Függvények

11–12. évfolyam

Szerkesztette:
Hraskó András, Surányi László

2018. október 21.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2018

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET
Harmadfokú függvények

1.1. A harmadfokú függvény

Ebben a fejezetben a harmadfokú függvény grafikonjának egyszerű geometriai tulajdonságait vizsgáljuk. A másodfokú függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus, és ez egyszerű függvénytranszformációval következik abból, hogy az x^2 függvény páros függvény, így tengelyesen szimmetrikus. Az x^3 függvény páratlan, tehát az origóra középpontosan szimmetrikus. Ezért azt remélnénk, hogy minden harmadfokú függvény középpontosan szimmetrikus. Csakhogy itt a helyzet bonyolultabb, mert nem kaphatunk meg minden harmadfokú függvényt az x^3 függvényből. A másodfokú függvénynél a "teljes négyzetté alakítás" alapján tudunk minden másodfokú függvényt előállítani az x^2 függvényből. Először tehát azt vizsgáljuk meg, hogy a hasonló eljárás segítségével mennyire egyszerűsíthető a harmadfokú függvény alakja.

Ezután a függvény konvexitási tartományait, majd a monotonitási tartományait keressük meg. Mindkettőhöz használni fogjuk a differenciahányadost:

Definíció. Az x és y pontokban értelmezett f függvénynek e két ponthoz tartozó *differenciahányadosa* $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Szavakkal: a függvény grafikonjának az x és y abszcisszájú pontokhoz tartozó pontjait összekötő húr meredeksége.

Használni fogjuk a következő egyszerű tényeket:

Tétel. Az (a, b) intervallumon értelmezett f függvény ebben az intervallumban pontosan akkor nő monotonan (szigorúan monotonan), ha az intervallum bármely rögzített x pontjára az $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ függvény nem negatív (pozitív). Ezt a függvényt az f függvénynek az x pontjához tartozó differenciahányados függvényének nevezzük. Az f függvény pontosan akkor konvex ezen az intervallumon, ha minden x ponthoz tartozó differenciahányados függvény monoton nő.

A csökkenésre és a konkavitásra vonatkozó állításokat -1-gyel való szorzással kapjuk a fenti tételből.

1.2. A harmadfokú függvény szimmetriája

1.1. (S) Igazoljuk, hogy alkalmas $x\prime = x + t$ választással az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvény $a(x_1^3 + px_1 + q$ alakra hozható

1.2. (M) Az 1.1 feladat szerint elég az $y = x^3 + px + q$ függvény grafikonjának a geometriai tulajdonságát vizsgálnunk.

Igazoljuk, hogy az $y = x^3+px+q$ függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus és keressük meg a szimmetria középpontját!

1.3. (S) Van-e szimmetria középpontja az általános ax^3+bx^2+cx+d harmadfokú függvénynek (a nem nulla)?

1.3. A harmadfokú függvény konvexitása

1.1. (M) Igazoljuk, hogy az $x^3 + px$ függvény a szimmetria középpontja "után" a grafikon konvex (a grafikon fölötti tartomány konvex), "előtte" konkáv (azaz a grafikon alatti tartomány konvex).

1.2. (S) állapítsuk meg az általános $ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvény (a nem nulla) konvexitási (és konkávitási) tartományait!

1.4. A harmadfokú függvény valós gyökeinek száma I.

1.1. (M) Igazoljuk, hogy ha az $x^3 - ax^2 + bx - c$ polinomban $a^2 < 3b$, akkor a polinomnak csak egy valós gyöke van.

1.2. (S) Igazoljuk, hogy ha az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomban $b^2 < 3ac$, akkor a polinomnak csak egy valós gyöke van.

1.5. A harmadfokú függvény monotonitása és helyi szélsőértékei

1.1. (M) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x számra $-5x^3 - 2x^2 + 3x \leq \frac{16}{27}$.

1.2. (M) Igazoljuk, hogy minden nem negatív x számra $x(4 - x^2 \leq \frac{16}{3\sqrt{3}}$.
Mikor áll fenn az egyenlőség?

1.3. (S) Bizonyítsuk be, hogy
$x(p - x^2) \leq \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$,
ha x pozitív. Egyenlőség $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ esetén van.

1.4. (M) Tekintsük most az $x^3 - px + q$ harmadfokú függvényt. A **??** feladatban láttuk, hogy ennek a függvénynek egyetlen inflexiós pontja van, mégpedig az $x = 0$ abszcisszájú pontban. A monotonitásáról a következőket tudjuk:

Ha $p \leq 0$, akkor ez a függvény szigorúan monotonan növekszik az egész számegyenesen.

Ha $p > 0$, akkor eddig azt láttuk be, hogy a pozitív félegyenesen az ellentettjének pontosan egy maximuma van, az $x = \sqrt{\frac{p}{3}}$ pontban. (Lásd az 1.3, tehát ennek a függvénynek a pozitív félegyenesen ugyanitt minimuma van.

Bizonyítsuk be, hogy a függvény a $0 < x < \sqrt{\frac{p}{3}}$ intervallumon szigorúan monotonan csökken, az $x > \sqrt{\frac{p}{3}}$ félegyenesen szigorúan monotonan növekszik.

A negatív félegyenesen pont fordítva viselkedik a függvény, mert páratlan.

1.6. Összefoglalás és még egy geometriai tulajdonság

1.1. (S) Összefoglalás.

Tekintsük az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú függvényt, ahol a nem nulla. Igazoljuk a következőket:

Az f függvény szimmetrikus a $\frac{-b}{3a}$ abszcisszájú pontjára. Ha a pozitív, akkor a kisebb abszcisszájú pontok alkotta félegyenesen konkáv, az ellenkező félegyenesen konvex. Ha a negatív, akkor pont fordítva.

Ha b^2 $3ac$, akkor pozitív (negatív) a esetén az egész számegyenesen szigorúan monotonan nő (csökken). Ezekben az esetekben pontosan egy nullhelye van a függvénynek. (Egyenlőség esetén lehet háromszoros nullhely is.)

Ha $b^2 > 3ac$, akkor pozitív (negatív) a esetén az f függvény

az $x \leq \frac{-b}{3a} - \sqrt{\frac{b^2-3ac}{3a^2}} = x_0$ félegyenesen szigorúan monotonan nő (csökken), az $x_0 \leq \frac{-b}{3a} +$ $+ \sqrt{\frac{b^2-3ac}{3a^2}} = x_1$ intervallumon szigorúan monotonan csökken (nő), az $x_1 < x$ félegyenesen ismét szigorúan nő (csökken).

1.2. (S) Az 1.1 jelöléseit használva húzzunk párhuzamost az x-tengellyel az x_0 abszcisszájú ponton át, messe ez másodszor az x_0' abszcisszájú pontban a függvény grafikonját. Hasonlóan definiáljuk az x_1' pontot. Bizonyítsuk be, hogy

$x_0' = -2x_0$ és $x_1' = -2x_1$.

Mivel x_0 és x_1 egyenlő távol van $\frac{-b}{3a}$-tól (a szimmetria középpont abszcisszájától), ezért a fenti állítás geometriailag azt jelenti, hogy az 1.1 ábrán szereplő négy téglalap egybevágó.

E megjegyzés alapján kipróbálhatjuk, tudunk-e spontán módon olyan függvénygrafikont rajzolni, amelyik hasonlít egy harmadfokú függvényére.

1.3. (S) Milyen valós q számokra van három gyöke az $x^3 - px + q$ polinomnak?

2. FEJEZET

Az érintő

2.1. [12] Határozzuk meg az $y = x^2 + 2x + 2$ parabola $x = 1$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!

2.2. [12] Határozzuk meg az $y = 1 + x \ln x$ görbéhez egységnyi ordinátájú pontjában húzott érintő egyenletét!

2.3. [12] Határozzuk meg az $y = x^3 + 1$ görbe azon érintőinek egyenletét, melyek az $y = 3x + 1$ egyenessel párhuzamosak!

2.4. [12] Mekkora területű háromszöget alkot a koordinátatengelyekkel az $xy = 1$ hiperbola $x = a$ abszcisszájú pontjához húzott érintője?

3. FEJEZET
Függvényvizsgálat

A fejezet nagyrészt a Somogyi László által a budapesti István Gimnázium speciális matematika tagozatos osztályában 1984-85-ben tartott órák jegyzete alapján készült.

3.1. (M) Vizsgáljuk az

$f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad f_2(x) = e^{8x-x^2-14}$ $\quad f_3(x) = xe^{-x}$

$f_4(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$ $\quad f_5(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{10}$ $\quad f_6(x) = x \ln^2 x$

függvényeket az alábbi szempontok szerint:

I. Értelmezési tartomány meghatározása;
II. Globális tulajdonságok: paritás, szimmetria, periódus;
III. Zérushely, előjel;
IV. Határérték az ÉT „szélein”;
V. Derivált;
VI. A derivált előjele, lokális és globális szélsőértékek, monotonitási intervallumok;
VII. Értékkészlet;
VIII. Második derivált;
IX. A második derivált előjele, konvexitás;
X. Grafikon megrajzolása.

3.2. Vizsgáljuk az

$g_1(x) = \ln^2 x - 4 \ln x$ $\quad g_2(x) = e^x(3 - x^2)$ $\quad g_3(x) = \sin x + \cos 2x$

$g_4(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ $\quad g_5(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ $\quad g_6(x) = \ln \sin x$

függvényeket a 3.1. feladatban leírt szempontok szerint!

4. FEJEZET

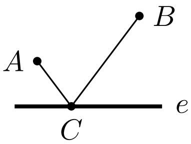
Szélsőérték

4.1. (M) [6] Adott egyenes körkúpba írjunk maximális felszínű hengert!

4.2. [4] 1 literes henger alakú bádog edényt akarunk készíteni. Hogyan válasszuk a méreteit, hogy a legkevesebb bádogra legyen szükségünk?

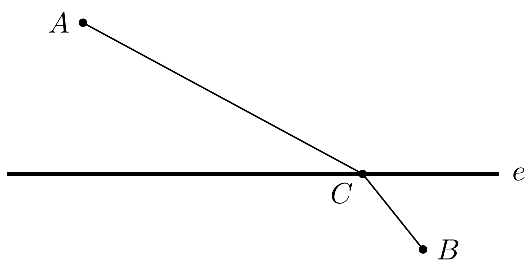
4.3. [4] Egy négyzet alakú papírlapból a maximális térfogatú nyitott dobozt akarjuk készíteni. A sarkokon kis négyzeteket vágunk le, és az oldalt keletkező részeket felhajtjuk. Határozzuk meg a nagy és a levágandó kis négyzet oldalának arányát!

4.4. [4] Hogyan lehet A-tól B-be az e egyenes érintésével az ACB alakú legrövidebb úton eljutni (a 4.0.1. ábra)?



4.4.1. ábra.

4.5. [4] A-ból B-be akarunk jutni a legrövidebb idő alatt; az e egyenesig c_A egyenletes sebességgel haladunk, az e egyenesen túl pedig c_B egyenletes sebességgel (a 4.0.1. ábra). Milyen úton menjünk?



4.5.1. ábra.

4.6. [4] Egy r sugarú kerek asztal közepe fölött van egy föl- és letolható lámpa. Milyen magasra kell a lámpát helyeznünk, hogy az asztal körül ülők a legjobban lássanak? (A fénytanból ismeretes, hogy a fényerősség a távolság négyzetével fordítottan, a fénysugaraknak az asztal síkjával alkotott szöge szinuszával pedig egyenesen arányos.)

4.7. [4] Adva van egy r sugarú körlap (itatós papirosból). Mekkora nyílású körcikket vágjunk ki belőle, hogy a készítendő tölcsér alakú szűrő maximális térfogatú legyen?

4.8. [4] Tapasztalásból tudják a mérnökök, hogy adott hosszúságú gerenda hordképessége egyenesen arányos a szélességével és a vastagságának a négyzetével. Hogyan vágjunk ki egy henger alakú fatörzsből olyan gerendát, melynek hordképessége maximális?

4.9. [4] n galvánelemből állítunk elő telepet, éspedig olyan módon, hogy x elemet párhuzamosan és így $y = \frac{n}{x}$ csoportot sorba kapcsolunk. Hogyan kell az x-et megválasztanunk, hogy az így keletkező telep áramerőssége maximális legyen?

4.10. [4] Egy adott körbe rajzolható derékszögű négyszögek közül melyiknek van maximális területe?

4.11. [4] Hogyan kell egy adott gömbbe olyan hengert állítani, amelynek térfogata maximális?

4.12. [4] Egy adott egyenes körkúpba helyezhető körhengerek közül melyiknek van maximális térfogata? (A henger alapja a kúp alapján legyen.)

4.13. [4] Melyik az a négyzetalapú maximális

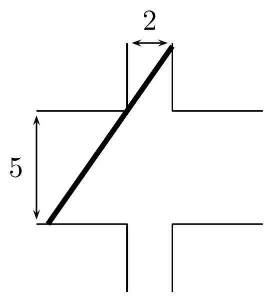
a) térfogatú, **b)** felületű

gúla, melynek mindegyik oldaléle a hosszúságú?

4.14. Határozzuk meg az $1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[4]{4}, \quad \sqrt[5]{5}, \ldots$ sorozat legnagyobb elemét!

4.15. *Milyen hosszú kamion fordulhat be a kereszteződésben?*

Legfeljebb milyen hosszú lehet az a szakasz, amely áttolható egy 5 egység szélességű sávból egy arra merőleges 2 egység szélességű sávba (lásd a 4.0.1. ábrát)?



4.15.1. ábra.

5. FEJEZET
Egyenlőtlenségek

5.1. [10] Adjuk meg az alábbi egyenletek valós megoldásainak számát az a paraméter függvényében!

a) $x^3 - 3x = a$, **b)** $3x^5 - 50x^3 + 135x = a$, **c)** $x^2 e^x = a$,

d) $a^x = x$,

5.2. [10] Mely a valós számokhoz található olyan b pozitív paraméterérték, amelyre az $x^2 + a = 2b \ln x$ egyenletnek pontosan egy megoldása van (x-ben)?

5.3. (S) [10] Mutassuk meg, hogy ha az a, b pozitív számok összege 1, akkor bármely x, y számokra teljesül az $x^a y^b \le ax + by$ egyenlőtlenség!

5.4. Mutassuk meg, hogy $0 \le x$ esetén

a) $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$.

b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!

d) Mely x számok esetén konvergens az $l_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ sorozat?

e) Határozzuk meg $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ végtelen sor összegét!

f) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban és b)-ben $-1 < x < 0$ esetén?

5.5. [13] Igazoljuk, hogy $0 < x_1 < x_2$ esetén

$$\frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{x_2}{x_1}} < \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

5.6. Mutassuk meg, hogy $0 \le x$ esetén

a) $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$ és $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$.

b) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ és $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!

d) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban, b)-ben és c)-ben $x < 0$ esetén?

e) Mutassuk meg, hogy az

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

sorozatok tetszőleges x valós szám esetén konvergensek és határértékük $\sin x$ illetve $\cos x$.

5.7. Igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén

a) $1 + x < e^x$; **b)** $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$!

c) Folytassuk az a)-b) egyenlőtlenségsorozatot!

d) Hogyan állnak a relációs jelek a)-ban és b)-ben $x < 0$ esetén?

5.8. **a)** Igazoljuk, hogy $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\mathrm{tg} x \ge x + \frac{x^3}{3}$.

b) Adjunk meg minél nagyobb olyan a valós számot, amelyre $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ esetén $\mathrm{tg} x \ge x + \frac{x^3}{3} + ax^5$.

5.9. Igazoljuk, hogy $0 \le x < 1$ esetén $1 + \frac{x}{2} \ge \sqrt{1+x} \ge 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

5.10. (M) **a)** Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a $(0; \infty)$ jobbról végtelen intervallumon alulról nézve (szigorúan) konvex!

b) Igazoljuk a számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenséget n db pozitív számra!

5.11. (M) **a)** Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^2$ függvény alulról nézve (szigorúan) konvex $\mathbb{R}$-en!

b) Igazoljuk a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenséget n db pozitív számra!

5.12. (M) Melyik háromszögben

a) maximális **b)** minimális

a

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$

kifejezés értéke, ahol α, β és γ a háromszög három belső szögét jelöli?

5.13. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyiknek

a) maximális **b)** minimális

a kerülete?

5.14. Adott sugarú körbe írt n-szögek közül melyiknek

a) maximális **b)** minimális

a kerülete?

5.15. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyiknek

a) maximális **b)** minimális

a területe?

5.16. (M) Adott sugarú körbe írt háromszögek közül melyikben maximális az oldalak négyzetösszege?

5.17. (M) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenség bármely valós a, b, c számokra teljesül!

6. FEJEZET

Alapvető integrálok

6.1. Trigonometriai alapösszefüggések ismétlése

6.1. (M) Fejezzük ki $\cos\alpha$-t

a) $\cos\frac{\alpha}{2}$ és $\sin\frac{\alpha}{2}$; **b)** $\cos\frac{\alpha}{2}$;
c) $\sin\frac{\alpha}{2}$; **d)** $tg\frac{\alpha}{2}$

függvényeként!

6.2. (M) Fejezzük ki $ch\alpha$-t

a) $ch\frac{\alpha}{2}$ és $sh\frac{\alpha}{2}$; **b)** $ch\frac{\alpha}{2}$;
c) $sh\frac{\alpha}{2}$; **d)** $th\frac{\alpha}{2}$

függvényeként!

6.3. (M) Fejezzük ki $\sin\alpha$-t

a) $\cos\frac{\alpha}{2}$ és $\sin\frac{\alpha}{2}$; **b)** $\cos\frac{\alpha}{2}$;
c) $\sin\frac{\alpha}{2}$; **d)** $tg\frac{\alpha}{2}$

függvényeként! Adjuk meg, hogy melyik formula mely intervallumon érvényes!

6.4. (M) Fejezzük ki $sh\alpha$-t

a) $ch\frac{\alpha}{2}$ és $sh\frac{\alpha}{2}$; **b)** $ch\frac{\alpha}{2}$;
c) $sh\frac{\alpha}{2}$; **d)** $th\frac{\alpha}{2}$

függvényeként! Adjuk meg, hogy melyik formula mely intervallumon érvényes!

6.5. (M) Fejezzük ki

a) $tg\alpha$-t $tg\frac{\alpha}{2}$;
b) $th\alpha$-t $th\frac{\alpha}{2}$

függvényeként!

6.6. (MS) *arshx logaritmikus alakja*

Fejezzük ki a $arshx$ értékét x-szel a logaritmusfüggvény segítségével!

6.2. Parciális integrálás

6.1. (M)

a) Számítsuk ki az $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ integrált!
b) Mutassuk meg, hogy az $\{I_n\}$ sorozat monoton fogyó!
c) (*Wallis formula*)
Legyen

$$J_n = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \tag{1}$$

Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} = \frac{\pi}{2}$.

6.3. Parciális törtekre bontás

6.1. (M) Adjuk meg az alábbi határozatlan integrálokat!

a) $\int \frac{x^3+x^2-4x-6}{(x^2+2x+2)(x+2)^2} dx$

b) $\int \frac{3x^3-11x^2+10x-1}{(x-2)^2} dx$

c) $\int \frac{x^3-x^2+9x+7}{(x^2+2x+2)(x^2-x+1)} dx$

d) $\int \frac{-x^3+7x^2-12x+18}{(x^2+x-2)(x^2-2x+5)} dx$

6.4. Helyettesítéses integrálás

6.1. (M) Adjuk meg az $\int \sqrt{1-x^2} dx$ határozatlan integrált!

6.2. (M) Adjuk meg az $\int \sqrt{1+x^2} dx$ határozatlan integrált!

6.3. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{\sin x} dx$ határozatlan integrált!

6.4. (S) Adjuk meg az $\int \frac{1}{shx} dx$ határozatlan integrált!

6.5. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+(\sqrt{1+x})^3} dx$ határozatlan integrált!

6.6. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ határozatlan integrált!

6.7. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ határozatlan integrált!

6.8. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$ határozatlan integrált!

6.9. (MS) Adjuk meg az $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} dx$ határozatlan integrált!

6.10. (MS) Adjuk meg az $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ határozott integrált!

7. FEJEZET
Görbék

7.1. Görbék paraméterezése

7.1. Melyik nevezetes görbe paraméterezését adja meg a $\gamma(t) = (cht; sht)$ képlet?

7.2. (M) *ciklois*

Egy kerék csúszásmentesen gördül az egyenes talajon. Írjuk le a kerék egy pontjának pályáját!

Tegyük fel, hogy a kerék a számegyenes origójából indul, és kezdetben a vizsgált pont épp az origóban van. A t időpillanatban a kerék érintési pontja a számegyenesen legyen épp t-ben. Adjuk meg a mozgó pont koordinátáit t függvényében!

7.3. (M) *Asztrois*

Egy r sugarú kör belsejében csúszásmentesen gördül egy negyedakkora sugarú kör. A kisebb kör egy pontjának pályáját elemezzük. Legyen a nagy kör középpontja a koordinátarendszer origója, és a $t = 0$ időpontban a vizsgált mozgó pont legyen a két kör érintési pontja, a $\gamma(0) = (r; 0)$ pont.

a) Vázoljuk a görbét!

b) Tételezzük fel, hogy t idő alatt a két kör érintési pontja az origó körül t radián szöget fordult el. Írjuk fel a vizsgált pont koordinátáit!

c) Algebrai görbe-e az asztrois? Van-e olyan kétváltozós polinom, $p(x; y)$, amelynek zérushelyeinek halmaza épp a fent definiált görbe?

7.4. (M) *Arkhimédeszi spirális*

Egy pont egyenletesen mozog egy egyenesen, amely egyenletesen forog egy pontja körül. Írjuk le a mozgó pont pályáját!

a) Vázoljuk a görbét!

b) Legyen kezdetben a forgó egyenes az x-tengely, rajta a mozgó pont kezdetben az origó, a forgási középpont pedig mindig az origó. Jelölje a az egyenesen való haladási sebesség és az egyenes forgási szögsebességének hányadosát. Paraméterezzük a spirálist az egyenes origó körüli elfordulásának θ szögével!

c) Algebrai görbe-e az Arkhimédeszi spirális? Van-e olyan kétváltozós polinom, $p(x; y)$, amelynek zérushelyeinek halmaza épp a fent definiált görbe?

7.5. (M) *Bernoulli-féle Lemniszkáta*

a) Alább négy definíciót olvashatunk. Mutassuk meg, hogy mind a négy ugyanazt a görbét definiálja!

Def. 1. Azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek az $F_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ pontoktól való távolságának szorzata $\frac{1}{2}$.

Def. 2. Az $ABCD$ rúdszerkezet az AB, BC, CD, DA rudakból és az A, B, C, D pontokban található csuklókból áll. Az AB, CD rudak hossza $\sqrt{2}$ egység, míg a BC, DA rudaké 1 egység. Az A, B pontokat az $F_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ pontokhoz rögzítjük, míg C és D mozog. Hol helyezkedhet el a CD szakasz felezőpontja amikor a szerkezet átmetszi önmagát?

Def. 3. Invertáljuk az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbolát az origó körüli egység sugarú körre!

Def. 4. Állítsunk merőlegest az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola érintőire az origóból. Mi a talppontok mértani helye?

b) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta egyenlete Descartes koordinátarendszerben:

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2. \tag{1}$$

c) Adjuk meg a P pont koordinátáit, ha tudjuk, hogy illeszkedik a fenti lemniszkátára és az origótól való távolsága t!

7.6. (M) *Logaritmikus spirál*
A logaritmikus spirál egyenlete polárkoordinátákban: $r = a \cdot e^{b\phi}$, ahol a és b konstansok.

a) Mutassuk meg, hogy tetszőleges α, β szögek esetén a görbe $\phi \in [0; \alpha]$ íve hasonló a $\phi \in \in [\beta, \beta + \alpha]$ ívhez!

b) Vázoljuk a spirált!

7.2. Görbék tulajdonságai

7.1. (M) Számítsuk ki az origó középpontú egység sugarú kör $x \in [0; \xi]$ intervallum fölötti ívének hosszát az integrálszámítás segítségével!

7.2. Számítsuk ki a 7.2. feladatban megadott ciklois $t_1 = 2$, $t_2 = 3$ paraméterértékek közés eső részének területét!

7.3. (M) Számítsuk ki a 7.3. feladatban megadott asztrois

a) teljes ívének hosszát;

b) által határolt tartomány területét!

c) Mutassuk meg, hogy az asztrois érintőjének a koordinátatengelyek közé eső darabja állandó hosszúságú! (A fal mellett lecsúszó pálca asztroist érint.)

7.4. A sík egy pontját megadja az origótól való r távolsága és helyvektorának az x-tengely pozitív félegyenesével bezárt φ (polár)szöge. Azt mondjuk, hogy megadtuk a görbe *poláris egyenletét*, ha meghatároztuk az $r(\varphi)$ függvényt, tehát kifejeztük a sugarat a polárszög függvényében.

a)

Fejezzük ki a $r(\varphi)$ poláris egyenlettel megadott görbe $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ közti ívének hosszát!

7.5. (M) *Arkhimédeszi spirális*

a) Határozzuk meg a 7.4. feladatban megadott Arkhimédeszi spirális első teljes (a $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ értékek közé eső) ívének hosszát!

b) Számítsuk ki a sugár és az érintő szögét, azaz adjuk meg a φ paraméter függvényében a az origót a görbe φ paraméterű P_φ pontjával összekötő egyenes és a spirál P_φ pontjához húzott érintő egyenes szögét!

c) *A kör négyszögesítése*

Adott egy Arkhimédeszi spirál a síkon és egy kör. Szerkesszük a körrel egyenlő területű téglalapot!

d) *Szögharmadolás*

Adott egy Arkhimédeszi spirál a síkon és egy szög. Szerkesszük meg a szög harmadát!

7.6. Forgassuk meg az $y = x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt tartományt az $x = 0$ és $x = 1$ értékek között az x-tengely körül és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát!

7.7. Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény x-tengely körüli forgatásakor keletkező forgástes $1 \le x \le 2$ abszcisszájú pontok által határolt részének térfogatát!

7.8. *Hengerek áthatása*
Két r sugarú körhenger úgy helyezkedik el, hogy forgástengelyük egy síkban fekszik és merőleges egymásra. Határozzuk meg a két henger közös részének térfogatát!

7.9. *Paraméterezett görbe forgatása*
Adjuk meg a $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ paraméterezett görbe $t = \alpha$, $t = \beta$ paraméterértékekhez tartozó pontjai közti ívének x-tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogatát (feltételezzük, hogy ott y az x függvénye)!

7.10. (M) *Parabola ívhossza*
Számítsuk ki az $y = x^2$ normálparabola $x = 0$ és $x = 1$ abszcisszájú pontjai közti ívének hosszát!

7.11. (M) *Exponenciális fv. grafikonjának ívhossza*
Számítsuk ki az $y = e^x$ exponenciális függvény $x = 0$ és $x = 1$ abszcisszájú pontjai közti ívének hosszát!

7.12. (M) *Ciklois ívhossza, területe*
Határozzuk meg egy teljes ciklois ív (lásd a 7.2. feladatot)
a) hosszát;
b) alatti terület nagyságát!

7.13. (M) *Logaritmikus spirál*
a) Határozzuk meg, hogy az $r = a \cdot e^{b\varphi}$ egyenletű logaritmikus spirál (lásd a 7.6. feladatot) mekkora szöget zár be azzal a sugáregyenessel, amit éppen metsz! (Tehát a görbe adott pontbeli érintőjének és a pontot az origóval összekötő egyenesnek a szögét kell meghatározni.)

b) Számítsuk ki a görbe egy teljes ívének, a $\varphi \in [0; 2\pi]$ paramétertartományhoz tartozó ívnek a hosszát!

8. FEJEZET

Furcsa függvények

8.1. (M) Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) függvény, **b)** folytonos függvény,

amelyre $f(x)$ pontosan akkor racionális, ha $f(x+1)$ irracionális?

8.2. (M) Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelynek lokális szélsőértékhelyei:

a) $X_0 = -2$ (minimum), $X_1 = 0$ (maximum), $X_2 = 2$ (minimum);

b) $X_0 = -2$ (minimum), $X_1 = 2$ (minimum);

és más lokális szélsőértékhelye nincs? Van-e a mindenhol deriválható függvények között ilyen?

8.3. (M) Legyen f az $x_0 \in \mathbb{R}$ szám egy környezetében értelmezett függvény. Tekintsük a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

határértékeket. Szemléltessük jelentésüket! Melyikük létezéséből következtethetünk a másik létezésére? Milyen kapcsolat van a két határérték között, ha mindkettő létezik?

8.4. Legyen f az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy U környezetében értelmezett, x_0-ban differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy ha $\{\alpha_n\} \subset U$, $\{\beta_n\} \subset U$ tetszőleges sorozatok, melyekre $\alpha_k \neq \beta_k$ $(k \in \mathbb{N})$ és

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k = \lim_{k \to \infty} \beta_k = x_0,$$

akkor

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(\alpha_k) - f(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k} = f'(x_0).$$

8.5. Az alábbi függvények 0-n kívül minden valós számon értelmezettek. Közülük melyiket lehet úgy értelmezni 0-ban, hogy ott

a) folytonos **b)** differenciálható

legyen?

$$f_1(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad f_2(x) = x\sin\frac{1}{x}, \qquad f_3(x) = x^2\sin\frac{1}{x}.$$

8.6. A 8.0.1 ábrán a g függvény grafikonja látható. A grafikon darabjai 3 ill. (-3) meredekségű szakaszok, végpontjaik az x-tengelyen ill. az $y = x$ egyenesen vannak. Legyen $g(0) = 0$.

a) Mutassuk meg, hogy g a $[-4; 4]$ intervallumban folytonos!

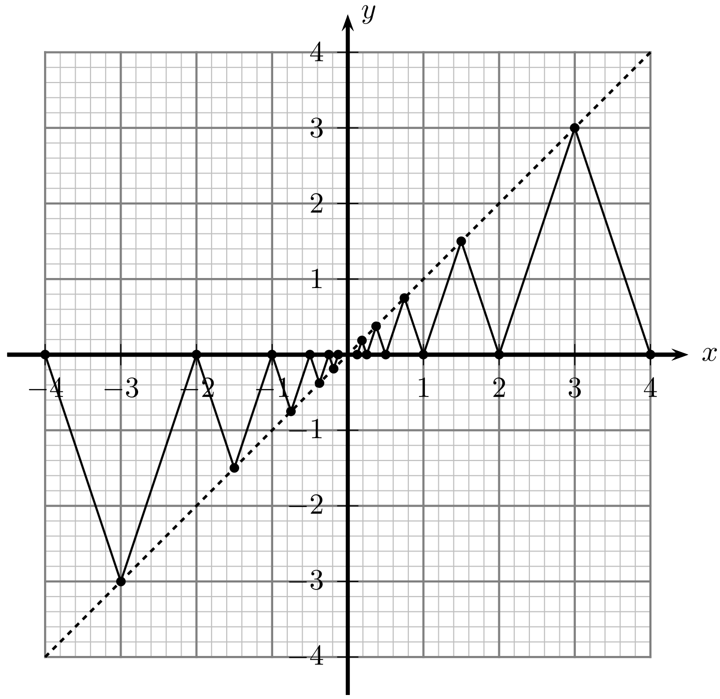
b) Mutassuk meg, hogy g a $(-4; 4)$ intervallumban végtelen sok helyen nem differenciálható!

Jelöle $G(x)$ a g függvény grafikonja az x tengely és az $x = -4$ egyenes által határolt rész előjeles területét (az x tengely alatti területrészek negatívan, az a fölöttiek pozitívan számolandók). Tehát pl $G(-4) = G(4) = 0$.

c) Mutassuk meg, hogy G a $(-4; 4)$ intervallum minden pontjában differenciálható!

d) Határozzuk meg $G'(0)$ értékét!

e) Mutassuk meg, hogy G-nek minimuma van 0-ban, de a 0 egyik bal oldali környezetében sem igaz, hogy $G'(x) < 0$!



8.6.1. ábra.

8.7. [7] Mutassuk meg, hogy a

$$h(x) = \begin{cases} x + x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x - x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$$

függvény

a) a 0-ban differenciálható;

b) $h'(0) > 0$;

c) 0 egyik környezetében sem monoton.

8.8. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek folytonosak illetve differenciálhatóak az

a) $x = 0$, **b)** $x = 1$, **c)** $x = \sqrt{2}$

pontban!

I. $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

II. $f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

III. $f_3(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

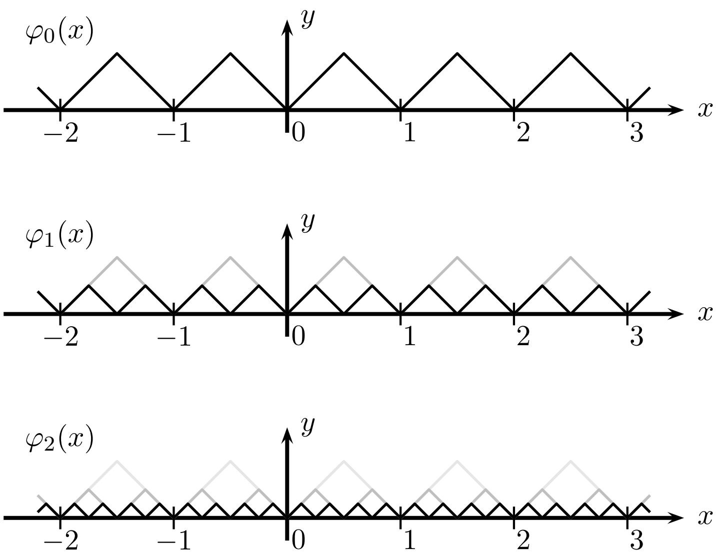
IV. $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{q^3}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+, (p, q) = 1, \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

8.9. Van-e olyan függvény, amely az $[0; 1]$ intervallumon folytonos, kontinum sok helyen zérus, de nincs olyan nem üres nyílt intervallum, amelyen azonosan 0?

8.10. (M) [5] *Van-der-Waerden függvénye*

A φ_0 függvény grafikonja a 8.0.1. ábra felső részén látható, φ_0 periódusa 1, értékkészlete a $[0; \frac{1}{2}]$ intervallum. A grafikon szimmetrikus az $x = \frac{k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ egyenesekre. Legyen $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi_0(2^n x)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. A φ_1, φ_2 függvények grafikonja feketével húzva látható az alábbi ábra középső ill. alsó részén. Legyen továbbá

$$\Phi_n(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_n(x).$$



8.10.1. ábra.

a) Rajzoljuk meg a Φ_1, Φ_2, Φ_3 függvények grafikonját!

b) Mutassuk meg, hogy Φ_k grafikonja egyenes szakaszokból áll és ezek meredeksége olyan egész, amelynek paritása $(k+1)$ paritásával egyezik meg.

c) Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(x)$ határérték minden $x \in \mathbb{R}$-re létezik!

d) Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x)$ függvény minden $x \in \mathbb{R}$-ben folytonos!

e) Mutassuk meg, hogy a $\Phi(x)$ függvény semelyik $x \in \mathbb{R}$-ben sem differenciálható!

f) Határozzuk meg $\Phi(x)$ maximumát!

g) Adjuk meg $\Phi(x)$ összes maximumhelyét!

9. FEJEZET

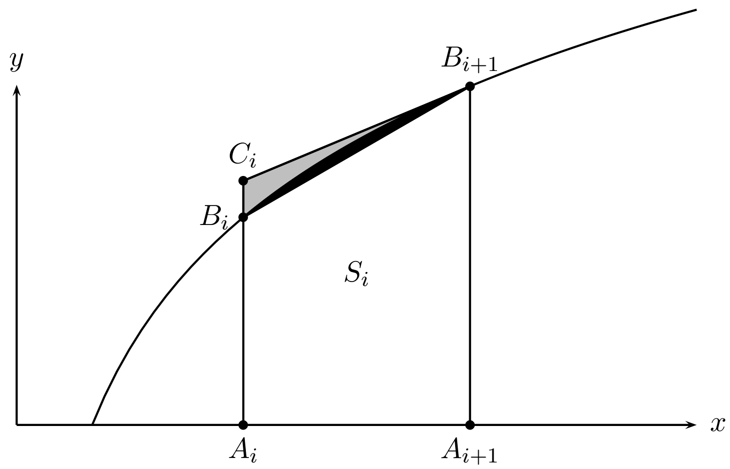
Vegyes feladatok

9.1. [9] Az f folytonos és monoton növekedő függvény a $[0;1]$ intervallumban értelmezett, és értékkészlete is ugyanez az intervallum, továbbá $f(0)=0$, $f(1)=1$. Bizonyítsuk be, hogy a függvény grafikonját le lehet fedni n darab egyenként $\frac{1}{n^2}$ területű téglalappal (a téglalapok oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel)!

9.2. (M) [11] *Stirling formula*

Alább a logaritmus görbe alatti, 1 és n abszcisszák közés eső I_n területének vizsgálatából $n!$ értékére nyerünk aszimptotikus formulát.

Legyen $i \in \mathbb{N}^+$ esetén $A_i(i;0)$, $B_i(i;\ln i)$, valamint jelölje C_i a logaritmus görbe B_{i+1}-beli érintőjének i abszcisszájú pontját és S_i, T_i, t_i rendre az $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ négyszög, a $B_iB_{i+1}C_i$ háromszög (az ábrán a szürke és fekete tartomány együtt) illetve a B_iB_{i+1} húr és a logaritmus-görbe közti tartomány (a 9.0.1. ábrán a fekete tartomány) területét.



9.2.1. ábra.

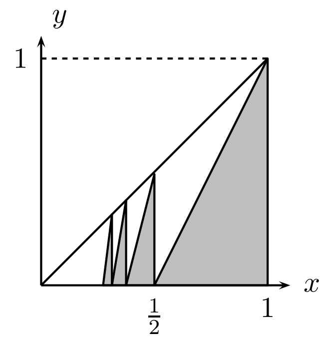
a) Fejezzük ki n-nel I_n értékét!
b) Fejezzük ki i-vel S_i értékét!
c) Fejezzük ki $n!$ értékét az I_n-re és S_i-re kapott formulákból és a t_i területekkel!
d) Mutassuk meg, hogy a $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ sorozat konvergens!
e) Mutassuk meg, hogy a $\tau'_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$ sorozat konvergens!
f) Határozzuk meg a $c_n = \ln n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n$ sorozat határértékét ($c_n = 1-\tau'_n$)!
g) Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1. \tag{1}$$

9.3. (M) [6] *Egy fűrészfog*

Alább (lásd a 9.0.1. ábrát) egy „fűrészfogat” vizsgálunk, amely végtelen sok f„fog”-ból áll. A fogak az x tengely $[0;1]$ intervalluma és az $y=x$ függvény grafikonja között találhatók. A fogak derékszögű háromszögek, melyek két befogója vízszintes illetve függőleges az ábra szerint.

A háromszög átfogója az origó felé haladva egyre meredekebb. A legnagyobb, az $(1;1)$ pontban cégződő fűrészfog bal oldala 2 meredekségű, a következő fog bal oldala már 4 meredekségű, majd 6 meredekségű fog következik, és így tovább.



9.3.1. ábra.

a) Mutassuk meg, hogy a fogazat (a ferde átfogók x tengellyel alkotott metszéspontjai) tartanak az origóhoz ($x = 0$-hoz)!

b) Határozzuk meg a háromszögek területének összegét!

9.1. Elliptikus integrálok

9.1. (M) Ez a feladat az $I_0(\xi) = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integrálról szól, amely az origó középpontú egységkör azon ívének hosszát adja meg,amelynek x tengelyre eső vetülete a $[0;\xi]$ intervallum. A primitívfüggvény felhasználása nélkül számítsuk ki az

a) $x = \sqrt{1-u^2}$,

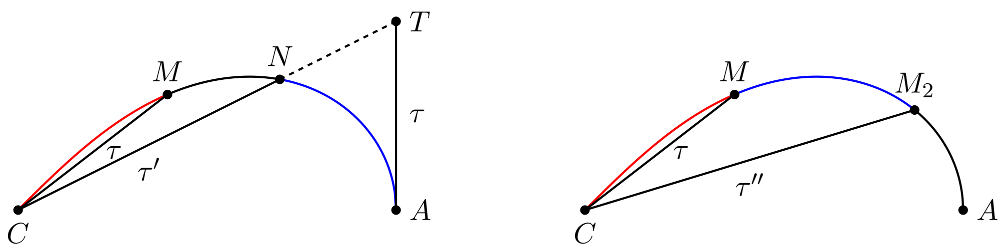
b) $x = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}$ $\qquad (0 \le x, \xi \le \frac{1}{\sqrt{2}})$

helyettesítéssel adódó új integrandusokat ($0 \le u, z \le 1$), és az integrálás határait. Értelmezzük a kapott eredményt!

9.2. (*Fagnano a lemniszkátáról*)

a) Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-féle lemniszkáta (lásd a 7.5. feladatot) origóból induló τ hosszú húrjához tartozó ívének hossza (lásd a 9.1.1. ábrát):

$$\int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{1}$$



9.2.1. ábra.

b) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta görbén a $CM = \tau$ hosszúságú és a

$$CN = \tau' = \sqrt{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}$$

hosszúságú húrhoz tartozó ívek negyedívre egészítik ki egymást, azaz a $\widehat{CM}$ ív az $\widehat{AN}$ ívvel, a $\widehat{CN}$ ív pedig az $\widehat{AM}$ ívvel egyenlő hosszú.

c) Mutassuk meg, hogy a lemniszkáta görbén a $CM = \tau$ hosszúságú húrhoz tartozó ív hosszának kétszeresével egyenlő a

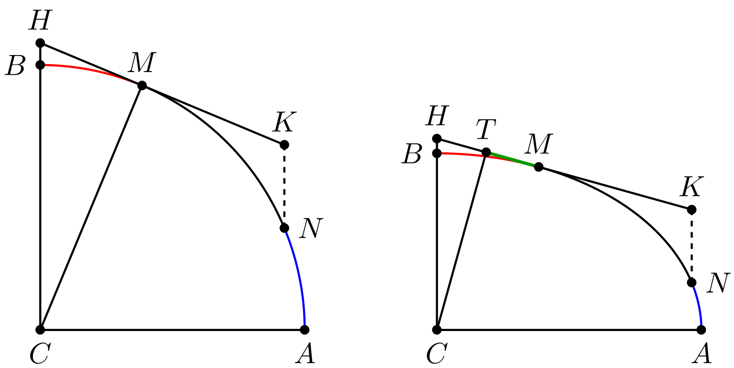
$$CM_2 = \tau'' = \frac{2\tau\sqrt{1-\tau^4}}{1+\tau^4}$$

hosszúságú húrhoz tartozó ív hossza.

d) Mutassuk meg, hogy ha a lemniszkáta CA tengelyére merőlegest állítunk az A végpontban és erre felmérjük az $AT = CM$ szakaszt, akkor a CT félegyenes kimetszi a lemniszkátából azt az N pontot, amelyre a $\widehat{CM}$, $\widehat{NA}$ lemniszkátaívek egyenlő hosszúak.

9.3. (M) (*Fagnano és az ellipszis*)

a) Tekintsük a C középpontú r sugarú k kör $\widehat{AB}$ negyedkörívét és rajta a tetszőlegesen felvett M pontot (lásd a 9.1.1. ábrát). A k kör M-beli érintőjén vegyük fel a H, K pontokat úgy, hogy H a CB félegyenes metszéspontja legyen, míg K a H-tól M felé helyezkedjék el H-tól r távolságra. Messe a K-n át húzott CB-vel párhuzamos egyenes a negyedkörívet az N pontban. Mutassuk meg, hogy a kör $\widehat{BM}$, $\widehat{NA}$ ívei egyenlők.



9.3.1. ábra.

b) (*Fagnano pont, mint extrémum*)

Most egy k ellipszist vizsgálunk, melynek középpontja C, fél nagytengelye CA, fél kistengelye CB. Tekintsük az ellipszis $\widehat{AB}$ negyedívén egy tetszőleges M pontot és legyen a C középpont merőleges vetülete az ellipszis M-beli érintőjén T. Határozzuk meg az MT szakasz hosszának maximumát!

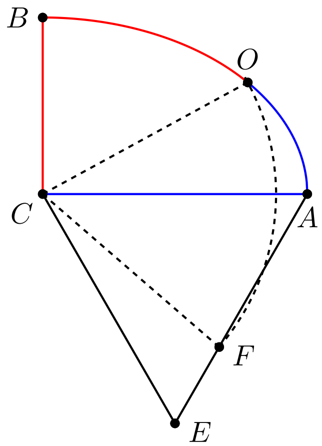
c) Tekintsük még az ellipszis M-beli érintőjén a H, K pontokat úgy, hogy H a CB félegyenes metszéspontja legyen, míg K a H-tól M felé helyezkedjék el H-tól a CA fél nagytengellyel egyenlő távolságra. Messe a K-n át húzott CB-vel párhuzamos egyenes a negyed ellipszisívet az N pontban. Mutassuk meg, hogy az ellipszis $\widehat{BM}$, $\widehat{NA}$ íveinek különbsége a TM szakasz hosszával egyenlő.

d) (*Fagnano pont, mint kerületfelező*)

Ha az ACB ellipszisnegyed CA féltengelyére egy CAE egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk (lásd a 9.1.2. ábrát), és az AE oldalra felmérjük az $AF = CB$ féltengelyt, akkor a C középpontú F-en átmenő kör a $\widehat{BA}$ ellipszisívet egy olyan O pontban metszi, amelyre

$$CA + \widehat{AO} = CB + \widehat{BO},$$

tehát a CA, CB féltengelyek és a BC ív alkotta zárt görbe kerületét felezi a CO egyenes.



9.3.2. ábra.

Segítség, útmutatás

1. Harmadfokú függvények

1.1. úgy kell t-t választanunk, hogy a másodfokú tag kiessen: $t = \frac{-b}{3a}$.

1.3. Az 1.1 feladatban látott módon "eltüntethető" a négyzetes tag és a főegyüttható kiemelése után alkalmazható a **??** feladat. Azt kapjuk, hogy a függvény az $x = \frac{-b}{3a}$ abszcisszájú pontra középpontosan tükrös.

1.2. A feladat deriválással könnyen megoldható. De megoldható "elemien is": a **??** feladatban alkalmazott, $\frac{b}{3a}$-val való eltolás után látható, hogy ha a pozitív, akkor a szimmetria középpont előtt konkáv a függvény, utána konvex, ha a negatív, akkor pont fordítva.

1.2. Ismét az segít, ha a polinomot átrendezzük $x + \frac{b}{3a}$ hatványai szerint. A másodfokú tag eltűnik, az elsőfokú tag együtthatója $\frac{3ac-b^2}{a^2}$. Ha ez a szám pozitív, akkor a függvény szigorúan monotonan növekszik, tehát csak egy nullhelye van.

1.3. Az 1.2 mindkét megoldása célra vezet most is. Ráadásul mindkét esetben ugyanazzal az a paraméterrel.

1.1. Lényegében minden állítást beláttunk már korábban, x_0 és x_1 értékét úgy kapjuk, hogy alkalmazzuk az $x^{'} = x + \frac{b}{3a}$ helyettesítést és az így kapott $f(x^{'}$ függvényre alkalmazzuk az 1.4 feladatot.

1.2. Nyilvánvaló, hogy a szimmetria miatt elég az egyik állítást belátni. Az is könnyen meggondolható, hogy elég az $x^3 - px$ alakú függvényekre ($p > 0$) belátni az állítást. Ez kétféleképp is történhet. Az egyik: kiszámoljuk a függvény értékét $\frac{\sqrt{p}}{3}$ és $-2\frac{\sqrt{p}}{3}$ pontban: mindkettőre $\frac{-2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$-at kapunk.

A másik lehetőség: legyen az x_0 abszcisszájú ponton átmenő vízszintes egyenes az x-tengely. (Ehhez csak q-t kell jól választani az $x^3 - px + q$ függvényben.) Ekkor x_0-ban a függvénynek kétszeres nullhelye van (mert nem előtte nő, utána csökken), a gyökök összege pedig nulla, tehát a harmadik gyök $-2x_0$.

1.3. Alkalmazzuk az 1.2 feladatban kapott eredményt. Pontosan akkor van három valós gyök, ha a függvény értéke x_0-ban nem negatív, x_1-ben nem pozitív. Kiszámolható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $(\frac{q}{2})^2 \leq (\frac{p}{3})^3$.

2. Az érintő

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Függvényvizsgálat

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

4. Szélsőérték

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

5. Egyenlőtlenségek

5.3. Legyen $t = \frac{x}{y}$. Az egyenlőtlenség az $f(t) = at - t^a + 1 - a$ függvény vizsgálatára vezet. Mutassuk meg, hogy $0 < t$ esetén ez $t = 1$-ben minimális.

6. Alapvető integrálok

6.6. Ha $t = arshx$, akkor $sht = x$, azaz $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$. Oldjuk meg ezt az egyenletet a t ismeretlenre!

6.3. Alkalmazzuk a $tg\frac{x}{2} = t$ helyettesítést!

6.4. Alkalmazzuk a $th\frac{x}{2} = t$ helyettesítést vagy a 6.4. feladat eredménye alapján sejtsük meg az eredményt!

6.5. Alkalmazzuk a $t = \sqrt{x+1}$ helyettesítést!

6.6.

1. segítség, útmutatás. Próbálkozzunk egyfajta „maradékosan osztással”!

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzuk az $e^x = t$ helyettesítést!

6.7.

1. segítség, útmutatás. Alakítsuk a sin függvényt cos fügvénnyé, majd a $\cos 2\alpha$-ra vonatkozó megfelelő összefüggés alkalmazásával alakítsuk át a nevezőt!

2. segítség, útmutatás. Alkalmazzuk a $t = tg\frac{x}{2}$ helyettesítést!

6.8. Alkalmazzuk a $t = 1 + e^x$ helyettesítést!

6.9. Alkalmazzuk a $t = tg\frac{x}{2}$ helyettesítést!

6.10. Alkalmazzuk a $t = \sqrt{x-1}$ helyettesítést!

7. Görbék

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

8. Furcsa függvények

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

9. Vegyes feladatok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

Megoldások

1. Harmadfokú függvények

1.2. Az $y = x^3 + px$ függvény páratlan függvény, tehát van szimmetria középpontja: az origó. Ezt kell q-val "feltolni". Tehát a függvény a $(0|q)$ pontra szimmetrikus.

1.1. Deriválással természetesen könnyen adódik az állítás. De belátható elemien is. Most ez következik.

Nyilván elég az egyik állítást belátni. Pozitív x-ekre az x^3 függvény grafikonja konvex, a lineáris függvény pedig az egész számegyenesen konvex (és konkáv is!). Két konvex függvény összege is konvex.

Az x^3 függvény konvexitása a pozitív félegyenesen "elemien" (deriválás nélkül) a következőképpen látható be. Legyen z_0 rögzített pozitív szám, z pedig fusson a pozitív félegyenesen. A z_0 és a z abszcisszájú pontot összekötő szakasz meredeksége $\frac{z^3-z_0^3}{z-z_0} = z^2 + zz_0 + z_0^2$. A konvexitás ekvivalens azzal, hogy z növekedésével ez a meredekség növekszik, ami viszont nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy az utóbbi gondolat közvetlenül az x^3+px+q függvényre is alkalmazható. Ebben az esetben a meredekséghez a konstans p érték adódik hozzá, ami nem változtat a növekedésen.

1.1. Ha volna két valós gyök, akkor a hozzájuk tartozó két gyöktényező szorzatát, akkor egy elsőfokú valós együtthatós polinomot kapunk, amelynek valós a gyöke. Ha tehát volna két valós gyök, akkor három is volna. Ebben az esetben a három gyök összege a volna, a kettős szorzatok összege pedig b. A gyökök négyzetösszege $a^2 - 2b$ és három valós szám négyzetösszege legalább akkora, mint a kettős szorzataik összege, tehát a^2 nem kisebb $3b$-nél.

Beláttuk, hogy a polinomnak legfeljebb egy valós gyöke van. Azt viszont tudjuk, hogy a valós együtthatós harmadfokú polinomnak legalább egy valós gyöke van.

1.1. A feladat könnyen megoldható deriválással, de itt most egy elemi utat mutatunk.

Az egyenlőtlenség bal oldala szorzattá alakítható, s ekkor azt kell belátnunk, hogy

$x(1+x)(3-5x) \le \frac{16}{27}$.

A bal oldalon három tényezős szorzat áll, tehát megpróbálkozhatunk a számtani és mértani közép közötti összefüggés alkalmazásával. Ha x pozitív, akkor a bal oldalon vagy minden tényező pozitív (ha $x < \frac{3}{5}$, vagy az utolsó tényező nulla, vagy negatív, ekkor nincs mit bizonyítanunk. Feltehető tehát, hogy $x < 0{,}6$ és minden tényező pozitív, ez tehát nem akadálya az alkalmazásnak. Nagyobb baj, hogy a három tényező összege nem állandó. Ezen segíthetünk, ha például az utolsó tényezőt a-val, az elsőt $5a-1$-gyel szorozzuk. Ekkor azt kapjuk, hogy

$(5a-1)x(1+x)(3a-5ax) \le \frac{(1+3a)^3}{27}$,

vagy másképp

$x(1+x)(3-5x) \le \frac{(1+3a)^3}{27a(5a-1}$.

Eddig a-t tetszőleges pozitív számnak választhattuk. A legélesebb becslést nyilván akkor kapjuk, ha egyenlőség is lehet. Ez a számtani és mértani közép között akkor áll fenn, ha a bal oldalon minden tényező egyenlő. Az első két tényező akkor lesz egyenlő, ha $x = \frac{1}{5a-2}$, a második és a harmadik akkor lesz egyenlő, ha $x = \frac{3a-1}{5a+1}$. Olyan a-t kell keresnünk, amelyre ez a két érték egyenlő. Így a

$15a^2 - 16a + 1 = 0$

egyenlethez jutunk, amelynek egyik megoldása $a = 1$. (A másik megoldás az $\frac{1}{15}$, ez negatív x értéket ad, ezért nem jó.) Behelyettesítve éppen a feladat állítását kapjuk.

1.2.

1. megoldás. Az állítás kijön deriválással, a bal oldal minimumát kell megkeresni pozitív x-ekre. Mi most ismét elemi megoldást mutatunk. Sőt, kettőt is. Az első pontosan úgy "működik", mint az 1.3 megoldása.

Az egyenlőtlenség bal oldala $x(2+x)(2-x)$ alakban írható. Ismét a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget akarjuk alkalmazni. Ebben az alakban biztos nem jutunk eredményre, hiszen a három szám tényező összege nem állandó.

Ezen azonban tudunk segíteni, ha az első tényezőt megszorozzuk egy a pozitív számmal, a másodikat pedig egy b pozitív számmal, amelyekre igaz, hogy

$1 + a = b$.

Ha ez teljesül, akkor a három tényező összege állandó, így - legalábbis minden nulla és kettő közötti x-re alkalmazható a számtani és mértani közép közötti összefüggés, és azt kapjuk, hogy

$ax(2 + x)(2b - 2x) \leq 8(1 + b)^3$,

vagyis

$x(4 - x^2) \leq \frac{2+a)^3}{27a(1+a)}$.

Megjegyezzük még, hogy ha $x > 2$, akkor a bal oldal negatív, tehát a fenti egyenlőtlenség akkor is teljesül.

Eddig a-t tetszőlegesen választottuk. De hogyan válasszuk meg a-t, hogy a lehető legjobb felső becslést kapjuk? Ezt akkor kapjuk, ha van olyan pozitív x, amelyre a három tényező, ax, $2 + x$ és $2b - 2x$ egyenlő, azaz

$ax = 2 + x = 2 + 2a - (1 + a)x$.

Az első egyenletből $x = \frac{2}{a-1}$. A másodikból $x = \frac{2a}{2+a}$. Ennek a két értéknek kell egyenlőnek lennie. Ez $a^2 - 2a - 2 = 0$ esetén teljesül. Az egyenlet pozitív megoldása

$a = 1 + \sqrt{3}$.

Ezt behelyettesítve az $x(4 - x^2)$-re kapott becslésbe pontosan a feladat állítását kapjuk.

Egyenlőség akkor van, amikor $x = \frac{2}{a-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. megoldás. A nulla és kettő közötti x-ek esetében a "szerepek" ügyesebben is kiosztatók, ha a feladat bal oldalán álló szorzatot

$x\sqrt{4 - x^2}\sqrt{4 - x^2}$

alakba írjuk fel. Itt két tényező már eleve egyenlő, és elég az x tényezőt szoroznunk egy a számmal. Ekkor a számtani és mértani közép közötti összefüggés azt adja, hogy

$$ax\sqrt{4 - x^2}\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{a^2x^2}\sqrt{4 - x^2}\sqrt{4 - x^2} \leq \left(\frac{a^2x^2 + 8 - 2x^2}{3}\right)^1 ,5.$$

Ha itt a-t $\sqrt{2}$-nek választjuk, akkor a jobb oldal állandó, $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, és ha az egyenlőtlenséget elosztjuk $a = \sqrt{2}$-vel éppen a feladat állítását kapjuk. Egyenlőség akkor van, ha $2x^2 = 4 - x^2$, azaz $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

1.4. Az $f(x) = x^3 - px + q$ függvénynek egy tetszőleges x ponthoz tartozó differenciahányados függvénye $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = y^2 + yx + x - p$. A $0 < x < \sqrt{\frac{p}{3}}$ intervallumon ez mindig negatív, így itt az f függvény szigorúan monotonan csökken. Az $x > \sqrt{\frac{p}{3}}$ félegyenesen ez az érték mindig pozitív, így itt az f függvény szigorúan monotonan nő.

2. Az érintő

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

3. Függvényvizsgálat

3.1. $f_1(x) = \frac{\ln x}{x}$

I. ÉT: $x > 0$. **II.** –

III. $f_1(x) \begin{cases} < 0, & \text{, ha } 0 < x < 1; \\ = 0, & \text{, ha } x = 1; \\ > 0, & \text{, ha } 1 < x. \end{cases}$

IV. Határértékek:

$\lim_{x\to 0+} f_1(x) = -\infty$, mert $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} x = 0$, de $x > 0$.

$\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = 0$, mert korábban vettük ($\ln x$ lassabban nő, mint x).

V. $f_1'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x-1\cdot\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$;

VI. $f_1'(x) \begin{cases} < 0, & \text{, ha } e < x; \\ = 0, & \text{, ha } x = e; \\ > 0, & \text{, ha } x < e. \end{cases}$

A derivált $e \approx 2{,}71828$-ban előjelet vált (+-ból −), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $1/e \approx 0{,}36788$.

$(0, e)$-ben f_1 szig. mon. nő, (e, ∞)-ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(-\infty; \frac{1}{e}]$.

VIII. $f_1''(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1-\ln x)'x^2-(x^2)'(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-3x+2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x-3}{x^3}$;

IX. $f_1''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < e^{\frac{3}{2}}; \\ = 0, & \text{ha } x = e^{\frac{3}{2}}; \\ > 0, & \text{ha } e^{\frac{3}{2}} < x. \end{cases}$

$e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}48169$.

$f_1(x)$ alulról konkáv $(0; e^{\frac{3}{2}})$-ben, míg alulról konvex $(e^{\frac{3}{2}}; \infty)$-ben.

X. Grafikon: lásd a 3.1. ábrát!

$f_2(x) = e^{8x-x^2-14}$

I. ÉT: $\mathbb{R}$. **II.** $f_2(x) = e^{-(x-4)^2+2}$, így a grafikon $x = 4$-re szimmetrikus: $f_2(x_1) = f_2(x_2)$, ha $\frac{x_1+x_2}{2} = 4$.

III. $f_2(x) > 0$, , ha $x \in \mathbb{R}$.

IV. Határértékek:

$\lim_{x\to -\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

V. $f_2'(x) = (8 - 2x)e^{8x-x^2-14}$;

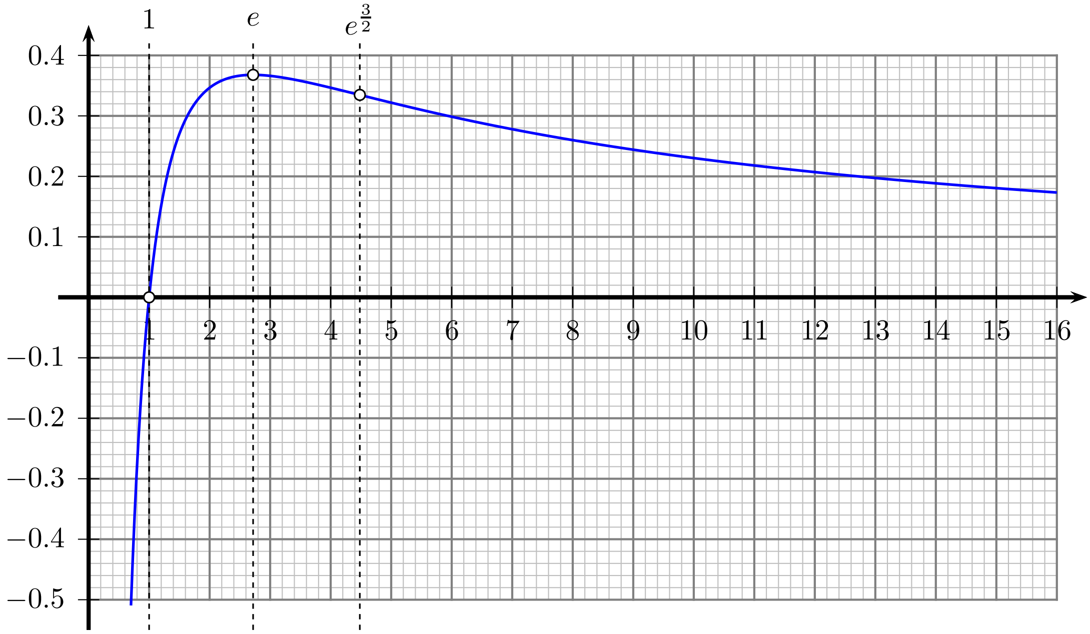
VI. $f_2'(x) \begin{cases} > 0, & \text{, ha } x > 4; \\ = 0, & \text{, ha } x = 4; \\ < 0, & \text{, ha } 4 < x. \end{cases}$

A derivált $x = 4$-ben előjelet vált (+-ból −), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $e^2 \approx 7{,}3891$. Mindez már a II-ben látott alakból is leolvasható.

$(-\infty{,}4)$-ben f_2 szig. mon. nő, $(4, \infty)$-ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(0; e^2]$.

VIII. $f_2''(x) = \left((8 - 2x)e^{8x-x^2-14}\right)' = (8 - 2x)'e^{8x-x^2-14} + (8 - 2x)\left(e^{8x-x^2-14}\right)' = -2 \cdot e^{8x-x^2-14} + (8 - 2x)^2e^{8x-x^2-14} = \left(4(x - 4)^2 - 2\right)e^{8x-x^2-14}$;



$f_1(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f_1'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f_1''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

3.1M.1. ábra.

IX. $f_2''(x)\begin{cases} >0, & \text{ha } x\in\left(4-\frac{\sqrt{2}}{2};4+\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\\ =0, & \text{ha } x=4\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\\ >0, & \text{ha } x<4-\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{vagy } 4+\frac{\sqrt{2}}{2}<x.\end{cases}$

$4-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 3{,}2929, \qquad 4+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 4{,}7071.$

$f_2(x)$ alulról konvex $\left(4-\frac{\sqrt{2}}{2};4+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-ben, míg konkáv $\left(-\infty;4-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-ben és konkáv $\left(4+\frac{\sqrt{2}}{2};\infty\right)$-ben is.

X. Grafikon: lásd a 3.2. ábrát!

$f_3(x)=xe^{-x}$

I. ÉT: $\mathbb{R}$. **II.** –

III. $f_3(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } x<0;\\ =0, & \text{ha } x=0;\\ >0, & \text{ha } x>0.\end{cases}$

IV. Határértékek: $\lim_{x\to-\infty} f_3(x)=-\infty;\qquad \lim_{x\to\infty} f_3(x)=0.$

V. $f_3'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$; **VI.** $f_3'(x)\begin{cases} >0, & \text{ha } x<1;\\ =0, & \text{ha } x=1;\\ <0, & \text{ha } 1<x.\end{cases}$

A derivált $x=1$-ben előjelet vált ($+$-ból $-$), ott maximuma van a függvénynek. Globális maximum, értéke $1/e\approx 0{,}36788$.

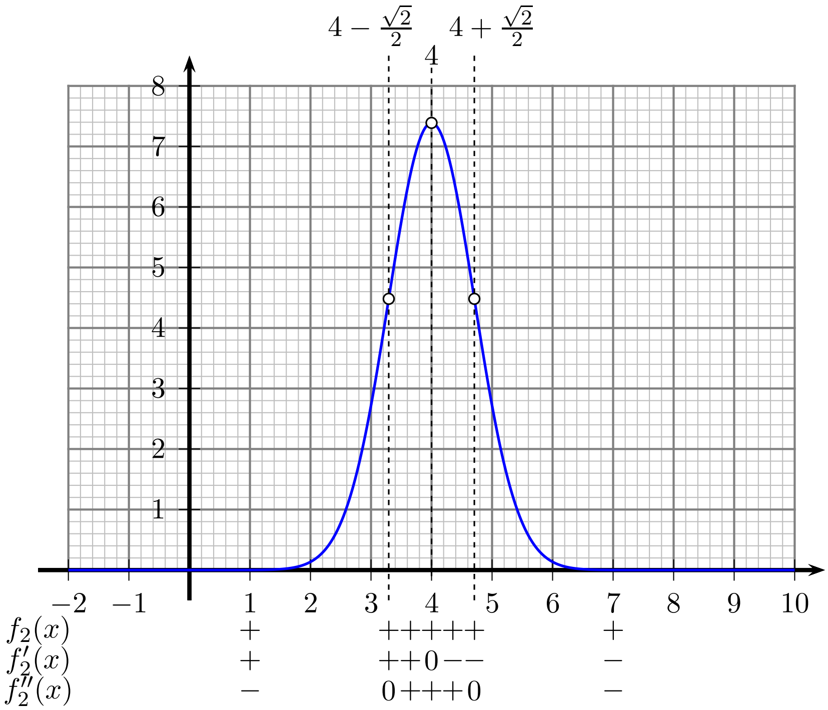
$(-\infty,1)$-ben f_3 szig. mon. nő, $(1,\infty)$-ben szig. mon. fogy.

VII. ÉK: $(-\infty;1/e]$.

VIII. $f_3''(x)=(x-2)e^{-x}$;

IX. $f_3''(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } x<2;\\ =0, & \text{ha } x=2;\\ >0, & \text{ha } x>2.\end{cases}$ $f_3(x)$ alulról konvex, ha $x>2$ és alulról konkáv, ha $2<x$.

X. Grafikon: lásd a 3.3. ábrát!



3.1M.2. ábra.

$f_4(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$

I. ÉT: $\mathbb{R}$. **II.** páratlan függvény, periódusa 2π. A továbbiakban a $[0; 2\pi]$ intervallumban vizsgáljuk.

$f_4(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) + \frac{\sin(4\pi - 2x)}{2} = -\sin(x) - \frac{\sin 2x}{2} = -f_4(x)$, tehát a grafikon szimmetrikus a $(\pi; 0)$ pontra.

III. $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} = \sin x + \sin x \cos x = \sin x(1 + \cos x)$

$$\sin x \begin{cases} < 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi; \\ = 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } \pi; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(1 + \cos x) \begin{cases} = 0, & \text{ha } x = \pi; \\ > 0, & \text{egyébként}\ . \end{cases}$$

$$f_4(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } \pi < x < 2\pi; \\ = 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } \pi; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

IV. Határértékek: –

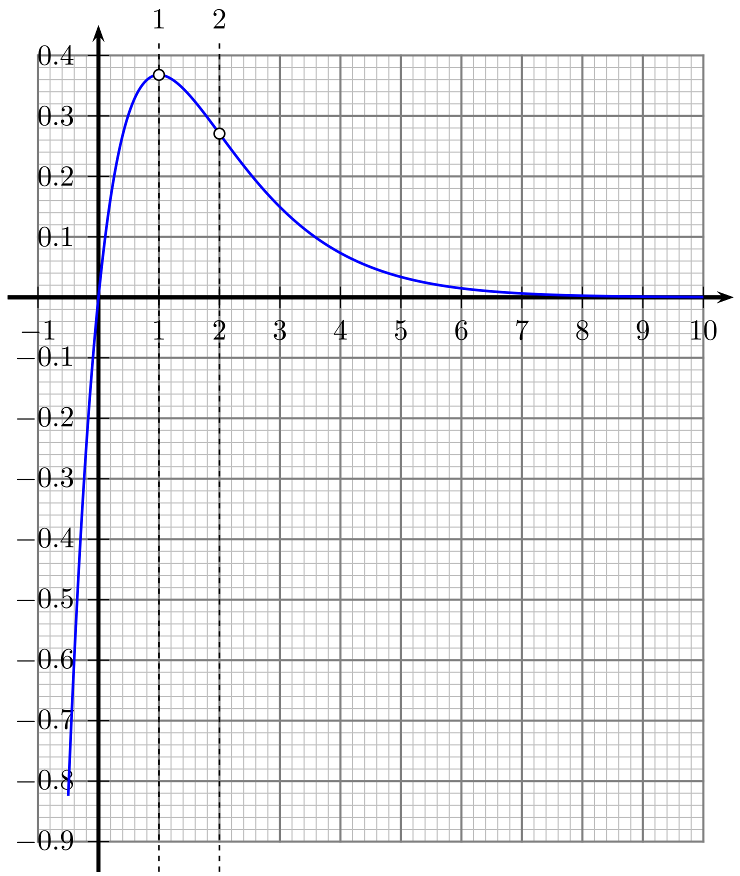
V. $f_4'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x + 1)$;

VI. $\cos x - \frac{1}{2} \begin{cases} < 0, & \text{ha } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3}; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi. \end{cases}$, $(1 + \cos x)$ előjele fent olvasható.

$$f_4'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } \frac{\pi}{3} < x < \pi \text{ vagy } \pi < x < \frac{5\pi}{3}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{\pi}{3} \text{ vagy } \pi \text{ vagy } \frac{5\pi}{3}; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ vagy } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi. \end{cases}$$

A derivált $x = \frac{\pi}{3}$-ben és $x = \frac{5\pi}{3}$-ben előjelet vált, előbbiben +-ból −-ba, utóbbiban fordítva, így előbbiben maximuma, utóbbiban minimuma van a függvénynek. A globális maximum, értéke $\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}2990$, a minimumé ennek ellentettje.

$(0, \frac{\pi}{3})$-ban f_4 szig. mon. nő, $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$-ben szig. mon. fogy, majd $(\frac{5\pi}{3}; \pi)$-ben megint szig mon nő.



$f_3(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$
$f_3'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$		$-$
$f_3''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

3.1M.3. ábra.

VII. ÉK: $[-\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}]$.
VIII. $f_4''(x) = -(1 + 4\cos x)\sin x$;
IX. $1 + 4\cos x = 0$, ha $x_1 = 1{,}8235$ vagy $x_2 = 4{,}4597$ radiánban.

$$f_4''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < x_1 \text{ vagy } \pi < x < x_2; \\ = 0, & \text{ha } x = 0, x_1, \pi, x_2; \\ > 0, & \text{ha } x_1 < x < \pi \text{ vagy } x_2 < x < 2\pi. \end{cases}$$

$f_4(x)$ alulról konvex $(x_1; \pi)$-ben és $(x_2; 2\pi)$-ben is és alulról konkáv $(0; x_1)$-ben és $(\pi; x_2)$-ben is.

X. Grafikon: lásd a 3.4. ábrát!

$f_5(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{10}$

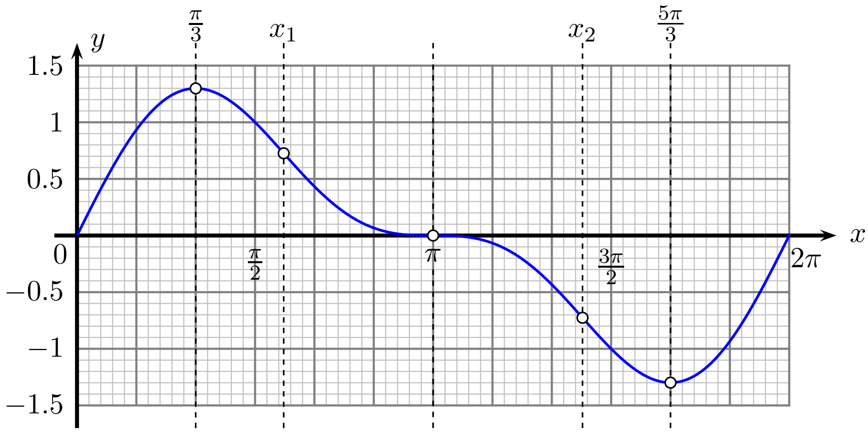
I. ÉT: $\mathbb{R}^+$, de folytonosan kiterjeszthető 0-ra (lásd később). **II.** –

$$\textbf{III. } f_5(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } x < 10; \\ = 0, & \text{ha } x = 10; \\ > 0, & \text{ha } 10 < x. \end{cases}$$

IV. Határértékek: $\lim_{x\to 0} f_5(x) = 0$ (nem nyilvánvaló), $\lim_{x\to\infty} f_5(x) = \infty$.

V. $f_5'(x) = x \ln \frac{x}{10} + \frac{x^2}{2} \frac{10}{x} \frac{1}{10} = x \cdot \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{x}{10}\right)$.;

$$\textbf{VI. } f_5'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{10}{\sqrt{e}}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{10}{\sqrt{e}}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{10}{\sqrt{e}} < x. \end{cases} \qquad \frac{10}{\sqrt{e}} \approx 6{,}0653$$



$f_4(x)$	0	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0
$f_4'(x)$	+	+	0	−	−	−	0	−	−	−	0	+	+
$f_4''(x)$	0	−	−	−	0	+	0	−	0	+	+	+	0

3.1M.4. ábra.

A derivált $x = \frac{10}{\sqrt{e}}$ előjelet vált, −-ból +-ba, így ott globális minimuma van a függvénynek. A globális minimum értéke $-\frac{25}{e} \approx 9{,}1970$.

$(0, \frac{10}{\sqrt{e}})$-ban f_5 szig. mon. fogy, $(\frac{10}{\sqrt{e}}, \infty)$-ben szig. mon. nő.

VII. ÉK: $[-\frac{25}{e}; \infty)$.

VIII. $f_5''(x) = -\frac{3}{2} + \ln\frac{x}{10}$;

IX. $f_5''(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{10}{\sqrt{e^3}}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{10}{\sqrt{e^3}}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{10}{\sqrt{e^3}} < x. \end{cases}$ $\frac{10}{\sqrt{e^3}} \approx 2{,}2313.$

$f_5(x)$ alulról konkáv $(0; \frac{10}{\sqrt{e^3}})$-ben és alulról konvex $(\frac{10}{\sqrt{e^3}}; \infty)$-ben.

X. Grafikon: lásd a 3.5. ábrát!

$f_6(x) = x\ln^2 x$

I. ÉT: $\mathbb{R}^+$, de folytonosan kiterjeszthető 0-ra. **II.** – **III.** $f_6(x) > 0$ ($f_6(0) = 0$ a folyt. kiterjesztésnél);

IV. Határértékek: $\lim_{x\to 0} f_6(x) = 0$ (nem nyilvánvaló), $\lim_{x\to\infty} f_6(x) = \infty$.

V. $f_6'(x) = \ln^2 x + x\cdot(2\ln x)\frac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x = \ln x\cdot(2+\ln x)$;

VI. $\ln x \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ = 0, & \text{ha } x = 1; \\ > 0, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$ $2 + \ln x \begin{cases} < 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{e^2}; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{1}{e^2}; \\ > 0, & \text{ha } \frac{1}{e^2} < x. \end{cases}$ $\frac{1}{e^2} \approx 0.1353;$

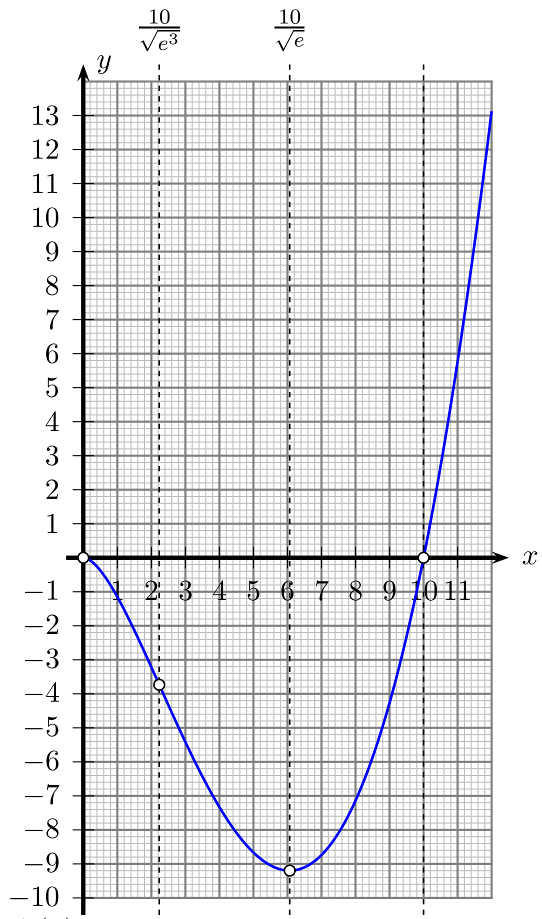
$f_6'(x) \begin{cases} < 0, & \text{ha } \frac{1}{e^2} < x < 1; \\ = 0, & \text{ha } x = \frac{1}{e^2} \text{ vagy } 1; \\ > 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{e^2} \text{ vagy } 1 < x. \end{cases}$

A derivált $x = \frac{1}{e^2}$-ben és $x = 1$-ben előjelet vált, előbbiben +-ból −-ba, így ott lokális maximum van (értéke $\frac{4}{e^2} \approx 0{,}5413$), utóbbiban −-ból +-ba, így ott lokális minimum van (értéke 0). f_6 előjelét, határértékeit figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy f_6 globális minimuma 0, maximuma nincs.

$(0, \frac{1}{e^2})$-ben f_6 szig. mon. nő, $(\frac{1}{e^2}; 1)$-ben szig. mon. fogy, majd $(1; \infty)$-ben újra szig. mon. nő.

VII. ÉK: $[0; \infty)$.

VIII. $f_6''(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$;



$f_5(x)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f_5'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f_5''(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

3.1M.5. ábra.

IX. $f_6''(x)\begin{cases} <0, & \text{ha } 0<x<\frac{1}{e}; \\ =0, & \text{ha } x=\frac{1}{e}; \\ >0, & \text{ha } \frac{1}{e}<x. \end{cases}$ $\qquad \frac{1}{e}\approx 0{,}36788.$

$f_6(x)$ alulról konkáv $(0;\frac{1}{e})$-ben és alulról konvex $(\frac{1}{e};\infty)$-ben.

X. Grafikon: lásd a 3.6. ábrát!

4. Szélsőérték

4.1. Legyen a kúp magassága M, alapkörének sugara R. A beírt henger magassága h, alap- és fedőkörének sugara r. A szélsőérték-feladatoknál szokásos módon az elfajuló eseteket is megengedjük. A henger adataira így

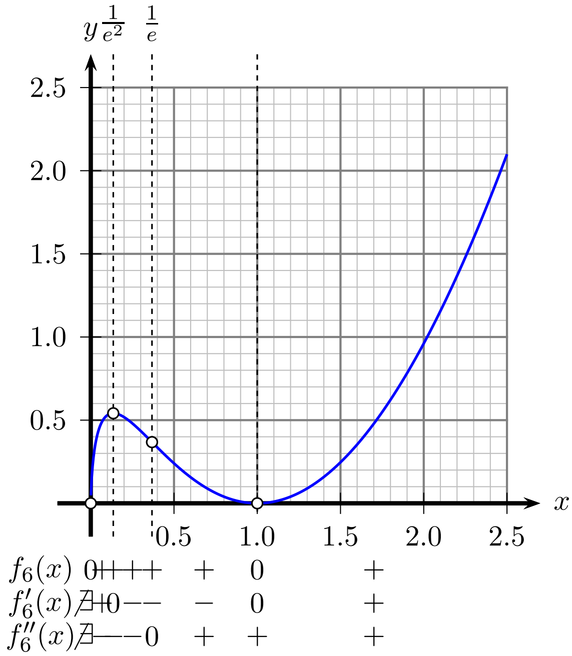
$$0\le h\le M \text{ és } 0\le r\le R.$$

Tekintsük először a kúp és a henger közös tengelyén átmenő ABC síkmetszetet a 4.1. ábra szerint.

A henger felszíne

$$A(r,h)=2\pi r^2+2\pi rh.$$

A felszínben szereplő elsőfokú változót, a henger h magasságát kifejezhetjük az r sugár és a kúp adatai segítségével. A síkmetszet jelöléseivel COB és ETB derékszögű háromszögek hasonlók,



3.1M.6. ábra.

a befogók aránya

$$\frac{h}{R-r} = \frac{M}{R}.$$

Ezt a kúp alakjára jellemző arányt λ-val jelölve

$$h = \lambda(R-r).$$

Helyettesítsük ezt a h-ra kapott kifejezést a felszín képletébe és a továbbiakban az egyszerűség kedvéért keressük az $f(r) = \frac{A}{2\pi}$ függvény szélsőértékét.

$$f(r) = \frac{A}{2\pi} = r^2 + r\lambda(R-r) = (1-\lambda)r^2 + \lambda Rr$$

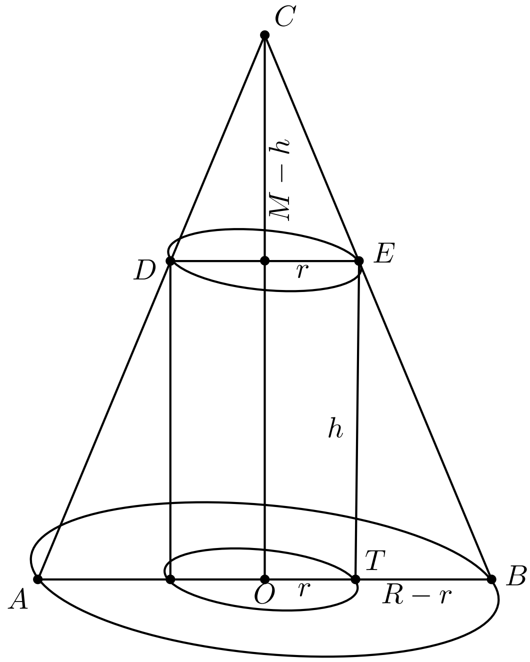
az r-nek legfeljebb másodfokú függvénye. A függvény értelmezési tartománya a $[0; R]$ intervallum, az elfajuló esetekben pedig $f(0) = 0$ és $f(R) = R^2$. A megoldás több esetre bomlik a főegyüttható, $(1-\lambda)$ előjele szerint.

Ha $\lambda = 1$, azaz a kúp nyílásszöge derékszög, akkor az $f(r)$ függvény lineáris és növekedő; maximumát az értelmezési tartomány legnagyobb elemére veszi fel: $r = R$, $h = 0$. Ekkor a henger elfajuló, $A_{max} = 2\pi R^2$, a kúp alapkörének kétszeres területe.

A továbbiakban a $\lambda \neq 1$ feltevés mellett másodfokú, a szokásos módon a valós számok halmazára kiterjesztett $f(r)$ függvényt vizsgáljuk. A függvénynek két zérushelye van, $r_1 = 0$ és $r_2 = \frac{\lambda R}{\lambda - 1}$.

Legyen először $0 < \lambda < 1$. Ekkor $f(r)$ főegyütthatója pozitív, a kiterjesztett másodfokú függvénynek minimuma van. A fügvény 0-tól különböző zérushelye negatív, így f pozitív r-ekre szigorúan monoton nő. A maximumot tehát most is az értelmezési tartomány jobb oldali végpontjában kapjuk, a henger felszíne ilyenkor is az elfajuló esetben maximális.

Legyen most $\lambda > 1$. Ekkor főegyüttható negatív, a kiterjesztett másodfokú függvénynek maximuma van. Az egyik zérushelye $r = 0$, a másik most pozitív. A válasz most már azon múlik, hogy a kiterjesztett függvény maximumahelye hol van az értelmezési tartományhoz képest. Ez az érték a két zérushely számtani közepe:



4.1M.1. ábra.

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)}.$$

Amennyiben $R \leq r_{max}$, akkor f továbbra is szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon, tehát még ilyenkor is az elfajuló esetben kapjuk a legnagyobb felszínt. Nyomban adódik, hogy az $1 < \lambda$ feltevés mellett ez pontosan akkor teljesül, ha $\lambda \leq 2$.

Végül a $2 < \lambda$ esetben a maximumhely tényleg az értelmezési tartomány belső pontja:

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)} < R.$$

Összefoglalva: (lásd a 4.2. ábrát és a hozzá tartozó interaktív weboldalt!)

Amennyiben a kúp magasságának és sugarának hányadosa $\lambda \leq 2$, akkor a maximális felszínű beírt henger elfajuló és felszíne $A = 2\pi R^2$, a kúp alapkörének a kétszeres területe. Ha $\lambda > 2$, akkor a maximális felszínű henger sugara

$$r_{max} = \frac{\lambda R}{2(\lambda - 1)} = \frac{\frac{M}{R} R}{2(\frac{M}{R} - 1)} = \frac{MR}{2(M - R)}.$$

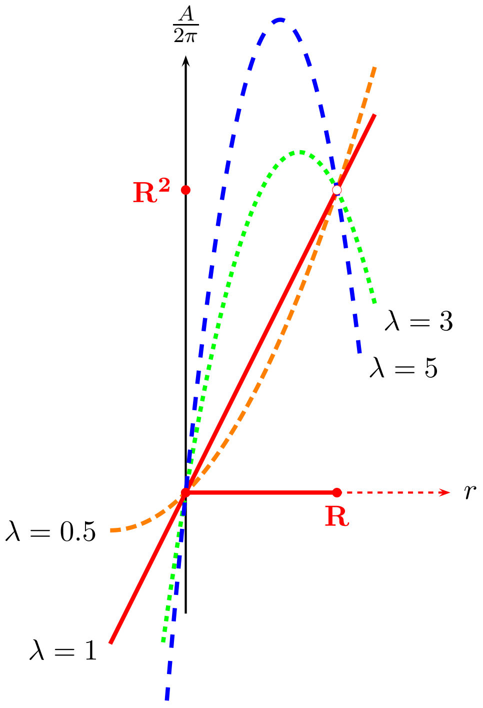
Végül írjuk fel a maximális felszínű beírt henger felszínét a $2 < \lambda$ esetben.

$$f(r_{max}) = (1 - \lambda)\frac{\lambda^2 R^2}{4(\lambda - 1)^2} + \frac{\lambda^2 R^2}{2(\lambda - 1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda^2 R^2}{\lambda - 1}.$$

Így, felhasználva, hogy $M = \lambda R$, a maximális hengerfelszín:

$$A_{max} = 2\pi f(r_{max}) = \frac{\pi \lambda^2 R^2}{2(\lambda - 1)} = \frac{\lambda}{4(\lambda - 1)} \cdot 2\pi RM = \mu \cdot 2\pi RM.$$

$$f(r) = (1-\lambda)r^2 + \lambda Rr$$



4.1M.2. ábra.

Ha $2 < \lambda$, akkor $0.25 < \mu < 0.5$, a második tényező, $2\pi RM$ pedig a kúp köré írt henger palástjának a felszíne.

Megjegyzés Láttuk, hogy ha $\lambda \leq 2$, akkor az elfajuló esetben kapjuk a maximumot, amelynek értéke az alaplap kétszeres területe, $2T = 2\pi R^2$. Ha a $2 < \lambda$ esetben is R segítségével fejezzük ki a maximális felszínt, akkor

$$A_{max} = \frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)} 2\pi R^2 = \lambda\mu 2T.$$

Ha $2 < \lambda$, akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy $1 < \lambda\mu$, a maximális hengerfelszín tehát ilyenkor nagyobb mint a kúp alaplapjának kétszeres területe.

5. Egyenlőtlenségek

5.10. a) $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, ha $x > 0$.

b) Az alulról nézve konvex függvény húrja a függvénygrafikon fölött helyezkedik el. Ha egy sokszög csúcsai a konvex függvény grafikonján helyezkednek el, akkor a sokszög csúcsaiból álló pontrendszer tömegközéppontja (a sokszög matematikai értelmű súlypontja) a sokszög belsejében, így a függvény grafikonja fölött helyezkednek el (Jensen egyenlőtlenség). Esetünkben, ha a pontok

$$(x_1; \frac{1}{x_1}), \qquad (x_2; \frac{1}{x_2}), \qquad \ldots \qquad (x_n; \frac{1}{x_n}),$$

akkor a súlypont

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}; \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} \right)$$

, ami tehát a görbe $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ abszcisszához tartozó pontja felett van:

$$\frac{1}{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}.$$

Ez az összefüggés a harmonikus és számtani közép közti egyenlőtlenség. Az egyenlőség a szigorű konvexitás miatt csak $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ esetén teljesül.

5.11. a) $f''(x) = 2 > 0$.
b) Lásd az 5.10 feladatot!

5.12. a) Vegyük észre, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény a $[0;\pi]$ intervallumban alulról konkáv, így a Jensen egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) A vizsgált kifejezés értéke bármely valóságos háromszögben pozitív, de ha pl α tart 180°-hoz, akkor a vizsgált kifejezés 0-hoz tart. Minimum tehát nincs, a legnagyobb alsó korlát a 0.

5.13. Ha a háromszög szögei α, β és γ, oldalai a, b és c, míg köréírt körének sugara R, akkor a Nagy szinusz tétel szerint

$$a = 2R\sin\alpha, \qquad b = 2R\sin\beta, \qquad c = 2R\sin\gamma.$$

Innen alkalmazhatjuk az 5.12 feladat eredményét, a legnagyobb kerületet a szabályos háromszög esetén kapjuk, míg a kerület tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet.

5.15. a) Ha a háromszög szögei α, β és γ, a körülírt kör sugara R, akkor a háromszög területe $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Keressük a

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

szorzat maximumát, ha $0 < \alpha;\beta;\gamma < \pi$ és $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Tekintsük az $f(x) = \ln\sin x$ függvényt! Ez a függvény a $(0;\pi)$ intervallumban alulról nézve konkáv, hiszen $f''(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$. A Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\ln\sin\alpha+\ln\sin\beta+\ln\sin\gamma}{3} \leq \ln\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \ln\sin\frac{\pi}{3},$$

és egyenlőség csakis $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ esetén van. Szorozzunk át és alkalmazzuk a logaritmus azonosságait!

$$\ln(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) \leq \ln\sin^3\frac{\pi}{3}$$

Mivel az ln függvény szigorúan monoton, így e fenti egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \sin^3\frac{\pi}{3}$$

egyenlőtlenséggel. Tehát a szabályos háromszög adja a maximumot.

b) A terület tetszőlegesen kicsiny pozitív szám lehet, ha a háromszög egy szakaszhoz közelít.

5.16. Az 5.15. feladat megoldásának mintájára (a Nagy szinusz tétel alapján) a

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma \tag{1}$$

kifejezés maximumát keressük a $(0;\pi)$ intervallumon az $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ feltétel mellett. Tekintsük az $f(x)=\sin^2 x$ függvényt! Ez a függvény a $(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4})$ intervallumban alulról nézve konkáv, hiszen $f''(x)=2\cos(2x)<0$, ha $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$. Így $\frac{\pi}{4}<\alpha,\beta,\gamma<\frac{3\pi}{4}$ esetén alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{3}\le\sin^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\sin^2\frac{\pi}{3},$$

és egyenlőség csakis $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ esetén van. Ebből kapjuk a

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$$

relációt.

Állítjuk, hogy ha a három szög között van olyan, amelyik nem esik a $(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4})$ intervallumba, akkor az 1. kifejezés értéke $\frac{9}{4}$-nél kisebb.

Az $(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4})$ intervallumba nem tartozó szögek szinusza legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ha két ilyen szög is van, akkor az 1. kifejezés értéke legfeljebb $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1<\frac{9}{4}$. Ha csak egy ilyen szög van, legyen α, akkor a másik kettőre alkalmazhatjuk a Jensen egyenlőtlenséget:

$$\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le 2\sin^2\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Itt $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}$, így az 1. kifejezést felülről becsüli az

$$g(\alpha)=\sin^2\alpha+2\sin^2\frac{\pi-\alpha}{2}=\sin^2\alpha+2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

függvény, amelyet most a $(0;\frac{\pi}{4})$ és a $(\frac{3\pi}{4};\pi)$ intervallumon vizsgálunk.

$$g'(\alpha)=2\sin\alpha\cdot(\cos\alpha-\frac{1}{2})>0,\qquad \text{ha}\qquad \alpha\in(0;\frac{\pi}{4}),$$

illetve $g'(\alpha)<0$, ha $\alpha\in(\frac{3\pi}{4};\pi)$. Ezért g monoton nő $(0;\frac{\pi}{4})$-n illetve monoton fogy $(\frac{3\pi}{4};\pi)$-n, így g-t a vizsgált intervallumon felülbecsli a $\frac{\pi}{4}$-hez ill. $\frac{3\pi}{4}$-hez tartozó értéke. Az ide tartozó kifejezést azonban a konvex esetnél már vizsgáltuk, láttuk, hogy $\frac{9}{4}$ nagyobb nála.

Az adott sugarú körbe írtháromszögek közül a szabályos háromszögben legynagyobb az oldalak négyzetösszege.

5.17. Feltehetjük, hogy $a,b,c>0$ és az egyenlőtlenség így írható:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{c}{b})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{a}{c})^2}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

A

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2,\qquad\left(\frac{c}{b}\right)^2,\qquad\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

törtek pozitívak, szorzatuk 1, így a konvexitás felé terelés miatt érdemes bevezetni az x, y, z változókat a

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=e^x,\qquad\left(\frac{c}{b}\right)^2=e^y,\qquad\left(\frac{a}{c}\right)^2=e^z$$

relációknak megfelelően. Bizonyítanunk kell, hogy ha $x+y+z=0$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1+e^y}}+\frac{1}{\sqrt{1+e^z}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Tekintsük az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

függvényt!

$$f''(x)=\frac{e^x\cdot(e^x-2)}{4\cdot(1+e^x)^{\frac{5}{2}}},$$

így f a $(-\infty;\ln 2]$ intervallumon alulról konkáv, a Jensen egyenlőtlenség alapján teljesül az egyenlőtlenség.

Ha csak az egyik változó – mondjuk x – értéke nagyobb $\ln 2$-nél, akkor a másik kettőre alkalmazható a Jensen egyenlőtlenség, így

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1+e^y}}+\frac{1}{\sqrt{1+e^z}}\le\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{y+z}{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{-x}{2}}}}.$$

Vizsgáljuk a

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{2}{\sqrt{1+e^{\frac{-x}{2}}}}$$

függvényt! Némi számolás után kapjuk, hogy

$$g'(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1+e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{3}{2}}\left[1-\left(1+\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

így g-nek $x=0$-ban maximuma van (csak $e^{\frac{x}{2}}-1$ előjelére kell figyelni), ami igazolja az egyenlőtlenséget.

Most már csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor az x, y, z változók közül kettőnek is legalább $\ln 2$ az értéke. A szimmetria itt feltehetjük, hogy $x\ge y\ge\ln 2\ge z$. Az $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\alpha$, $\left(\frac{c}{b}\right)^2=\beta$, $\left(\frac{a}{c}\right)^2=\gamma$ jelöléssel tehát $\alpha\beta\gamma=1$, $\alpha\ge\beta\ge2\ge\gamma$ és igazolnunk kell, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{1+\beta}}+\frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Itt $\beta\ge 2$, $\gamma=\frac{1}{\alpha\beta}\ge\frac{1}{\alpha^2}$ így a bal oldalon található kifejezés felülbecsülhető a

$$g(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}+\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

függvénnyel, amit az $\alpha\ge 2$ halmazon vizsgálunk. $\alpha=2$-ben $g(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}}<\frac{3}{\sqrt{2}}$ és állítjuk, hogy a függvény a vizsgált halmazon monoton fogy. A derivált negatív, hiszen

$$g'(\alpha)=(1+x)^{-\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\right]$$

az $\alpha=2$-ben negatív és a $h(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ monoton fogy, amiről deriválással már könnyű meggyőződni.

A levezetésből az is látható, hogy csakis $a=b=c$ esetén áll fenn egyenlőség.

6. Alapvető integrálok

6.1.

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Az utolsó kifejezés $\alpha \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ esetén értelmes.

6.2.

$$ch\alpha = ch^2\frac{\alpha}{2} + sh^2\frac{\alpha}{2} = 2ch^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 + 2sh^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + th^2\frac{\alpha}{2}}{1 - th^2\frac{\alpha}{2}}.$$

6.3.

$$\sin\alpha = \begin{array}{l} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \begin{cases} 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} & \text{, ha } 0 + 4k\pi \leq \alpha \leq 2\pi + 4k\pi \\ -2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}} & \text{, ha } 2\pi + 4k\pi \leq \alpha \leq 4\pi + 4k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} & \text{, ha } -\pi + 4k\pi \leq \alpha \leq 2\pi + 4k\pi \\ -2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}} & \text{, ha } 2\pi + 4k\pi \leq \alpha \leq 4\pi + 4k\pi \end{cases} \\ \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}\text{, ha } \alpha \neq \pi + k\pi \end{array} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

6.4.

$$sh\alpha = \begin{array}{l} 2sh\frac{\alpha}{2}ch\frac{\alpha}{2} \\ 2sh\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+sh^2\frac{\alpha}{2}} \\ \begin{cases} 2ch\frac{\alpha}{2}\sqrt{ch^2\frac{\alpha}{2}-1} & \text{, ha } 0 \leq \alpha \\ -2ch\frac{\alpha}{2}\sqrt{ch^2\frac{\alpha}{2}-1} & \text{, ha } \alpha \leq 0 \end{cases} \\ \frac{2th\frac{\alpha}{2}}{1-th^2\frac{\alpha}{2}} \end{array}$$

6.5.

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad th\alpha = \frac{2th\frac{\alpha}{2}}{1 + th^2\frac{\alpha}{2}}.$$

6.6. Eredmény: $arshx = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$. Ha ugyanis $t = arshx$, akkor

$$sht = x \Rightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x \Rightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \Rightarrow e^t = x \pm \sqrt{x^2+1},$$

és $0 < e^x$, így itt csak a pozitív előjel jön számításba.

6.1. a)

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2}; \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Az $n \geq 2$ esetben parciális integrálással próbálkozunk, az $u' = \sin x$, $v = \sin^{n-1} x$, $u = -\cos x$, $v' = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x$ szereposztásban:

$$\begin{aligned} I_n = &\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\ = &(n-1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\sin^{n-2} x dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned} \tag{2}$$

A módszer közvetlenül nem vezetett eredményre, de (**??**)-ből rendezéssel rekurziót állíthatunk fel a sorozatra:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{3}$$

Tehát

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \qquad I_4 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}, \qquad I_6 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2}, \qquad \ldots$$

$$I_1 = 1, \qquad I_3 = \frac{2}{3}, \qquad I_5 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \qquad I_7 = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}, \qquad \ldots$$

azaz

$$I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}. \tag{4}$$

b) Mivel a $[0; \frac{\pi}{2}]$ intervallumban a sin függvény pozitív, de mindenütt legfeljebb 1, így itt

$$\sin^{n+1} x = \sin^n x \cdot \sin x \geq \sin^n x, \tag{5}$$

hiszen egy nemnegatív számott 1-nél kisebb számmal szorozva az értékét nem növeljük. Ebből következően az integrálokra teljesül a

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx \geq \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \tag{6}$$

egyenlőtlenség, azaz az $\{I_n\}$ sorozat monoton fogy.

c) Fejtsük ki az $I_{2n-1} \leq I_{2n} \leq I_{2n+1}$ relációt!

$$\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} \geq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2} \geq \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}, \tag{7}$$

amiből

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot \ldots \cdot \frac{(2n-2)\cdot(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{2n}{2n-1} \geq \frac{\pi}{2} \geq \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot \ldots \cdot \frac{(2n)\cdot(2n)}{(2n-1)(2n+1)}, \tag{8}$$

tehát

$$J_{n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1} \geq \frac{\pi}{2} \geq J_n. \tag{9}$$

A $\{J_n\}$ sorozatról könnyen látható, hogy monoton nő, (**??**) jobb oldala szerint korlátos, így konvergens és határértéke legfeljebb $\frac{\pi}{2}$, de (**??**) bal oldala szerint ez a határérték nem lehet kisebb $\frac{\pi}{2}$-nél, tehát egyenlő vele.

6.1. a) Olyan a, b, c, d valós számokat keresünk, amelyekre

$$\frac{x^3+x^2-4x-6}{(x^2+2x+2)(x+2)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}. \tag{1}$$

Hozzunk a jobb oldalon közös nevezőre!

$$\frac{x^3+x^2-4x-6}{(x^2+2x+2)(x+2)^2} = \frac{a(x+2)(x^2+2x+2)+b(x^2+2x+2)+(cx+d)(x+2)^2}{(x^2+2x+2)(x+2)^2}. \tag{2}$$

Olyan a, b, c, d számokat keresünk, amelyekre a jobb és a bal oldal azonosan egyenlő, azaz

$$x^3+x^2-4x-6 = a(x+2)(x^2+2x+2)+b(x^2+2x+2)+(cx+d)(x+2)^2. \tag{3}$$

Bontsuk fel a zárójeleket a jobb oldalon és rendezzük x polinomjává!

$$x^3+x^2-4x-6=(a+c)x^3+(4a+b+4c+d)x^2+(6a+2b+4c+4d)x+(4a+2b+4d). \quad (4)$$

A két polinom akkor azonos, ha együtthatóként azonosak:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} a & & +c & & = & 1 \\ 4a & +b & +4c & +d & = & 1 \\ 6a & +2b & +4c & +4d & = & -4 \\ 4a & +2b & & +4d & = & -6 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Az ismeretleneket a Gauss-féle kiküszöbölős eljárással fejezzük ki:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} a & & +c & & = & 1 \\ & +b & & +d & = & -3 \\ & +2b & -2c & +4d & = & -10 \\ & +2b & -4c & +4d & = & -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrrcr} a & & +c & & = & 1 \\ & +b & & +d & = & -3 \\ & & -2c & +2d & = & -4 \\ & & -4c & +2d & = & -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrrcr} a & & +c & & = & 1 \\ & +b & & +d & = & -3 \\ & & -2c & +2d & = & -4 \\ & & & -2d & = & 4 \end{array}\right\},$$

azaz $d=-2$, $c=0$, $b=-1$, $a=1$. Tehát a kérdezett határozatlan integrál:

$$\int \frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{2}{x^2+2x+2}dx=\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}-2arctg(x+1)+c,$$

hiszen $\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{(x+1)^2+1}$.

Megjegyzés

Az (3) egyenletbe $x=-2$-t helyettesítve számos tag kiesik és kapjuk, hogy $(-2)^3+(-2)^2-4(-2)-6=b((-2)^2+2(-2)+2)$, amiből $b=-1$ gyorsabban adódik.

b) $(x-2)^2=x^2-4x+4$ és $3x^3-11x^2+10x-1=(3x+1)(x^2-4x+4)+2x-5$, így

$$\frac{3x^3-11x^2+10x-1}{(x-2)^2}=3x+1+\frac{2x-5}{(x-2)^2}.$$

Az utóbbi törtet parciális törtekre bontjuk, azaz

$$\frac{2x-5}{(x-2)^2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x-2)^2}$$

alakra hozzuk. A jobb oldalt közös nevezőre hozva

$$\frac{2x-3}{(x-2)^2}=\frac{ax-2a+b}{(x-2)^2},$$

azaz $a=2$ és $2a-b=5$-ból $b=-1$, tehát a kérdezett integrál

$$\int 3x+1+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}dx=\frac{3}{2}x^2+x+2\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+c.$$

c) Olyan a, b, c, d valós számokat keresünk, amelyekre

$$\frac{x^3-x^2+9x+7}{(x^2+2x+2)(x^2-x+1)}=\frac{ax+b}{x^2+2x+2}+\frac{cx+d}{x^2-x+1},$$

azaz

$$x^3-x^2+9x+7=(ax+b)(x^2-x+1)+(cx+d)(x^2+2x+2).$$

A két oldalon az azonos kitevőjű tagok együtthatóját egyenlővé tesszük:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} a & & +c & & = & 1 \\ -a & +b & +2c & +d & = & -1 \\ a & -b & +2c & +2d & = & 9 \\ & b & & +2d & = & 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrrcr} a & & +c & & = & 1 \\ & +b & +3c & +d & = & 0 \\ & -b & +c & +2d & = & 8 \\ & b & & +2d & = & 7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rrrrcr} a & & +c & & = & 1 \\ & b & +3c & +d & = & 0 \\ & & +4c & +3d & = & 8 \\ & & -3c & +d & = & 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrrcr} a & & +c & & = & 1 \\ & b & +3c & +d & = & 0 \\ & & +4c & +3d & = & 8 \\ & & & +3{,}25d & = & 13 \end{array}\right\},$$

azaz $d = 4$, $c = -1$, $b = -1$ és $a = 2$. A törtek számlálójából leválasztjuk a nevező deriváltjának konstansszorosát:

$$\frac{2x-1}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{3}{x^2+2x+2}, \qquad \frac{-x+4}{x^2-x+1} = \frac{-x+0{,}5}{x^2-x+1} + \frac{3{,}5}{x^2-x+1}.$$

Vegyük még figyelembe, hogy

$$x^2 - x + 1 = (x-0{,}5)^2 + 0{,}75 = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)^2 + 1\right),$$

azaz

$$\frac{3{,}5}{x^2-x+1} = \frac{14}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)^2+1} = \frac{7\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)^2+1},$$

így az integrál:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{3}{x^2+2x+2} + \frac{-x+0{,}5}{x^2-x+1} + \frac{3{,}5}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \ln(x^2+2x+2) - 3arctg(x^2+2x+2) - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{7\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) + c.$$

d) Vegyük észre, hogy $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, tehát olyan a, b, c, d számokat keresünk, amelyekre

$$\frac{-x^3+7x^2-12x+18}{(x^2+x-2)(x^2-2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2-2x+5},$$

tehát az

$$-x^3+7x^2-12x+18 = a(x+2)(x^2-2x+5) + b(x-1)(x^2-2x+5) + (cx+d)(x-1)(x+2) \quad (6)$$

összefüggést kell azonossággá tennünk.

Az x-ben azonos kitevőjű tagokat egyenlővé téve négyváltozós lin. egyenletrendszert kapunk, melynek megoldása $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 1$. Megjegyezzük, hogy a (6) összefüggésbe $x = -2$-t, illetve $x = 1$-et helyettesítve gyorsan megkaphatjuk b illetve a értékét.

Vegyük még észre, hogy

$$\frac{1}{x^2-2x+5} = \frac{1}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})^2+1} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})^2+1},$$

így

$$\int \frac{-x^3+7x^2-12x+18}{(x^2+x-2)(x^2-2x+5)}dx = \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + \frac{1}{2}arctg(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}) + c.$$

6.1.

1. megoldás. *Parciális integrálás*

Eredmény: $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{arcsinx}{2} + c.$

Alkalmazzuk a parciális integrálás $\int u'v = uv - \int uv'$ képletét az $u' = 1$, $v = \sqrt{1-x^2}$, $u = x$, $v' = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ szereposztásban!

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int 1\sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Mivel $x^2 = (x^2-1)+1$, így

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + c_1$$

azaz

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - c_1.$$

Egyenletet kaptunk a keresett integrálra, amit rendezéssel megoldhatunk:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}{2} + c_2 = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{arshx}{2} + c_2.$$

2. megoldás. *Helyettesítéses integrálás*

Az $\sqrt{1-x^2}$ kifejezés $x \in (-1;1)$ esetén értelmezett. Alkalmazhatjuk az $x = \sin t$ helyettesítést, ha $t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, akkor minden x értéket pontosan egyszer kapunk meg.

Mivel $1-\sin^2 t = \cos^2 t$ és $t \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ esetén $0 < \cos t$, így $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. A $\frac{dx}{dt} = \cos t$ összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Mivel $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, így $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, azaz

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c.$$

A kapott kifejezést átírhatjuk x függvényévé, ha felhasználjuk, hogy $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ és $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{arcsinx}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$$

6.2.

1. megoldás. *Parciális integrálás*

Eredmény: $\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + c.$

Alkalmazzuk a parciális integrálás $\int u'v = uv - \int uv'$ képletét az $u' = 1$, $v = \sqrt{1+x^2}$, $u = x$, $v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ szereposztásban!

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \int 1\sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Mivel $x^2 = (x^2+1) - 1$, így

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \sqrt{1+x^2}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx + c_1$$

azaz

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx - c_1.$$

Egyenletet kaptunk a keresett integrálra, amit rendezéssel megoldhatunk:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}{2} + c_2 = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{arshx}{2} + c_2.$$

Ha még felhasználjuk a 6.6. feladat eredményét is, akkor kapjuk a megoldás elején található formulát.

2. megoldás. *Helyettesítéses integrálás*

Alkalmazzuk az $x = sht$ helyettesítést! Mivel $1 + sh^2 = ch^2t$ és $0 < cht$, így $\sqrt{1+x^2} = cht$. A $\frac{dx}{dt} = cht$ összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \int chtchtdt = \int ch^2tdt.$$

Mivel $ch2t = 2ch^2t - 1$, így $ch^2t = \frac{1+ch2t}{2}$, azaz

$$\int ch^2tdt = \int \frac{1+ch2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{sh2t}{4} + c.$$

A kapott kifejezést átírhatjuk x függvényévé, ha felhasználjuk, hogy $sh2t = 2shtcht$ és $cht = \sqrt{1+sh^2t}$ valamint alkalmazzuk a 6.6. feladat formuláját:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + c.$$

6.3. A $tg\frac{x}{2} = t$ helyettesítéssel $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ és $x = 2arctgt$, így $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$. Az integrál:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + c = \ln\left(tg\frac{x}{2}\right) + c.$$

6.12. $\int \frac{1}{shx}dx = \ln\left(th\frac{x}{2}\right) + c.$

6.5. Ha $t = \sqrt{x+1}$, akkor $x = t^2 - 1$, így $\frac{dx}{dt} = 2t$, tehát

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + (\sqrt{1+2})^3}dx = \int \frac{2t}{t+t^3}dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2arctgt = 2arctg\sqrt{x+1}.$$

6.6.

1. megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^x(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x},$$

és itt a második tag f'/f alakú, azaz

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = e^x - \ln|1+e^x| + C.$$

2. megoldás. Az $e^x = t$ helyettesítés esetén $x = \ln t$, azaz $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t}dt = \int \frac{t}{1+t}dt = \int 1 - \frac{1}{1+t}dt = t - \ln|t+1| + C = e^x + \ln|1+e^x| + C.$$

6.7.

1. megoldás. Vegyük észre, hogy

$$1+\sin x = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1+\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),$$

így

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx = -tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C_1.$$

2. megoldás. Az $t = tg\frac{x}{2}$ helyettesítés esetén $x = 2arctgt$, azaz $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, másrészt $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, így

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1+t^2+2t}dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}dt =$$

$$= \frac{-2}{1+t} + C_2 = \frac{-2}{1+tg\frac{x}{2}} + C_2.$$

6.8. Ha $t = 1+e^x$, akkor $x = \ln(t-1)$ és $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-1}$ és így

$$\int \frac{1}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1}{t^2(t-1)} = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}dt =$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t| + \frac{1}{t} + C = x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C.$$

6.9. Ha $t = tg\frac{x}{2}$, akkor $x = 2arctgt$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, így

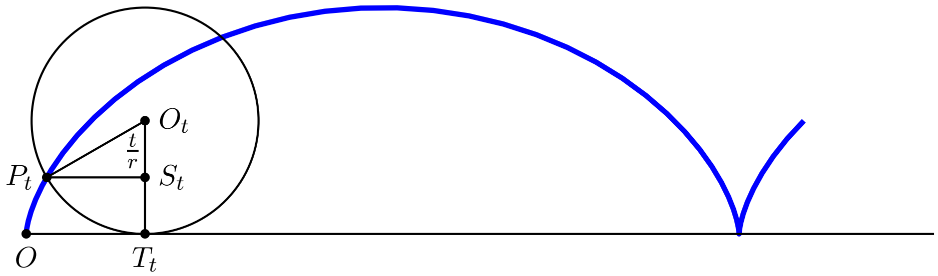
$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}dx = \int \frac{1+t^2}{4t-(1-t^2)+5(1+t^2)}\frac{2t}{1+t^2} = \int \frac{1}{3t^2+2t+2}dt =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{3}}dt = \frac{3}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}dt = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

6.10. Ha $t=\sqrt{x-1}$, akkor $x=t^2+1$, $\frac{dx}{dt}=2t$ és így

$$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2 \frac{t^2+1}{t}2tdt=2\int_1^2 t^2+1=2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_1^2=\frac{20}{3}.$$

7. Görbék



7.2M.1. ábra.

7.2. Jelölje O az origót, T_t az r sugarú mozgó kör és az egyenes érintési pontját ($OT_t=t$), O_t a mozgó kör középpontját, P_t a mozgó körön a vizsgált pont aktuális helyzetét (lásd a 7.1. ábrát). A kör az egyenesen csúszás nélkül gördül, azaz az érintkező felületek, az OT_t szakasz és az T_tP_t körív egyenlőek. Ezért $P_tO_tT_t\angle=t/r$. Ha S_t a P_t pont vetülete a T_tO_t egyenesen, akkor $O_tS_t=r\cos\frac{t}{r}$, $P_tS_t=r\sin\frac{t}{r}$, azaz P_t koordinátái:

$$x(t)=t-r\sin\frac{t}{r},\qquad y(t)=r-r\cos\frac{t}{r}. \tag{1}$$

7.3.

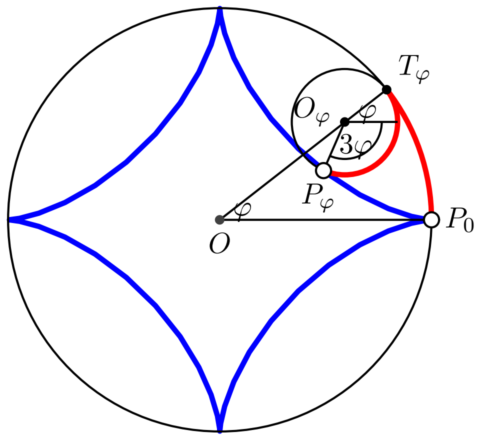
1. megoldás. a) Lásd a 7.1. ábrát!

b) Jelölje a mozgó kör és a fix kör érintési pontját T_φ, a mozgó kör középpontját O_φ, a fix körét O, a két kör érintési pontját a kezdőpillanatban P_0, a vizsgált pontot P_φ, ahol $\varphi=P_0OT_\varphi$. A fix kör P_0T_φ íve és a mozgó kör $T_\varphi P_\varphi$ íve egyenlő nagyságú (csúszásmentes gördülés esetén a két alakzat azonos hosszúságú íve érintkeznek egymással). A sugarakat és a szögek irányítását is figyelembe véve kapjuk, hogy $T_\varphi O_\varphi P_\varphi\angle=-4\varphi$, tehát az $\overrightarrow{O_\varphi P_\varphi}$ vektor és $\overrightarrow{OP_0}$ szöge 3φ. Mivel $\overrightarrow{OP_\varphi}=\overrightarrow{OO_\varphi}+\overrightarrow{O_\varphi P_\varphi}$, és $\overrightarrow{OO_\varphi}(3r\cos\varphi,3r\sin\varphi)$, $\overrightarrow{O_\varphi P_\varphi}(r\cos(-3\varphi),r\sin(-3\varphi))$, így

$$\begin{aligned} x(\varphi)&=3r\cos\varphi+r\cos(-3\varphi)=3r\cos\varphi+r\cos(3\varphi)=R\cos^3\varphi;\\ y(\varphi)&=3r\sin\varphi+r\sin(-3\varphi)=3r\sin\varphi-r\sin(3\varphi)=R\sin^3\varphi.\end{aligned} \tag{1}$$

c)
A (1) paraméteres alak szerint $P(x;y)$ pontosan akkor van rajta az asztroison, ha

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1. \tag{2}$$



7.3M1.1. ábra.

Ez az összefüggés pontosan akkor áll fenn valós $(x; y)$ számpárokra, ha a köbe teljesül:

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = 1. \tag{3}$$

ha felhasználjuk a (2) összefüggés, akkor kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1, \tag{4}$$

amit rendezve, majd köbre emelve adódik az algebrai egyenlet:

$$27x^2y^2 = \left(1 - x^2 - y^2\right)^3. \tag{5}$$

Az átalakítások sorozatában egy helyen lehet probléma: a (3) egyenletről a (4) egyenletre való áttéréskor esetleg nyerhettünk gyököt. Ezt zárjuk ki a továbbiakban.

Tegyük fel , hogy az $(x; y)$ számpárra teljesül a (4) összefüggés, de (2) helyett a

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 + \Delta \tag{6}$$

összefüggés áll fenn valamely $\Delta \neq 0$ esetén. A (6) egyenlet köbreemelésével majd (6) felhasználásával kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(1 + \Delta) = (1 + \Delta)^3,$$

amiből (5)-gyel való összevetés és átalakítások után (közben Δ-val osztunk) kapjuk, hogy $\Delta \neq 0$ esetén

$$\frac{3 + 3\Delta + \Delta^2}{3} = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \tag{7}$$

A nemnegatív $x^{\frac{2}{3}}$, $y^{\frac{2}{3}}$ számokra alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \Delta}{2}\right)^2. \tag{8}$$

A (7) összefüggés bal oldalának és (8) jobb oldalának összevetéséből rendezés után a $(\Delta+3)^2 \leq$ ≤ 0 egyenlőtlenség adódik, amely csak $\Delta = -2$ esetén teljesül, de Δ értelmezése (lásd a (6) összefüggést) $\Delta \geq -1$.

2. megoldás. [3]

c)

Alább megmutatjuk, hogy ha az a, b valós számokra

$$a^3 + b^3 + 3ab = 1, \tag{1}$$

akkor vagy

$$a + b = 1, \tag{2}$$

vagy $a = b = -1$. Ha ezt az állítást az $a = x^{\frac{2}{3}}$, $b = y^{\frac{2}{3}}$ számokra alkalmazzuk, akkor láthatjuk, hogy az I. megoldás elején kapott $x^2 + y^2 + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = 1$ egyenletből következik az asztrois kiindulásul vett $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ egyenlete, hiszen $0 \le x^{\frac{2}{3}} \ne -1$. Így rövid úton kapjuk, hogy az asztrois algebrai egyenlete az I. megoldás $27x^2y^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$ egyenlete.

Jelöljön ω komplex primitív harmadik egységgyököt, tehát $\omega \ne 1$, de $\omega^3 = 1$, $\omega + \omega^2 = -1$. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor fennáll a

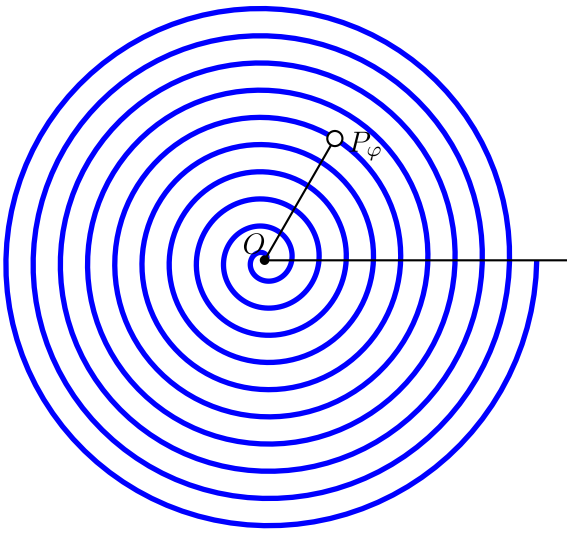
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c) \tag{3}$$

azonosság. Tehát $c = -1$ esetén

$$a^3 + b^3 - 1 + 3ab = (a + b - 1)(a + \omega b - \omega^2)(a + \omega^2 b - \omega). \tag{4}$$

A (4) azonosság azt mutatja, hogy ha teljesül a (1) összefüggés, akkor vagy teljesül a (2) egyenlet is vagy (4) jobb oldala második vagy harmadik tényezője zérus. Mely valós a, b számokra lehet e két tényező egyike zérus? Mivel ω és ω^2 képzetes része nem nulla és egymás ellentettje, így e tényezők képzetes része csak $b = -1$ esetén lesz zérus, és ezek után $a = -1$ kell, hogy a tényező valós része is nulla legyen. Ezzel az állítást beláttuk és egyúttal igazoltuk, hogy a $27x^2y^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$ egyenlet az asztrois egyenlete.

7.4. a) Lásd a 7.1. ábrát!



7.4M.1. ábra.

b) A görbe θ forgási szöghöz tartozó $(x(\theta); y(\theta))$ pontjának az origótól való távolsága $r(\theta) = a\theta$, így koordinátái:

$$x(\theta) = a\theta\cos\theta; \qquad y(\theta) = a\theta\sin\theta. \tag{1}$$

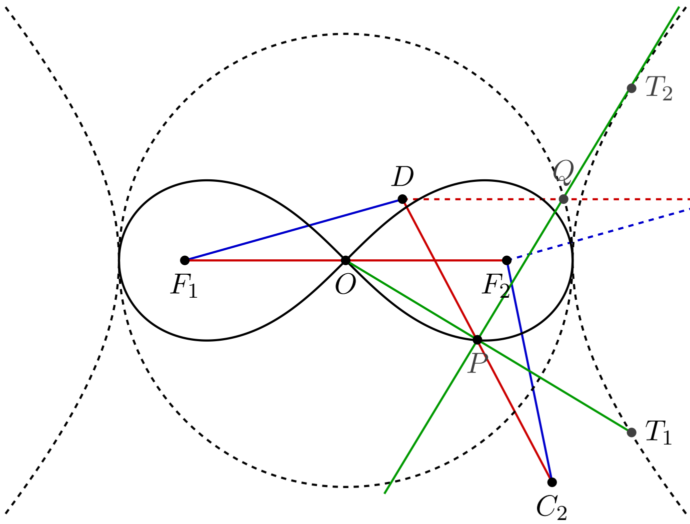
c) Nem algebrai görbe. Egy algebrai görbét bármely egyenes véges sok pontban metsz (egy polinom gyökeinek meghatározásához vezet a metszépontok meghatározása) vagy az egyenes teljes egészében a görbéhez tartozik. Az x tengely a spirálist végtelen sok pontban metszi, de nem tartozik hozzá.

7.5. a)

A $P(x, y)$ pont akkor és csakis akkor illeszkedik a Def.1-ben meghatározott görbére (lásd a 7.1. ábrát), ha

$$\left[(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+y^2\right]\cdot\left[(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+y^2\right]=\frac{1}{4}.$$

Ebből az egyenletből ekvivalens átalakítások után kapjuk a vizsgált lemniszkáta görbének a feladatban megadott egyenletét.



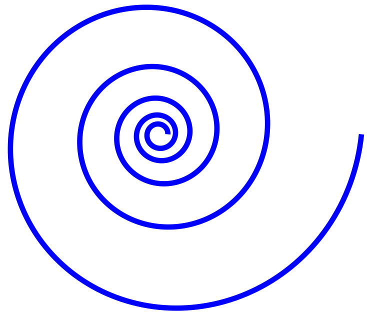
7.5M.1. ábra.

7.6. a) Az origó körüli β szögű forgatás és $e^{b\beta}$ arányú nagyítás kompozíciója az első ívet a másodikba képezi, hiszen ez a leképezés a görbe $(\phi, r = a \cdot e^{b\phi})$ pontját a $(\phi+\beta, r = a \cdot e^{b\phi} \cdot e^{b\beta})$ pontba képezi, amely szintén pontja a görbének, ugyanis $e^{b\phi} \cdot e^{b\beta} = e^{b\phi+b\beta} = e^{b(\phi+\beta)}$.

b) Lásd a 7.1. ábrát!

c) Egy ilyen téglalap érintési pontjai a ϕ, $\phi+\frac{pi}{2}$, $\phi+\frac{2pi}{2}$, $\phi+\frac{3pi}{2}$, egy másiké a ψ, $\psi+\frac{\pi}{2}$, $\psi+\frac{2\pi}{2}$, $\psi+\frac{3\pi}{2}$ paraméterértékekhez tartoznak, így az elsőt a másodikba egy origó körüli $(\psi-\phi)$ szögű forgatás és egy $e^{b(\psi-\phi)}$ arányú középpontos nagyítás kompozíciója viszi.

Megjegyezzük, hogy ha $\psi-\phi=\frac{\pi}{2}$, akkor az egyik téglalapból a másik egy egyenes mentén való levágással adódik és a két téglalap hasonló egymáshoz. Így egymáshoz hasonló, egymásba helyezett téglalapok végtelen sorát készíthetjük.



7.6M.1. ábra.

7.1. Az $f(x)$ függvény grafikonja $x \in [0;\xi]$ intervallum fölötti részének ívhossza $\int_0^\xi \sqrt{1+f'^2(x)}dx$. Most $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, amiből $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, tehát $1+f'^2(x)=\frac{1}{1-x^2}$, így az ívhossz:

$$\int_0^\xi \frac{1}{1-x^2}dx = arcsin\xi.$$

7.3. A 7.3. feladatban láttuk, hogy az asztrois az $R=4r$ sugarú kör belsejében azon gördülő r sugarú kör egy pontjának pályája. Paraméteres alakja:

$$x(\varphi)=R\cos^3\varphi; \qquad y(\varphi)=R\sin^3\varphi. \tag{1}$$

a) A sebességvektor koordinátái:

$$x(\varphi)'=-3R\cos^2\varphi\sin\varphi; \qquad y(\varphi)'=3R\sin^2\varphi\cos\varphi, \tag{2}$$

tehát a sebességvektor hossza:

$$\sqrt{x'^2(\varphi)+y'^2(\varphi)}=3R\sqrt{cos^4\varphi\sin^2\varphi+cos^2\varphi\sin^4\varphi}=3R|cos\varphi\sin\varphi|\sqrt{cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\frac{3}{2}R|\sin 2\varphi|.$$

A görbe egy negyedívének hossza:

$$\frac{3}{2}R\int_0^{\pi/2}\sin 2\varphi d\varphi=\frac{3}{4}R\left[-\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{3}{2}R,$$

azaz a teljes ív hossza $6R$.

b)
A negyedív alatti terület:

$$\int_0^{\pi/2}x(\varphi)'y(\varphi)d\varphi=-3R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^4\varphi d\varphi=-3R^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi-\sin^6\varphi d\varphi. \tag{3}$$

A 6.1 feladatban láttuk, hogy $I_4=\int_0^{\pi/2}\sin^4 xdx=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}$, $I_6=\int_0^{\pi/2}\sin^6 xdx=\frac{1\cdot 3\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2}$, azaz a (3) integrál értéke $-\frac{3}{32}R^2\pi$. A negatív előjel azért van, mert a paraméterezés szerint az x-tengely felett jobbról balra halad a grafikon. A négy negyedív által határolt tartomány területe $\frac{3}{8}R^2\pi$.

c) A (1)-ben adott ponton átmenő (2)-ben adott irányvektorú egyenes egyenletét kell felírnunk. A (2) sebességvektorral arányos, de egyszerűbb alakú

$$(-\cos\varphi;\sin\varphi)$$

irányvektorral számolva az egyenes egyenlete:

$$\sin\varphi(x - R\cos^3\varphi) + \cos\varphi(y - R\sin^3\varphi) = 0. \tag{4}$$

Ebből $x = 0$ esetén

$$y = R(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^3\varphi) = R\sin\varphi,$$

míg $y = 0$ esetén

$$x = R(\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos^3\varphi) = R\cos\varphi.$$

A két tengelypont távolsága: $R\cdot\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = R$, ami valóban állandó.

7.5. a) Az Arkhimédeszi spirális parametrikus előállítása (lásd a 7.4. feladatot):

$$x(\theta) = a\theta\cos\theta; \qquad y(\theta) = a\theta\sin\theta. \tag{1}$$

Mivel

$$x'(\theta) = a(\cos\theta - \theta\sin\theta); \qquad y'(\theta) = a(\sin\theta + \theta\cos\theta), \tag{2}$$

így

$$\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = a\sqrt{1+\theta^2}, \tag{3}$$

azaz a görbe α és β paraméterű pontjai közti ívének hossza

$$a\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\theta^2}d\theta. \tag{4}$$

Használjuk a $\theta = sht$ helyettesítést és dolgozzunk a határozatlan integrállal! Mivel $\frac{d\theta}{dt} = cht$, így

$$\begin{aligned} \int\sqrt{1+\theta^2}d\theta = & \int\sqrt{1+sh^2t}cht \quad dt = \int ch^2tdt = \int \tfrac{1+ch2t}{2}dt = \\ = & \tfrac{t}{2} + \tfrac{sh2t}{4} + c = \tfrac{arsh\theta}{2} + \tfrac{shtcht}{2} = \tfrac{\ln(\theta+\sqrt{\theta^2+1})}{2} + \tfrac{\theta\sqrt{\theta^2+1}}{2} + c. \end{aligned} \tag{5}$$

Ebből a kérdezett ívhossz $a\frac{\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})}{2} + \frac{2\pi\sqrt{4\pi^2+1}}{2}$.

b) Az $\underline{u}(u_1;u_2)$, $\underline{v}(v_1;v_2)$ vektorok skaláris szorzatának kétféle felírásából bezárt szögük koszinusza:

$$\cos\gamma = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}. \tag{6}$$

Ezt alkalmazhatjuk a (1), (2) vektorokra, melyek közül az első hossza $a\theta$, a másik hossza pedig (3)-ben adott így a kérdezett szög koszinusza

$$\cos\gamma = \frac{a\theta\cos\theta a(\cos\theta - \theta\sin\theta) + a\theta\sin\theta a(\sin\theta + \theta\cos\theta)}{a^2\theta\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}},$$

és ebből

$$tg\alpha = \theta. \tag{7}$$

c) Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek derékszögű csúcsa az origó (a spirál kezdőpontja) egyik befogója az x-tengely (a kezdőpontbeli érintő), átfogója a spirál $\varphi = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontjához tartozó érintője. Ebben a derékszögű háromszögben a két befogó aránya $\frac{\pi}{2}$, így ha felnagyítjuk úgy, hogy rövidebb befogója a kör átmérőjével legyen egyenlő, akkor a kívánt területű háromszöget kapjuk, ami téglalappá darabolható.

d) Legyen a szög csúcsa a spirál O kezdőpontja, egyik szára a spirál kezdőpontjában húzott érintő, a másik szár messe először a spirált a P_φ pontban az OP_φ távolság harmadával, mint sugárral O körül rajzolt kör a spirált a $\frac{\varphi}{3}$ paraméterhez tartozó pontban metszi, hiszen a görbén az elfordulás és a kezdőponttól való távolság arányos egymással. A $\frac{\varphi}{3}$ paraméterű ponthoz húzott sugár harmadolja az adott φ szöget.

7.12. $\int_0^1 \pi x^4 dx = \frac{\pi}{5}$.

7.14. $\frac{16}{3} r^3$.

7.10. $y' = 2x$, így a kérdezett ívhossz

$$\int_0^1 \sqrt{(y\prime)^2 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx. \tag{1}$$

A fenti integrált a $2x = sht$ helyettesítéssel határozhatjuk meg, de most gyorsítunk. A $2x = z$ helyettesítés esetén $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2}$, így

$$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 + z^2} dz \tag{2}$$

Ezt az integrált már láttuk a 6.2. feladatban. Az eredményt felhasználva

$$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{z\sqrt{1 + z^2}}{4} + \frac{\ln(z + \sqrt{1 + z^2})}{4} + c = \frac{x\sqrt{1 + 4x^2}}{2} + \frac{\ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2})}{4} + c. \tag{3}$$

Az ívhossz:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = [\frac{x\sqrt{1 + 4x^2}}{2} + \frac{\ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2})}{4}]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{4}.$$

7.11. $y' = e^x$, így a kérdezett ívhossz

$$\int_0^1 \sqrt{(y\prime)^2 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx. \tag{1}$$

Alkalmazzuk az $e^x = sht$ helyettesítést! Mivel $x = \ln sht$, így $\frac{dx}{dt} = \frac{cht}{sht}$ és a keresett integrál határozatlan formában:

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \int cht \frac{cht}{sht} dt = \int \frac{ch^2 t}{sht} dt = \int \frac{1 + sh^2 t}{sht} dt. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy $\frac{1+sh^2 t}{sht} = sht + \frac{1}{sht}$ és alkalmazzuk a 6.4. feladat eredményét!

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx = cht + \ln\left(th\frac{t}{2}\right). \tag{3}$$

Itt $cht = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{1 + e^{2x}}$. Másrészt $e^x = sht = \frac{2th\frac{t}{2}}{1 - th^2\frac{t}{2}}$, amiből $th\frac{t}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}$. Mivel $0 < e^x = sht$, így $0 < t$, amiből $0 < \frac{t}{2}$ és $0 < th\frac{t}{2}$, azaz $\pm$-ben a pozitív előjel kell:

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \sqrt{1 + e^{2x}} + \ln\left(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1\right) - x. \tag{4}$$

A kérdezett ív hossza:

$$\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(\sqrt{1 + e^2} - 1\right) - 1 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1). \tag{5}$$

7.12. A 7.2 feladatban már megkaptuk a ciklois paraméteres előállítását: $x(t) = t - r\sin\frac{t}{r}$, $y(t) = r - r\cos\frac{t}{r}$, amiből

$$x'(t) = 1 - \cos\frac{t}{r}, \qquad y'(t) = \sin\frac{t}{r}. \tag{1}$$

a) a sebességvektor hossza:

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{t}{r}} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{t}{r}} = \sqrt{2}\sqrt{1-(1-2\sin^2\frac{t}{2r}} = 2|\sin\frac{t}{2r}|, \tag{2}$$

a teljes ív hossza

$$\int_0^{2r\pi} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = 2\int_0^{2r\pi} |\sin\frac{t}{2r}|dt = 2\left[-2r\cos\frac{t}{2r}\right]_0^{2r\pi} = 8r. \tag{3}$$

b) A terület:

$$\int_0^{2r\pi} x'(t)y(t)dt = r\int_0^{2r\pi}(1-\cos\frac{t}{r})^2dt = r\int_0^{2r\pi} 1 - 2\cos\frac{t}{r} + \cos^2\frac{t}{r}dt =$$

$$= r\int_0^{2r\pi} 1 - 2\cos\frac{t}{r} + \frac{1+\cos\frac{2t}{r}}{2}dt = r\left[\frac{3t}{2} - 2r\sin\frac{t}{r} + \frac{r}{4}\sin\frac{2t}{r}\right]_0^{2r\pi} = 3r^2\pi.$$

7.13. a) A görbe paraméterese egyenlete Descartes koordinátákban:

$$x(\phi) = a\cdot e^{b\phi}\cos\phi, \qquad y(\phi) = a\cdot e^{b\phi}\sin\phi, \tag{1}$$

tehát az érintővektor:

$$x'(\phi) = ab\cdot e^{b\phi}\cos\phi - a\cdot e^{b\phi}\sin\phi, \qquad y'(\phi) = ab\cdot e^{b\phi}\sin\phi + a\cdot e^{b\phi}\cos\phi,$$

azaz

$$(x'(\phi), y'(\phi)) = a\cdot e^{b\phi}(b\cos\phi - \sin\phi, b\sin\phi + \cos\phi). \tag{2}$$

A $\underline{v}(b\cos\phi - \sin\phi, b\sin\phi + \cos\phi)$ érintővektor hossza $\sqrt{b^2+1}$, így az érintő és a sugárirányú $(\cos\phi, \sin\phi)$ egységvektor θ szögére a vektorok skaláris szorzata alapján:

$$\cos\theta = \frac{(b\cos\phi - \sin\phi)\cos\phi + (b\sin\phi + \cos\phi)\sin\phi}{\sqrt{b^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Az érintő és a sugárszöge állandó, ami nem is csoda, hiszen a görbe önhasonló. A b paraméter és a θ szög kapcsolata rövidebben: $\frac{1}{tg\theta} = b$.

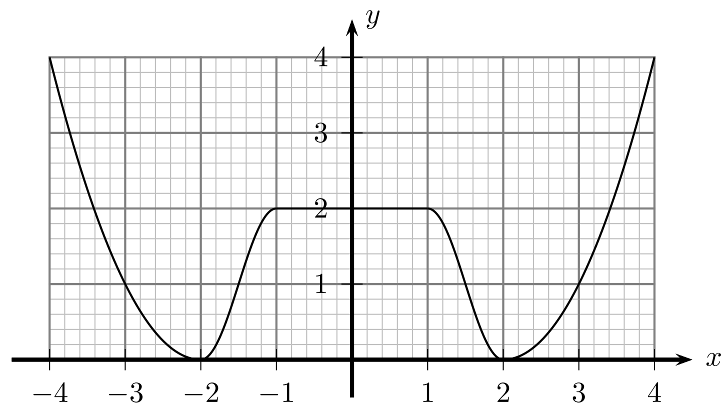
b) Láttuk, hogy a sebességvektor hossza $a\cdot e^{b\phi}\sqrt{b^2+1}$, tehát a kérdezett ív hossza

$$a\cdot\sqrt{b^2+1}\cdot\int_0^{2\pi} e^{b\phi}d\phi = \frac{a}{b}\cdot\sqrt{b^2+1}\cdot\left[e^{b\phi}\right]_0^{2\pi} = \frac{a}{b}\cdot\sqrt{b^2+1}\cdot(e^{2b\pi}-1)$$

8. Furcsa függvények

8.1. a) Igen van, pl $f(x) = (\sqrt{2})^{[x]}$.

b) Nincs. Ha f folytonos, akkor a $g(x) = f(x+1)+f(x)$ és a $h(x) = f(x+1)-f(x)$ függvények is folytonosak. A feltétel mellett g és h mindenütt irracionális értéket vesz fel, így a folytonosság miatt mindkettő konstans. Mivel $f = \frac{g+h}{2}$, így f is konstans lenne, ami nyilván nem lehet.



8.2M.1. ábra.

8.2. a) Igen van, pl $f_1(x) = ||x| - 2|$ vagy $f_2(x) = (x^2 - 4)^2$.

b) Igen van, ha szélsőértéken csak a szigorú szélsőértéket értjük. Egy ilyen függvény grafikonja látható a 8.1. ábrán.

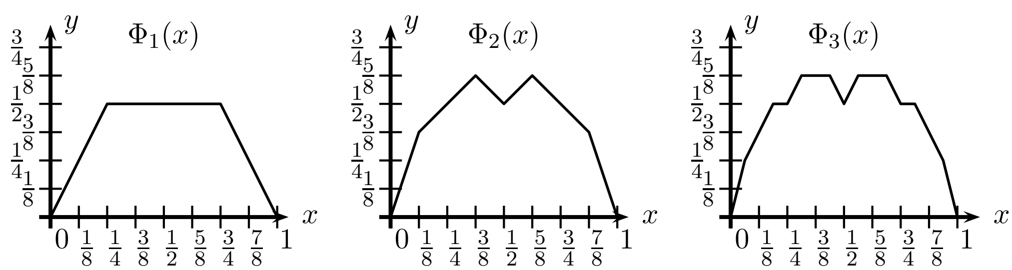
8.3. Az $f(x) = |x|$ függvényre az $x_0 = 0$ választással a második határérték létezik (a tört azonosan 0), az első azonban nem.

A második határérték így írható:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{2} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}}{2}$$

és itt a számláló mind a két tagja az első határértékkel egyenlő. Tehát, ha az első határérték létezik, akkor a második is és értékük egyenlő.

8.10. a)



8.10M.2. ábra.

b) φ_n grafikonja olyan egyenes darabokból áll, amelyek meredeksége ± 1, így Φ_n grafikonja olyan szakaszokból áll, amelyek meredeksége n db ± 1 összege.

c) A φ_n függvény maximuma $\frac{1}{2^{n+1}}$. Bármely rögzített x-re a $\{\Phi_n(x)\}$ sorozat monoton növő és felső korlátja az $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$.

d) $\Phi(x_0 + \Delta) - \Phi(x_0) = \Phi_n(x_0 + \Delta) - \Phi_n(x_0) + (\phi_{n+1}(x_0 + \Delta) + \phi_{n+2}(x_0 + \Delta) + \ldots) - - (\phi_{n+1}(x_0) + \phi_{n+2}(x_0) + \ldots)$, így $|\Phi(x_0 + \Delta) - \Phi(x_0)| \le |\Phi_n(x_0 + \Delta) - \Phi_n(x_0)| + \frac{1}{2^n}$. Ha azt szeretnénk, hogy teljesüljön a $|\Phi(x_0 + \Delta) - \Phi(x_0)| < \epsilon$ egyenlőtlenség, akkor választunk egy olyan n-et, amelyre $\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$, majd a Φ_n folytonos függvényhez egy olyan $\delta > 0$-t, amelyre $\Delta < \delta$ esetén $|\Phi_n(x_0 + \Delta) - \Phi_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

e) Vegyük észre, hogy $x = \frac{s}{2^n}$ ($s \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) esetén $\Phi_{n-1}(x) = \Phi_n(x) = \Phi_{n+1}(x) = \ldots =$ $= \Phi(x)$, hiszen $\varphi_n\left(\frac{s}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\varphi_0(s) = 0$.

Legyen tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén s_k az az egész szám, amelyre

$$\frac{s_k}{2^{k+1}} \le x_0 < \frac{s_k+1}{2^{k+1}}.$$

Az így definiált $\alpha_k = \frac{s_k}{2^{k+1}}$, $\beta_k = \frac{s_k+1}{2^{k+1}}$ sorozatokra $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = x_0$, így ha létezik $\Phi'(x_0)$, akkor (lásd a 3. feladatot):

$$\Phi'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Phi(\alpha_k) - \Phi(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k}.$$

De $\frac{\Phi(\alpha_k)-\Phi(\beta_k)}{\alpha_k-\beta_k} = \frac{\Phi_k(\alpha_k)-\Phi_k(\beta_k)}{\alpha_k-\beta_k}$. A legutóbb kapott kifejezés a Φ_k függvény egy egyenes szakaszának meredeksége, amely a $(k+1)$ paritásával megegyező paritású egész szám. Váltakozó paritású egész számok sorozatának nincs határértéke, ezért $\Phi'(x_0)$ nem létezik.

e)-f) Legyen $\varphi_{2n} + \varphi_{2n+1} = \psi_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Pl

$$\psi_0(x) = \Phi_2(x) \begin{cases} = \frac{1}{2} & \text{, ha } \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}, \\ < \frac{1}{2} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Mivel $\psi_n(x) = \frac{1}{4^n}\psi_0(4^n x)$, így

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{2}{3}$$

és az egyenlőség mindazokra az x-ekre teljesül, amelyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{4} \le [4^n x] \le \frac{3}{4}$, tehát azokra az x számokra, amelyek tört részének van olyan 4-es számrendszerbeli alakja, amely csak 1-es és 2-es számjegyeket tartalmaz.

9. Vegyes feladatok

9.2. a) $I_n = \int_1^n \ln x dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - (n-1)$.

b) $S_i = \frac{\ln i + \ln(i+1)}{2}$

c) $I_n = \sum_{i=1}^{n-1}(S_i + t_i) = \sum_{i=1}^{n-1} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} S_i$, tehát $\sum_{i=1}^{n-1} S_i = I_n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i = n \ln n - (n - $ $- 1) - \sum_{i=1}^{n-1} t_i$. Másrészt

$$\sum_{i=1}^{n-1} S_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln i + \ln(i+1)}{2} = \frac{\ln 1}{2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \ln i\right) - \frac{\ln 1}{2} - \frac{\ln n}{2} = \ln(n!) - \frac{\ln n}{2},$$

így $\ln(n!) = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i\right)$.

d) A $\{\tau_n\}$ sorozat szigorúan monoton nő, elég megmutatnunk, hogy korlátos, abból már következik, hogy konvergens. Rajzoljuk le ezeket a háromszögeket úgy, hogy jobb oldali csúcsukat toljuk egybe, pl a B_2 pontba. Mivel az ln függvény grafikonja alulról nézve konkáv, így a B_iB_{i+1} húr a B_i-beli és B_{i+1}-beli érintők alatt lesz, azaz e három egyenes meredekség szerint így jön egymás után: B_{i+1}-beli érintő, B_iB_{i+1} húr, B_i-beli érintő. Ez pont azt jelenti, hogy az egybetolt háromszögek nem lógnak egymásba, az összes elfér egy olyan háromszögben, amelynek egyik oldala B_1B_2 (azaz A_1B_2) másik két oldala pedig párhuzamos a koordinátatengelyekkel.

e) Mivel $0 < \tau_n' < \tau_n$, így a $\{\tau_n'\}$ sorozat is korlátos, s mivel monoton nő, így konvergens is.

f) Ha $\lim_{n\to\infty} c_n = C$, $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{c_n} \cdot e^{c_n}}{e^{c_{2n}}} = \frac{e^C e^C}{e^C} = e^C$, így vizsgáljuk az $c_n' = \frac{e^{c_n} \cdot e^{c_n}}{e^{c_{2n}}}$ sorozatot! Mivel $e^{c_n} = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ így

$$c_n' = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \Big/ \frac{(2n!) e^{2n}}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}} = \frac{(n!)^2 2^{2n} \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)} = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} \sqrt{\frac{2^2}{1 \cdot 3} \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n)}{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} = 2$ és a Wallis formula szerint $\lim_{n\to\infty} \frac{2^2}{1\cdot 3} \frac{4^2}{3\cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$, így $e^C = \sqrt{2\pi}$, azaz $C = \ln \sqrt{2\pi}$.

g) A bizonyítandó állítást kapjuk, ha a $\lim_{n\to\infty} c_n - \ln \sqrt{2\pi} = 0$ összefüggésre alkalmazzuk a folytonos exponenciális függvényt.

9.3.

1. megoldás. a) Jelölje az i-edik fűrészfog x tengelyre eső jobb oldali sarkát a_{i-1}, a bal oldalit a_i, a területét t_i, az első n fog területösszegét T_n, tehát pl $1 = a_0 > \frac{1}{2} = a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, $t_1 = T_1 = \frac{1}{4}$ stb. Az a_i-től ($i > 0$) jobbra következő fog bal oldalának meredekségéből

$$\frac{1}{2i} = \frac{a_{i-1} - a_i}{a_{i-1}} = 1 - \frac{a_i}{a_{i-1}}, \tag{1}$$

amiből egyrészt

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{2i-1}{2i}, \tag{2}$$

másrészt

$$t_i = \frac{(a_{i-1} - a_i)a_{i-1}}{2} = \frac{a_{i-1}^2}{4i}. \tag{3}$$

Az $a_0 = 1$ kezdeti érték és a (2) rekurziós formula alapján

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$$

és indukcióval igazolható, hogy

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}. \tag{4}$$

A bizonyítandó $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ összefüggés ekvivalens azzal, hogy a

$$b_n = \ln a_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{4}{3} + \ln \frac{6}{5} + \ldots + \ln \frac{2n}{2n-1} \tag{5}$$

sorozat végtelenhez tart. Vegyük észre, hogy

$$\ln \frac{2i}{2i-1} = \ln \left(1 + \frac{1}{2i-1}\right) = \frac{1}{2i} \ln \left(1 + \frac{1}{2i-1}\right)^{2i} > \frac{1}{2i} \ln e = \frac{1}{2i},$$

azaz b_n végtelenhez tart, hiszen nagyobb, mint a harmonikus sor megfelelő részletösszegének fele.

2. megoldás. [3] **a)**

Az $\{a_n\}$ sorozat monoton fogyó és 0 egy alsó korlátja, így van egy x nemnegatív határértéke. Indirekten igazoljuk, hogy $x = 0$.

Tegyük fel, hogy x pozitív. Akkor az i-edik háromszög y-tengellyel párhuzamos oldala nem rövidebb x-nél, így az x-tengellyel párhuzamos oldala legalább $\frac{x}{2i}$ hosszúságú. Az alapok összege így

$$\frac{x}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right),$$

ami tetszőlegesen nagy lehet, hiszen a zárójelben a végtelenhez tartó harmonikus sor áll.

3. megoldás. [1] **a)**

Igazoljuk teljes indukcióval, hogy $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, amiből következik a feladat állítása! $n = 1$-re $a_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ valóban fennáll. Másrészt $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+2}}$, így ha az állítás igaz $n = k$-ra, akkor $n = k + 1$-re is fennáll.

4. megoldás. [8] **a)**

Tekintsük a_n mellett a

$$b_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}. \tag{1}$$

sorozatot is.

Egyrészt

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \qquad \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \qquad \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1},$$

így $a_n < b_n$, másrészt

$$a_n b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0.$$

Mivel $0 < a_n^2 < a_n b_n \to 0$, így $a_n \to 0$.

5. megoldás. [?],[2] **a)**

Ismeretes (Wallis formula, 6.1. feladat), hogy a

$$J_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

sorozat $\frac{\pi}{2}$-höz tart. Vegyük észre, hogy

$$a_n^2 = \frac{1}{(2n+1) \cdot J_n} \longrightarrow 0,$$

tehát az $\{a_n\}$ sorozat is 0-hoz tart.

6. megoldás. b) Az a) feladatrészre adott 9.3M1 megoldás első bekezdésének képletei segítségével kiszámolhatjuk az $\{a_i\}$, $\{t_i\}$, $\{T_i\}$ sorozatok elsőt követő néhány további elemét is:

i	1	2	3	4
a_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	
t_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{256}$	$\frac{25}{4096}$
T_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{75}{256}$	$\frac{1225}{4096}$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{9}{8}, \qquad \frac{T_3}{T_2} = \frac{25}{24}, \qquad \frac{T_4}{T_3} = \frac{49}{48},$$

amiből sejthető, hogy

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{(2n+1)^2}{2n \cdot (2n+2)}, \tag{1}$$

tehát $n > 1$ esetén

$$T_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n-2) \cdot 2n}. \tag{2}$$

A (2) összefüggést indukcióval igazoljuk. A feladat a) részére adott a 9.3M1 megoldás első bekezdése utolsó két képletének összevetéséből:

$$t_{i+1} = \frac{1}{4(i+1)} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2i-1}{2i} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \ldots \cdot \frac{(2i-1)^2}{(2i-2) \cdot 2i} \cdot \frac{2}{2i \cdot (2i+2)},$$

így

$$T_{i+1} = T_i + t_{i+1} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \ldots \cdot \frac{(2i-1)^2}{(2i-2) \cdot 2i}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2i \cdot (2i+2)}\right) = T_i \cdot \frac{(2i+1)^2}{2i \cdot (2i+2)}.$$

A T_n sorozat (2) képletében felismerhetjük a Wallis formula (6.1. feladat) J_n sorozatát:

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{1}{J_n},$$

tehát

$$\lim_{n \to \infty} T_n = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

9.1. a) $\frac{dx}{du} = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}$, $\qquad u = \sqrt{1-x^2}$, így

$$I_0(\xi) = \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} -\frac{du}{u} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{\sqrt{1-\xi^2}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Tehát a körnek az a húrja, amely az abszcisszatengely $[0;\xi]$ intervalluma felett van, egyenlő hosszú az $[\sqrt{1-\xi^2};1]$ intervallum feletti ívvel. Ha „bevezetjük" a teljes integrálra vonatkozó $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ „jelölést", akkor eredményünk így is írható:

$$I_0(\sqrt{1-\xi^2}) = \frac{\pi}{2} - I_0(\xi).$$

A $G_0(\xi) = I_0(\sqrt{1-\xi^2})$ egyenlettel definiált függvényt már ismerjük: $G_0(\xi) = \arccos \xi$.

b)

$$z = 2x\sqrt{1-x^2} \qquad \text{és} \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{z}{4\sqrt{1-z^2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}};$$

így

$$\int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}} \frac{z}{4\sqrt{1-z^2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+\sqrt{1-z^2}}\sqrt{1-\sqrt{1-z^2}}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

azaz

$$2 \cdot I_0(\xi) = 2 \cdot \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = I_0(2\xi\sqrt{1-\xi^2}).$$

Eredményünk egyfajta „duplikációs" formula: anélkül, hogy meghatároznánk az $I_0(\xi)$ integrálfüggvény explicit alakját, meg tudjuk mondani, hogy meddig kell integrálni ugyanazt az integrandust, hogy az integrál értéke kétszer akkora legyen.

Most a

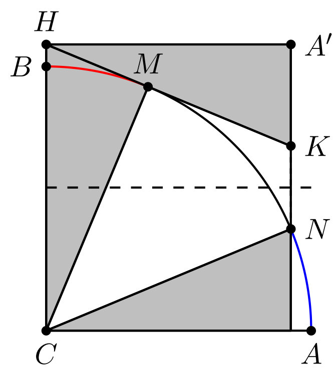
$$2 \arcsin \xi = \arcsin(2\xi\sqrt{1-\xi^2})$$

azonosságra adtunk szokatlan bizonyítást. Ez az azonosság más alakban ismerősebb: a $\xi = sin\alpha$ helyettesítés után mindkét oldal szinuszát véve kapjuk a

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

összefüggést, a szinusz függvény duplikációs formuláját.

9.3. a) Messe a H ponton át a CA sugárral párhuzamos egyenes a KN egyenest A'-ben. A CMH, $HA'K$ háromszögek hasonlóak ($HCM\angle$ és $A'HK\angle$ merőleges szárú szögek), míg a $HA'K$, CAN háromszögek egybevágók. A vizsgált ívek egyenlők, hiszen középponti szögeik egyenlők (lásd a 9.3. ábrát).



9.3M.3. ábra.

b) Legyen $CA = 1$ és $CB = c < 1$, tehát az ellipszis egyenlete

$$y = c\sqrt{1-x^2}. \tag{1}$$

Használni fogjuk az $n = 1 - c^2 > 0$ rövidítő jelölést. Az érintő meredeksége

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2}$$

tehát a

$$\underline{v}\left(1; -\frac{cx}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

vektor érintő irányú és hossza

$$|\underline{v}| = \sqrt{1^2 + \frac{c^2x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}}, \tag{3}$$

így az érintő irányú egységvektor:

$$\underline{e}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}; -\frac{cx}{\sqrt{1-nx^2}}\right). \tag{4}$$

A vizsgált TM szakasz hossza az $\overrightarrow{CM}\left(x; c\sqrt{1-x^2}\right)$ vektor $\underline{u}$ vektorra eső merőleges vetülete:

$$MT = \underline{e} \cdot \overrightarrow{CM},$$

azaz x függvényeként:

$$MT(x) = nx\sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \tag{5}$$

Vizsgált függvényünk nemnegatív és folytonos, $x = 0$-ban és $x = 1$-ben zérus az értéke, így a $[0;1]$ intervallum belsejében lesz maximuma. A

$$MT'(x) = n\frac{nx^4 - 2x^2 + 1}{\sqrt{(1-nx^2)^3(1-x^2)}} \tag{6}$$

derivált a $[0; 1]$ intervallumban csak $x = \frac{1}{\sqrt{1+c}}$-ben zérus, ez a maximumhely. A maximum értéke $1 - c$, tehát a fél nagytengely és fél kistengely különbsége.

c) Felhasználjuk az a) rész számolási eredményeit. Mivel $\overrightarrow{HK} = \underline{e}$, így a K, N pontok abszcisszája (4)-ből

$$u = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \tag{7}$$

Az ívhossz az érintő hosszának (lásd (3)) integrálja, tehát az alábbi összefüggést kell igazolnunk:

$$\int_u^1 \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}}dt = \int_0^x \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}}dt - nx\sqrt{\frac{1-x^2}{1-nx^2}}. \tag{8}$$

A (8) bal oldalán található integrál kiszámításával kísérletezve a

$$s = \sqrt{\frac{1-t^2}{1-nt^2}} \tag{9}$$

helyettesítést próbáljuk ki. A határok módosítása egyszerű: $t = 1$ az $s = 0$ értékhez, míg (7) alapján $t = u$ az $s = x$ értékhez tartozik. Másrészt (9)-ből

$$t = \sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}},$$

így

$$\frac{dt}{ds} = s\sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}\frac{n-1}{(1-ns^2)^2}.$$

Mindezekből

$$\int_u^1 \sqrt{\frac{1-nt^2}{1-t^2}}dt = \int_x^0 \frac{1}{s}s\sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}\frac{n-1}{(1-ns^2)^2}ds = \int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}\frac{1-n}{(1-ns^2)^2}ds =$$

$$= \int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}ds - n\int_0^x \sqrt{\frac{1-ns^2}{1-s^2}}\frac{ns^4-2s^2+1}{(1-ns^2)^2}ds.$$

A legutolsó kifejezést is láttuk már (6)-ben, tehát

$$\widehat{NA} = \widehat{BM} - \left[ns\sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}}\right]_0^x.$$

Mivel $-\left[ns\sqrt{\frac{1-s^2}{1-ns^2}}\right]_0^x = -nx\sqrt{\frac{1-x^2}{1-xs^2}} = -MT$ (lásd (5)) így az állítást igazoltuk.

d) A keresett pont a b) feladat eredménye és a c) feladat állítása szerint az ellipszis $x =$ $= \frac{1}{\sqrt{1+c}}$ abszcisszájú $O\left(\frac{1}{\sqrt{1+c}}, c\sqrt{\frac{c}{1+c}}\right)$ pontja, melyre $CO = \sqrt{\frac{1+c^3}{1+c}} = \sqrt{1-c+c^2}$, így a CAF háromszög CF oldalára felírt koszinusz-tétel igazolja az állítást.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Balogh Máté diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[2] Farkas Márton diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[3] Kornis Kristóf diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[4] Beke Manó: *Bevezetés a differenciál- és integrál-számításba.* 4. kiad. Budapest, 1967, Gondolat Kiadó.

[5] B. Martinov: A Van-der-Waerden függvény maximumáról. 1982. 6. sz., *Kvant.* Olvasható a http://kvant.mirror1.mccme.ru/1982/06/o_maksimumah_funkcii_van–der-.htm weboldalon.

[6] Pataki János.

[7] Szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei I.* Budapest, 2000, Typotex Kiadó. ISBN 963 9132 748.

[8] Tomon István diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[9] N. B. Vasziljeva (szerk.): *Kvant feladatgyűjtemény.* I. köt. 1997, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 002 3. A Kvant feladatai 1970-től 1980-ig.

[10] A. Zvonkin: *Az analízis segít az algebrának.* Iskola a Kvantban sorozat, 4/94. köt. 1994, Bjuro Kvantum, 64–70. p.

[11] Császár Ákos: *Valós analízis.*?. kiad. Budapest,?, Tankönyvkiadó. ISBN?

[12] Denkinger Géza és Gyurkó Lajos: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény.* Budapest, 1978, Tankönyvkiadó.

[13] M. Balk és Ju. Lomakin: *Egyenlőtlenségek bizonyatása deriválással.* Iskola a Kvantban sorozat, 4/94. köt. 1994, Bjuro Kvantum, 71–75. p.