerűség kedvéért keressük az $f(r) = \frac{A}{2\pi}$ függvény szélsőértékét.

$$f(r) = \frac{A}{2\pi} = r^2 + r\lambda(R-r) = (1-\lambda)r^2 + \lambda Rr$$

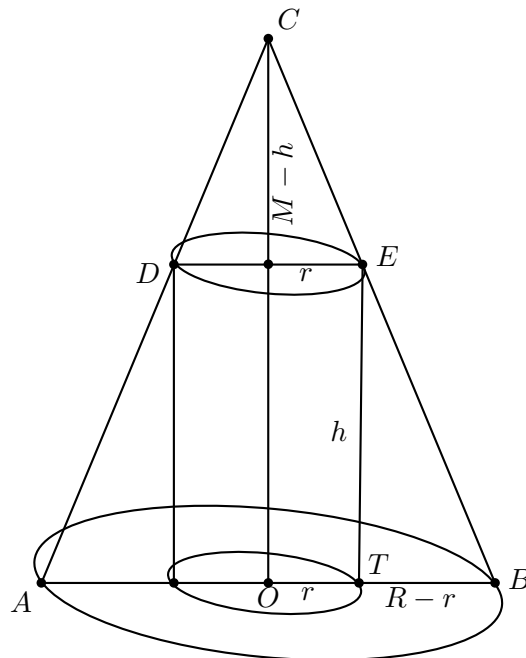
az r -nek legfeljebb másodfokú függvénye. A függvény értelmezési tartománya a $[0; R]$ intervallum, az elfajuló esetekben pedig $f(0) = 0$ és $f(R) = R^2$. A megoldás több esetre bomlik a főegyüttható, $(1-\lambda)$ előjele szerint.

Ha $\lambda = 1$, azaz a kúp nyílásszöge derékszög, akkor az $f(r)$ függvény lineáris és növekedő; maximumát az értelmezési tartomány legnagyobb elemére veszi fel: $r = R, h = 0$. Ekkor a henger elfajuló, $A_{max} = 2\pi R^2$, a kúp alapkörének kétszeres területe.

A továbbiakban a $\lambda \neq 1$ feltevés mellett másodfokú, a szokásos módon a valós számok halmazára kiterjesztett $f(r)$ függvényt vizsgáljuk. A függvénynek két zérushelye van, $r_1 = 0$ és $r_2 = \frac{\lambda R}{\lambda-1}$.

Legyen először $0 < \lambda < 1$. Ekkor $f(r)$ főegyütthatója pozitív, a kiterjesztett másodfokú függvénynek minimuma van. A függvény 0-tól különböző zérushelye negatív, így f pozitív r -ekre szigorúan monoton nő. A maximumot tehát most is az értelmezési tartomány jobb oldali végpontjában kapjuk, a henger felszíne ilyenkor is az elfajuló esetben maximális.

Legyen most $\lambda > 1$. Ekkor főegyüttható negatív, a kiterjesztett másodfokú függvénynek maximuma van. Az egyik zérushelye $r = 0$, a másik most pozitív. A válasz most már azon múlik, hogy a kiterjesztett függvény maximumahelye hol van az értelmezési tartományhoz képest. Ez az érték a két zérushely számtani közepe:



4.1M.1. ábra.

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)}.$$

Amennyiben $R \leq r_{max}$, akkor f továbbra is szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon, tehát még ilyenkor is az elfajuló esetben kapjuk a legnagyobb felszínűt. Nyomban adódik, hogy az $1 < \lambda$ feltevés mellett ez pontosan akkor teljesül, ha $\lambda \leq 2$.

Végül a $2 < \lambda$ esetben a maximumhely tényleg az értelmezési tartomány belső pontja:

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)} < R.$$

Összefoglalva: (lásd a 4.2. ábrát és a hozzá tartozó interaktív weboldalt!)

Amennyiben a kúp magasságának és sugarának hányadosa $\lambda \leq 2$, akkor a maximális felszínű beírt henger elfajuló és felszíne $A = 2\pi R^2$, a kúp alapkörének a kétszeres területe. Ha $\lambda > 2$, akkor a maximális felszínű henger sugara

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)} = \frac{\frac{M}{R} R}{2(\frac{M}{R} - 1)} = \frac{MR}{2(M - R)}.$$

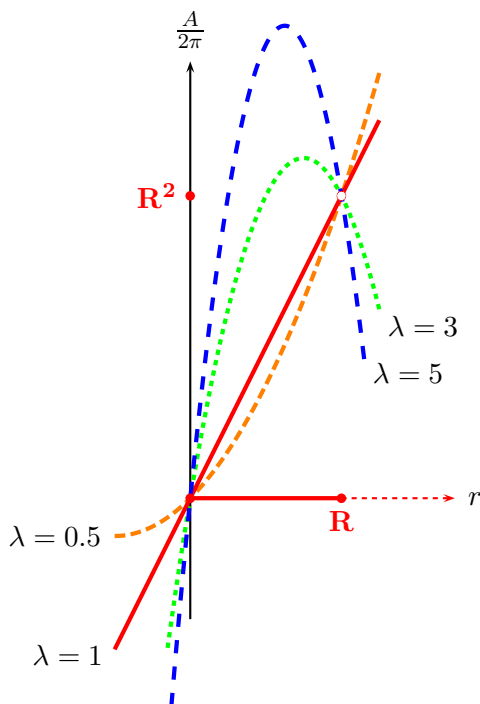
Végül írjuk fel a maximális felszínű beírt henger felszínét a $2 < \lambda$ esetben.

$$f(r_{max}) = (1 - \lambda) \frac{\lambda^2 R^2}{4(\lambda - 1)^2} + \frac{\lambda^2 R^2}{2(\lambda - 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda^2 R^2}{\lambda - 1}.$$

Így, felhasználva, hogy $M = \lambda R$, a maximális hengerfelszín:

$$A_{max} = 2\pi f(r_{max}) = \frac{\pi \lambda^2 R^2}{2(\lambda - 1)} = \frac{\lambda}{4(\lambda - 1)} \cdot 2\pi R M = \mu \cdot 2\pi R M.$$

$$f(r) = (1 - \lambda)r^2 + \lambda Rr$$



4.1M.2. ábra.

Ha $2 < \lambda$, akkor $0.25 < \mu < 0.5$, a második tényező, $2\pi RM$ pedig a kúp köré írt henger palástjának a felszíne.

Megjegyzés Láttuk, hogy ha $\lambda \leq 2$, akkor az elfajuló esetben kapjuk a maximumot, amelynek értéke az alaplap kétszeres területe, $2T = 2\pi R^2$. Ha a $2 < \lambda$ esetben is R segítségével fejezzük ki a maximális felszínt, akkor

$$A_{max} = \frac{\lambda^2}{4(\lambda - 1)} 2\pi R^2 = \lambda\mu 2T.$$

Ha $2 < \lambda$, akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy $1 < \lambda\mu$, a maximális hengerfelszín tehát ilyenkor nagyobb mint a kúp alaplapjának kétszeres területe.

5. Egyenlőtlenségek

5.10. a) $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, ha $x > 0$.

b) Az alulról nézve konvex függvény húrja a függvénygrafikon fölött helyezkedik el. Ha egy sokszög csúcsai a konvex függvény grafikonján helyezkednek el, akkor a sokszög csúcsaiból álló pontrendszer tömegközéppontja (a sokszög matematikai értelmű súlypontja) a sokszög belsejében, így a függvény grafikonja fölött helyezkednek el (Jensen egyenlőtlenség). Esetünkben, ha a pontok

$$\left(x_1; \frac{1}{x_1}\right), \quad \left(x_2; \frac{1}{x_2}\right), \quad \dots \quad \left(x_n; \frac{1}{x_n}\right),$$

akkor a súlypont

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}\right)$$

, ami tehát a görbe $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$ abszcisszához tartozó pontja felett van:

$$\frac{1}{\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

Ez az összefüggés a harmonikus és számtani közép közti egyenlőtlenség. Az egyenlőség a szigorú konvexitás miatt csak $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ esetén teljesül.

5.11. a) $f''(x) = 2 > 0$.

b) Lásd az 5.10 feladatot!

5.12. a) Vegyük észre, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény a $[0; \pi]$ intervallumban alulról konkáv, így a Jensen egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) A vizsgált kifejezés értéke bármely valóságos háromszögben pozitív, de ha pl α tart 180° -hoz, akkor a vizsgált kifejezés 0-hoz tart. Minimum tehát nincs, a legnagyobb alsó korlát a 0.

5.13. Ha a háromszög szögei α , β és γ , oldalai a , b és c , míg köréírt körének sugara R , akkor a Nagy szinusz tétel szerint

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma.$$

Innen alkalmazhatjuk az 5.12 feladat eredményét, a legnagyobb területet a szabályos háromszög esetén kapjuk, míg a terület tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet.

5.15. a) Ha a háromszög szögei α , β és γ , a körülírt kör sugara R , akkor a háromszög területe $2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. Keressük a

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

szorzat maximumát, ha $0 < \alpha; \beta; \gamma < \pi$ és $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Tekintsük az $f(x) = \ln \sin x$ függvényt! Ez a függvény a $(0; \pi)$ intervallumban alulról nézve konkáv, hiszen $f''(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$. A Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\ln \sin \alpha + \ln \sin \beta + \ln \sin \gamma}{3} \leq \ln \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \ln \sin \frac{\pi}{3},$$

és egyenlőség csakis $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ esetén van. Szorozzunk át és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$\ln(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \leq \ln \sin^3 \frac{\pi}{3}$$

Mivel az \ln függvény szigorúan monoton, így e fenti egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \sin^3 \frac{\pi}{3}$$

egyenlőtlenséggel. Tehát a szabályos háromszög adja a maximumot.

b) A terület tetszőlegesen kicsiny pozitív szám lehet, ha a háromszög egy szakaszhoz közelít.

5.16. Az 5.15. feladat megoldásának mintájára (a Nagy szinusz tétel alapján) a

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \tag{1}$$

kifejezés maximumát keressük a $(0; \pi)$ intervallumon az $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ feltétel mellett. Tekintsük az $f(x) = \sin^2 x$ függvényt! Ez a függvény a $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ intervallumban alulról nézve konkáv, hiszen $f''(x) = 2 \cos(2x) < 0$, ha $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. Így $\frac{\pi}{4} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{3\pi}{4}$ esetén alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}{3} \leq \sin^2 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \sin^2 \frac{\pi}{3},$$

és egyenlőség csakis $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ esetén van. Ebből kapjuk a

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}$$

relációt.

Állítjuk, hogy ha a három szög között van olyan, amelyik nem esik a $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ intervallumba, akkor az 1. kifejezés értéke $\frac{9}{4}$ -nél kisebb.

Az $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ intervallumba nem tartozó szögek szinusza legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ha két ilyen szög is van, akkor az 1. kifejezés értéke legfeljebb $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 < \frac{9}{4}$. Ha csak egy ilyen szög van, legyen α , akkor a másik kettőre alkalmazhatjuk a Jensen egyenlőtlenséget:

$$\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq 2 \sin^2 \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Itt $\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}$, így az 1. kifejezést felülről becsüli az

$$g(\alpha) = \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \frac{\pi - \alpha}{2} = \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

függvény, amelyet most a $(0; \frac{\pi}{4})$ és a $(\frac{3\pi}{4}; \pi)$ intervallumon vizsgálunk.

$$g'(\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot (\cos \alpha - \frac{1}{2}) > 0, \quad \text{ha} \quad \alpha \in (0; \frac{\pi}{4}),$$

illetve $g'(\alpha) < 0$, ha $\alpha \in (\frac{3\pi}{4}; \pi)$. Ezért g monoton nő $(0; \frac{\pi}{4})$ -n illetve monoton fogy $(\frac{3\pi}{4}; \pi)$ -n, így g -t a vizsgált intervallumon felülbecsüli a $\frac{\pi}{4}$ -hez ill. $\frac{3\pi}{4}$ -hez tartozó értéke. Az ide tartozó kifejezést azonban a konvex esetről már vizsgáltuk, láttuk, hogy $\frac{9}{4}$ nagyobb nála.

Az adott sugarú körbe írtháromszögek közül a szabályos háromszögben legnagyobb az oldalak négyzetösszege.

5.17. Feltehetjük, hogy $a, b, c > 0$ és az egyenlőtlenség így írható:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{c}{b})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{a}{c})^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

A

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \left(\frac{c}{b}\right)^2, \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

törtek pozitívak, szorzatuk 1, így a konvexitás felé terelés miatt érdemes bevezetni az x, y, z változókat a

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = e^x, \quad \left(\frac{c}{b}\right)^2 = e^y, \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 = e^z$$

relációknak megfelelően. Bizonyítanunk kell, hogy ha $x + y + z = 0$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^z}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Tekintsük az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

függvényt!

$$f''(x) = \frac{e^x \cdot (e^x - 2)}{4 \cdot (1 + e^x)^{\frac{5}{2}}},$$

így f a $(-\infty; \ln 2]$ intervallumon alulról konkáv, a Jensen egyenlőtlenség alapján teljesül az egyenlőtlenség.

Ha csak az egyik változó – mondjuk x – értéke nagyobb $\ln 2$ -nél, akkor a másik kettőre alkalmazható a Jensen egyenlőtlenség, így

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^y}} + \frac{1}{\sqrt{1+e^z}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{y+z}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{-x}{2}}}}.$$

Vizsgáljuk a

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{-x}{2}}}}$$

függvényt! Némi számolás után kapjuk, hogy

$$g'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} (1 + e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{3}{2}} \left[1 - \left(1 + \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^x + 1} \right)^{\frac{3}{2}} \right],$$

így g -nek $x = 0$ -ban maximuma van (csak $e^{\frac{x}{2}} - 1$ előjelére kell figyelni), ami igazolja az egyenlőtlenséget.

Most már csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor az x, y, z változók közül kettőnek is legalább $\ln 2$ az értéke. A szimmetria itt feltehetjük, hogy $x \geq y \geq \ln 2 \geq z$. Az $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \alpha$, $\left(\frac{c}{b}\right)^2 = \beta$, $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \gamma$ jelöléssel tehát $\alpha\beta\gamma = 1$, $\alpha \geq \beta \geq 2 \geq \gamma$ és igazolnunk kell, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Itt $\beta \geq 2$, $\gamma = \frac{1}{\alpha\beta} \geq \frac{1}{\alpha^2}$ így a bal oldalon található kifejezés felülbecsülhető a

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

függvénnyel, amit az $\alpha \geq 2$ halmazon vizsgálunk. $\alpha = 2$ -ben $g(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{3}{\sqrt{2}}$ és állítjuk, hogy a függvény a vizsgált halmazon monoton fogy. A derivált negatív, hiszen

$$g'(\alpha) = (1+\alpha)^{-\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \right]$$

az $\alpha = 2$ -ben negatív és a $h(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ monoton fogy, amiről deriválással már könnyű meggyőződni.

A levezetésből az is látható, hogy csakis $a = b = c$ esetén áll fenn egyenlőség.

6. Alapvető integrálok

6.1.

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Az utolsó kifejezés $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén értelmes.

6.2.

$$\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

6.3.

$$\sin \alpha = \begin{cases} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \begin{cases} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} & , \text{ ha } 0 + 4k\pi \leq \alpha \leq 2\pi + 4k\pi \\ -2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} & , \text{ ha } 2\pi + 4k\pi \leq \alpha \leq 4\pi + 4k\pi \\ 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} & , \text{ ha } -\pi + 4k\pi \leq \alpha \leq 2\pi + 4k\pi \\ -2 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} & , \text{ ha } 2\pi + 4k\pi \leq \alpha \leq 4\pi + 4k\pi \end{cases} \\ \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ ha } \alpha \neq \pi + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

6.4.

$$\operatorname{sh} \alpha = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}} \\ \begin{cases} 2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} & , \text{ ha } 0 \leq \alpha \\ -2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} & , \text{ ha } \alpha \leq 0 \end{cases} \\ \frac{2 \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

6.5.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{th} \alpha = \frac{2 \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

6.6. Eredmény: $\operatorname{arsh} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$. Ha ugyanis $t = \operatorname{arsh} x$, akkor

$$\operatorname{sh} t = x \Rightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x \Rightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \Rightarrow e^t = x \pm \sqrt{x^2 + 1},$$

és $0 < e^x$, így itt csak a pozitív előjel jön számításba.

6.1. a)

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}; \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Az $n \geq 2$ esetben parciális integrálással próbálkozunk, az $u' = \sin x$, $v = \sin^{n-1} x$, $u = -\cos x$, $v' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$ szereposztásban:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned} \quad (2)$$

A módszer közvetlenül nem vezetett eredményre, de (??)-ből rendezéssel rekurziót állíthatunk fel a sorozatra:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (3)$$

Tehát

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\pi}{2}, & I_2 &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & I_4 &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2}, & I_6 &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2}, & \dots \\ I_1 &= 1, & I_3 &= \frac{2}{3}, & I_5 &= \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}, & I_7 &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}, & \dots \end{aligned}$$

azaz

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}. \quad (4)$$

b) Mivel a $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumban a \sin függvény pozitív, de mindenütt legfeljebb 1, így itt

$$\sin^{n+1} x = \sin^n x \cdot \sin x \geq \sin^n x, \quad (5)$$

hiszen egy nemnegatív számtól 1-nél kisebb számmal szorozva az értékét nem növeljük. Ebből következően az integrálokra teljesül a

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx \geq \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad (6)$$

egyenlőtlenség, azaz az $\{I_n\}$ sorozat monoton fogy.

c) Fejtsük ki az $I_{2n-1} \leq I_{2n} \leq I_{2n+1}$ relációt!

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \geq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2} \geq \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}, \quad (7)$$

amiből

$$\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-2) \cdot (2n-2)}{(2n-3)(2n-1)} \cdot \frac{2n}{2n-1} \geq \frac{\pi}{2} \geq \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(2n) \cdot (2n)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad (8)$$

tehát

$$J_{n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \geq \frac{\pi}{2} \geq J_n. \quad (9)$$

A $\{J_n\}$ sorozatról könnyen látható, hogy monoton nő, (??) jobb oldala szerint korlátos, így konvergens és határértéke legfeljebb $\frac{\pi}{2}$, de (??) bal oldala szerint ez a határérték nem lehet kisebb $\frac{\pi}{2}$ -nél, tehát egyenlő vele.

6.1. a) Olyan a, b, c, d valós számokat keresünk, amelyekre

$$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 6}{(x^2 + 2x + 2)(x + 2)^2} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{(x + 2)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 2x + 2}. \quad (1)$$

Hozzunk a jobb oldalon közös nevezőre!

$$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 6}{(x^2 + 2x + 2)(x + 2)^2} = \frac{a(x + 2)(x^2 + 2x + 2) + b(x^2 + 2x + 2) + (cx + d)(x + 2)^2}{(x^2 + 2x + 2)(x + 2)^2}. \quad (2)$$

Olyan a, b, c, d számokat keresünk, amelyekre a jobb és a bal oldal azonosan egyenlő, azaz

$$x^3 + x^2 - 4x - 6 = a(x + 2)(x^2 + 2x + 2) + b(x^2 + 2x + 2) + (cx + d)(x + 2)^2. \quad (3)$$

Bontsuk fel a zárójeleket a jobb oldalon és rendezzük x polinomjává!

$$x^3 + x^2 - 4x - 6 = (a + c)x^3 + (4a + b + 4c + d)x^2 + (6a + 2b + 4c + 4d)x + (4a + 2b + 4d). \quad (4)$$

A két polinom akkor azonos, ha együtthatóként azonosak:

$$\left. \begin{array}{rcccc} a & & +c & & = & 1 \\ 4a & +b & +4c & +d & = & 1 \\ 6a & +2b & +4c & +4d & = & -4 \\ 4a & +2b & & +4d & = & -6 \end{array} \right\} \quad (5)$$

Az ismeretleneket a Gauss-féle kiküszöbölős eljárással fejezzük ki:

$$\left. \begin{array}{rcccc} a & & +c & & = & 1 \\ +b & & & +d & = & -3 \\ +2b & -2c & +4d & & = & -10 \\ +2b & -4c & +4d & & = & -10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rcccc} a & & +c & & = & 1 \\ +b & & & +d & = & -3 \\ & -2c & +2d & & = & -4 \\ & -4c & +2d & & = & -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rcccc} a & & +c & & = & 1 \\ +b & & & +d & = & -3 \\ & -2c & +2d & & = & -4 \\ & & & -2d & = & 4 \end{array} \right\},$$

azaz $d = -2$, $c = 0$, $b = -1$, $a = 1$. Tehát a kért határozatlan integrál:

$$\int \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{x^2+2x+2} dx = \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} - 2\operatorname{arctg}(x+1) + c,$$

hiszen $\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$.

Megjegyzés

Az (3) egyenletbe $x = -2$ -t helyettesítve számos tag kiesik és kapjuk, hogy $(-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2) - 6 = b((-2)^2 + 2(-2) + 2)$, amiből $b = -1$ gyorsabban adódik.

b) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ és $3x^3 - 11x^2 + 10x - 1 = (3x+1)(x^2 - 4x + 4) + 2x - 5$, így

$$\frac{3x^3 - 11x^2 + 10x - 1}{(x-2)^2} = 3x + 1 + \frac{2x - 5}{(x-2)^2}.$$

Az utóbbi törtet parciális törtekre bontjuk, azaz

$$\frac{2x - 5}{(x-2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2}$$

alakra hozzuk. A jobb oldalt közös nevezőre hozva

$$\frac{2x - 3}{(x-2)^2} = \frac{ax - 2a + b}{(x-2)^2},$$

azaz $a = 2$ és $2a - b = 5$ -ből $b = -1$, tehát a kért integrál

$$\int 3x + 1 + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} dx = \frac{3}{2}x^2 + x + 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c.$$

c) Olyan a, b, c, d valós számokat keresünk, amelyekre

$$\frac{x^3 - x^2 + 9x + 7}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 1)} = \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 2} + \frac{cx + d}{x^2 - x + 1},$$

azaz

$$x^3 - x^2 + 9x + 7 = (ax + b)(x^2 - x + 1) + (cx + d)(x^2 + 2x + 2).$$

A két oldalon az azonos kitevőjű tagok együtthatóját egyenlővé tesszük:

$$\left. \begin{array}{rcl} a & +c & = 1 \\ -a & +b & +2c & +d & = -1 \\ a & -b & +2c & +2d & = 9 \\ b & & & +2d & = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} a & +c & = 1 \\ +b & +3c & +d & = 0 \\ -b & +c & +2d & = 8 \\ b & & & +2d & = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} a & +c & = 1 \\ b & +3c & +d & = 0 \\ +4c & +3d & = 8 \\ -3c & +d & = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} a & +c & = 1 \\ b & +3c & +d & = 0 \\ +4c & +3d & = 8 \\ +3,25d & & = 13 \end{array} \right\},$$

azaz $d = 4$, $c = -1$, $b = -1$ és $a = 2$. A törtek számlálójából leválasztjuk a nevező deriváltjának konstansszorosát:

$$\frac{2x-1}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{3}{x^2+2x+2}, \quad \frac{-x+4}{x^2-x+1} = \frac{-x+0,5}{x^2-x+1} + \frac{3,5}{x^2-x+1}.$$

Vegyük még figyelembe, hogy

$$x^2 - x + 1 = (x - 0,5)^2 + 0,75 = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right)^2 + 1 \right),$$

azaz

$$\frac{3,5}{x^2 - x + 1} = \frac{14}{3} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right)^2 + 1} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right)^2 + 1},$$

így az integrál:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{3}{x^2+2x+2} + \frac{-x+0,5}{x^2-x+1} + \frac{3,5}{x^2-x+1} dx =$$

$$= \ln(x^2+2x+2) - 3 \operatorname{arctg}(x^2+2x+2) - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{7\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) + c.$$

d) Vegyük észre, hogy $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, tehát olyan a , b , c , d számokat keresünk, amelyekre

$$\frac{-x^3 + 7x^2 - 12x + 18}{(x^2 + x - 2)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2-2x+5},$$

tehát az

$$-x^3 + 7x^2 - 12x + 18 = a(x+2)(x^2-2x+5) + b(x-1)(x^2-2x+5) + (cx+d)(x-1)(x+2) \quad (6)$$

összefüggést kell azonossággá tennünk.

Az x -ben azonos kitevőjű tagokat egyenlővé téve négyváltozós lin. egyenletrendszert kapunk, melynek megoldása $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 1$. Megjegyezzük, hogy a (6) összefüggésbe $x = -2$ -t, illetve $x = 1$ -et helyettesítve gyorsan megkaphatjuk b illetve a értékét.

Vegyük még észre, hogy

$$\frac{1}{x^2-2x+5} = \frac{1}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + 1},$$

így

$$\int \frac{-x^3 + 7x^2 - 12x + 18}{(x^2 + x - 2)(x^2 - 2x + 5)} dx = \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) + c.$$

6.1.

1. megoldás. *Parciális integrálás*

Eredmény: $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + c$.

Alkalmazzuk a parciális integrálás $\int u'v = uv - \int uv'$ képletét az $u' = 1$, $v = \sqrt{1-x^2}$, $u = x$, $v' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ szereposztásban!

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int 1\sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Mivel $x^2 = (x^2 - 1) + 1$, így

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + c_1$$

azaz

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - c_1.$$

Egyenletet kaptunk a keresett integrálra, amit rendezéssel megoldhatunk:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx}{2} + c_2 = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + c_2.$$

2. megoldás. *Helyettesítéssel integrálás*

Az $\sqrt{1-x^2}$ kifejezés $x \in (-1; 1)$ esetén értelmezett. Alkalmazhatjuk az $x = \sin t$ helyettesítést, ha $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, akkor minden x értéket pontosan egyszer kapunk meg.

Mivel $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ és $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ esetén $0 < \cos t$, így $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. A $\frac{dx}{dt} = \cos t$ összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Mivel $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$, így $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, azaz

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c.$$

A kapott kifejezést átírhatjuk x függvényévé, ha felhasználjuk, hogy $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ és $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$$

6.2.

1. megoldás. *Parciális integrálás*

Eredmény: $\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + c$.

Alkalmazzuk a parciális integrálás $\int u'v = uv - \int uv'$ képletét az $u' = 1$, $v = \sqrt{1+x^2}$, $u = x$, $v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ szereposztásban!

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int 1\sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Mivel $x^2 = (x^2 + 1) - 1$, így

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \sqrt{1+x^2} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx + c_1$$

azaz

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx - c_1.$$

Egyenletet kaptunk a keresett integrálra, amit rendezéssel megoldhatunk:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx}{2} + c_2 = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + c_2.$$

Ha még felhasználjuk a 6.6. feladat eredményét is, akkor kapjuk a megoldás elején található formulát.

2. megoldás. Helyettesítéses integrálás

Alkalmazzuk az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítést! Mivel $1 + \operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2 t$ és $0 < \operatorname{ch} t$, így $\sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} t$. A $\frac{dx}{dt} = \operatorname{ch} t$ összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \operatorname{ch} t \operatorname{ch} t dt = \int \operatorname{ch}^2 t dt.$$

Mivel $\operatorname{ch} 2t = 2\operatorname{ch}^2 t - 1$, így $\operatorname{ch}^2 t = \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}$, azaz

$$\int \operatorname{ch}^2 t dt = \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} + c.$$

A kapott kifejezést átírhatjuk x függvényévé, ha felhasználjuk, hogy $\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$ és $\operatorname{ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}$ valamint alkalmazzuk a 6.6. feladat formuláját:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + c.$$

6.3. A $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ helyettesítéssel $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ és $x = 2\operatorname{arctg} t$, így $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$. Az integrál:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + c = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c.$$

6.12. $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx = \ln \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right) + c.$

6.5. Ha $t = \sqrt{x+1}$, akkor $x = t^2 - 1$, így $\frac{dx}{dt} = 2t$, tehát

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + (\sqrt{1+x})^3} dx = \int \frac{2t}{t+t^3} dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2\operatorname{arctg} t = 2\operatorname{arctg} \sqrt{x+1}.$$

6.6.

1. megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x},$$

és itt a második tag f'/f alakú, azaz

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = e^x - \ln|1+e^x| + C.$$

2. megoldás. Az $e^x = t$ helyettesítés esetén $x = \ln t$, azaz $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t^2}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{1+t} dt = \int 1 - \frac{1}{1+t} dt = t - \ln|t+1| + C = e^x + \ln|1+e^x| + C.$$

6.7.

1. megoldás. Vegyük észre, hogy

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

így

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} dx = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C_1.$$

2. megoldás. Az $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítés esetén $x = 2\operatorname{arctg}t$, azaz $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, másrészt $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, így

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int \frac{2}{(1+t)^2} dt = \\ &= \frac{-2}{1+t} + C_2 = \frac{-2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C_2. \end{aligned}$$

6.8. Ha $t = 1 + e^x$, akkor $x = \ln(t-1)$ és $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-1}$ és így

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+e^x)^2} dx &= \int \frac{1}{t^2(t-1)} = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} dt = \\ &= \ln|t-1| - \ln|t| + \frac{1}{t} + C = x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C. \end{aligned}$$

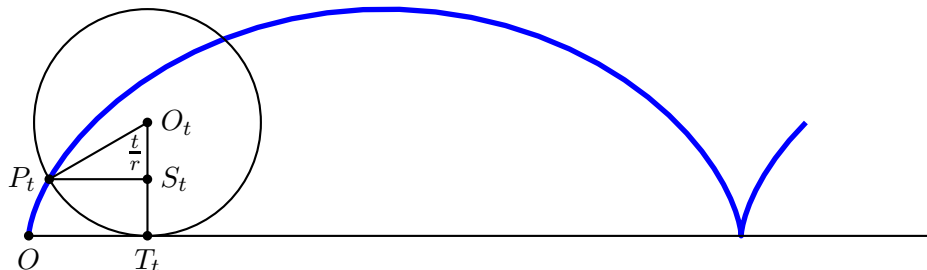
6.9. Ha $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, akkor $x = 2\operatorname{arctg}t$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, így

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx &= \int \frac{1+t^2}{4t - (1-t^2) + 5(1+t^2)} \frac{2t}{1+t^2} = \int \frac{1}{3t^2 + 2t + 2} dt = \\ &= \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{5}{3}} dt = \frac{3}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C. \end{aligned}$$

6.10. Ha $t = \sqrt{x-1}$, akkor $x = t^2 + 1$, $\frac{dx}{dt} = 2t$ és így

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \int_1^2 \frac{t^2+1}{t} 2t dt = 2 \int_1^2 t^2 + 1 = 2 \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_1^2 = \frac{20}{3}.$$

7. Görbék



7.2M.1. ábra.

7.2. Jelölje O az origót, T_t az r sugarú mozgó kör és az egyenes érintési pontját ($OT_t = t$), O_t a mozgó kör középpontját, P_t a mozgó körön a vizsgált pont aktuális helyzetét (lásd a 7.1. ábrát). A kör az egyenesen csúszás nélkül gördül, azaz az érintkező felületek, az OT_t szakasz és az $T_t P_t$ körív egyenlőek. Ezért $P_t O_t T_t \angle = t/r$. Ha S_t a P_t pont vetülete a $T_t O_t$ egyenesen, akkor $O_t S_t = r \cos \frac{t}{r}$, $P_t S_t = r \sin \frac{t}{r}$, azaz P_t koordinátái:

$$x(t) = t - r \sin \frac{t}{r}, \quad y(t) = r - r \cos \frac{t}{r}. \quad (1)$$

7.3.

1. megoldás. a) Lásd a 7.1. ábrát!

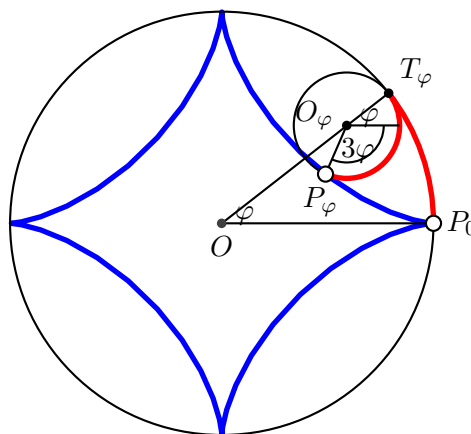
b) Jelölje a mozgó kör és a fix kör érintési pontját T_φ , a mozgó kör középpontját O_φ , a fix körét O , a két kör érintési pontját a kezdőpillanatban P_0 , a vizsgált pontot P_φ , ahol $\varphi = P_0 O T_\varphi$. A fix kör $P_0 T_\varphi$ íve és a mozgó kör $T_\varphi P_\varphi$ íve egyenlő nagyságú (csúszásmentes gördülés esetén a két alakzat azonos hosszúságú íve érintkeznek egymással). A sugarakat és a szögek irányítását is figyelembe véve kapjuk, hogy $T_\varphi O_\varphi P_\varphi \angle = -4\varphi$, tehát az $\overrightarrow{O_\varphi P_\varphi}$ vektor és $\overrightarrow{O P_0}$ szöge 3φ . Mivel $\overrightarrow{O P_\varphi} = \overrightarrow{O O_\varphi} + \overrightarrow{O_\varphi P_\varphi}$, és $\overrightarrow{O O_\varphi} (3r \cos \varphi, 3r \sin \varphi)$, $\overrightarrow{O_\varphi P_\varphi} (r \cos(-3\varphi), r \sin(-3\varphi))$, így

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= 3r \cos \varphi + r \cos(-3\varphi) = 3r \cos \varphi + r \cos(3\varphi) = R \cos^3 \varphi; \\ y(\varphi) &= 3r \sin \varphi + r \sin(-3\varphi) = 3r \sin \varphi - r \sin(3\varphi) = R \sin^3 \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

c)

A (1) paraméteres alak szerint $P(x; y)$ pontosan akkor van rajta az asztroison, ha

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1. \quad (2)$$



7.3M1.1. ábra.

Ez az összefüggés pontosan akkor áll fenn valós $(x; y)$ számpárokra, ha a köbe teljesül:

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right) = 1. \quad (3)$$

ha felhasználjuk a (2) összefüggés, akkor kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1, \quad (4)$$

amit rendezve, majd köbre emelve adódik az algebrai egyenlet:

$$27x^2y^2 = (1 - x^2 - y^2)^3. \quad (5)$$

Az átalakítások sorozatában egy helyen lehet probléma: a (3) egyenletről a (4) egyenletre való áttéréskor esetleg nyerhettünk gyököt. Ezt zárjuk ki a továbbiakban.

Tegyük fel, hogy az $(x; y)$ számpárra teljesül a (4) összefüggés, de (2) helyett a

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 + \Delta \quad (6)$$

összefüggés áll fenn valamely $\Delta \neq 0$ esetén. A (6) egyenlet köbreemelésével majd (6) felhasználásával kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(1 + \Delta) = (1 + \Delta)^3,$$

amiből (5)-gyel való összevetés és átalakítások után (közben Δ -val osztunk) kapjuk, hogy $\Delta \neq 0$ esetén

$$\frac{3 + 3\Delta + \Delta^2}{3} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

A nemnegatív $x^{\frac{2}{3}}, y^{\frac{2}{3}}$ számokra alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 + \Delta}{2} \right)^2. \quad (8)$$

A (7) összefüggés bal oldalának és (8) jobb oldalának összevetéséből rendezés után a $(\Delta + 3)^2 \leq 0$ egyenlőtlenség adódik, amely csak $\Delta = -2$ esetén teljesül, de Δ értelmezése (lásd a (6) összefüggést) $\Delta \geq -1$.

2. megoldás. [3]

c)

Alább megmutatjuk, hogy ha az a, b valós számokra

$$a^3 + b^3 + 3ab = 1, \quad (1)$$

akkor vagy

$$a + b = 1, \quad (2)$$

vagy $a = b = -1$. Ha ezt az állítást az $a = x^{\frac{2}{3}}, b = y^{\frac{2}{3}}$ számokra alkalmazzuk, akkor láthatjuk, hogy az I. megoldás elején kapott $x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1$ egyenletből következik az asztrois kiindulásul vett $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ egyenlete, hiszen $0 \leq x^{\frac{2}{3}} \neq -1$. Így rövid úton kapjuk, hogy az asztrois algebrai egyenlete az I. megoldás $27x^2y^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$ egyenlete.

Jelöljön ω komplex primitív harmadik egységgyököt, tehát $\omega \neq 1$, de $\omega^3 = 1, \omega + \omega^2 = -1$. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor fennáll a

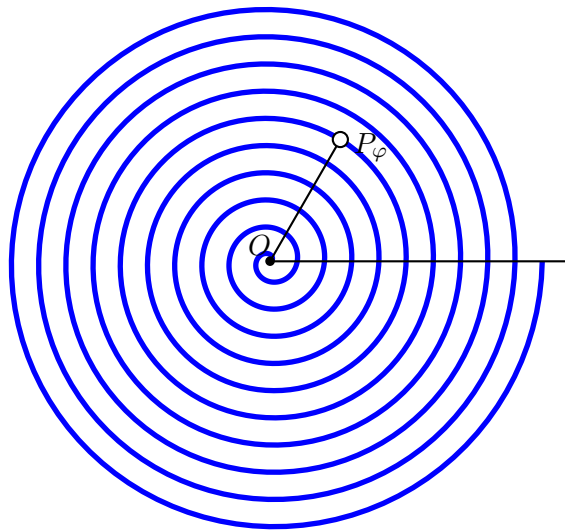
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c) \quad (3)$$

azonosság. Tehát $c = -1$ esetén

$$a^3 + b^3 - 1 + 3ab = (a + b - 1)(a + \omega b - \omega^2)(a + \omega^2 b - \omega). \quad (4)$$

A (4) azonosság azt mutatja, hogy ha teljesül a (1) összefüggés, akkor vagy teljesül a (2) egyenlet is vagy (4) jobb oldala második vagy harmadik tényezője zérus. Mely valós a, b számokra lehet e két tényező egyike zérus? Mivel ω és ω^2 képzetes része nem nulla és egymás ellentettje, így e tényezők képzetes része csak $b = -1$ esetén lesz zérus, és ezek után $a = -1$ kell, hogy a tényező valós része is nulla legyen. Ezzel az állítást beláttuk és egyúttal igazoltuk, hogy a $27x^2y^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$ egyenlet az asztrois egyenlete.

7.4. a) Lásd a 7.1. ábrát!



7.4M.1. ábra.

b) A görbe θ forgási szöghöz tartozó $(x(\theta); y(\theta))$ pontjának az origótól való távolsága $r(\theta) = a\theta$, így koordinátái:

$$x(\theta) = a\theta \cos \theta; \quad y(\theta) = a\theta \sin \theta. \quad (1)$$

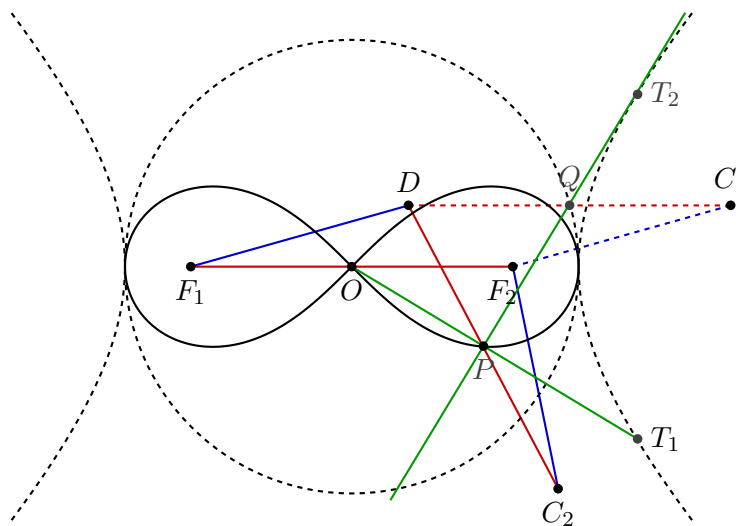
c) Nem algebrai görbe. Egy algebrai görbét bármely egyenes véges sok pontban metsz (egy polinom gyökeinek meghatározásához vezet a metszéspontok meghatározása) vagy az egyenes teljes egészében a görbéhez tartozik. Az x tengely a spirálist végtelen sok pontban metszi, de nem tartozik hozzá.

7.5. a)

A $P(x, y)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a Def.1-ben meghatározott görbére (lásd a 7.1. ábrát), ha

$$\left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + y^2 \right] \cdot \left[\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + y^2 \right] = \frac{1}{4}.$$

Ebből az egyenletből ekvivalens átalakítások után kapjuk a vizsgált lemniszkáta görbének a feladatban megadott egyenletét.



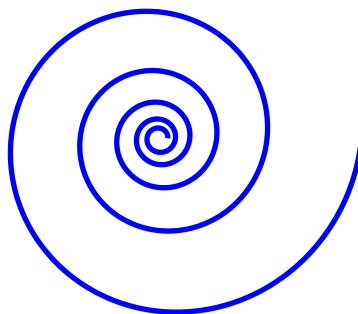
7.5M.1. ábra.

7.6. a) Az origó körüli β szögű forgatás és $e^{b\beta}$ arányú nagyítás kompozíciója az első ívet a másodikba képezi, hiszen ez a leképezés a görbe $(\phi, r = a \cdot e^{b\phi})$ pontját a $(\phi + \beta, r = a \cdot e^{b\phi} \cdot e^{b\beta})$ pontba képezi, amely szintén pontja a görbének, ugyanis $e^{b\phi} \cdot e^{b\beta} = e^{b\phi + b\beta} = e^{b(\phi + \beta)}$.

b) Lásd a 7.1. ábrát!

c) Egy ilyen téglalap érintési pontjai a $\phi, \phi + \frac{\pi i}{2}, \phi + \frac{2\pi i}{2}, \phi + \frac{3\pi i}{2}$, egy másiké a $\psi, \psi + \frac{\pi}{2}, \psi + \frac{2\pi}{2}, \psi + \frac{3\pi}{2}$ paraméterértékekhez tartoznak, így az elsőt a másodikba egy origó körüli $(\psi - \phi)$ szögű forgatás és egy $e^{b(\psi - \phi)}$ arányú középpontos nagyítás kompozíciója viszi.

Megjegyezzük, hogy ha $\psi - \phi = \frac{\pi}{2}$, akkor az egyik téglalapról a másik egy egyenes mentén való levágással adódik és a két téglalap hasonló egymáshoz. Így egymáshoz hasonló, egymásba helyezett téglalapok végtelen sorát készíthetjük.



7.6M.1. ábra.

7.1. Az $f(x)$ függvény grafikonja $x \in [0; \xi]$ intervallum fölötti részének ívhossza $\int_0^\xi \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$. Most $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, amiből $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, tehát $1 + f'^2(x) = \frac{1}{1-x^2}$, így az ívhossz:

$$\int_0^\xi \frac{1}{1-x^2} dx = \arcsin \xi.$$

7.3. A 7.3. feladatban láttuk, hogy az asztrois az $R = 4r$ sugarú kör belsejében azon gördülő r sugarú kör egy pontjának pályája. Paraméteres alakja:

$$x(\varphi) = R \cos^3 \varphi; \quad y(\varphi) = R \sin^3 \varphi. \quad (1)$$

a) A sebességvektor koordinátái:

$$x(\varphi)' = -3R \cos^2 \varphi \sin \varphi; \quad y(\varphi)' = 3R \sin^2 \varphi \cos \varphi, \quad (2)$$

tehát a sebességvektor hossza:

$$\sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} = 3R \sqrt{\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi} = 3R |\cos \varphi \sin \varphi| \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{3}{2} R |\sin 2\varphi|.$$

A görbe egy negyedívének hossza:

$$\frac{3}{2} R \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{3}{4} R [-\cos 2\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} R,$$

azaz a teljes ív hossza $6R$.

b)

A negyedív alatti terület:

$$\int_0^{\pi/2} x(\varphi)' y(\varphi) d\varphi = -3R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi d\varphi = -3R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi - \sin^6 \varphi d\varphi. \quad (3)$$

A 6.1 feladatban láttuk, hogy $I_4 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2}$, $I_6 = \int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2}$, azaz a (3) integrál értéke $-\frac{3}{32} R^2 \pi$. A negatív előjel azért van, mert a paraméterezés szerint az x -tengely felett jobbról balra halad a grafikon. A négy negyedív által határolt tartomány területe $\frac{3}{8} R^2 \pi$.

c) A (1)-ben adott ponton átmenő (2)-ben adott irányvektorú egyenes egyenletét kell felírunk. A (2) sebességvektorral arányos, de egyszerűbb alakú

$$(-\cos \varphi; \sin \varphi)$$

irányvektorral számolva az egyenes egyenlete:

$$\sin \varphi(x - R \cos^3 \varphi) + \cos \varphi(y - R \sin^3 \varphi) = 0. \quad (4)$$

Ebből $x = 0$ esetén

$$y = R(\cos^2 \varphi \sin \varphi + \sin^3 \varphi) = R \sin \varphi,$$

míg $y = 0$ esetén

$$x = R(\cos \varphi \sin^2 \varphi + \cos^3 \varphi) = R \cos \varphi.$$

A két tengelypont távolsága: $R \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = R$, ami valóban állandó.

7.5. a) Az Arkhimédeszi spirális parametrikus előállítás (lásd a 7.4. feladatot):

$$x(\theta) = a\theta \cos \theta; \quad y(\theta) = a\theta \sin \theta. \quad (1)$$

Mivel

$$x'(\theta) = a(\cos \theta - \theta \sin \theta); \quad y'(\theta) = a(\sin \theta + \theta \cos \theta), \quad (2)$$

így

$$\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = a\sqrt{1 + \theta^2}, \quad (3)$$

azaz a görbe α és β paraméterű pontjai közti ívének hossza

$$a \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta. \quad (4)$$

Használjuk a $\theta = sh t$ helyettesítést és dolgozzunk a határozatlan integrállal! Mivel $\frac{d\theta}{dt} = cht$, így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \theta^2} d\theta &= \int \sqrt{1 + sh^2 t} cht \, dt = \int ch^2 t dt = \int \frac{1+ch2t}{2} dt = \\ &= \frac{t}{2} + \frac{sh2t}{4} + c = \frac{arsh\theta}{2} + \frac{sh\theta}{2} = \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1})}{2} + \frac{\theta\sqrt{\theta^2 + 1}}{2} + c. \end{aligned} \quad (5)$$

Ebből a kért ívhossz $a \frac{\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})}{2} + \frac{2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$.

b) Az $\underline{u}(u_1; u_2)$, $\underline{v}(v_1; v_2)$ vektorok skaláris szorzatának kétféle felírásából bezárt szögük koszinusza:

$$\cos \gamma = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \quad (6)$$

Ezt alkalmazhatjuk a (1), (2) vektorokra, melyek közül az első hossza $a\theta$, a másik hossza pedig (3)-ben adott így a kért szög koszinusza

$$\cos \gamma = \frac{a\theta \cos \theta a(\cos \theta - \theta \sin \theta) + a\theta \sin \theta a(\sin \theta + \theta \cos \theta)}{a^2 \theta \sqrt{1 + \theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}},$$

és ebből

$$tg \alpha = \theta. \quad (7)$$

c) Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek derékszögű csúcsa az origó (a spirál kezdőpontja) egyik befogója az x -tengely (a kezdőpontbeli érintő), átfogója a spirál $\varphi = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontjához tartozó érintője. Ebben a derékszögű háromszögben a két befogó aránya $\frac{\pi}{2}$, így ha felnagyítjuk úgy, hogy rövidebb befogója a kör átmérőjével legyen egyenlő, akkor a kívánt területű háromszöget kapjuk, ami téglalappá darabolható.

d) Legyen a szög csúcsa a spirál O kezdőpontja, egyik szára a spirál kezdőpontjában húzott érintő, a másik szár messe először a spirált a P_φ pontban az OP_φ távolság harmadával, mint sugárral O körül rajzolt kör a spirált a $\frac{\varphi}{3}$ paraméterhez tartozó pontban metszi, hiszen a görbén az elfordulás és a kezdőponttól való távolság arányos egymással. A $\frac{\varphi}{3}$ paraméterű ponthoz húzott sugár harmadolja az adott φ szöget.

7.12. $\int_0^1 \pi x^4 dx = \frac{\pi}{5}$.

7.14. $\frac{16}{3}r^3$.

7.10. $y' = 2x$, így a kért ívhossz

$$\int_0^1 \sqrt{(y')^2 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx. \quad (1)$$

A fenti integrált a $2x = sht$ helyettesítéssel határozhatjuk meg, de most gyorsítunk. A $2x = z$ helyettesítés esetén $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2}$, így

$$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + z^2} dz \quad (2)$$

Ezt az integrált már láttuk a 6.2. feladatban. Az eredményt felhasználva

$$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{z\sqrt{1+z^2}}{4} + \frac{\ln(z + \sqrt{1+z^2})}{4} + c = \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{\ln(2x + \sqrt{1+4x^2})}{4} + c. \quad (3)$$

Az ívhossz:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \left[\frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{\ln(2x + \sqrt{1+4x^2})}{4} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{4}.$$

7.11. $y' = e^x$, így a kért ívhossz

$$\int_0^1 \sqrt{(y')^2 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx. \quad (1)$$

Alkalmazzuk az $e^x = sht$ helyettesítést! Mivel $x = \ln sht$, így $\frac{dx}{dt} = \frac{cht}{sht}$ és a keresett integrál határozatlan formában:

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \int cht \frac{cht}{sht} dt = \int \frac{ch^2 t}{sht} dt = \int \frac{1 + sh^2 t}{sht} dt. \quad (2)$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1+sh^2 t}{sht} = sht + \frac{1}{sht}$ és alkalmazzuk a 6.4. feladat eredményét!

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx = cht + \ln \left(th \frac{t}{2} \right). \quad (3)$$

Itt $cht = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{1 + e^{2x}}$. Másrészt $e^x = sht = \frac{2th \frac{t}{2}}{1 - th^2 \frac{t}{2}}$, amiből $th \frac{t}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + e^{2x}}}{e^x}$. Mivel $0 < e^x = sht$, így $0 < t$, amiből $0 < \frac{t}{2}$ és $0 < th \frac{t}{2}$, azaz \pm -ben a pozitív előjel kell:

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \sqrt{1 + e^{2x}} + \ln \left(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1 \right) - x. \quad (4)$$

A kért ív hossza:

$$\sqrt{1 + e^2} + \ln \left(\sqrt{1 + e^2} - 1 \right) - 1 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1). \quad (5)$$

7.12. A 7.2 feladatban már megkaptuk a ciklois paraméteres előállítását: $x(t) = t - r \sin \frac{t}{r}$, $y(t) = r - r \cos \frac{t}{r}$, amiből

$$x'(t) = 1 - \cos \frac{t}{r}, \quad y'(t) = \sin \frac{t}{r}. \quad (1)$$

a) a sebességvektor hossza:

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{t}{r}} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{t}{r}} = \sqrt{2} \sqrt{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2r})} = 2 \left| \sin \frac{t}{2r} \right|, \quad (2)$$

a teljes ív hossza

$$\int_0^{2r\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2 \int_0^{2r\pi} \left| \sin \frac{t}{2r} \right| dt = 2 \left[-2r \cos \frac{t}{2r} \right]_0^{2r\pi} = 8r. \quad (3)$$

b) A terület:

$$\begin{aligned} \int_0^{2r\pi} x'(t)y(t) dt &= r \int_0^{2r\pi} (1 - \cos \frac{t}{r})^2 dt = r \int_0^{2r\pi} 1 - 2 \cos \frac{t}{r} + \cos^2 \frac{t}{r} dt = \\ &= r \int_0^{2r\pi} 1 - 2 \cos \frac{t}{r} + \frac{1 + \cos \frac{2t}{r}}{2} dt = r \left[\frac{3t}{2} - 2r \sin \frac{t}{r} + \frac{r}{4} \sin \frac{2t}{r} \right]_0^{2r\pi} = 3r^2\pi. \end{aligned}$$

7.13. a) A görbe paraméterese egyenlete Descartes koordinátákban:

$$x(\phi) = a \cdot e^{b\phi} \cos \phi, \quad y(\phi) = a \cdot e^{b\phi} \sin \phi, \quad (1)$$

tehát az érintővektor:

$$x'(\phi) = ab \cdot e^{b\phi} \cos \phi - a \cdot e^{b\phi} \sin \phi, \quad y'(\phi) = ab \cdot e^{b\phi} \sin \phi + a \cdot e^{b\phi} \cos \phi,$$

azaz

$$(x'(\phi), y'(\phi)) = a \cdot e^{b\phi} (b \cos \phi - \sin \phi, b \sin \phi + \cos \phi). \quad (2)$$

A $\underline{v}(b \cos \phi - \sin \phi, b \sin \phi + \cos \phi)$ érintővektor hossza $\sqrt{b^2 + 1}$, így az érintő és a sugárirányú $(\cos \phi, \sin \phi)$ egységvektor θ szögére a vektorok skaláris szorzata alapján:

$$\cos \theta = \frac{(b \cos \phi - \sin \phi) \cos \phi + (b \sin \phi + \cos \phi) \sin \phi}{\sqrt{b^2 + 1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}}.$$

Az érintő és a sugárszöge állandó, ami nem is csoda, hiszen a görbe önhasonló. A b paraméter és a θ szög kapcsolata rövidebben: $\frac{1}{\tan \theta} = b$.

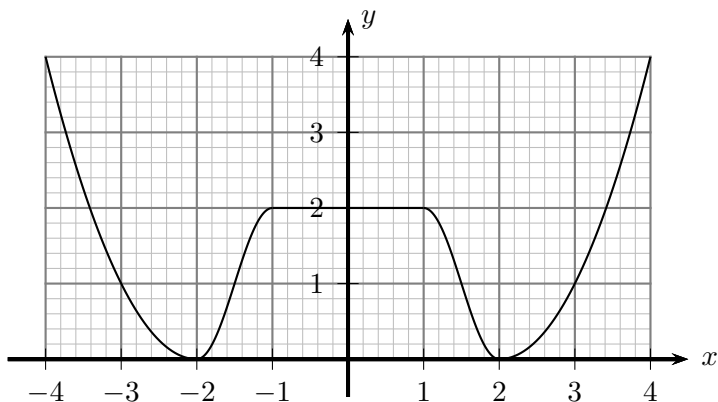
b) Láttuk, hogy a sebességvektor hossza $a \cdot e^{b\phi} \sqrt{b^2 + 1}$, tehát a kért ív hossza

$$a \cdot \sqrt{b^2 + 1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{b\phi} d\phi = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + 1} \cdot \left[e^{b\phi} \right]_0^{2\pi} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + 1} \cdot (e^{2b\pi} - 1)$$

8. Furcsa függvények

8.1. a) Igen van, pl $f(x) = (\sqrt{2})^{[x]}$.

b) Nincs. Ha f folytonos, akkor a $g(x) = f(x+1) + f(x)$ és a $h(x) = f(x+1) - f(x)$ függvények is folytonosak. A feltétel mellett g és h mindenütt irracionális értéket vesz fel, így a folytonosság miatt mindkettő konstans. Mivel $f = \frac{g+h}{2}$, így f is konstans lenne, ami nyilván nem lehet.



8.2M.1. ábra.

8.2. a) Igen van, pl $f_1(x) = ||x| - 2|$ vagy $f_2(x) = (x^2 - 4)^2$.

b) Igen van, ha szélsőértéken csak a szigorú szélsőértéket értjük. Egy ilyen függvény grafikonja látható a 8.1. ábrán.

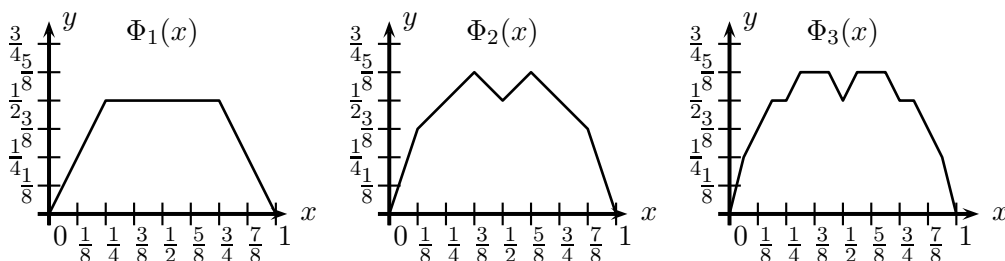
8.3. Az $f(x) = |x|$ függvényre az $x_0 = 0$ választással a második határérték létezik (a tört azonosan 0), az első azonban nem.

A második határérték így írható:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{2} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}$$

és itt a számláló mind a két tagja az első határértékkel egyenlő. Tehát, ha az első határérték létezik, akkor a második is és értékük egyenlő.

8.10. a)



8.10M.2. ábra.

b) φ_n grafikonja olyan egyenes darabokból áll, amelyek meredeksége ± 1 , így Φ_n grafikonja olyan szakaszokból áll, amelyek meredeksége n db ± 1 összege.

c) A φ_n függvény maximuma $\frac{1}{2^{n+1}}$. Bármely rögzített x -re a $\{\Phi_n(x)\}$ sorozat monoton növekvő és felső korlátja az $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$

d) $\Phi(x_0 + \Delta) - \Phi(x_0) = \Phi_n(x_0 + \Delta) - \Phi_n(x_0) + (\varphi_{n+1}(x_0 + \Delta) + \varphi_{n+2}(x_0 + \Delta) + \dots) - (\varphi_{n+1}(x_0) + \varphi_{n+2}(x_0) + \dots)$, így $|\Phi(x_0 + \Delta) - \Phi(x_0)| \leq |\Phi_n(x_0 + \Delta) - \Phi_n(x_0)| + \frac{1}{2^n}$. Ha azt szeretnénk, hogy teljesüljön a $|\Phi(x_0 + \Delta) - \Phi(x_0)| < \epsilon$ egyenlőtlenség, akkor választunk egy olyan n -et, amelyre $\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$, majd a Φ_n folytonos függvényhez egy olyan $\delta > 0$ -t, amelyre $\Delta < \delta$ esetén $|\Phi_n(x_0 + \Delta) - \Phi_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

e) Vegyük észre, hogy $x = \frac{s}{2^n}$ ($s \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) esetén $\Phi_{n-1}(x) = \Phi_n(x) = \Phi_{n+1}(x) = \dots = \Phi(x)$, hiszen $\varphi_n\left(\frac{s}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\varphi_0(s) = 0$.

Legyen tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén s_k az az egész szám, amelyre

$$\frac{s_k}{2^{k+1}} \leq x_0 < \frac{s_k + 1}{2^{k+1}}.$$

Az így definiált $\alpha_k = \frac{s_k}{2^{k+1}}$, $\beta_k = \frac{s_k+1}{2^{k+1}}$ sorozatokra $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = x_0$, így ha létezik $\Phi'(x_0)$, akkor (lásd a 3. feladatot):

$$\Phi'(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\alpha_k) - \Phi(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k}.$$

De $\frac{\Phi(\alpha_k) - \Phi(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k} = \frac{\Phi_k(\alpha_k) - \Phi_k(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k}$. A legutóbb kapott kifejezés a Φ_k függvény egy egyenes szakaszának meredeksége, amely a $(k+1)$ paritásával megegyező paritású egész szám. Váltakozó paritású egész számok sorozatának nincs határértéke, ezért $\Phi'(x_0)$ nem létezik.

e)-f) Legyen $\varphi_{2n} + \varphi_{2n+1} = \psi_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Pl

$$\psi_0(x) = \Phi_2(x) \begin{cases} = \frac{1}{2} & , \text{ ha } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ < \frac{1}{2} & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Mivel $\psi_n(x) = \frac{1}{4^n}\psi_0(4^n x)$, így

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}$$

és az egyenlőség mindazokra az x -ekre teljesül, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{4} \leq [4^n x] \leq \frac{3}{4}$, tehát azokra az x számokra, amelyek tört részének van olyan 4-es számrendszerbeli alakja, amely csak 1-es és 2-es számjegyeket tartalmaz.

9. Vegyes feladatok

9.2. a) $I_n = \int_1^n \ln x dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - (n - 1)$.

b) $S_i = \frac{\ln i + \ln(i+1)}{2}$

c) $I_n = \sum_{i=1}^{n-1} (S_i + t_i) = \sum_{i=1}^{n-1} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} S_i$, tehát $\sum_{i=1}^{n-1} S_i = I_n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i = n \ln n - (n - 1) - \sum_{i=1}^{n-1} t_i$. Másrészt

$$\sum_{i=1}^{n-1} S_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln i + \ln(i+1)}{2} = \frac{\ln 1}{2} + \left(\sum_{i=1}^n \ln i \right) - \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln n}{2} = \ln(n!) - \frac{\ln n}{2},$$

így $\ln(n!) = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i)$.

d) A $\{\tau_n\}$ sorozat szigorúan monoton nő, elég megmutatnunk, hogy korlátos, abból már következik, hogy konvergens. Rajzoljuk le ezeket a háromszögeket úgy, hogy jobb oldali csúcsukat toljuk egybe, pl a B_2 pontba. Mivel az \ln függvény grafikonja alulról nézve konkáv, így a $B_i B_{i+1}$ húr a B_i -beli és B_{i+1} -beli érintők alatt lesz, azaz e három egyenes meredekség szerint így jön egymás után: B_{i+1} -beli érintő, $B_i B_{i+1}$ húr, B_i -beli érintő. Ez pont azt jelenti, hogy az egybetolt háromszögek nem lógnak egymásba, az összes elfér egy olyan háromszögben, amelynek egyik oldala $B_1 B_2$ (azaz $A_1 B_2$) másik két oldala pedig párhuzamos a koordinátatengelyekkel.

e) Mivel $0 < \tau'_n < \tau_n$, így a $\{\tau'_n\}$ sorozat is korlátos, s mivel monoton nő, így konvergens is.

f) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{c_n} \cdot e^{c_n}}{e^{c_{2n}}} = \frac{e^C e^C}{e^C} = e^C$, így vizsgáljuk az $c'_n = \frac{e^{c_n} \cdot e^{c_n}}{e^{c_{2n}}}$ sorozatot! Mivel $e^{c_n} = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ így

$$c'_n = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} / \frac{(2n!) e^{2n}}{(2n)^{2n} \sqrt{2n}} = \frac{(n!)^2 2^{2n} \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{n}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n)} = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \\
&= \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} \sqrt{\frac{2^2}{1 \cdot 3} \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}}.
\end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} = 2$ és a Wallis formula szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{1 \cdot 3} \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$, így $e^C = \sqrt{2\pi}$, azaz $C = \ln \sqrt{2\pi}$.

g) A bizonyítandó állítást kapjuk, ha a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \ln \sqrt{2\pi} = 0$ összefüggésre alkalmazzuk a folytonos exponenciális függvényt.

9.3.

1. megoldás. a) Jelölje az i -edik fűrészfog x tengelyre eső jobb oldali sarkát a_{i-1} , a bal oldalit a_i , a területét t_i , az első n fog területösszegét T_n , tehát pl $1 = a_0 > \frac{1}{2} = a_1 > a_2 > a_3 > \dots$, $t_1 = T_1 = \frac{1}{4}$ stb. Az a_i -től ($i > 0$) jobbra következő fog bal oldalának meredekségéből

$$\frac{1}{2i} = \frac{a_{i-1} - a_i}{a_{i-1}} = 1 - \frac{a_i}{a_{i-1}}, \quad (1)$$

amiből egyrészt

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{2i-1}{2i}, \quad (2)$$

másrészt

$$t_i = \frac{(a_{i-1} - a_i)a_{i-1}}{2} = \frac{a_{i-1}^2}{4i}. \quad (3)$$

Az $a_0 = 1$ kezdeti érték és a (2) rekurziós formula alapján

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$$

és indukcióval igazolható, hogy

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}. \quad (4)$$

A bizonyítandó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ összefüggés ekvivalens azzal, hogy a

$$b_n = \ln a_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{4}{3} + \ln \frac{6}{5} + \dots + \ln \frac{2n}{2n-1} \quad (5)$$

sorozat végtelenhez tart. Vegyük észre, hogy

$$\ln \frac{2i}{2i-1} = \ln \left(1 + \frac{1}{2i-1} \right) = \frac{1}{2i} \ln \left(1 + \frac{1}{2i-1} \right)^{2i} > \frac{1}{2i} \ln e = \frac{1}{2i},$$

azaz b_n végtelenhez tart, hiszen nagyobb, mint a harmonikus sor megfelelő részletösszegének fele.

2. megoldás. [3] a)

Az $\{a_n\}$ sorozat monoton fogyó és 0 egy alsó korlátja, így van egy x nemnegatív határértéke. Indirekten igazoljuk, hogy $x = 0$.

Tegyük fel, hogy x pozitív. Akkor az i -edik háromszög y -tengellyel párhuzamos oldala nem rövidebb x -nél, így az x -tengellyel párhuzamos oldala legalább $\frac{x}{2i}$ hosszúságú. Az alapok összege így

$$\frac{x}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right),$$

ami tetszőlegesen nagy lehet, hiszen a zárójelben a végtelenhez tartó harmonikus sor áll.

3. megoldás. [1] a)

Igazoljuk teljes indukcióval, hogy $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, amiből következik a feladat állítása! $n = 1$ -re $a_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ valóban fennáll. Másrészt $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+2}}$, így ha az állítás igaz $n = k$ -ra, akkor $n = k + 1$ -re is fennáll.

4. megoldás. [8] a)

Tekintsük a_n mellett a

$$b_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1}. \quad (1)$$

sorozatot is.

Egyrészt

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \quad \dots \quad \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1},$$

így $a_n < b_n$, másrészt

$$a_n b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0.$$

Mivel $0 < a_n^2 < a_n b_n \rightarrow 0$, így $a_n \rightarrow 0$.

5. megoldás. [?],[2] a)

Ismeretes (Wallis formula, 6.1. feladat), hogy a

$$J_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

sorozat $\frac{\pi}{2}$ -höz tart. Vegyük észre, hogy

$$a_n^2 = \frac{1}{(2n+1) \cdot J_n} \rightarrow 0,$$

tehát az $\{a_n\}$ sorozat is 0-hoz tart.

6. megoldás. b) Az a) feladatrésze adott 9.3M1 megoldás első bekezdésének képletei segítségével kiszámolhatjuk az $\{a_i\}$, $\{t_i\}$, $\{T_i\}$ sorozatok elsőt követő néhány további elemét is:

| | | | | |
|-------|---------------|----------------|------------------|---------------------|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 |
| a_i | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | |
| t_i | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{3}{256}$ | $\frac{25}{4096}$ |
| T_i | $\frac{1}{4}$ | $\frac{9}{32}$ | $\frac{75}{256}$ | $\frac{1225}{4096}$ |

Vegyük észre, hogy

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{9}{8}, \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{25}{24}, \quad \frac{T_4}{T_3} = \frac{49}{48},$$

amiből sejthető, hogy

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{(2n+1)^2}{2n \cdot (2n+2)}, \quad (1)$$

tehát $n > 1$ esetén

$$T_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n-2) \cdot 2n}. \quad (2)$$

A (2) összefüggést indukcióval igazoljuk. A feladat a) részére adott a 9.3M1 megoldás első bekezdése utolsó két képletének összevetéséből:

$$t_{i+1} = \frac{1}{4(i+1)} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2i-1}{2i} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{(2i-1)^2}{(2i-2) \cdot 2i} \cdot \frac{2}{2i \cdot (2i+2)},$$

így

$$T_{i+1} = T_i + t_{i+1} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{(2i-1)^2}{(2i-2) \cdot 2i} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2i \cdot (2i+2)} \right) = T_i \cdot \frac{(2i+1)^2}{2i \cdot (2i+2)}.$$

A T_n sorozat (2) képletében felismerhetjük a Wallis formula (6.1. feladat) J_n sorozatát:

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{1}{J_n},$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

9.1. a) $\frac{dx}{du} = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}, \quad u = \sqrt{1-x^2}$, így

$$I_0(\xi) = \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} -\frac{du}{u} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{\sqrt{1-\xi^2}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Tehát a körnek az a húrja, amely az abszcisszatengely $[0; \xi]$ intervalluma felett van, egyenlő hosszú az $[\sqrt{1-\xi^2}; 1]$ intervallum feletti ívvel. Ha „bevezetjük” a teljes integrálra vonatkozó $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ „jelölést”, akkor eredményünk így is írható:

$$I_0(\sqrt{1-\xi^2}) = \frac{\pi}{2} - I_0(\xi).$$

A $G_0(\xi) = I_0(\sqrt{1-\xi^2})$ egyenlettel definiált függvényt már ismerjük: $G_0(\xi) = \arccos \xi$.

b)

$$z = 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{és} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{z}{4\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}}};$$

így

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}} \frac{z}{4\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+\sqrt{1-z^2}}\sqrt{1-\sqrt{1-z^2}}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \end{aligned}$$

azaz

$$2 \cdot I_0(\xi) = 2 \cdot \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = I_0(2\xi\sqrt{1-\xi^2}).$$

Eredményünk egyfajta „duplikációs” formula: anélkül, hogy meghatároznánk az $I_0(\xi)$ integrálfüggvény explicit alakját, meg tudjuk mondani, hogy meddig kell integrálni ugyanazt az integrandust, hogy az integrál értéke kétszer akkora legyen.

Most a

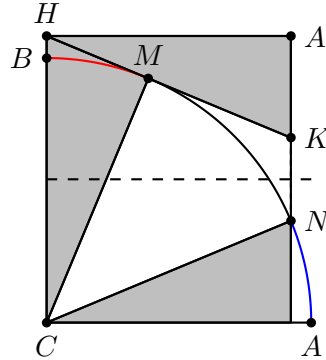
$$2 \arcsin \xi = \arcsin(2\xi\sqrt{1-\xi^2})$$

azonosságra adtunk szokatlan bizonyítást. Ez az azonosság más alakban ismerősebb: a $\xi = \sin \alpha$ helyettesítés után mindkét oldal szinuszát véve kapjuk a

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

összefüggést, a szinusz függvény duplikációs formuláját.

9.3. a) Messe a H ponton át a CA sugárral párhuzamos egyenes a KN egyenest A' -ben. A CMH , $HA'K$ háromszögek hasonlók ($HCM\angle$ és $A'HK\angle$ merőleges szárú szögek), míg a $HA'K$, CAN háromszögek egybevágók. A vizsgált ívek egyenlők, hiszen középponti szögeik egyenlők (lásd a 9.3. ábrát).



9.3M.3. ábra.

b) Legyen $CA = 1$ és $CB = c < 1$, tehát az ellipszis egyenlete

$$y = c\sqrt{1-x^2}. \quad (1)$$

Használni fogjuk az $n = 1 - c^2 > 0$ rövidítő jelölést. Az érintő meredeksége

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2)$$

tehát a

$$\underline{v} \left(1; -\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}} \right),$$

vektor érintő irányú és hossza

$$|\underline{v}| = \sqrt{1^2 + \frac{c^2x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}}, \quad (3)$$

így az érintő irányú egységvektor:

$$\underline{e} \left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}; -\frac{cx}{\sqrt{1-nx^2}} \right). \quad (4)$$

A vizsgált TM szakasz hossza az $\overrightarrow{CM}(x; c\sqrt{1-x^2})$ vektorra \underline{e} vektorra eső merőleges vetülete:

$$MT = \underline{e} \cdot \overrightarrow{CM},$$

azaz x függvényeként:

$$MT(x) = nx\sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \quad (5)$$

Vizsgált függvényünk nemnegatív és folytonos, $x = 0$ -ban és $x = 1$ -ben zérus az értéke, így a $[0; 1]$ intervallum belsejében lesz maximuma. A

$$MT'(x) = n \frac{nx^4 - 2x^2 + 1}{\sqrt{(1-nx^2)^3(1-x^2)}} \quad (6)$$

derivált a $[0; 1]$ intervallumban csak $x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$ -ben zérus, ez a maximumhely. A maximum értéke $1 - c$, tehát a fél nagytengely és fél kistengely különbsége.

c) Felhasználjuk az a) rész számolási eredményeit. Mivel $\overrightarrow{HK} = \underline{e}$, így a K, N pontok abszcisszája (4)-ből

$$u = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \quad (7)$$

Az ívhossz az érintő hosszának (lásd (3)) integrálja, tehát az alábbi összefüggést kell igazolnunk:

$$\int_u^1 \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}} dt = \int_0^x \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}} dt - nx \sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \quad (8)$$

A (8) bal oldalán található integrál kiszámításával kísérletezve a

$$s = \sqrt{\frac{1-t^2}{1-nt^2}} \quad (9)$$

helyettesítést próbáljuk ki. A határok módosítása egyszerű: $t = 1$ az $s = 0$ értékhez, míg (7) alapján $t = u$ az $s = x$ értékhez tartozik. Másrészt (9)-ből

$$t = \sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}},$$

így

$$\frac{dt}{ds} = s \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}} \frac{n-1}{(1-ns^2)^2}.$$

Mindezekből

$$\begin{aligned} \int_u^1 \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}} dt &= \int_x^0 \frac{1}{s} s \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}} \frac{n-1}{(1-ns^2)^2} ds = \int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}} \frac{1-n}{(1-ns^2)^2} ds = \\ &= \int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}} ds - n \int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}} \frac{ns^4 - 2s^2 + 1}{(1-ns^2)^2} ds. \end{aligned}$$

A legutolsó kifejezést is láttuk már (6)-ben, tehát

$$\widehat{NA} = \widehat{BM} - \left[ns \sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}} \right]_0^x.$$

Mivel $-\left[ns \sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}} \right]_0^x = -nx \sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}} = -MT$ (lásd (5)) így az állítást igazoltuk.

d) A keresett pont a b) feladat eredménye és a c) feladat állítása szerint az ellipszis $x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$ abszcisszájú $O\left(\frac{1}{\sqrt{1+c}}, c\sqrt{\frac{c}{1+c}}\right)$ pontja, melyre $CO = \sqrt{\frac{1+c^3}{1+c}} = \sqrt{1-c+c^2}$, így a CAF háromszög CF oldalára felírt koszinusz-tétel igazolja az állítást.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

| | |
|----------|---|
| A.I | Algebra, 7–8. évfolyam |
| A.II | Algebra, 9–10. évfolyam |
| A.III | Algebra, 11–12. évfolyam |
| ALG.II | Algoritmusok, 9–10. évfolyam |
| ANAL.III | Analízis, 11–12. évfolyam |
| F.I | Függvények, 7–8. évfolyam |
| F.III | Függvények, 11–12. évfolyam |
| G.I | Geometria, 7–8. évfolyam |
| G.II | Geometria, 9–10. évfolyam |
| G.III | Geometria, 11–12. évfolyam |
| GR.II | Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam |
| K.I | Kombinatorika, 7–8. évfolyam |
| K.II | Kombinatorika, 9–10. évfolyam |
| K.III | Kombinatorika, 11–12. évfolyam |
| SZ.I | Számelmélet, 7–8. évfolyam |
| SZ.II | Számelmélet, 9–10. évfolyam |
| V.II | Valószínűségszámítás és statisztika, 9–10. évfolyam |
| VV.III | Városok viadala, 11–12. évfolyam |
| ZARUB | Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam |

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.

Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.

Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

- [1] Balogh Máté diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.
- [2] Farkas Márton diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.
- [3] Kornis Kristóf diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.
- [4] Beke Manó: *Bevezetés a differenciál- és integrál-számításba*. 4. kiad. Budapest, 1967, Gondolat Kiadó.
- [5] B. Martinov: A Van-der-Waerden függvény maximumáról. 1982. 6. sz., *Kvant*. Olvasható a http://kvant.mirror1.mccme.ru/1982/06/o_maksimumah_funkcii_van-der-.htm weboldalon.
- [6] Pataki János.
- [7] Szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei I*. Budapest, 2000, Typotex Kiadó. ISBN 963 9132 748.
- [8] Tomon István diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.
- [9] N. B. Vasziljeva (szerk.): *Kvant feladatgyűjtemény*. I. köt. 1997, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 002 3. A Kvant feladatai 1970-től 1980-ig.
- [10] A. Zvonkin: *Az analízis segít az algebrának*. Iskola a Kvantban sorozat, 4/94. köt. 1994, Bjuro Kvantum, 64–70. p.
- [11] Császár Ákos: *Valós analízis*.?. kiad. Budapest,?, Tankönyvkiadó. ISBN?
- [12] Denkinger Géza és Gyurkó Lajos: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény*. Budapest, 1978, Tankönyvkiadó.
- [13] M. Balk és Ju. Lomakin: *Egyenlőtlenségek bizonyítása deriválással*. Iskola a Kvantban sorozat, 4/94. köt. 1994, Bjuro Kvantum, 71–75. p.