Geometria

7–8. évfolyam

Szerkesztette:
Fazakas Tünde, Hraskó András

2025. május 11.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2025

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET
Szerkesztések I.

A pontokat általában nagy betűvel, a vonalakat pedig kis betűvel jelöljük. A szerkesztési feladatokat körzővel és *egyélű* vonalzóval oldjuk meg. Ez azt jelenti tehát, hogy derékszögű háromszög alakú vonalzónknak csak az egyik élét használhatjuk szerkesztő eszköznek; a vonalzó derékszögével rajzolhatunk ugyan derékszöget, de ez nem szerkesztés. Hasonlóan nem szerkesztés párhuzamos egyeneseknek két vonalzóval segítségével „csúsztatással" való rajzolása sem.[21]

Azonban a körzőt és az egyélű vonalzót sem használhatjuk fel tetszőlegesen. Az alábbi lépések – az elemi euklideszi szerkesztés alaplépései – alkalmazhatók:

	lépés	jel
I.	két adott (A, B) ponton át felvehető (f) egyenes,	$f = \text{Egy}[A, B]$
II	Felvehető két egyenes $(e,\ f)$ metszéspontja (Q)	$Q = \text{Mpont}[e, f]$
III.	Két adott pont $(A$,$B)$ távolsága körzőnyílásba vehető	$r = \text{Táv}[A, B]$
IV.	Felvehető adott (O) pont körüli adott (r) távolsággal egyenlő sugarú kör (k)	$k = \text{Kör}[O, r]$
V.	Felvehetők (két különböző pontban találkozó) körök $(k$,$l)$ metszéspontjai (Q_1, Q_2)	$\{Q_1, Q_2\} = \text{Mpont}[k, l]$
VI.	Felvehetők (két különböző pontban találkozó) kör(k) és egyenes (f) metszéspontjai (Q_1, Q_2)	$\{Q_1, Q_2\} = \text{Mpont}[k, f]$

Euklideszi szerkesztének nevezünk a fenti lépések véges kombinációjából álló eljárást.

Az engedélyezett szerkesztési lépésekből szerkesztési eljárások rakhatók össze. Pl. adott ponton körül (O) rajzolhatunk kört egy adott P ponton át. Ez az eljárás így írható le:

Eljárás neve: Körp
Bemenet: O pont és P pont
Kimenet: k kör
Lépések:
1. $r = \text{Táv}[O, P]$;
2. $k = \text{Kör}[O, r]$.

Időnként szűkítjük a szerkesztési lehetőségeket. A *csak körzős szerkesztések* esetén értelemszerűen csak a fenti III., IV. és V. szerkesztési lépés alkalmazható, míg a csak vonalzós szerkesztések esetén kizárólag az I., II. lépések engedélyezettek.

1.1. Alapszerkesztések

1.1. (M) *Felezőpont*
Adott két pont A, B. Szerkesszük meg az AB szakasz felezőpontját!

1.2. (M) *Középpontos tükrözés*
Adott két különböző pont A és O. Szerkesszük meg az A pont O-ra vonatkozó tükörképét!

1.3. (M) *Szögmásolás*
Adottak az A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 pontok. Szerkesztendő olyan B_2 pont, amelyre $A_0A_1A_2\angle =$ $= B_0B_1B_2\angle$.

1.4. (M) *Szögfelezés*
Adott az egymást metsző e és f egyenes. Szerkesszük meg a két egyenes szögfelezőit!

1.5. (M) *Merőleges I.*
Adottak az e egyenes és a rá nem illeszkedő P pont. Szerkesztendő a P-n átmenő e-re merőleges egyenes.

1.6. (M) *Merőleges II.*
Adottak az e egyenes, rajta az E pont és adott még az E-től különböző P pont. Szerkesztendő a P-n átmenő e-re merőleges egyenes.

1.2. Szerkesztések csak körzővel

1.1. Adott az egymástól különböző A és O pont. Szerkesztendő az A pont O-ra vonatkozó középpontos tükörképe csak körzővel.

1.2. Adott három különböző pont, P, E_1 és E_2. A P pont nem illeszkedik az $E_1E_2 = e$ egyenesre, de maga az e egyenes nincs berajzolva. Szerkesztendő a P pont e-re vonatkozó tengelyes tükörképe csak körzővel.

2. FEJEZET

Mértani helyek I.

2.1. Távolsággal megadott ponthalmazok

2.1. Az A és a B pont távolsága 10 cm. Milyen alakzatot alkotnak a síkban illetve a térben azok a pontok, amelyek 6 cm távolságra vannak

a) az A ponttól;
b) az AB egyenestől;
c) az AB szakasztól;
d) az A és a B ponttól is;
e) az $\{A, B\}$ ponthalmaztól?

2.2. Az A és a B pont távolsága 10 cm. Szerkesszük meg azon pontok halmazát a síkon, amelyeknek az A ponttól való távolsága legalább a, míg a B ponttól való távolsága pontosan b, ha

a) $a = 12$ cm, $b = 3$ cm;
b) $a = 13$ cm, $b = 3$ cm;
c) $a = 6$ cm, $b = 3$ cm!

2.3. Az a és a b egyenes szöge $60°$. Szerkesszük meg azon pontok halmazát a síkon, amelyeknek az a egyenestől való távolsága legalább 4 cm, míg a b egyenestől való távolsága pontosan 2 cm!

2.4. A síkban dolgozunk. Vegyük fel az e egyenest és tőle 5 cm távolságra a P pontot. Szerkesszük meg és jelöljük az A, B, $C = A \cap B$ halmazokat, ha

a) A a P ponttól legfeljebb 3 cm távolságra lévő pontok halmaza, míg B az e egyenestől legfeljebb 4 cm-re található pontok halmaza;

b) A a P ponttól legalább 3 cm távolságra lévő pontok halmaza, míg B az e egyenestől legfeljebb 9 cm-re található pontok halmaza;

c) A a P ponttól legfeljebb 10 cm távolságra lévő pontok halmaza, míg B az e egyenestől legalább 6 cm-re található pontok halmaza!

d)* Kíséreljük meg leírni a megfelelő ponthalmazokat a térben!

2.5. Vegyük fel az 5 cm sugarú k kört és jelöljük különböző színekkel a k-tól

1; 3; 5;7;

cm távolságra elhelyezkedő pontok mértani helyét a k kör síkjában! Írjuk le a megfelelő ponthalmazokat a térben!

2.6. A síkban dolgozunk. Vegyük fel az 5 cm sugarú k kört és középpontjától 4 cm távolságra a P pontot! Hány olyan pont van, amely a k körtől d_k a P ponttól d_P távolságra van, ha

a) $d_k = 2$ cm, $d_P = 4$ cm;
b) $d_k = 2$ cm, $d_P = 3$ cm;
c) $d_k = 6$ cm, $d_P = 10$ cm!

d) Legyen $d_k = 2$ cm és d_P értékét futtassuk 0-tól 20 cm-ig! Írjuk le miképp változik a megfelelő P pontok száma!

2.2. Érintkező körök és egyenesek

2.1. Adott egy Σ sík és benne az A pont és a b egyenes.

Határozzuk meg azon 3 cm sugarú körök középpontjainak mértani helyét a Σ síkban, amelyek

a) átmennek A-n;
b) belsejükben tartalmazzák A-t!

Határozzuk meg azon 3 cm sugarú körök középpontjainak mértani helyét a Σ síkban, amelyek
c) érintik b-t; **d)** metszik b-t!

Határozzuk meg azon 3 cm sugarú gömbök középpontjainak mértani helyét a térben, amelyek
e) átmennek A-n; **f)** belsejükben tartalmazzák A-t!

Határozzuk meg azon 3 cm sugarú gömbök középpontjainak mértani helyét a térben, amelyek
g) érintik b-t; **h)** metszik b-t!

2.2. Adott egy Σ sík és benne az 5 cm sugarú k kör.
Határozzuk meg azon 3 cm sugarú körök középpontjainak mértani helyét a Σ síkban, amelyek
a) érintik k-t; **b)** metszik k-t!

Határozzuk meg azon 6 cm sugarú körök középpontjainak mértani helyét a Σ síkban, amelyek
c) érintik k-t; **d)** metszik k-t!

Ne feledkezzünk meg róla és jelöljük is az a), c) feladatok megoldásában, hogy két kör úgy is érintheti egymást, hogy mindkettő a másik külsejében van, de úgy is, hogy az egyik a másik belsejében van!

2.3. a) Vegyünk fel az A és a B pontot egymástól 10 cm-re és szerkesszünk olyan 7 cm sugarú kört, amely mind a kettőn átmegy!

b) Legalább illetve legfeljebb mekkora lehet egy olyan kör sugara, amely az A és a B ponton is átmegy?

c) Hol lehet annak a 7 cm sugarú körnek a középpontja, amely a belsejében vagy a határán tartalmazza az A és a B pontot is?

d) Hol lehet annak a 7 cm sugarú körnek a középpontja, amely a belsejében vagy a határán tartalmazza az A és a B pontok közül legalább az egyiket?

2.4. a) Vegyük fel az egymást 45°-ban metsző a, b egyeneseket és szerkesszük meg az összes olyan 3 cm sugarú kört, amely mind a két egyenest érinti!

b) Legalább illetve legfeljebb mekkora lehet egy olyan kör sugara, amely az a és a b egyenest is érinti?

c) Hol lehet annak a 3 cm sugarú körnek a középpontja, amelynek van közös pontja az a és a b egyenessel is?

d) Hol lehet annak a 3 cm sugarú körnek a középpontja, amelynek az a és a b egyenesek közül legalább az egyikkel van közös pontja?

2.5. a) Vegyük fel az egymást 45°-ban metsző a, b egyeneseket és szerkesszük meg az összes olyan 3 cm sugarú kört, amely mind a két egyenest érinti!

b) Legalább illetve legfeljebb mekkora lehet egy olyan kör sugara, amely az a és a b egyenest is érinti?

c) Hol lehet annak a 3 cm sugarú körnek a középpontja, amelynek van közös pontja az a és a b egyenessel is?

d) Hol lehet annak a 3 cm sugarú körnek a középpontja, amelynek az a és a b egyenesek közül legalább az egyikkel van közös pontja?

2.6. A síkban dolgozunk. Adott az e egyenes, tőle 4 cm távolságra az O pont és adott még az O középpontú 10 cm sugarú k kör.

a) Szerkesztendő az összes olyan 2 cm sugarú kör, amely érinti k-t is és e-t is! Hány ilyen kör van?

b) Írjuk le, hogyan változik a k-t és e-t is érintő r sugarú körök száma, ha r értéke 0-tól 20 cm-ig nő!

2.3. Egyenlő távolságok

2.1. Két adott ponttól – A és B – egyenlő távolságra lévő pontok mértani helyét keressük a síkban.

a) Szerkesszünk 10 ilyen tulajdonságú pontot!

b) Fogalmazzuk meg sejtésként, hogy mi lehet a keresett mértani hely!

c) Bizonyítsuk be a sejtést! Miért jó a b)-ben sejtett ponthalmaz minden pontja, és miért nem lehet másutt megfelelő pont?

d) Mi lehet a megfelelő mértani hely a térben?

2.2. Két adott metsző egyenestől – a és b – egyenlő távolságra lévő pontok mértani helyét keressük a síkban.

a) Szerkesszünk 10 ilyen tulajdonságú pontot!

b) Fogalmazzuk meg sejtésként, hogy mi lehet a keresett mértani hely!

c) Bizonyítsuk be a sejtést! Miért jó a b)-ben sejtett ponthalmaz minden pontja, és miért nem lehet másutt megfelelő pont? Gondoljunk a két egyenes által meghatározott mind a négy szögtartományra!

d) Mi két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye a síkban?

2.3. Adott három pont. Szerkesztendő kör, amely átmegy mind a három ponton! Hogyan függ az ilyen körök száma a pontok elhelyezkedésétől?

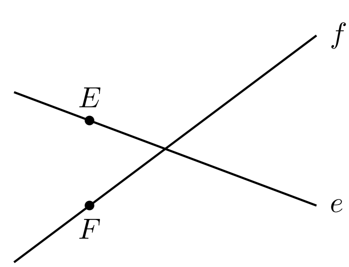
2.4. Adott három egyenes, amelyek közül semelyik kettő sem párhuzamos és nem mennek át mind egy közös ponton. Szerkesztendő kör, amely érinti mind a három egyenest! Hány ilyen kör van?

2.5. Adott az egymást metsző e és f egyenes és e-n az E, f-en az F pont (lásd az 1. ábrát). Olyan pontot keresünk, amely az e-től ugyanolyan messze van, mint ftől és E-től ugyanolyan messze van, mint F-től.

a) Írjuk le a szerkesztés menetét!

b) Hány ilyen pont van?

c) Függ-e a megoldások száma az E, F pontok elhelyezkedésétől?



2.5.1. ábra.

2.4. Logikai feladatok

2.1. Adott a síkon az A és a B pont, melyek távolsága 10 cm. Válasszuk ki az alábbi állítások közül az igaz állításokat!

I. A síknak van olyan P pontja, amelyre $PA < 6$ cm és $PB < 7$ cm.

II. Ha a sík valamely P pontjára $PA < 6$ cm, akkor $PB < 7$ cm.
III. Ha a sík valamely P pontjára $PA < 6$ cm, akkor $PB < 17$ cm.
IV. A síknak van olyan P pontja, amelyre $PA < 6$ cm és $PB < 17$ cm.
V. A sík bármely P pontjára teljesülnek a $PA < 6$ cm, $PB < 17$ cm egyenlőtlenségek.
VI. A sík bármely P pontjára a $PA > 6$ cm, $PB > 3$ cm egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül.
VII. Ha a sík valamely P pontjára $PA \leq 6$ cm, akkor $PB \leq 3$ cm.
VIII. Nincs a síkon olyan P pont, amelyre $PA \leq 6$ cm és $PB \leq 4$ cm.
IX. Nincs a síkon olyan P pont, amelyre $PA \leq 6$ cm és $PB < 4$ cm.

2.2. Adott a síkon az A és a B pont, melyek távolsága 10 cm. Igaz-e az alábbi állítás?
Ha a sík valamely P pontjára a $PA < 6$ cm és a $PB < 4$ cm feltétel is teljesül, akkor P az AB szakasz felezőpontja.

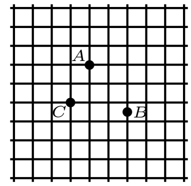
2.3. Adott a síkon az A és a B pont. Tudjuk, hogy igaz az alábbi állítás:
A sík bármely olyan P pontjára, amelyre teljesül a $PA < 2$ cm egyenlőtlenség, teljesül a $PB < 10$ cm egyenlőtlenség is.
Mit állíthatunk az AB távolságról?

2.4. Adott a síkon az A és a B pont. Tudjuk, hogy a következő állítás *nem* igaz:
A sík bármely olyan P pontjára, amelyre teljesül a $PA < 2$ egyenlőtlenség, teljesül a $PB > 3$ egyenlőtlenség is.
Mit állíthatunk az AB távolságról?

2.5. **a)** A tanár felvette az A és a B pont a táblán, felírta a távolságukat is és megkérdezte Remek Robit:
– Igaz-e, hogy a tábla síkjának bármely olyan P pontjára, amelyre teljesül a $PA > 1$ méter egyenlőtlenség, teljesül a $PB > 3$ dm egyenlőtlenség is?
Robi igennel felelt és a tanár megdícsérte a jó válaszért. Hunyor Hunor a besütő naptól nem látja a táblát és most hozzá fordul a tanár:
– Igaz-e, hogy a tábla síkjának bármely olyan P pontjára, amelyre teljesül a $PA < 4$ dm egyenlőtlenség, teljesül a $PB < 12$ dm egyenlőtlenség is?
Tud-e biztos választ adni Hunor, anélkül hogy további információt kapna a két pont elhelyezkedéséről?
b) Módosítsuk a történetet úgy, hogy cseréljük ki a tanár két „Igaz-e, hogy…" kezdetű mondatát! Így tud-e Hunor biztos választ adni?

2.5. Kutyageometria

2.1. *Kutyageometria*
Egy hatalmas modern város utcahálózata olyan mint egy négyzetrács, melyben a négyzetek oldalának hossza 100 m. A kóbor kutyák csak az utcákon, azaz a négyzetrács vonalain közlekedhetnek, a házakba, azaz a négyzetekbe nem mehetnek be. A kutyák világa tehát a négyzetrács vonalainak világa. Két pont távolságán a két pont közötti rácsvonalakon haladó – a rácspontokban esetleg megtörő – töröttvonalak hosszának minimumát értjük. Ez a kutyageometria. Az 1. ábrán a város egy részének térképét látjuk.
a) Határozzuk meg az AB, BC, CA távolságokat!
Színezzük teli karikákkal, különböző színekkel az A ponttól
b) 100; **c)** 150; **d)** 200; **e)** 250; **f)** 300;
méterre található pontok halmazát!



2.1.1. ábra.

Színezzük üres karikákkal, különböző színekkel a B ponttól

g) 100; **h)** 150; **i)** 200; **j)** 250; **k)** 300;

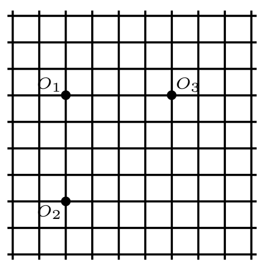
méterre található pontok halmazát!

2.2. Ebben a feladatban is a rácsvonalak „kutyageometriáját” vizsgáljuk (lásd a 2.1. feladatot). Körön, egy adott ponttól adott távolságra levő pontok halmazát értjük. Jelölje k_1, k_2 és k_3 azt a kört, amelyeknek középpontja az 1. ábrán látható O_1, O_2 illetve O_3 pont és amelynek sugara $r_1 = 100$ m, $r_2 = 300$ m, $r_3 = 500$ m, ha egy rácsszakasz hossza 100 m.

Hány közös pontja van a

a) k_2 és k_1; **b)** k_1 és k_3; **c)** k_3 és k_1;

köröknek?



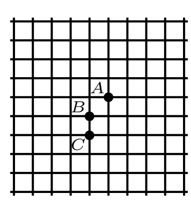
2.2.1. ábra.

2.3. Ebben a feladatban is a rácsvonalak „kutyageometriáját” vizsgáljuk (lásd a 2.1. feladatot). Határozzuk meg az 1. ábrán látható

a) A és B; **b)** B és C; **c)** C és A;

pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmazát!

d) Hány olyan pont van, amely egyforma messze van mind a három ponttól?



2.3.1. ábra.

2.4. Ebben a feladatban is a rácsvonalak „kutyageometriáját” vizsgáljuk (lásd a 2.1. feladatot). Keressük három adott ponttól egyforma messze található pontok halmazát. Van-e három olyan pont, amelyre ennek a ponthalmaznak az elemszáma

a) 1; **b)** végtelen; **c)** 2?

2.5. Igaz-e a „kutyageometriában” (lásd a 2.1. feladatot) a háromszög egyenlőtlenség?

2.6. [10] Lehet-e a „kutyageometriában” (lásd a 2.1. feladatot) két körnek (2.2. feladat) éppen 13 metszéspontja?

2.6. Vegyes feladatok

2.1. [13] Az ABC hegyesszögü háromszög B csúcsára illeszkedö egyenesek közül melyiktől van az AC oldal F felezöpontja a legmesszebbre?

2.2. [11] Simi kutyát kikötötték. 2 méter hosszú láncának karikája két – egymástól 10 méterre levő – fa között kifeszített drótkötélen csúszkálhat. Bobi kutyát szintén 2 méteres láncra kötötték egy cölöphöz.

Hová tűzhették Bobi kutya cölöpjét, ha a két kutya épp egy félkör alakú területen játszhat együtt?

2.3. A Kecskefy, a Kecsovszky és a Kecsora család is tenyészt kecskét. A három család másképp legelteti a kecskéket. Az állatokat nyakában található övre egy-egy 10 méter hosszú kötelet kötnek, de a kötél másik végén található gyűrűt különbözőképpen rögzítik.

Kecskefyék a réten egy 40×50 méteres téglalap csúcsaiban kitűznek egy-egy póznát, a póznák között pedig - a téglalap oldalain - kifeszítenek egy-egy drótot. A gyűrűk a póznákhoz vannak rögzítve, illetve szabadon futhatnak a drótokon két pózna között. A kecskék a téglalapon kívül és belül is mozoghatnak.

Kecsovszkyék csak a zöldségeskerten kívül engedik legelni a kecskéket. A kert háromszög alakú, oldalai 90, 100, 130 méter hosszúak. A kerítés mentén végigfutó dróton szabadon mozoghatnak a gyűrűk.

Kecsoráék külön tartják a kecskebakot, melynek gyűrűje egy rögzített póznához van kötve. A többi kecskén még kötél sincs, azok bárhol legelhetnek egy 40×80 m-es téglalap alakú zárt telken belül.

a) Készítsünk méretarányos rajzokat, feltüntetve azokat a részeket, ahol a kecskék legelhetnek!

b) Melyik család legelteti a legnagyobb területen a kecskéket?

2.4. Adott a síkon három pont. Szerkesztendő egyenes. amely ugyanolyan messze van mind a három ponttól. Hány ilyen egyenes van?

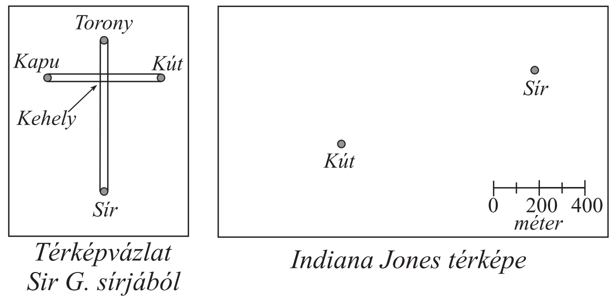
2.5. Adott a síkon négy pont. Szerkesztendő kör, amely ugyanolyan messze van mind a négy ponttól. Hány ilyen kör van?

2.6. Indiana Jones a Szent Kelyhet keresi. A Kehely a Titok Városának két sugárútja találkozása alatt van elrejtve. Jones éppen most találta meg Sir Galahad sírját, és benne az 1. ábra bal oldalán látható térképvázlatot. Feltételezhető, hogy a vázlat nem arányos a valósággal és nincs jól tájolva, de az elrendezés kereszt alakja biztosra vehető.

Indiana Jones édesapja fia rendelkezésére bocsátotta Oroszlánszívű Richárd írnokának jegyzeteit, amelyből az derült ki, hogy a Palota kapujának a Templom előtti kúttól való távolsága pontosan 800 méter.

A gonosz célból a Titok Városában ásatásokat folytató Ellenség éppen most talált meg egy kutat, amely feltehetően a Templom előtt állhatott.

a) Indiana Jones térképvázlatot készít. Segítsünk neki! Szerkesszük meg a Kehely összes lehetséges helyét az 1. ábra jobb oldalán!



2.6.1. ábra.

b) Indiana édesapja szerint a jegyzetben talált 800-as adat nem méterben értendő, hanem egy – a keresztes lovagok által használ – mára már elfeledett mértékegységben. Így mit lehet mondani, hol lehet a Kehely?

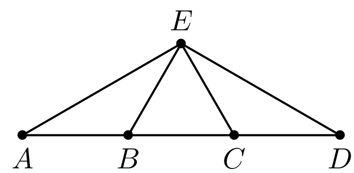
2.7. Ha megrajzoljuk a sík öt pontja közül mindegyik kettő felezőmerőlegesét, akkor a kapott egyenesek maximum hány pontban metszik egymást?

3. FEJEZET

Speciális síkidomok

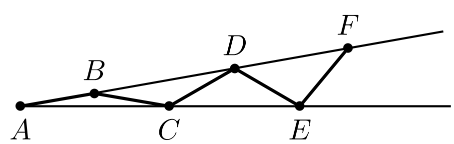
3.1. Egyenlő szárú háromszög

3.1. Az 1. ábrán az AB, BC, CD, BE és EC szakaszok mind egyenlő hosszúak. Mekkora az $AED\angle$?



3.1.1. ábra.

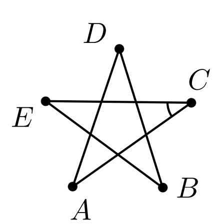
3.2. Egy 10°-os szög szárai közé, a szög A csúcsából indulva berajzoltuk az $ABCDEF$ töröttvonalat, amelynek mindegyik oldala 1 cm (lásd az 1. ábrát).



3.2.1. ábra.

a) Mekkora az $AEF\angle$?
b) Meddig lehet folytatni a töröttvonalat?
c) És ha nem 1 cm-rel lépkedünk?

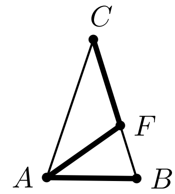
3.3. Mekkorák a szabályos hurkolt ötszög szögei (1. ábra)?



3.3.1. ábra.

3.4. Adott a síkon az ABC szabályos háromszög. Keressük meg a sík összes olyan M pontját, amelyre az ABM és az ACM háromszög is egyenlő szárú!

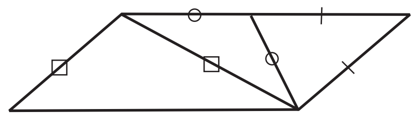
3.5. Az 1. ábrán látható egyenlő szárú háromszögben a vastagon rajzolt szakaszok is egyenlőek. Mekkorák a háromszög szögei?



3.5.1. ábra.

3.6. Az ABC egyenlő szárú háromszög BC szárán adott az M, az MC szakaszon pedig az N pont úgy, hogy $MN = AN$. Tudjuk, hogy a BAM és az NAC szögek egyenlőek. Határozzuk meg az $MAC\angle$ szög nagyságát!

3.7. Egy paralelogrammát az 1. ábrán látható módon lehet egyenlő szárú háromszögekre bontani. Mekkorák a paralelogramma szögei?



3.7.1. ábra.

3.8. Mely háromszögek oszthatók fel egy egyenessel két egyenlő szárú háromszögre?

3.9. (M) Egy téglalap egyik oldala 2 cm hosszú, egyik átlója pedig 4 cm-es. Mekkora szöget zárnak be az átlók az oldalakkal?

3.10. (M) Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságvonala 30°-os szögben hajlik a CA befogóhoz. Az átfogó felezőpontja F. Mekkora szögben hajlik a CF súlyvonal a CB befogóhoz?

3.2. Félszabályos háromszög

3.1. (M) Egy 3 cm sugarú körtől 3 cm-re lévő pontból érintőket húztunk a körhöz. Melyik a hosszabb: az érintő vagy a két érintési pontot egymással összekötő szakasz?

3.2. Egy 60°-os szög szárai közé egy 6 cm sugarú kört írtunk, úgy hogy a kör érintse a szárakat. Szeretnénk egy újabb kört írni a szárak közé, úgy, hogy az érintse a már megszerkesztett kört is. Mekkora lesz ennek az új körnek a sugara?

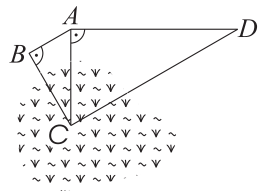
3.3. Egy sík terepen szeretnénk megmérni az 1. ábrán látható DC távolságot, de a C pont hozzáférhetetlen. Meg tudtuk mérni az alábbi adatokat:

$$AB = 240 \text{ m}, \qquad ABC\angle = DAC\angle = 90°, \qquad BAC\angle = 60°, \qquad ADC\angle = 30°.$$

Mekkora a CD távolság?

3.4. Egy háromszög egyik belső szöge 20,04°. Mekkora szöget zár be egymással a másik két csúcsból kiinduló

a) magasságvonal?
b) szögfelező?
c) a körülírt kör középpontjához húzott szakasz (sugár)?



3.3.1. ábra.

3.5. [13] *KMBK versenyfeladat 1982.*

Az AB szakaszt az X és Y pontokkal három egyenlő részre osztottuk, és az XY fölé egyenlő oldalú háromszöget szerkesztettünk, melynek harmadik csúcsa Z. A Z körül $AZ = BZ$ sugárral kört rajzoltunk, ezt XZ meghosszabbítása C-ben metszi. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

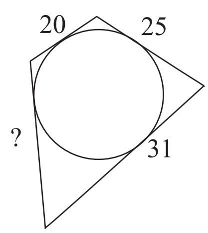
3.6. Az ABC háromszög A csúcsánál tompaszög van és az AB, AC egyenesekre A-ban állított merőlegesek a

a) BAC szöget **b)** BC oldalt

három egyenlő részre osztják. Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit!

3.3. Az érintőszakaszok egyenlősége

3.1. (M) Egy érintőnégyszög (azaz olyan négyszög, amelynek van beírt köre) három oldalának hossza, az oldalak elhelyezkedés szerinti sorrendjében: 20 cm, 25 cm, 31 cm (lásd az 1. ábrát). Milyen hosszú a negyedik oldal?



3.1.1. ábra.

3.2. (M) Milyen összefüggés áll fenn minden érintőhatszög oldalainak hossza között?

3.3. (M) A háromszög beírt köre a háromszög a, b, c oldalait két-két részre osztja. Határozzuk meg ezen részek hosszát

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$ esetén!

b) az általános esetben!

3.4. (M) Az érintőötszög beírt köre az ötszög a, b, c, d, e oldalait két-két részre osztja. Határozzuk meg ezen részek hosszát

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$, $d = 6$, $e = 5$ esetén!

b) az általános esetben!

3.5. (M) Az ABC háromszög oldalainak hossza: $BC = a$, $CA = b$, $BA = c$.

a) Szerkesszük meg a háromszöget és beírt körét $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$ esetén!

A beírt kör az AB, BC, CA oldalakat rendre a T_C, T_A, T_B pontokban érinti. Határozzuk meg az

$$AT_C, \quad AT_B, \quad CT_B, \quad CT_A, \quad BT_A, \quad BT_C$$

szakaszok hosszát

b) az a) feladatrészben adott oldalhosszak esetén!

c) az általános esetben!

3.6. (M) Az ABC háromszög oldalainak hossza: $BC = a$, $CA = b$, $BA = c$. Az AC oldalhoz *hozzáírt kör* egy olyan kör, amely érinti a háromszög mindhárom oldalegyenesét: az AC oldalegyenest az AC szakaszon.

a) Szerkesszük meg a háromszöget és a hozzáírt kört $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$ esetén!

Érintse a hozzáírt kör az AC szakaszt az U_B, az AB, BC oldalegyeneseket az U_C illetve U_A pontban. Határozzuk meg az

$$AU_C,\quad AU_B,\quad CU_B,\quad CU_A,\quad BU_A,\quad BU_C$$

szakaszok hosszát

b) az a) feladatrészben adott oldalhosszak esetén!

c) az általános esetben!

3.7. Az ABC derékszögű háromszög átfogója $c = AB$, befogói $a = BC$ és $b = AC$.

Határozzuk meg a háromszög beírt körének sugarát

a) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm esetén!

b) az általános esetben!

Határozzuk meg az a oldalhoz hozzáírt kör sugarát

c) az a) eset adataival!

d) az általános esetben!

3.8. A c egyenesen az A, U, B, V pontok ebben a sorrendben helyezkednek el és

$$AU = 4\text{cm},\qquad UB = 6\text{cm},\qquad BV = 1\text{cm}.$$

Mekkorák a háromszög oldalai?

4. FEJEZET

A Descartes koordinátarendszer

Az egyenes pontjait gyakran számokkal jellemezzük, az egyenest számegyenesnek tekintjük. Ehhez felveszük az egyenesen a 0-t, azaz az origót valamint az 1-et és ezekbő lkiindulva egyenletes beosztást készítünk – minden számnak megfelel egy pont és minden pontnak egy szám. A számegyenesen az egyik irányban nőnek a számok, a másik irányban csökkennek. Amikor ábrázoljuk a számegyenest, akkor csak egy szakaszt rajzolunk le és a növekedés irányát a szakasz megfelelő végére tett nyíllal jelöljük.

A sík pontjaihoz gyakran egy-egy számpárt rendelünk és a geometriai feladatok egy részét számolással oldjuk meg. Algebrai ismereteinket igénybe véve akár bizonyítást is adhatunk a számpárok megfelelő kezelésével. Többféleképpen rendelhetünk számpárt a pontokhoz. A legelterjedtebb eljárás az alábbi.

Vegyünk fel két egymásra merőleges számegyenest a síkon, melyek beosztása (a 0 és az 1 számok távolsága) egyforma és melyek origója – azaz a 0 helye – egybeesik. Az egyik számegyenest első tengelynek vagy x-tengelynek, a másikat második tengelynek vagy y-tengelynek nevezzük. Az ábrán ezt a számegyenes végére helyezett nyíl mellé írt x, y betűkkel jelöljük.

Ha P a sík tetszőleges pontja, akkor P-át merőleges egyenest állítunk az x-tengelyre és azt a számot, amelynél elmetszi a merőleges az x-tengelyt – mint számegyenest – a P pont x-koordinátájának vagy más szóval P *abszcisszájának* nevezzük. A P-át az y-tengelyre állított merőleges talppontjának megfelelő szám a P pont y-koordinátája vagy más szóval P *ordinátája.*

A merőleges tengelyekkel, és azonos beosztással bíró koordinátarendszer a Descartes koordinátarendszer.

4.1. Tájékozódás a számegyenesen

4.2. Transzformációk a számegyenesen

4.3. Tájékozódás a koordinátarendszerben

4.1. Jelöljük be a Descartes koordinátarendszerben a megadott tulajdonságú pontokat a megadott színnel:

a) kékkel, melyek abszcisszája pozitív;

b) sárgával, amelyek ordinátája pozitív;

c) zölddel, melyek mindkét koordinátája pozitív.

d) Hogyan lehetne koordinátáikkal kellemezni azokat a pontokat, amelyek nincsenek beszínezve semelyik színre sem?

e) Keressük meg az $x \cdot y \geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát a koordinátarendszerben!

4.2. Jelöljük be a Descartes koordinátarendszerben a megadott tulajdonságú pontokat a megadott színnel:

a) kékkel, melyek abszcisszája egész;

b) sárgával, amelyek ordinátája egész;

c) pirossal, melyek mindkét koordinátája egész;

d) zölddel, melyeknek valamelyik koordinátája 3.

4.3. Jelöljük be a Descartes koordinátarendszerben a megadott tulajdonságú pontokat a megadott színnel:

a) kékkel, melyek abszcisszája legalább 3;

b) sárgával, amelyek ordinátája legalább 3.

c) Keressük meg az $(x-3)\cdot(y-3)\geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát a koordinátarendszerben!

4.4. Transzformációk a koordinátarendszerben

4.5. Vegyes feladatok

5. FEJEZET
Szimmetriák, transzformációk

5.1. Transzformációk értelmezése, végrehajtása

5.1. Vegyük fel az ABC háromszöget az alábbi adatokkal:

$$AB = 8\text{cm}, \qquad AB = 10\text{cm}, \qquad CA = 4\text{cm}.$$

a) Szerkesszük meg a háromszög képét – az $A_1B_1C_1$ háromszöget – a C-nél fekvő belső szög szögfelezőjére való tükrözésnél!
b) Határozzuk meg az A_1B és az AB_1 szakaszok hosszát!
c) Fejezzük ki a b)-ben kérdezett szakaszok hosszát az általános esetben az ABC háromszög oldalaival!

5.2. Vegyünk fel egy ABC háromszöget az alábbi adatokkal:

$$BAC\angle = 75^\circ, \qquad CBA\angle = 60^\circ, \qquad BAC\angle = 45^\circ.$$

a) Szerkesszük meg a háromszög képét – az $A_2B_2C_2$ háromszöget, az AB szakasz felezőmerőlegesére való tükrözésnél!
b) Határozzuk meg a $CAC_2\angle$ és $CBC_2\angle$ szögek nagyságát!
c) Fejezzük ki a b)-ben kérdezett szögeket az általános esetben az ABC háromszög szögeivel!

5.3. Adottak az A, B, C pontok. Szerkesztendő az A pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe csak körzővel (tehát vonalzót az AB egyenes meghúzásához sem használhatunk).

5.4. Szerkesszünk olyan ABC háromszöget, melynek szögei:

$$CAB\angle = 90^\circ, \qquad BCA\angle = 60^\circ, \qquad ABC\angle = 30^\circ.$$

Tükrözzük a háromszöget egy-egy oldalára és vizsgáljuk az eredeti háromszög és képe egyesítéseként létrejött sokszöget. Hány oldalú az így kapott sokszög és mekkorák a szögei? Válaszoljunk a kérdésre mind a három esetben (mind a három oldalra való tükrözés esetén)!

5.5. Vegyük fel az ABC háromszöget az alábbi adatokkal:

$$AB = 8\text{cm}, \qquad AB = 10\text{cm}, \qquad CA = 4\text{cm}.$$

a) Szerkesszük meg a háromszög képét az AB szakasz F_C felezőpontjára vonatkozó középpontos tükrözésnél!
b) Milyen alakzatot alkot a háromszög és képének egyesítése? Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg állítást és bizonyítsuk is be!
c) Tükrözzük középpontosan az eredeti háromszöget a BC oldal F_A és a CA oldal F_B felezőpontjára is!
d) Milyen alakzatot alkot az eredeti háromszög és három képének egyesítése? Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg állítást és bizonyítsuk is be!

5.6. Vegyük fel az ABC háromszöget az alábbi adatokkal:

$$AB = 8\text{cm}, \qquad AB = 10\text{cm}, \qquad CA = 4\text{cm}.$$

a) Szerkesszük meg a háromszög képét – az $A_3B_3C_3$ háromszöget – az $\overrightarrow{AB}$ vektorral való eltoláskor!

b) Milyen kapcsolat van az eredeti és a CBC_3 háromszög között?

5.7. Vegyük fel (két példányban) az ABC szabályos háromszöget, annak O középpontját, az OB szakaszt és annak F felezőpontját (a szerkesztést érdemes egy O középpontú körrel kezdeni és azon megkeresni az A, B, C pontokat). Az alábbi szerkesztéseket az ábra egy-egy külön példányán végezzük el!

a) Forgassunk az O középpont körül 60°-kal!

b) Forgassunk az A csúcs körül 60°-kal!

5.8. Vegyük fel (három példányban) az $ABCD$ négyzetet, annak O középpontját, az OB szakaszt és annak F felezőpontját (a szerkesztést érdemes egy O középpontú körrel kezdeni és azon megkeresni az A, B, C, D pontokat). Az alábbi szerkesztéseket az ábra egy-egy külön példányán végezzük el!

a) Forgassunk az O középpont körül 45°-kal!

b) Forgassunk az A csúcs körül 90°-kal!

5.2. Szimmetriák felismerése

5.1. Válasszuk ki a nagy nyomtatott magyar ABC betűiből a

a) tengelyesen szimmetrikusokat;

b) középpontosan szimmetrikusokat!

5.2. Szerkesszünk olyan hatszöget, amelynek nincs 60°-os forgási szimmetriája, de 120°-os forgási szimmetriája van!

5.3. Ketten játszanak – Kezdő és Második – felváltva helyeznek el pontokat a síkon, két menetben összesen négyet, minden menetben egyet-egyet. Miután valamelyikük lerak egy pontot, a másik menetenként egyszer-egyszer mondhatja, hogy „ne oda tegyél” és akkor a pontot tevőnek másik helyet kell választania. Második akkor nyer, ha a legvégül kapott pontrendszer

a) tengelyesen; **b)** középpontosan

szimmetrikus lesz, egyébként veszít. Kinek van nyerő stratégiája?

5.4. Ebben a feladatban a végtelen sakktábla (lásd az 1. ábrát) szimmetriáit keressük.

Válasszuk ki, hogy az alábbi forgási szimmetriák közül melyekkel rendelkezik a végtelen sakktábla és jelöljük az ábrán a megadott színnel a megfelelő forgási szimmetriaközéppontokat!

a) 30°-os (sárga) **b)** 45°-os (narancssárga) **c)** 60°-os (zöld)

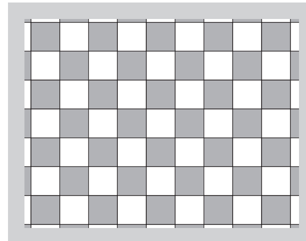
d) 90°-os (kék) **e)** 120°-os (piros) **f)** 180°-os (fekete).

g) Van-e a parkettázásnak szimmetriatengelye? Ha van jelöljük a tengelyeket!

h) Van-e olyan eltolás, amely minden parkettalapot egy másikba képez? Ha van jelöljük a megfelelő eltolásvektorokat!

5.5. Most a végtelen szabályos háromszögrács (lásd az 1. ábrát) szimmetriáit keressük.

Válasszuk ki, hogy az alábbi forgási szimmetriák közül melyekkel rendelkezik a végtelen sakktábla és jelöljük az ábrán a megadott színnel a megfelelő forgási szimmetriaközéppontokat!

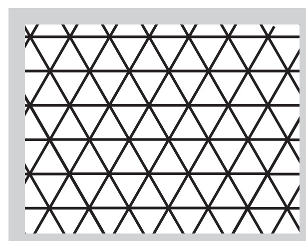


5.4.1. ábra.

a) 30°-os (sárga) **b)** 45°-os (narancssárga) **c)** 60°-os (zöld)
d) 90°-os (kék) **e)** 120°-os (piros) **f)** 180°-os (fekete).

g) Van-e a parkettázásnak szimmetriatengelye? Ha van jelöljük a tengelyeket!

h) Van-e olyan eltolás, amely minden parkettalapot egy másikba képez? Ha van jelöljük a megfelelő eltolásvektorokat!



5.5.1. ábra.

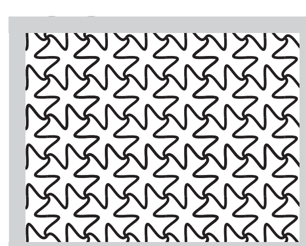
5.6. Ebben a feladatban a sík 1. ábrán látható parkettázásának szimmetriáit keressük.

Válasszuk ki, hogy az alábbi forgási szimmetriák közül melyekkel rendelkezik a parkettázás és jelöljük a megadott színnel a megfelelő forgási szimmetriaközéppontokat!

a) 30°-os (sárga) **b)** 45°-os (narancssárga) **c)** 60°-os (zöld)
d) 90°-os (kék) **e)** 120°-os (piros) **f)** 180°-os (fekete).

g) Van-e a parkettázásnak szimmetriatengelye? Ha van jelöljük a tengelyeket!

h) Van-e olyan eltolás, amely minden parkettalapot egy másikba képez? Ha van jelöljük a megfelelő eltolásvektorokat!



5.6.1. ábra.

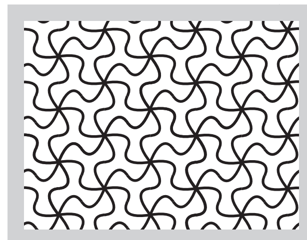
5.7. Ebben a feladatban a sík 1. ábrán látható parkettázásának szimmetriáit keressük.

Válasszuk ki, hogy az alábbi forgási szimmetriák közül melyekkel rendelkezik a parkettázás és jelöljük a megadott színnel a megfelelő forgási szimmetriaközéppontokat!

a) 30°-os (sárga) **b)** 45°-os (narancssárga) **c)** 60°-os (zöld)
d) 90°-os (kék) **e)** 120°-os (piros) **f)** 180°-os (fekete).

g) Van-e a parkettázásnak szimmetriatengelye? Ha van jelöljük a tengelyeket!

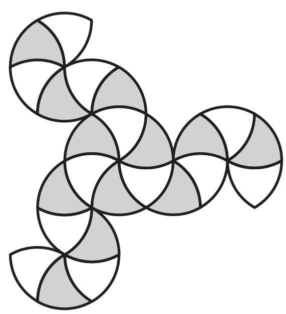
h) Van-e olyan eltolás, amely minden parkettalapot egy másikba képez? Ha van jelöljük a megfelelő eltolásvektorokat!



5.7.1. ábra.

5.8. Válasszuk ki M. C.Escher mester egyik parkettázását (lásd pl. a [6][gallery/symmetry] weboldalt) és elemezzük szimmetriáit az 5.6-5.7. feladatok mintájára!

5.9. Soroljuk fel az 1. ábra szimmetriáit!



5.9.1. ábra.

5.10. **a)** Parkettázzuk szabályos hatszögekkel a síkot!

b) Helyettesítsük az egyik szabályos hatszög egyik oldalát a hatszög körülírt körének megfelelő ívével és módosítsuk ennek és a többi parkettalapnak a többi oldalait úgy, hogy megmaradjanak a csúcspontok körüli 120°-os szimmetriák!

5.3. Transzformációs szerkesztések

5.1. (S) Adottak az A pont, a b egyenes, a c kör és az α szög. Szerkesztendő egyenlő szárú háromszög, amelynek az alappal szemközti csúcsa A, míg a B csúcs a b egyenesen, a C csúcs a c körön van és a $BAC\angle$

a) 30°-os;

b) egy előre adott α szöggel egyenlő.

Hány megoldása lehet a feladatnak?

c) Hány megoldás lehet, ha a b egyenes helyett is egy kör adott, és azon kell elhelyezkednie a B csúcsnak?

5.2. (S) Szerkesztendő rombusz, ha adott két átlójának egyenese és két
a) szomszédos; **b)** átellenes
oldalának egy-egy pontja!

5.3. **a)** Szerkesztendő szimmetrikus trapéz (más szóval húrtrapéz), ha adott a szimmetriatengelye és mind a négy oldalának egy-egy pontja!
b) Határozzuk meg a trapéz csúcsainak koordinátáit, ha szimmetriatengelye az y-tengely, míg a pontok az oldalain: $P(-2;3)$, $Q(3;2)$, $R(2;-4)$, $S(-3;-1)$!

5.4. **a)** Szerkesztendő deltoid, ha adott két átlójának egyenese és három oldalának egy-egy pontja!
Határozzuk meg a deltoid csúcsainak koordinátáit, ha átlóinak egyenese a két koordinátatengely, míg három oldalának egy-egy pontja:
b) $P(-6;9)$, $Q(9;6)$, $R(6;-12)$; **c)** $P(-6;9)$, $Q(9;6)$, $R(6;-3)$
Hány ilyen deltoid van?

5.5. Adottak az e, b egyenesek, a c kör és az α szög. Szerkesztendő egyenlő szárú háromszög, amelynek e a szimmetriatengelye, B csúcsa a b egyenesen, C csúcsa a c körön van és $BAC\angle = \alpha$. Hány megoldása lehet a feladatnak?

5.6. Szerkesztendő négyzet, ha adott egy b kör és egy d egyenes, amelyre rendre a B illetve a D csúcs illeszkedik valamint
a) az AC átló egyenese;
b) az A csúcs.

5.7. **a)** Adott az O pont valamint az a, b, c, d egyenesek a síkon. Szerkesztendő $ABCD$ paralelogramma, melynek O a középpontja míg az A, B, C, D csúcsok rendre a megadott egyenesekre illeszkednek.
b) Adottak az O, P, Q, R, S pontok a síkon. Szerkesztendő $ABCD$ paralelogramma, melynek O a középpontja a többi adott pont pedig a felsorolás szerint rendre az AB, BC, CD, DA oldal egyenesére illeszkedik.

5.8. Adott az A és a B pont valamint a c és a d kör a síkon. Szerkesztendő olyan $ABCD$ trapéz, amelynek CD alapja fele olyan hosszú, mint az AB alap és C, D csúcsai rendre a c, d alakzatokra illeszkednek.

5.9. Adottak a k_1, k_2 körök és az e egyenes. Szerkesztendő olyan e-vel párhuzamos f egyenes, amelynek a két kör közé eső darabja 3 cm hosszú.

5.10. **a)** Adott az O pont az a egyenes és a b kör. Szerkesztendő szabályos háromszög, melynek középpontja O és A, B csúcsai rendre az a, b alakzatokra illeszkednek.
b) Adottak az O, P_a, P_b pontok. Szerkesztendő az ABC szabályos háromszög, melynek középpontja O, míg P_a és P_b illeszkednek a háromszög BC illetve CA oldalegyenesére.

5.11. (S) Szerkesztendő háromszög, ha adott két oldala és a harmadikhoz tartozó súlyvonala.

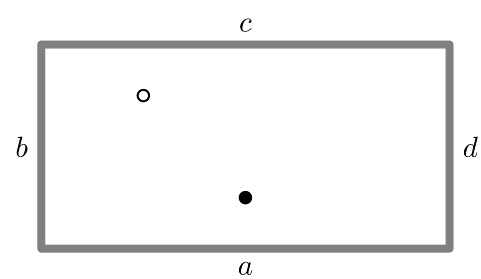
5.12. (S) Szerkesztendő háromszög, ha adott c oldala α szöge valamint a és b oldalának különbsége.

Ide tartoznak a G.II.3.3.–G.II.3.5., G.II.3.1.–G.II.3.4. feladatok.

5.4. Transzformációk alkalmazása

5.1. Az 1. ábrán egy snooker (a biliárdhoz hasonló játék) asztal kicsinyített mása látható. Az igazi tábla 3,6m × 1,8m-es. Vegyük fel az asztal lapjának 10-szeresen kicsinyített képét és helyezzünk el egy-egy pontot a két golyónak megfelelően: a fehér golyó az asztal széltében és hosszában is a negyedelőpontban van az ábra szerint, míg a fekete golyó az asztal hosszának felénél, szélességének negyedénél helyezkedik el. Szerkesszük meg a fehér golyó útját, ha tudjuk, hogy

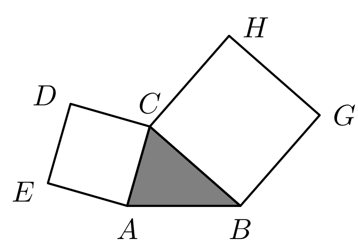
a) az a oldalon való ütközés után;
b) a b majd az a oldalon való ütközés után;
c) a c majd az a oldalon való ütközés után
telibe találja a fekete golyót!
d) Számítsuk ki, hogy az a oldalon a sarkoktól milyen messze pattan vissza a fehér golyó az egyes esetekben!



5.1.1. ábra.

5.2. Adott egy téglalap (billiárd, snooker vagy pool asztal lapja) és benne két kör (a golyók). Szerkesszük meg az egyik falon azt a pontot, ahol az egyik golyónak ütődnie kell ahhoz, hogy visszapattanás után úgy lökje meg a másik golyót, hogy az az egyik sarok irányába menjen tovább!

5.3. Egy háromszög két oldalára kifelé négyzeteket rajzoltunk. Mutassuk meg, hogy az 1. ábrán a DB, AH szakaszok hossza egyenlő egymással!



5.3.1. ábra.

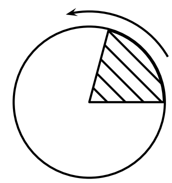
5.4. Adott egy négyzet. Mutassuk meg, hogy bármelyik egyenesnek a négyzet két párhuzamos oldalegyenese közé eső része és a rá merőleges egyenesnek a négyzet másik két oldalegyenese közé eső része azonos hosszúságú!

5.5. Adott a síkon az A, a B és a C pont. Szerkesztendő olyan C középpontú kör, amelynek (egyik) A-t tartalmazó érintője merőleges az (egyik) B-t tartalmazó érintőjére!

5.5. Transzformációk egymás után

5.1. Adjunk meg olyan 10 pontból álló halmazt, amelynek pontosan k darab szimmetriatengelye van. Mely k nemnegatív egész szám esetén oldható meg a feladat? Adjunk mindegyik esetre példát! (Nem kell őket megszerkeszteni.)

5.2. Az 1. ábrán látható 75°-os körcikket elforgatjuk 75°-kal az óra járásával ellenkező forgásirányban. A kapott körcikket újból elforgatjuk 75°-kal, stb. Hányszor kell a forgatást elvégezni, hogy visszajussunk az eredeti körcikkhez?



5.2.1. ábra.

5.3. (M) Az ABC háromszög AC oldalán adott a P_1 pont. Az A pontba szúrt körzővel, AP_1 sugárral kört rajzolunk, ami a P_2 pontban metszi az AB oldalt. Most a B pontba szúrjuk a körzőt és P_2 -n keresztül húzunk egy kört (BP_2 sugárral), ami a P_3 pontban metszi az CB oldalt. Így haladunk tovább, legközelebb a C, majd újból az A stb. . . . pont körül körívezve.

Mit tapasztalunk? Fogalmazzunk meg állítást és próbáljuk meg igazolni!

5.4. Adott az A és a B pont. Tekintsünk egy B-n átmenő b egyenest és legyen az A pont b egyenesre vonatkozó tükörképe A'.

a) Határozzuk meg az A' pont mértani helyét a síkon, ha b felveszi összes lehetséges helyzetét (azaz forgassuk b-t B körül és minden helyzetében tükrözzük rá A-t)!

b) Mi lesz az AA' szakasz F felezőpontjának mértani helye?

5.6. Szabályos sokszögek

5.1. (M) Igaz-e, hogy ha egy háromszög

a) mindhárom oldala egyenlő;
b) mindhárom szöge egyenlő;
c) két különböző tengelyre is szimmetrikus,
akkor szabályos?

5.2. (M) Igaz-e, hogy ha egy négyszög

a) mind a négy oldala egyenlő;
b) mind a négy szöge egyenlő;
c) két különböző tengelyre is szimmetrikus,
akkor szabályos?

5.3. (M) Igaz-e, hogy ha egy

a) négyszög **b)** ötszög **c)** hatszög

egy átlójára és egy oldalfelező merőlegesére is szimmetrikus, akkor szabályos?

5.4. Az ABC szabályos háromszög AB oldalának A felőli harmadolópontja C_1, míg a BC, CA oldalak B illetve C felőli harmadolópontjai A_1 illetve B_1. Igaz-e, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög is szabályos?

5.5. Igaz-e, hogy ha egy szabályos háromszög oldalain úgy veszünk fel egy-egy pontot, hogy azok is szabályos háromszöget alkossanak, akkor ezek a pontok egyenlő arányban osztják fel az eredeti szabályos háromszög oldalait?

5.7. Vegyes feladatok

5.1. Piros kék és sárga négyzetlapjaink vannak, mindegyikből sok. Ezeket a négyzetlapokat a egymáshoz ragaszthatjuk úgy, hogy az egyik négyzet egyik teljes oldala egy másik négyzet teljes oldalával ragadjon össze. Hányféle

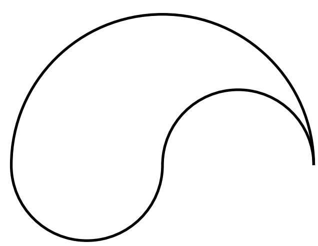
a) három; **b)** négy

négyzetlapból álló alakzat rakható így össze, ha a *síkban* egymásba mozgathatóakat nem különböztetjük meg egymástól?

c) Hogyan módosul az a), b) feladatok eredménye ha a *térben* egymásba mozgatható idomokat sem különböztetjük meg egymástól?

5.2. [11] Kössük össze a szabályos háromszög tetszőleges belső pontját a csúcsokkal. Igazoljuk, hogy a kapott három szakaszból háromszög szerkeszthető!

5.3. Szerkesszük meg és osszuk fel egyetlen vonallal az 1. ábrán látható körívekkel határolt alakzatot két egybevágó részre!



5.3.1. ábra.

5.4. (M) Feldarabolható-e a kör véges sok egymással egybevágó részre úgy, hogy legyen olyan rész, amely sem a belsejében sem a határán nem tartalmazza a kör középpontját?

5.5. Parkettákat készítünk a négyzetrácsból kiindulva, amelyet a koordinátarendszer rácsvonalai alkotnak. Cseréljük ki az 0 origó és az $A(0;1)$ rácspont közti szakaszt egy $F(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ pont körüli negyedkörívvel. A többi rácsvonaldarab módosításával készítsük el a sík egybevágó idomokkal történő olyan parkettázását, amely szimmetrikus

a) a minden rácspont körüli 90°-os forgatásra;

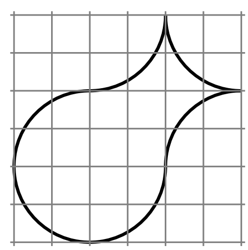
b) az origó körüli 90°-os forgatásra és az AF egyenesre való tükrözésre!

c) Milyen egyéb szimmetriái vannak ezeknek a parkettázásoknak?

5.6. Szerkesszük meg az 1. ábrán látható körívekkel határolt alakzatot! Kiparkettázható-e vele és egybevágó példányaival a sík? Csak egyféleképpen végezhető el a parkettázás vagy több lehetőség is van?

5.7. Vegyünk fel egy négyszöget, amelynek mindegyik oldala különböző hosszúságú (lehet a négyszög konkáv is) és szerkesszük meg a felezőpontjait!

Tükrözzük középpontosan a négyszöget mindegyik felezőpontjára, majd az így kapott négyszögeket is tükrözzük a felezőpontjaikra végül az így kapott négyszögeket is tükrözzük a felezőpontjaikra. Így összesen hány négyszöget kaptunk?



5.6.1. ábra.

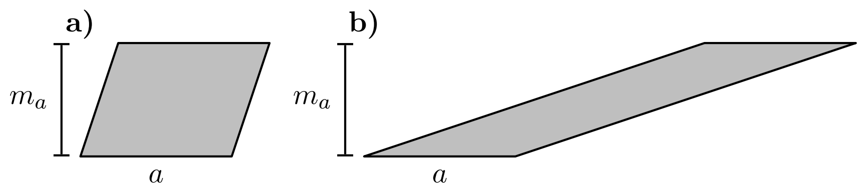
6. FEJEZET

Terület I.

Ebben a témában ajánlott még a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet[24] „Területszámítás, területátalakítás és alkalmazásai” fejezetében található feladatok feldolgozása.

6.1. Négyzetek, téglalapok, paralelogrammák

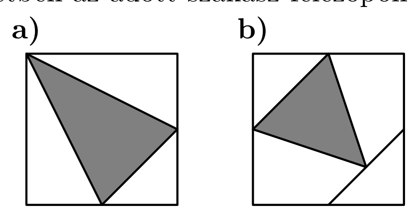
6.1. Az 1. a), b) ábrán látható paralelogrammákat daraboljuk át olyan téglalapba, amelynek oldalai a paralelogramma jelölt a alapjával és m_a magasságával egyenlők!



6.1.1. ábra.

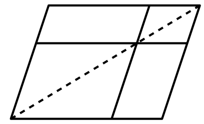
6.2. (M) Igaz-e, hogy ha két paralelogramma egy-egy oldala és egy-egy magassága egyenlő egymással, akkor a két paralelogramma átdarabolható egymásba?

6.3. Hanyad része az 1. a) illetve b) ábrán a négyzet területének a satírozott háromszög területe? (A pontok minden kérdéses esetben az adott szakasz felezőpontjai.)



6.3.1. ábra.

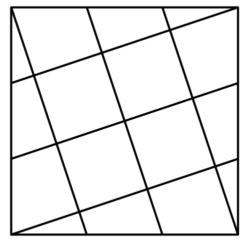
6.4. Egy paralelogramma egyik átlójának egy pontján át párhuzamost húztunk a paralelogramma oldalaival (lásd az 1. ábrát). Így négy kisebb paralelogrammára osztottuk az eredeti négyszöget. A négy kis paralelogramma területei között legfeljebb hány különböző lehet?



6.4.1. ábra.

6.5. Szerkesztendő két négyzet úgy, hogy az egyik épp kétszer akkora területű legyen, mint a másik!

6.6. Egy 10 cm oldalú négyzet oldalának harmadolópontjait és csúcsait az 1. ábra szerint összekötöttük. Határozzuk meg a keletkezett részek területét!



6.6.1. ábra.

6.7. Hogyan lehetne egy négyzetet egyenes vágásokkal úgy feldarabolni, hogy a keletkezett síkidomokból 50 egybevágó négyzetet lehessen összeállítani?

6.2. Háromszögek

6.1. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög egyik oldala a, az ehhez tartozó magassága m_a, akkor a háromszög két példánya átdarabolható egy olyan téglalapba, melynek két szomszédos oldalának hossza a és m_a!

6.2. Adottak az A, B, C pontok a síkon.

a) Szerkesztendő öt különböző pont, C_1, C_2, C_3, C_4 és C_5, melyekre az ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4, ABC_5 háromszögek területe mind egyenlő az ABC háromszög területével.

b) Mi azon $\widehat{C}$ pontok mértani helye a síkban, amelyekre az $AB\widehat{C}$ háromszög területe megegyezik az ABC háromszög területével?

6.3. Adott a síkon az A és a B pont, melyek távolsága 5 cm. Szerkesztendő a C pont, ha az ABC háromszög területe megegyezik az AB oldalú szabályos háromszög területével és

a) $BC = 6$ cm; **b)** $BC = 4$ cm.

c) Hány ilyen C pont van az a) illetve a b) esetben?

d) Az ABC háromszög hányféle lehet, ha az egymással egybevágókat nem különböztetjük meg?

6.4. Adott a síkon az A és a B pont, melyek távolsága 5 cm. Szerkesztendő a C pont, ha az ABC háromszög területe megegyezik az AB átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területével és

a) $BC = 6$ cm; **b)** $BC = 4$ cm.

c) Melyek azok a BC értékek, amelyekre nem lenne megoldása a feladatnak?

d) Mely BC érték esetén lenne az összes lehetséges C pontra az ABC háromszög egybevágó?

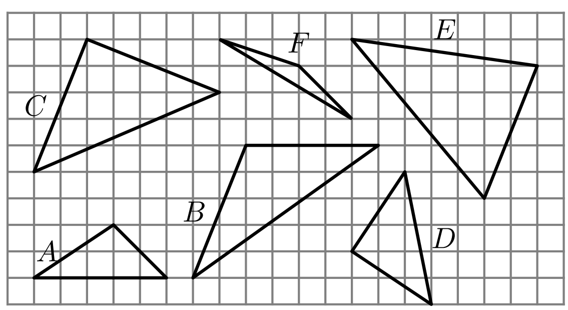
6.5. A háromszög a oldala, hozzá tartozó m_a magassága és a háromszög T területe közül kettő adott. Számoljuk ki az ismeretlen mennyiséget!

a (cm)	m_a (cm)	T (cm^2)
4	6	
8	6	
8	3	
5	3	
4		10
8		10
4		20
	4	10
	4	5
	2	5

6.6. A háromszög a oldala, hozzá tartozó m_a magassága és a háromszög T területe közül kettő adott. Számoljuk ki az ismeretlen mennyiséget!

a (cm)	m_a (cm)	T (cm^2)
4,3	11,2	
7,95	3,2	
4,4		11,3
8,05		20,125
	4,32	12,96
	13,4	5,3

6.7. Adjuk meg az 1. ábrán látható háromszögek területét egységnégyzetben!



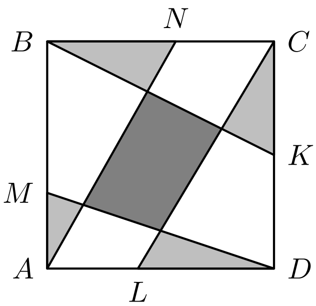
6.7.1. ábra.

6.8. Adott egy végtelen négyzetrács. Hány olyan egymással nem egybevágó háromszög van, amelynek minden csúcsa rácspont és területe (a rács egységnégyzetében mérve)
a) 2; **b)** 0,5; **c)** 1,25?

6.9. Egy háromszögben adott az $ABC\angle = \beta$ szög , és a háromszög $BC = a$, $AB = c$ oldalai és T területe közül még kettő adott. Számoljuk ki a harmadik mennyiséget!

β	a (cm)	c (cm)	T (cm^2)
30°	2	6	
30°	4		9
30°		8	9
150°	2	6	
150°	4		9
150°		8	9

6.10. Az a oldalú négyzetet az AN, BK, CL, DM egyenesekkel részekre bontottuk (lásd az 1. ábrát). Bizonyítsuk be, hogy ha a sötét négyszög területe megegyezik a halványabban satírozott háromszögek területének összegével, akkor $AM + BN + CK + DL = 2a$!



6.10.1. ábra.

6.11. Szerkesztendő két szabályos háromszög úgy, hogy az egyik háromszor akkora területű legyen, mint a másik!

6.3. A háromszög súlyvonala

6.1. Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonala (az egyik csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz) a háromszöget két egyenlő területű részre osztja!

6.2. (M) [22] Nevezetes, hogy a háromszög súlyvonala (az egyik csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz) a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. Ha két súlyvonalat is berajzolunk, akkor négy részt kapunk. Hogyan aránylik a négy rész területe egymáshoz?

6.3. (M) Jelölje rendre F_A, F_B és F_C az ABC háromszög BC, CA, AB oldalainak felezőpontját és legyen S az AF_A, BF_B súlyvonalak metszéspontja! Mutassuk meg, hogy

a) az SF_C szakasz megfelezi a BSA háromszög területét!
b) az SF_B szakasz megfelezi a CSA háromszög területét!
c) az SC szakasz megfelezi a $CSAB$ négyszög területét!
d) az F_CSC „töröttvonal” megfelezi az ABC háromszög területét!
e) az F_CC szakasz megfelezi az ABC háromszög területét!
f) az F_CC súlyvonal is átmegy az S ponton!

6.4. (M) Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalainak metszéspontja $1 : 2$ arányban osztja fel mindegyik súlyvonalat (a rövidebb rész az oldal felé van)!

6.5. Igazoljuk, hogy a háromszög két oldalának felezőpontját összekötő szakasz (a háromszög középvonala)

a) párhuzamos a harmadik oldallal!
b) fele akkora, mint a harmadik oldal!

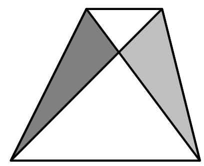
6.6. A Nagy Szerkesztő feljegyzései között találtuk a következőt:

„Ügyes módszert találtam ki, hogyan lehet megszerkeszteni egy tetszőleges háromszög kerületének bármely pontján át a háromszög területét felező egyenest. A szerkesztés menete a következő:”

Sajnos a következő oldalra ráborult a tintásüveg, így olvashatatlanná vált. Találjuk ki mi lehetett a módszer!

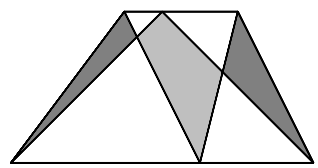
6.4. Trapézok

6.1. Egy trapéz két átlója és a két szár két kis háromszöget alkot (lásd az 1. ábrát). Melyiknek nagyobb a területe?



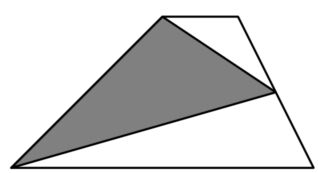
6.1.1. ábra.

6.2. Bizonyítsuk be, hogy az 1. ábrán látható trapézban sötétebben satírozott háromszögek területének összege megegyezik a halványabban satírozott négyszög területével!



6.2.1. ábra.

6.3. Egy általános trapézban az egyik szár két végpontja és a szemközti szár felezőpontja háromszöget alkot (lásd az 1. ábrát). Kifejezhető-e ennek a háromszögnek a területe a trapéz T területével?



6.3.1. ábra.

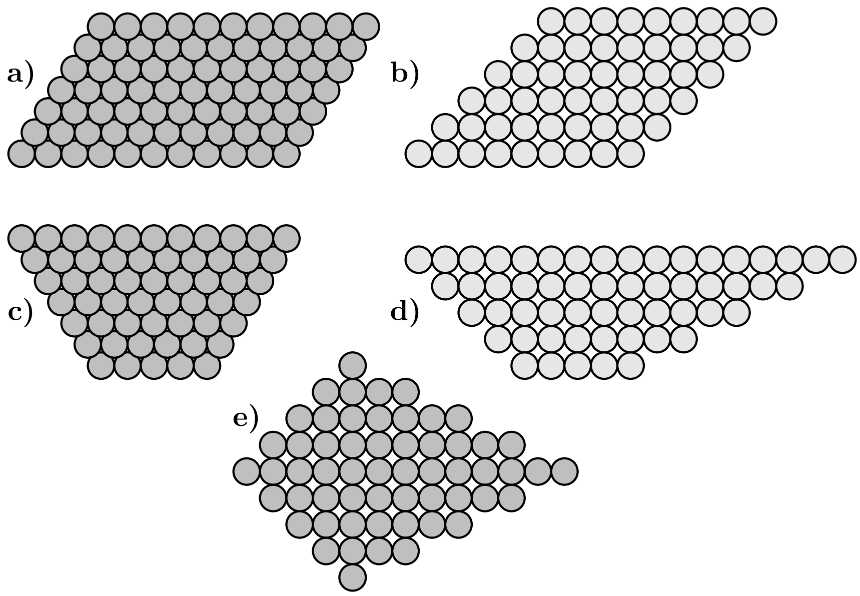
6.4. Hány korong alkotja az 1. ábra a), b), c), d), e) részén látható alakzatot?
Általánosítsunk!

6.5. **a)** Tükrözzük a trapézt egyik szárának felezőpontjára és mutassuk meg, hogy a kapott négyszög az eredetivel együtt paralelogrammát alkot!
b) Igazoljuk a trapéz területére vonatkozó alábbi formulákat:

$$T = \frac{a+c}{2}m = k \cdot m,$$

ahol a és c a trapéz két párhuzamos oldalának hossza, m a két párhuzamos oldal egyenesének távolsága, k pedig a trapéz középvonalának hossza, azaz a szárak felezőpontjának egymástól mért távolsága.

6.6. Egy konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontanak. A négy háromszög közül két szomszédosnak a területe 600 és 360 cm^2, míg a négyszög teljes területe 2004 cm^2. Határozzuk meg a másik két háromszög területét!



6.4.1. ábra.

6.7. Egy trapézt átlói négy háromszögre bontanak. A négy háromszög közül két

a) szomszédosnak **a)** átellenesnek

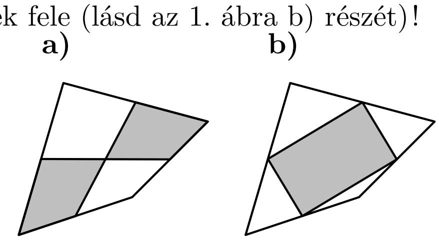
a területe 600 és 360 cm^2. Határozzuk meg a másik két háromszög területét!

6.5. Négyszögek és átlóik

6.1. (M)

a) Berajzoltuk egy konvex négyszög két középvonalát (a szemközti oldalak felezőpontját összekötő szakaszokat). Bizonyítsuk be, hogy a létrejövő négy kisebb négyszög közül a szemköztiek összege egyenlő egymással (lásd az 1. ábra a) részét).

b) Mutassuk meg, hogy a konvex négyszög oldalfelezőpontjai által alkotott négyszög területe az eredeti négyszög területének fele (lásd az 1. ábra b) részét)!



6.1.1. ábra.

6.2. Egy négyszög átlói egymással 30°-os szöget zárnak be és metszéspontjuk az egyik átlót 5 és 7 cm-es, a másik átlót pedig

a) 2 és 6 **b)** 3 és 5 **c)** 4 és 4

cm-es részekre osztja. Határozzuk meg a négyszög területét!

6.3. Mekkora lehet annak a négyszögnek a területe, amely átlóinak hossza e és f, az átlók szöge pedig

a) 90° **b)** 30° **c)** 45°?

6.4. (M) Melyek azok a négyszögek, amelyek területe a két átlójuk szorzatának fele?

6.5. Jelölje egy rombusz oldalainak hosszát a, átlóinak hosszát e és f két szomszédos oldalának szögét α. Határozzuk meg a rombusz területét, ha

a) $a = 10$ cm, $\alpha = 30°$;
b) $a = 6$ cm, $\alpha = 45°$;
c) $e = 6$ cm, $f = 5$ cm.

6.6. Határozzuk meg a deltoid területét, ha átlóinak hossza

a) $e = 10$ cm, $f = 5$ cm; **b)** $e = 3$ cm, $f = 5$ cm.

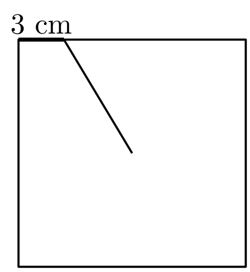
6.6. Vegyes feladatok

6.1. (M) Egy téglalap oldalainak hossza a és b. Mekkora területű négyszöget zárnak közre a téglalap szögeinek szögfelezői?

Oldjuk meg a feladatot

a) $a = 5$ cm, $b = 2$ cm esetén!
b) általánosan!

6.2. (M) [20] Három barát egy tortát szeretne igazságosan elosztani egymás között, amely fölülnézetből 15 cm oldalú négyzetnek látszik. Az első vágás a négyzet középpontjából indul az 1. ábrán látható módon.

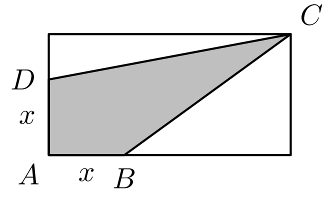


6.2.1. ábra.

Készítsük el a négyzetet valódi nagyságában és jelöljük a középpontból induló másik két vágást úgy, hogy az ily módon keletkezett „szeletek” egyenlő területűek legyenek! Igazoljuk az eljárás helyességét!

6.3. (M) A 6.2. feladat, illetve az arra adott megoldás milyen sokszögekre általánosítható? Tehát mely sokszög, és mely hozzá tartozó O pont esetén lehet „könnyen” felosztani a sokszöget az O pontból induló vágásokkal egyenlő részekre, bárhogyan is húzzuk az első vágást, és bárhány részre is akarunk vágni?

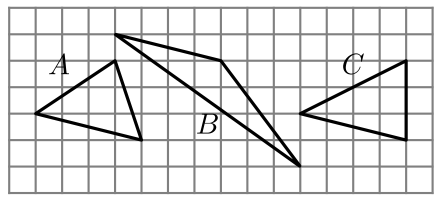
6.4. Az 1 ábrán látható téglalap oldalai 1 ill. 2 dm hosszúak. Úgy szeretnénk felmérni A-ból az (egyenlő hosszú) x szakaszokat, hogy az $ABCD$ négyszög területe fele legyen a téglalap területének. Mekkora legyen az x hosszúság?



6.4.1. ábra.

7. FEJEZET
Terület I. (teszt)

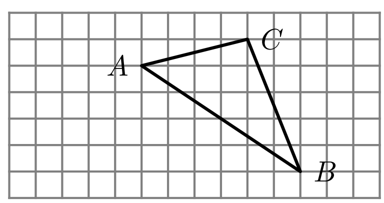
7.1. (M) Az 1. ábrán látható háromszögeket szeretnénk területük szerint csökkenő sorrendben felsorolni. Melyik a helyes sorrend?



7.1.1. ábra.

A) ABC **B)** BAC **C)** CAB **D)** BCA **E)** egyik sem

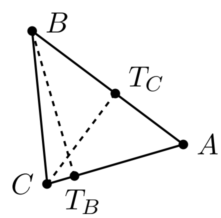
7.2. (M) Az 1. ábrán egy véges négyzetrács látható és benne az ABC rácsháromszög. Olyan C-től különböző D rácspontot keresünk, amelyre az ABD háromszög területe megegyezik az ABC háromszög területével. Hány ilyen D rácspont van az ábrán látható $8 \times 15 = 120$ rácspont között (a C-n kívül)?



7.2.1. ábra.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3
D) 4 **E)** 0 vagy legalább 5

7.3. (M) Az 1. ábrán az ABC háromszög látható. A T_B pont az AC szakaszon, míg T_C az AB szakaszon helyezkedik el és $BT_BA\angle = CT_CA\angle = 90°$. Hány cm^2 az ABC háromszög területe, ha $AB = 5$ cm, $BT_B = 4$ cm és $CT_C = 3$ cm?



7.3.1. ábra.

A) 7,5 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 10 **E)** egyik sem

7.4. (M) Egy háromszög két súlyvonala három háromszögre és egy négyszögre vágja az eredeti háromszöget. A három háromszögdarab közül az egyik területe 21 cm^2. Adjuk meg az eredeti háromszög területének összes lehetséges értékét cm^2-ben!

A) 63 **B)** 84 **C)** 126 **D)** 63 vagy 126 **E)** egyik sem

7.5. (M) Egy konvex négyszöget a két átlója négy olyan háromszögre bontja, amelyek közül két szemközt fekvő területe 20 és 30 cm^2, míg egy további rész területe 24 cm^2. Hány cm^2 a negyedik háromszög területe?

A) 18 **B)** 25 **C)** 28 **D)** egyik sem **E)** nem meghatározott

7.6. (M) Egy trapéz alapjai 10 és 35 cm hosszúak, az egyik szára 15 cm-es, a másik hossza 20 cm, míg a két alap egyenesének távolsága 12 cm. Határozzuk meg a trapéz területét!

A) 350 cm^2 **B)** 420 cm^2 **C)** 270 cm^2 **D)** más érték; **E)** kevés az adat;

7.7. (M)

Bármely ______________ *területének duplája a két átló hosszának szorzata.*

A „négyzet”, „trapéz”, „rombusz”, „deltoid”, „téglalap” szavak között van olyan, amelyet az üres helyre beírva igaz állítást kapunk. A felsorolt négyszögtípusok közül hány esetén igaz az állítás?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

7.8. (M) Határozzuk meg annak a rombusznak a területét, amelyben az oldalak hossza 8 cm, a belső szögek pedig 30° és 150°!

A) 32 cm^2 **B)** 120 cm^2 **C)** 64 cm^2 **D)** más érték; **E)** kevés az adat;

7.9. (M) Adott az $ABCD$ konvex négyszög, és a k kör. A négyszög mindegyik oldala érinti a k kört, melynek sugara $r_k = 5$ cm. A négyszög AB, BC, CD oldalainak hossza 8, 6 és 5 cm. Milyen hosszú a DA oldal (cm-ben)?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** más érték; **E)** kevés az adat;

7.10. (M) Adott az $ABCD$ konvex négyszög, és a k kör. A négyszög mindegyik oldala érinti a k kört, melynek sugara $r_k = 5$ cm. A négyszög AB, BC, CD oldalainak hossza 8, 6 és 5 cm. Becsüljük meg a négyszög T területét cm^2-ben!

A) $T < 60$ **B)** $60 \le T < 70$ **C)** $70 \le T < 80$ **D)** $80 \le T$ **E)** kevés az adat;

8. FEJEZET
Hasonlóság

A *középpontos hasonlóság* más szóval *nagyítás* vagy *kicsinyítés* a sík önmagára való leképezése tehát geometriai transzformáció. A középpontos hasonlóság megadásához rögzíteni kell annak középpontját és arányát. A középpont a sík bármely pontja, az arány bármely 0-tól különböző szám lehet. Az O középpontú (másképp: O *centrumú*) λ arányú középpontos hasonlóságnál a sík P pontjának képe:

- $P = 0$ esetén O,
- $P \neq O$ esetén az a P' pont, amelyre $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$ és amely
  - $\lambda > 0$ esetén az OP félegyenesen van;
  - $\lambda < 0$ esetén az O ból induló, P irányával ellentétes irányba állított félegyenesen van;

A λ előjele szerinti esetszétválasztás nélkül is értelmezhetjük a transzformációt: ha az OP egyenest számegyenesnek tekintjük, amelynek origója O, akkor a P pont képe a P-nek megfelelő szám λ-szorosának megfelelő pont.

A sík két alakzatát *hasonló*-nak mondjuk ha az egyiket át tudjuk transzformálni a másikba egybevágósági transzformációk és középpontos hasonlóságok egymás utáni alkalmazásaival.

Bevezető feladatok a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetből[24]: 1097–1101.

8.1. Mi a másik neve az O középpontú (-1) arányú középpontos nagyításnak?

8.2. Vegyük fel az ABC háromszöget az alábbi adatokkal:

$$AB = 8\text{cm}, \qquad AB = 10\text{cm}, \qquad CA = 4\text{cm}.$$

Jelölje F_C az AB szakasz felezőpontját és szerkesszük meg az ABC háromszög képét
a) – az $A_1B_1C_1$ háromszöget – a C középpontú 2 arányú középpontos hasonlóságnál!
b) – az $A_2B_2C_2$ háromszöget – az F_C középpontú középpontos tükrözésnél!
c) – az $A_3B_3C_3$ háromszöget – az $\overrightarrow{CA}$ vektorral való eltolásnál!
d) – az $A_4B_4C_4$ háromszöget – az $\overrightarrow{CB}$ vektorral való eltolásnál!
e) A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, A_4, B_4, C_4 összesen hány pont? Minden egybeesést igazoljunk!
f) Függ-e az egybeesések száma az ABC háromszög méreteitől?

8.3. Fogalmazzuk meg a középpontos hasonlóság tulajdonságait!

8.4. Vegyük fel az ABC háromszöget tetszőlegesen. Legyen $\overrightarrow{CA} = \underline{a}$ és $\overrightarrow{CB} = \underline{b}$.
Szerkesszük meg az ABC háromszög képét
a) az alábbi vektorokkal való eltolásoknál:
$\underline{a}$ $\qquad$ $\underline{b}$ $\qquad$ $2\underline{a}$ $\qquad$ $\underline{a} + \underline{b}$ $\qquad$ $2\underline{b}$.
b) a C középpontú $\lambda = 3$ arányú középpontos hasonlóságnál!

8.5. Bizonyítsuk be a középpontos hasonlóság tulajdonságait az alábbi arányok esetén:
$\lambda = -1$ $\quad$ $\lambda = 2$ $\quad$ $\lambda = 3$ $\quad$ $\lambda \in \mathbb{N}^+$ $\quad$ $\lambda \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Gyakorló feladatok a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötetből[24]: 1102–1248.

9. FEJEZET
Terület II.

A témában ajánlott még a Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet[24] „Pitagorasz tételének alkalmazása” fejezetében található alábbi feladatok feldolgozása: 1559–1603., 1625–1630., 1633-1635.

9.1. A kör területe

9.1. **a)** Szerkesszünk négyzetet és vegyünk fel egy O pontot. Szerkesszük meg a négyzet képét az O középpontú $\lambda = 2$ arányú középpontos nagyításnál!

b) Jelölje az eredeti négyzet kerületét k, területét t! Határozzuk meg a nagyítás eredményeként kapott négyzet kerületét és területét!

Hogyan változik a b) feladatrészre kapott eredmény, ha

c) változtatjuk az O pont helyzetét?

d) változtatjuk a λ arányt?

9.2. **a)** Szerkesszünk szabályos háromszöget és vegyünk fel egy O pontot. Szerkesszük meg a háromszög képét az O középpontú $\lambda = 2$ arányú középpontos nagyításnál!

b) Jelölje az eredeti háromszög kerületét k, területét t! Határozzuk meg a nagyítás eredményeként kapott alakzat kerületét és területét!

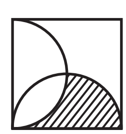
Hogyan változik a b) feladatrészre kapott eredmény, ha

c) változtatjuk az O pont helyzetét?

d) változtatjuk a λ arányt?

e) nem szabályos háromszögből indulunk ki?

9.3. (M) Az 1. ábrán egy egységoldalú négyzet látható, aminek két oldalára, mint átmérőre, egy-egy félkört rajzoltunk. Határozzuk meg a satírozott rész területét!

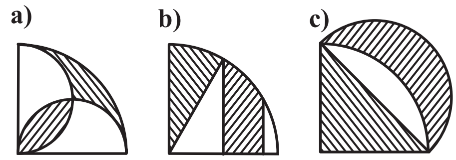


9.3.1. ábra.

9.4. [18] Mutassuk meg, hogy az 1. a-c) ábrákon az egyik irányban csíkozott alakzat területe megegyezik a másik irányban csíkozottéval!

Az a) ábrán egy negyedkör két szárára egy-egy félkört állítottunk; a b) ábrán egy negyedkörcikk ívének harmadolópontjain át húztunk párhuzamosokat az egyik szárral, a c) ábrán pedig egy egyenlő szárú derékszögű háromszög területét kell összehasonlítani a csúcsa köré írt negyedkör és az átfogóra írt félkör határolta holdacska területével.

9.5. **a)** Mutassuk meg, hogy a körbe írt szabályos nyolcszög kerülete kisebb, mint az ugyanakkora kör köré írt négyzet kerülete!



9.4.1. ábra.

b) Igazoljuk, hogy a körbe írt szabályos tizenhatszög kerülete nagyobb az ugyanabba a körbe írt szabályos nyolcszög kerületénél, míg a kör köré írt szabályos tizenhatszög kerülete kisebb a kör köré írt szabályos nyolcszög kerületénél!

9.6. Jelölje az egységnyi átmérőjű körbe írt szabályos n-szög területét t_n, az ugyanezen kör köré írt m-szög kerületét pedig T_m ($n, m > 2$ egészek).

a) Mutassuk meg, hogy $t_n < T_m$!

b) Igazoljuk, hogy $t_{m \cdot n} > t_n$ és $T_{m \cdot n} < T_n$, ha $n > 2$, $m > 1$ egészek!

c) Mutassuk meg, hogy legfeljebb egy olyan c szám van, amelyre $t_n \leq c \leq T_n$ minden $n > 2$ pozitív egészre teljesül!

9.7. Jelölje az egységnyi átmérőjű körbe írt szabályos n-szög kerületét k_n, az ugyanezen kör köré írt n-szög kerületét pedig K_n.

a) Mutassuk meg, hogy $k_n < K_n$!

b) Igazoljuk, hogy $k_{m \cdot n} > k_n$ és $K_{m \cdot n} < K_n$, ha $n > 2$, $m > 1$ egészek!

c) Mutassuk meg, hogy legfeljebb egy olyan d szám van, amelyre $k_n \leq d \leq K_n$ minden $n > 2$ pozitív egészre teljesül!

9.8. Milyen összefüggés áll fenn a 9.6., 9.7. feladatokban szereplő c, d számok között?

9.9. Jelölje az egységnyi átmérőjű kör kerületét π! Határozzuk meg annak a körnek a kerületét, amelynek sugara

a) 1; **b)** 2; **c)** 3,7; **d)** r

egység!

9.10. Ha az egységnyi sugarú kör területe π egységnégyzet, akkor mennyi annak a körnek a területe, melynek sugara

a) 2; **b)** 3; **c)** 3,7; **d)** r

egység!

9.11. Hogyan aránylik egymáshoz két kör kerülete illetve területe, ha sugaraik aránya

a) $1 : 3$; **b)** $2 : 3$; **c)** $r_1 : r_2$?

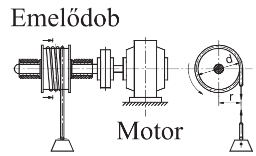
9.12. Egy autó kerekének átmérője $d = 60$ cm, a kerék percenként 100-at fordul. Mekkora az autó sebessége?

9.13. Az 1. ábrán látható kötéldobos emelővel 500 kg tömeget szeretnénk mozgatni $v = 2$ m/s egyenletes sebességgel. A kötéldobot egy hajtóműves villanymotor hajtja meg. A kötéldob átmérője $d = 500$ mm. Mekkora a motor percenkénti fordulatszáma?

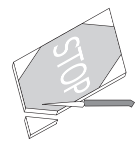
9.14. (M) Éva 1000 Ft-ért vett egy

a) négyzet; **b)** kör

alakú műanyag lapot, amiből egy (szabályos nyolcszög alakú) stoptáblát készít (lásd az 1. ábrát). Mennyit költött a veszendőbe menő részre?

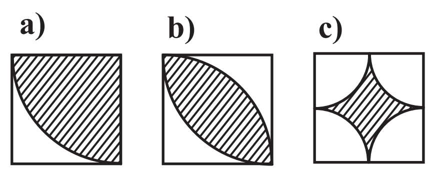


9.13.1. ábra.



9.14.1. ábra.

9.15. [14] Határozzuk meg, hogy a négyzetek területének hányad részét teszik ki a vonalkázott síkidomok területei!



9.15.1. ábra.

9.16. [20] A satírozott szirmokat egy négyzet oldalai, mint átmérő fölé rajzolt négy félkör segítségével kaptuk meg (lásd az 1. ábrát). Hogyan kell megválasztani a négyzet oldalának hosszát ahhoz, hogy a satírozott rész területe 1 dm^2 legyen?

9.2. Pitagorasz tétele

9.1. Egy háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk. Mutassuk meg, hogy az 1. ábrán jelölt AIC, DBC háromszögek területe egyenlő!

9.2. Egy háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk. Az 1. ábrán látható négy háromszög (ABC, DCI, FAE, HBG) területe összesen hányféle érték?

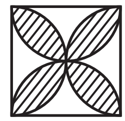
9.3. Az ABC háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk és berajzoltuk a háromszög magasságvonalainak egyeneseit is (lásd az 1. ábrát). Mutassuk meg, hogy az azonosan színezett téglalapok területe egyenlő!

9.4. Mutassuk meg, hogy derékszögű háromszögben a befogókra emelt négyzetek területének összege megegyezik az átfogóra emelt négyzet területével, azaz $a^2 + b^2 = c^2$, ha c az átfogó!

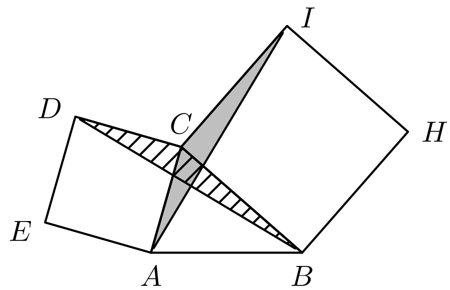
9.5. Mutassuk meg, hogy ha valamely háromszög a,b, c oldalaira teljesül az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés, akkor a c oldallal szemközti belső szög derékszög!

9.6. Egy háromszög a és b oldala közti szög
a) $\gamma = 60°$; **b)** $\gamma = 120°$.

Állítsuk elő a harmadik oldalt a és b algebrai kifejezéseként!



9.16.1. ábra.



9.1.1. ábra.

9.7. [7] Az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög. A háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzoltunk és az átfogóra emelt négyzetre még feltettük az eredeti háromszög egy középpontosan tükrözött példányát az 1. ábra szerint.

a) Mutassuk meg, hogy az $BCADJE$, $BFGHIA$ hatszögek egybevágóak!

b) Bizonyítsuk be ennek segítségével a Pitagorasz tételt!

9.8. [7] Az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van. A háromszög két befogójára kifelé négyzeteket rajzoltunk.

a) Mutassuk meg, hogy az 1. ábra szerinti jelölésben az EB egyenesre A-ból és az AF egyenesre B-ből bocsátott merőlegesek az ABC háromszög C-hez tartozó magasságvonalán metszik egymást!

b) Igazoljuk, hogy az ACH háromszög területe az $ACDE$ területének felével egyenlő, míg BCH területe a $BFGC$ négyzet területének fele!

c) Mutassuk meg, hogy az $ACBH$ deltoid területe egy AB oldalú négyzet területének felével egyenlő.

d) Mindezek alapján bizonyítsuk be a Pitagorasz tételt!

9.9. Egy derékszögű háromszög két befogója a és b, átfogója c. Az 1. ábra mindkét felén egy-egy $(a + b)$ oldalú négyzet látható. Mindkét négyzet mindegyik oldalát felosztottuk egy-egy a és b hosszúságú részre, de az egyes részek elrendezése a két ábrán más.

a) Igazoljuk, hogy a jobb oldali ábrán a nagy négyzet belsejében egy c oldalú *négyzet* jött létre!

b) A két ábrarész összehasonlításával igazoljuk a Pitagorasz tételt!

9.10. Az 1. ábrán levő holdacskákat (Hippokratész holdacskái) a derékszögű háromszög oldalai fölé szerkesztett félkörök határolják. Mutassuk meg, hogy a két holdacska területének összege a háromszög területével egyenlő!

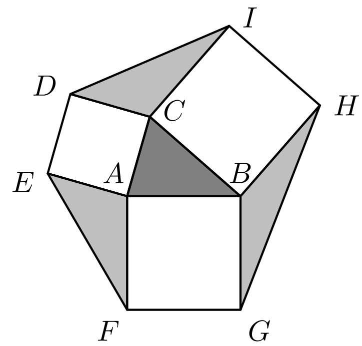
9.11. Határozzuk meg az a oldalú szabályos háromszög

a) magasságát; **b)** területét;

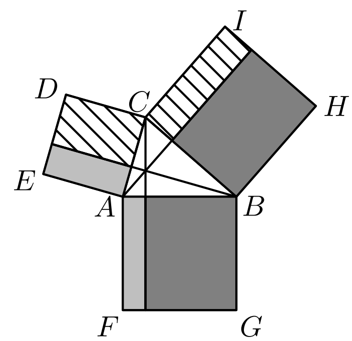
illetve

c) beírt körének; **d)** körülírt körének;

sugarát!



9.2.1. ábra.



9.3.1. ábra.

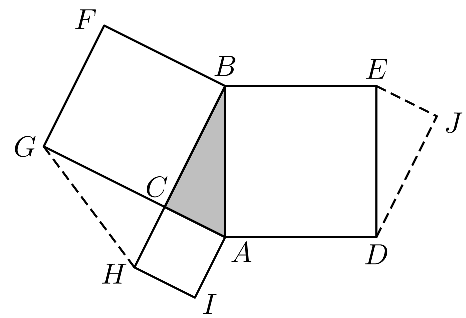
9.12. Határozzuk meg az m magasságú szabályos háromszög
a) oldalának hosszát; **b)** területét!

9.13. Határozzuk meg az a befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög
a) területét; **b)** átfogójának hosszát;
illetve
c) beírt körének; **d)** körülírt körének;
sugarát!

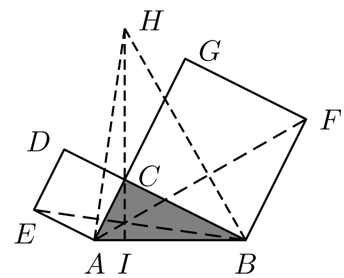
9.14. Határozzuk meg az a átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög
a) területét; **b)** befogójának hosszát;
illetve
c) beírt körének; **d)** körülírt körének;
sugarát!

9.15. Egy háromszögben adott az $ABC\angle = \beta$ szög , és a háromszög $BC = a$, $AB = c$ oldalai és T területe közül még kettő adott. Számoljuk ki a harmadik mennyiséget!

β	a (cm)	c (cm)	T (cm^2)
45°	2	6	
45°	4		9
45°		8	9
60°	2	6	
60°	4		9
60°		8	9
120°	2	6	
120°	4		9
120°		8	9



9.7.1. ábra.



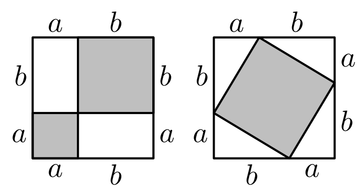
9.8.1. ábra.

9.16. a) Egy háromszög oldalai a, b és c a beírt kör sugara r. Fejezzük ki a háromszög területét ezekkel az adatokkal!

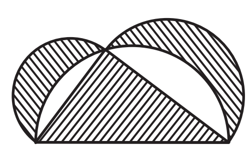
b) Fejezzük ki a háromszög területét az oldalak és az a oldalhoz hozzáírt kör sugarának segítségével!

9.17. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = 13$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 12$ cm. Tudjuk, hogy $ACB\angle = 90°$. Mekkora területű részekre osztja a háromszöget a C csúcsból induló

a) súlyvonal; **b)** szögfelező?



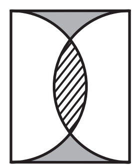
9.9.1. ábra.



9.10.1. ábra.

10. FEJEZET
Terület II. (teszt)

10.1. (M) Az 1. ábrán egy téglalap látható, amelynek hosszabbik, 2 egység hosszúságú oldalaira, mint átmérőkre egy-egy félkört rajzoltuk a téglalap belseje felé. Hány egység hosszúságú a téglalap rövidebb (a) oldala, ha a két félkörlap közös részének területe (csíkozott tartomány) megegyezik a téglalap félkörökön kívüli két részének (szürke tartományok) területösszegével?



10.1.1. ábra.

A) $a \leq 1{,}3$ **B)** $1{,}3 < a \leq 1{,}4$ **C)** $1{,}4 < a \leq 1{,}5$ **D)** $1{,}5 < a \leq 1{,}6$
E) $1{,}6 < a$

10.2. (M) Jelölje T egy szabályos háromszög körülírt körének területét, t pedig ugyanezen háromszög beírt körének területét! Mennyi a T/t arány értéke?
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 9/4 **E)** egyik sem

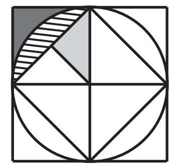
10.3. (M) Ha az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 10 dm, akkor milyen hosszú dm-ben a háromszög a befogója?
A) $a \leq 6{,}5$ **B)** $6{,}5 < a \leq 7$ **C)** $7 < a \leq 7{,}5$ **D)** $7{,}5 < a \leq 8$
E) $8 < a$

10.4. (M) Melyik képlet adja meg az a oldalhosszúságú szabályos háromszög területét?
A) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$ **B)** $\frac{a^2}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ **D)** $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ **E)** egyik sem

10.5. (M) Egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, szárai pedig 13 cm hosszúak. Határozzuk meg a háromszög T területét cm^2-ben!
A) $T < 60$ **B)** $60 \leq T < 80$ **C)** $80 \leq T < 100$ **D)** $100 \leq T < 120$
E) $120 \leq T$

10.6. (M) Mekkora annak a körnek az r sugara (cm-ben), amelyhez a középpontjától 29 cm-re levő pontból húzott érintő hossza 20 cm?
A) $r < 15$ **B)** $15 \leq r < 17{,}5$ **C)** $17{,}5 \leq r < 20$ **D)** $20 \leq r < 22{,}5$
E) $22{,}5 \leq r$

10.7. (M) Az 1. ábrán egy kört, a körbe és a kör köré írt négyzetet láthatjuk, berajzoltuk a beírt négyzet átlóit és a kör középpontját összekötöttük a beírt négyzet egyik oldalának felezőpontjával. Az ábrán látható világos szürke tartomány területe V, a sötétszürkéé S, a csíkozotté C. Mi a három érték nagyság szerinti sorrendje?



10.7.1. ábra.

A) $C > V > S$ **B)** $C = V = S$ **C)** $S > V > C$ **D)** $S = C > V$
E) egyik sem

10.8. (M) Milyen összefüggés áll fenn az ABC háromszög $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ oldalai között, ha az a, b oldalak közti szög értéke: $ACB\angle = 45°$?
A) $c^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$ **B)** $c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$ **C)** $c^2 = a^2 + b^2 - ab$
D) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ **E)** egyik sem

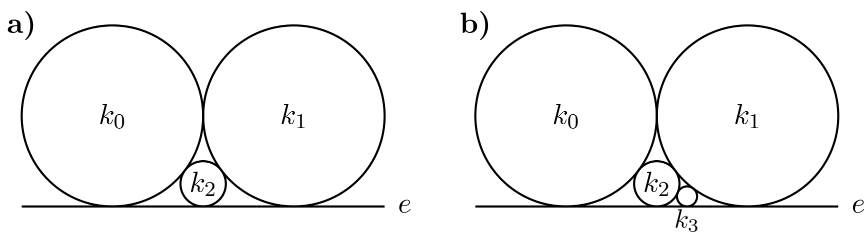
11. FEJEZET
Síkgeometriai számítások

11.1. Az $ABCD$ trapéz AB alapja 10 cm-es, a CD alap pedig 6 cm hosszú. Tudjuk még, hogy a trapéz AB alapon fekvő két belső szögének összege 90°. Jelölje az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjait rendre F_{AB}, F_{BC}, F_{CD} és F_{DA}. A megadott információk alapján az $F_{AB}F_{BC}F_{CD}F_{DA}$ négyszög oldalai és átlói közül melyek hossza határozható meg teljes pontossággal?

11.2. (M) Adott az ABC háromszög. Egy AC-vel párhuzamos egyenes az AB oldalt P-ben, az AM súlyvonalat T-ben, a BC oldalt K-ban metszi. Határozzuk meg az AC oldal hosszát, ha tudjuk, hogy $PT = 3$, $TK = 5$.

11.3. Adott az ABC háromszög. Egy AC-vel párhuzamos egyenes az AB oldalt P-ben, az AM súlyvonalat T-ben, a BC oldalt K-ban metszi. Határozzuk meg az AC oldal hosszát, ha tudjuk, hogy $PT = 3$, $TK = 5$.

11.4. a) Az 1. ábra bal oldalán látható k_0, k_1, k_2 körök érintik egymást és az e egyenest. Határozzuk meg k_2 sugarát, ha k_0, k_1 sugara egyaránt 1 méter.



11.4.1. ábra.

b) Az előző ábrába belehelyeztük a k_1, k_2 köröket és az e egyenest érintő k_3 kört (lásd az 1. ábra jobb oldalát). Határozzuk meg k_3 sugarát!

c) Folytassuk a feladatot!

11.5. a) Egy trapéz alapjai 6 és 10, szárai 3 és 5 egység hosszúak. Milyen hosszú részekre osztják az átlók a trapéz középvonalát? (A trapéz középvonala a szárak felezőpontjait összekötő szakasz.)

b) Oldjuk meg a feladatot paraméteresen is!

12. FEJEZET
Kockák

Az alábbi feladatokkal való foglalkozás előtt, mellett nagyon ajánljuk Andrásfai Béla: Versenymatek gyerekeknek[4] könyvéből a „Térszemlélettel” fejezet példáinak megoldását. Sok érdekes kérdésre akadhatunk kockákról, gúlákról, poliéderekről a Matematika Határok Nélkül verseny feladatai között([20, 16]).

12.1. A kocka térfogata, felszíne

12.1. Hány csúcsa, hány éle és hány lapja van a kockának?

12.2. (M)
a) Egy kocka éle 5 cm. Határozzuk meg a kocka térfogatát és felszínét!
b) Adjuk meg az a cm élű kocka térfogatát és felszínét!

12.3. (M) Határozzuk meg a kocka élének hosszát, ha tudjuk, hogy
a) felszíne 294 cm^2! **b)** térfogata 729 cm^3!

12.4. (M) Határozzuk meg a kocka élének hosszát, ha tudjuk, hogy
a) felszíne A cm^2! **b)** térfogata V cm^3!

12.5. **a)** Fejezzük ki a V cm^3 térfogatú kocka felszínét!
b) Fejezzük ki az A cm^2 felszínű kocka térfogatát!

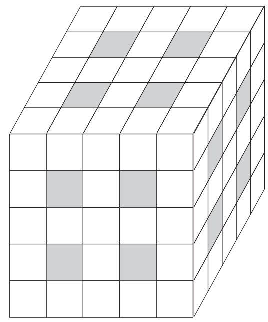
12.6. **a)** Adjuk meg cm^3-ben a 2 m oldalélű kocka térfogatát!
b) Adjuk meg cm^2-ben a 2 m oldalélű kocka felszínét!
c) Adjuk meg az előbbi mennyiségeket mm^3-ben illetve mm^2-ben!

12.7. (M)
a) Hány liter tej fér el egy 1,5 méter élhosszúságú kocka alakú tartályban?
b) Hány kg lenne egy 1 dm oldalélű tömör kocka aranyból (az arany sűrűsége: 19,3 g/cm^3)?
c) Mekkora a felszíne egy 10,3818 kg tömegű vaskockának (a vas sűrűsége 7,8 g/cm^3)?

12.2. Fúrjuk a kockát

12.1. Egy 3 cm élű kocka mindegyik lapját 9 egybevágó kis négyzetre osztottuk fel. Mindegyik lapon kiválasztjuk a középső kis négyzetet és erre merőlegesen a szemközti lapig egy négyzetes oszlopot fúrunk ki a kockából. Mennyi lesz az így kapott „lyukas” test térfogata és felszíne?

12.2. Egy 5 cm élű kocka mindegyik lapját 25 egybevágó kis négyzetre osztottuk fel. Mindegyik lapon kiválasztjuk az 1. ábrán látható négy kis négyzetet és ezekre merőlegesen a szemközti lapig egy-egy négyzetes oszlopot fúrunk ki a kockából. Mennyi lesz az így kapott „lyukas” test térfogata?



12.2.1. ábra.

12.3. Daraboljuk a kockát

12.1. Egy 105 cm élhosszúságú kocka egyik sarkában egy 5 cm oldalú kis kocka található (a kis kocka a nagy kocka része, egyik csúcsuk és három lapsíkjuk közös). A kis kocka teljes lapsíkjai milyen részekre osztják a nagy kockát?

12.2. (M) Egy kockát egyik lapjával párhuzamos síkokkal felszeletelünk. Hány síkkal kell szétvágni a kockát, ha azt akarjuk, hogy a keletkezett testek együttes felszíne a kocka felszínének a kétszerese legyen?

12.3. $1 \times 1 \times 1$-es fehér kis kockákból egy $5 \times 5 \times 5$-ös tömör nagy kockát állítottunk össze.

a) Hány kis kockára volt szükség?

A nagy kocka mind a hat lapját befestettük zöldre. A kis kockák közül hánynak lett így

b) 6 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 3 **f)** 2 **g)** 1

h) 0

oldala zöld?

12.4. Van 8 kis kockánk, mindegyiknek 1 cm az éle.

a) Hogyan színezzük ki a kis kockák lapjait, hogy azokból akár egy teljesen kék, akár egy teljesen zöld 2 cm élű kocka is összeállítható legyen?

b) Meg tudunk-e színezni 27 kis kockát úgy, hogy azokból akár kék, akár zöld 3 cm élű kocka is összerakható legyen?

c) Meg tudunk-e színezni 27 kis kockát úgy, hogy azokból akár kék, akár piros, akár zöld 3 cm élű kockát össze lehessen állítani?

12.5. Egy kocka alakú sajtot $3 \times 3 \times 3$ egyforma méretű kisebb kockára vágtak az oldalaival párhuzamos vágásokkal. A darabokat úgy kell elosztani 9 gyerek között, hogy mindenkinek ugyanannyi jusson, és mindenki adagján ugyanakkora héjas rész legyen.

12.6. (M) Két darab 1 cm^3-es fakocka közül az egyiket szétvágtuk 125 kis kockára. Ezután ugyanolyan vastagon befestettük az összes kockát. Hányszor több festék kell a kis kockák befestéséhez, mint a nagyéhoz?

12.7. Egy téglatest élei egész számú centiméter hosszúságúak, a felszíne 100 cm^2. Egyik lapjának a területe az egész felszínnek a $\frac{2}{25}$-öd része. Mekkora a test térfogata?

12.8. Hány olyan téglatest van, amelynek térfogata 2004 cm^3 és

a) oldalélei cm-ben mérve egész számok?

b) mindegyik oldallapjának területe cm^2-ben mérve páros egész szám? (Két külön feladat)

12.9. (M) Bence sok kis fehér egybevágó (ugyanakkora) kockából egy nagy tömör kockát állított össze, és annak mind a 6 oldalát pirosra festette.

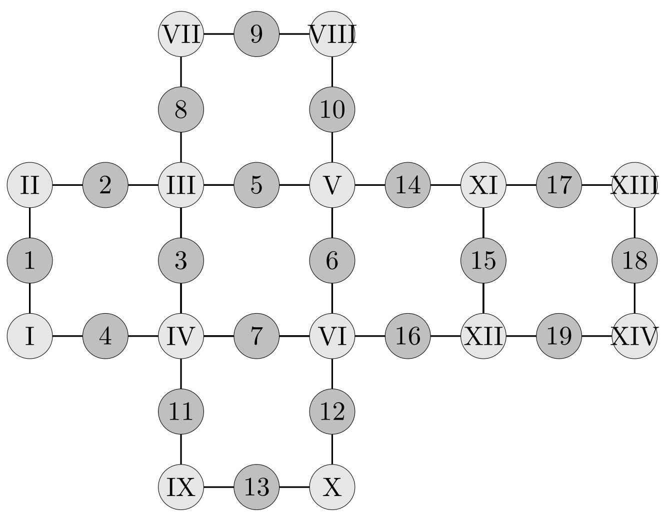
Huncut Hugó szétszedte a nagy kockát kis kockákra és eltette azokat a kis kockákat, melyeknek három lapja is piros volt. Bence a megmaradt kockákból egy nagy tömör téglatestet állított össze és annak mind a 6 lapját kékre festette.

Huncut Hugó a téglatestet is szétszedte kis kockákra és eltette azokat a kis kockákat, amelynek legalább az egyik oldala kék volt. Bencének így 11 kis kockája maradt.

Hány kis kockából állt Bence nagy piros kockája? Ebből hánynak volt piros lapja?

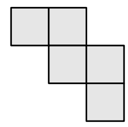
12.4. Kiterítjük a kockát

12.1. Az 1. ábrán egy kocka hálója, egy kiterített kocka látható. A képen összesen 14 csúcs és 19 él különböztethető meg. Mely csúcsok tartoznak a kocka ugyanazon csúcsához? Mely élek felelnek meg a kocka egyazon élének? Csoportosítsuk a csúcsokhoz írt római számokat! Csoportosítsuk az élek arab számait is!



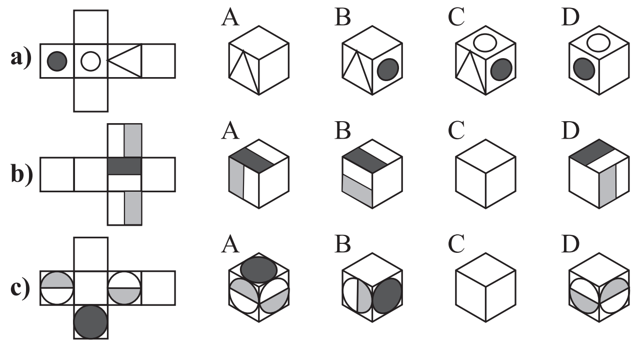
12.1.1. ábra.

12.2. Az 1. ábrán egy kocka hálójának egy része látható. Egészítsük ki! (Hányféleképpen lehet?) Hány éle mentén vágtuk szét a kockát?



12.2.1. ábra.

12.3. Válasszuk ki az 1. ábrán, hogy az A, B, C, D jelű kockák közül melyiknek a palástja látható a bal oldalon!



12.3.1. ábra.

12.4. Egy 1 dm élű kockát 6 darab 1 dm^2 területű négyzet alakú papírral be tudunk burkolni egyrétűen és hézagtalanul úgy, hogy a papírdarabokat nem kell elvágni. Be lehet-e ugyanígy burkolni az 1 dm élű kockát 12 darab négyzet alakú 0,5 dm^2 területű papírlappal úgy, hogy itt sem kell vágni?

12.5. (S) Be lehet-e burkolni egy kocka felületét hézagtalanul és egyrétűen 6 olyan egybevágó kereszt alakú papírral, amelyik mindegyike 5 egybevágó négyzetből áll, és egy „kereszt” területe egyenlő egy kockalap területével? A papírlapokat szétvágni nem lehet, csak behajtani.

12.6. Egy 10 m×10 m×10m-es kocka alakú tartály egyik sarkában lakik egy pók. Felesége az ellenkező sarokban lakik. Gyerekeik az apupóktól a falon haladva 16 m-re, az anyupóktól 7 m-re laknak.

a) Készítsünk méretarányos ábrát (pl. 1 : 200-as arányban), szerkesszük meg a kicsinyített kocka palástján a gyerekek lehetséges helyét!

b) Hány gyerek lehet a pókcsaládban?

12.7. Szerkesszük meg egy kocka felszínén azokat a pontokat, amelyek a kocka két átellenes csúcsától a kocka felszínén haladva egyenlő távolságra vannak!

12.8. (M) Egy kocka élei 2 cm hosszúak. A kocka fehér, de rendelkezésünkre áll sok

a) 1cm× 3cm-es; **b)** 1cm × 4cm-es; **c)** 1cm × 5cm-es; **d)** 1cm × 6cm-es

piros papírszalag, amelyeket a kockára ragaszthatunk. Melyik típusú szalagokkal lehet úgy befedni a kockát, hogy minden lapja piros legyen, de sehol se legyen egynél több rétegben piros papír? (A papírokat behajtani szabad, de elvágni nem!)

12.5. Szakaszok és szögek

12.1. (M) Az 1. ábrán egy kocka látható. Határozzuk meg az alábbi szögeket!

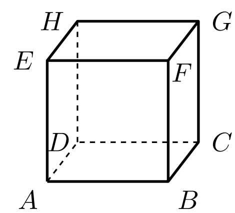
a) $EBC\angle$ **b)** $EBD\angle$ **a)** $EBA\angle$

12.2. Az 1. ábrán egy kocka látható. A P, Q, R, S pontok rendre az AB, CD, HG, CG élek felezőpontjai. Határozzuk meg az

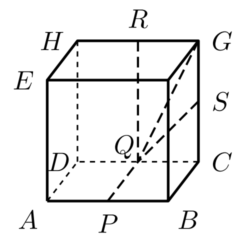
a) $PQR\angle$ **b)** $PQG\angle$ **c)** $PQS\angle$ **d)** $PQC\angle$

szögek nagyságát!

12.3. Adott a síkon az a szakasz. Szerkesszünk olyan b szakaszt, amely az a oldalú kocka testátlójával egyenlő hosszú!



12.1.1. ábra.



12.2.1. ábra.

12.6. Szimmetriák

12.1. (M) Hány szimmetriasíkja van a kockának? Azaz hány olyan sík van, amelyre tükrözve a kockát önmagát kapjuk?

12.2. (M) Az 1. ábrán megbetűztük egy kocka csúcsait. Az $ABCD$ és $EFGH$ oldallapok középpontjait összekötő t_1 egyenes, az AE, CG oldalélek felezőpontjait összekötő t_2 egyenes és az $AG = t_3$ testátló egyenese a kocka egy-egy forgástengelye (szimmetriatengelye).

A kocka melyik másik csúcsába kerülhet át a B csúcs, ha

a) t_1 **b)** t_2 **c)** t_3

körül forgatjuk?

Mekkora szöggel kell forgatni

d) t_1 **e)** t_2 **f)** t_3

körül, hogy a kocka önmagára képződjék?

g) Összesen hány szimmetriatengelye van a kockának, azaz hány olyan egyenes van, ami körül ($360°$ és annak egész számú többszöröseitől különböző szöggel) a kocka önmagába forgatható?

h) Összesen hány olyan forgatás van, amely a kockát önmagára képezi (de nem minden pontot képez önmagára)?

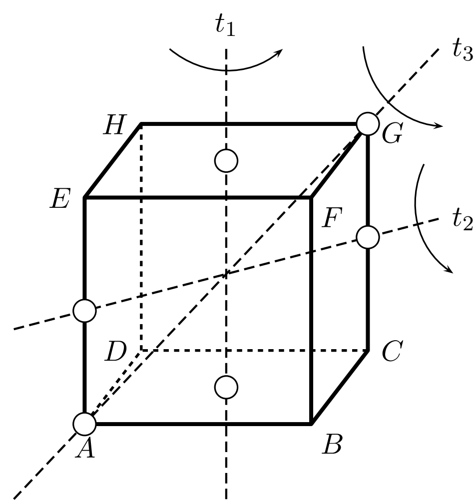
i) A h)-ban szereplő forgatások között hány olyan van, amely az A csúcsot a

i$_1$) B **i$_2$)** C **i$_3$)** G

csúcsba viszi?

j) Szeretnénk a HB tengely körül önmagába forgatni a kockát, de csak a t_1 és t_3 tengelyek körüli forgatásokra van lehetőségünk. Elvégezhető-e ezekkel a kívánt forgatás?

12.3. Készítsük el a kockát önmagára képező forgatások (lásd a 12.2. feladatot) szorzótábláját!



12.2.1. ábra.

12.7. Színezések, kiralitás

12.1. Hányféleképpen festhetünk be egy kockát feketére és fehérre (egy-egy lapon belül csak az egyik színt használhatjuk és az egymásba forgatható színezéseket nem különböztetjük meg)?

12.2. (M) Dobókockának nevezünk egy kockát, ha lapjain az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok vagy az azokat jelképező pöttyök találhatók, minden lapon egy szám és az egymással szemköztes lapokon található számok összege minden lap-párnál 7.

Két dobókockán egyformának tekintünk, ha letehetők egy téglalap alakú asztalra úgy, hogy a két kockán alul található számok azonosak legyenek, a felül látható számok is egyformák és az asztal bármelyik oldaláról nézzük is mindig egyforma számot látunk a két kockán.

Hány különböző (nem egyforma) dobókocka létezik?

12.3. (M) Van négy

a) egyforma; **b)** különböző (pld piros, kék, zöld és sárga)

kockánk. Ezeket oldallapjaik mentén egymáshoz ragaszthatjuk. Minden ragasztásnál az egyik kocka teljes oldallapja egy másik kocka teljes oldallapjához illeszkedik. Hányféle 1, 2, 3 illetve 4 kockából álló idomot tudunk így létrehozni?

12.4. (M) Rendelkezésünkre áll sok 1cm × 1cm × 1cm-es piros és kék kocka, amelyeket lapjaik mentén egymáshoz ragaszthatunk. Így hány különböző mintázatú 2cm × 2cm × 2cm-es kockát készíthetünk, ha nem tekintjük különbözőnek azokat, amelyek a térben egymásba mozgathatók?

12.5. Van néhány egyforma kockánk, amelyek csúcsaira egy-egy pöttyöt teszünk: pirosat vagy kéket. Mindegyik csúcsra kerül egy pötty. Így hány különböző mintájú kocka készíthető, ha nem tekintjük különbözőnek azokat, amelyek a térben egymásba mozgathatók?

12.8. Számítások Pitagorasz tételével

12.1. (M) Adjuk meg az

a) 1 **b)** 5 **c)** a

cm oldalélű kocka testálójának hosszát!

12.2. (M) Mekkora az oldaléle annak a kockának, melynek testátlója

a) 1 **b)** 5 **c)** a

egység?

12.3. (M) Mekkora a testátlója annak a kockának, melynek lapátlója

a) 1 **b)** 5 **c)** a

egység?

12.4. Mekkora a testátlója annak a kockának, melynek lapátlója

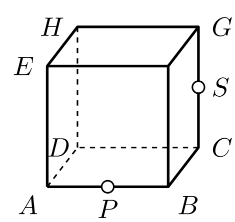
a) 1 **b)** 5 **c)** a

egység?

12.5. Az 1. ábrán a P és az S pont a kocka AB illetve CG élének felezőpontja. Határozzuk meg az két pont távolságát

a) a térben; **b)** a kocka felületén,

ha a kocka éle 18 cm!



12.5.1. ábra.

12.6. (M) Adjuk meg az

a) 1 **b)** 5 **c)** a

cm oldalélű kocka beírt gömbjének (az oldallapok mindegyikét érintő gömbnek a) sugarát!

12.7. (M) Adjuk meg az

a) 1 **b)** 5 **c)** a

cm oldalélű kocka körülírt gömbjének (a csúcsok mindegyikén áthaladó gömbnek a) sugarát!

12.8. (M) Adjuk meg az

a) 1 **b)** 5 **c)** a

cm oldalélű kocka élérintő gömbjének (az oldalélek mindegyikét érintő gömbnek a) sugarát!

12.9. 1m×1m×1m-es kocka alakú kutyaól egyik alsó sarkában figyel egy pók. Egy légy a kutyól plafonjának közepén pihen. Elkaphatja-e a pók a legyet, ha a pók 0,25 m/s sebességgel szalad a falon, de a pók első mozdulata után 4 s-mal a légy elröpül?

12.10. (M) Határozzuk meg annak a kockának az élhosszát, amelynek a beírt gömbje 7 cm-rel kisebb sugarú, mint a körülírt gömbje!

13. FEJEZET

Kockák (teszt)

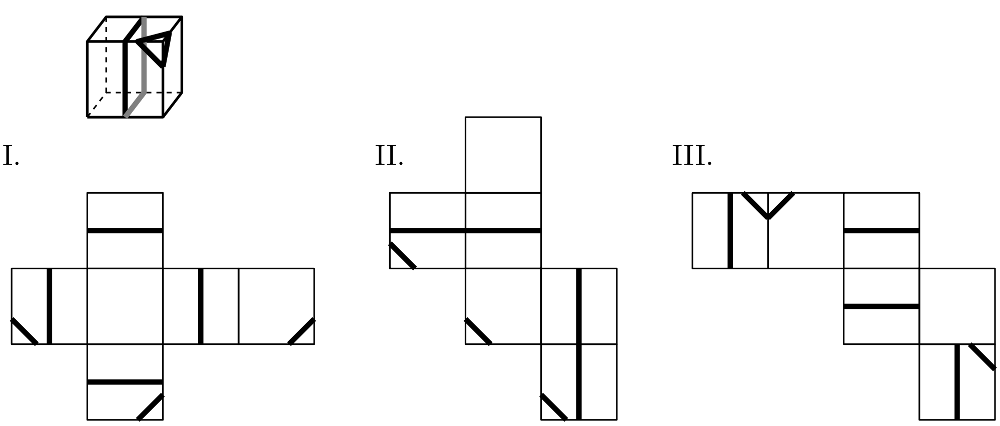
13.1. (M) Határozzuk meg annak a kocka alakú rézdarabnak a tömegét, amelynek felülete 181,5 cm^2! (A réz sűrűsége 8,960 g/cm^3. Figyeljünk a mértékegységekre!)

A) 100 g alatt **B)** 100 g és 1 kg között **C)** 1 és 1,5 kg között **D)** 1,5 és 3 kg között **E)** több mint 3 kg

13.2. (M) Hogyan változik a 7cm×7cm×7cm-es kocka felszíne, ha minden sarkánál, mindegyik éle közepénél és minden lapjának közepénél kivágunk belőle egy-egy 1cm×1cm×1cm-es kis kockát?

A) nem nő **B)** 20 cm^2-nél kevesebbel nő **C)** 20 cm^2-nél többel, de 40 cm^2-nél kevesebbel nő **D)** 40 cm^2-nél többel, de 60 cm^2-nél kevesebbel nő **E)** 60 cm^2-nél többel nő

13.3. (M) Az 1. ábrán egy kocka látható egyszerű díszítéssel: két zárt vonallal. Az ábrán van még három kocka palástja is vonaldarabokkal. Melyik palást hajtogatható össze úgy kockává, hogy a vonaldarabok a megadott díszítéssé álljanak össze?



13.3.1. ábra.

A) egyik sem **B)** az I. **C)** a II. **D)** a III. **E)** több is

13.4. (M) Egy kocka lapjait zöldre festettük, majd a befestett kockát feldaraboltuk egybevágó kis kockákra. Ezek között van olyan, amelyiknek két festett (zöld) lapja van, méghozzá épp ugyanannyi, mint amennyinek egy zöld lapja van. Hány kis kockára daraboltuk fel az eredeti kockát?

A darabok száma az alábbi két érték közé esik:

A) 7 és 56 **B)** 57 vagy 106 **C)** 107 és 206 **D)** több **E)** egyik sem

13.5. (M) Legyen a kocka egyik éle a, egy másik éle b. Hány olyan mozgatás van, amely a kockát önmagára képezi és az a élt a b élbe viszi? (Hány olyan szimmetriája van a kockának, amely a-t

b-be viszi?) **A)** ez attól függ, hogy melyik két élről van szó **B)** egy **C)** kettő **D)** három **E)** több

13.6. (M) Adott néhány egyforma méretű kocka, mindegyiknek két oldala piros, kettő kék, a maradék kettő pedig zöld. Legfeljebb hány különböző mintázatú kocka lehet közöttük? (Két kockát nem tekintünk különböző mintázatúnak, ha az egyiket térbeli mozgatással a másikba vihetjük úgy, hogy színeik is megfeleljenek egymásnak.)

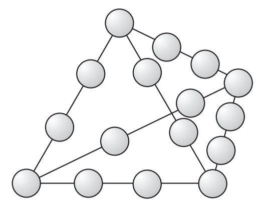
A) legfeljebb kettő **B)** három vagy négy **C)** öt **D)** hat **E)** több

13.7. (M) Mekkora lehet a kocka éle, ha 10 cm-rel rövidebb a testátlójánál?
Ha a a kérdezett hossz centiméterben, akkor

A) $a < 6$ **B)** $6 \le a < 10$ **C)** $10 \le a < 12.5$ **D)** $12.5 \le a < 15$ **E)** $15 \le a$

14. FEJEZET
Gúla

14.1. (MS) Írjuk be az $1, 2, 3, \ldots, 16$ számokat az 1. ábrán látható tizenhat gömbbe úgy, hogy a tetraéder (háromszög alapú gúla) élein található négy-négy szám összege mindenütt 30 legyen!

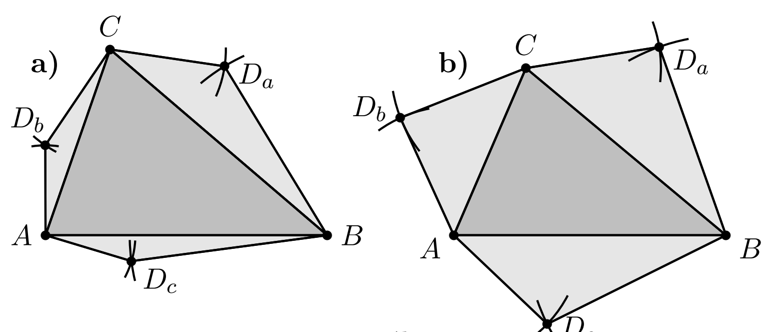


14.1.1. ábra.

14.2. (M) Megadunk két halmazt. Döntsük el, hogy megegyeznek-e („="), egyik része-e a másiknak („⊂", „⊃") vagy diszjunktak vagy egyik reláció sem teljesül rájuk.

a) tetraéderek — háromoldalú gúlák;
b) szabályos tetraéderek — szabályos háromoldalú gúlák;
c) tetraéderek — négyoldalú gúlák

14.3. (M) Az 1. ábrán megszerkesztettük az ABC háromszöget, majd A, B és C középponttal rajzoltuk egy-egy kört. E körök egy-egy páronkénti metszéspontja D_a, D_b és D_c. Felhajthatók-e az oldalsó háromszögek, hogy tetraédert kapjunk?



14.3.1. ábra.

14.4. (M) Az alábbi táblázat soraiban megadtuk az élhosszakat. Tippeljük meg minden egyes sor esetén, hogy van-e az adatoknak megfelelő tetraéder, majd szerkesszük meg a megfelelő tetraéderek kiterített hálóját és készítsük is el a tetraédereket!

	AB	BC	CA	AD	BD	CD	Van-e (I/N)?
1.	12	12	8	5	6	5	
2.	8	5	8	5	12	12	
3.	12	5	8	5	8	12	
4.	12	12	8	5	8	5	
5.	8	5	12	5	8	12	

14.5. Van-e olyan tetraéder, amelyben a lapok területe cm^2-ben:

$$15, \qquad 30, \qquad 45, \qquad 100?$$

14.6. (M) I. Berangesz fáraó olyan háromszög alapú piramist szeretne építtetni családja örök nyughelyéül, amelynek alapja, és egyik oldallapja egymással egybevágó szabályos háromszög alakú, magassága pedig a lehető legnagyobb. Készítsük el papírból a piramis makettjét! Szerkesszük meg hálóját a síkon! (A szabályos háromszögek oldalai legyenek 6 cm hosszúak, a piramist pedig tekintsük háromszög alapú gúlának.)

14.7. (M) II. Berangesz fáraó négyszög alapú piramist tervez magának. Eredetileg úgy képzelte, hogy a piramis alapja 100 cvimedli oldalhosszúságú négyzet lesz, oldallapjai pedig egybevágó szabályos háromszög alakúak, de a földmérők szerint az építmény így épp nem férne el a fáraó kedvenc szigetén. Berangesz módosította a tervet: a négyzet alapot olyan 100 cvimedli oldalhosszúságú rombuszra cserélte, amelynek két szemközti csúcsánál 105°-os szöge van, és az egyik ilyen csúcsnál találkozó két oldallap szabályos háromszög alakú.

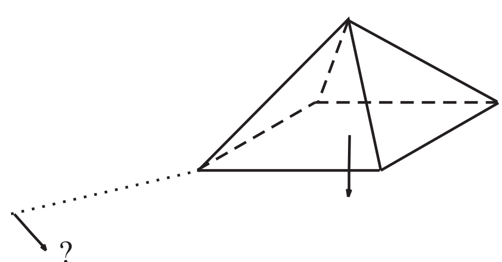
Készítsük el papírból a piramis makettjét! Jelöljük a méretarányt! Írjuk le a szerkesztés lépéseit is!

14.8. (M) III. Berangesz fáraó négyzet alapú piramist tervez magának. A csúcsa az alap egyik csúcsa felett lesz, és legrövidebb oldaléle (ami egyben a testmagassága) egyenlő hosszú lesz az alapél hosszával.

a) Készítsük el papírból a piramis makettjét! Írjuk le a szerkesztés lépéseit is!

b) Berangesz két fia az apjukéval és egymáséval egyforma alakú, de a térben esetleg másképpen elrendezett emlékművet építene magának, és ezeket úgy illesztenék egymás mellé, hogy a közös nagy emlékműnek kívülről mindegyik oldallapja ugyanolyan legyen. Lehetséges-e ez?

14.9. (M) V. Berangesz fáraó piramisa négyzet alapú, oldallapjai szabályos háromszögek, magassága pedig 70 cvimedli. A piramis belsejébe csak a középpontja alatt fúrt függőleges kútból fölmászva lehet eljutni. A kútba egyenes alagút vezet le, melynek iránya a vízszintessel 60°-ot zár be, felső bejárata pedig a piramis egyik sarkától 77 cvimedli távolságra található a szemközti sarokkal épp ellenkező irányban (lásd az 1. ábrát).



14.9.1. ábra.

Milyen hosszú az alagút?

14.10. VI. Berangesz fáraó piramisa olyan szabályos hatoldalú gúla , amelynek szomszédos oldallapjai 150o-os szöget zárnak be egymással. Készítsük el papírból a piramis makettjét! Írjuk le a szerkesztés lépéseit, és indokoljuk a szerkesztés helyességét!

14.11. VIII. Berangesz fáraó piramisa olyan szabályos nyolcoldalú gúla, amelynek oldalélei 80 cvimedli hosszúak, míg az alap két szemköztes csúcsa között a piramis felületére fektetett legrövidebb kötél hossza 140 cvimedli.

a) Készítsük el papírból a piramis makettjét! Legyen az ábrán 1 cm = 10 cvimedli. Írjuk le a szerkesztés lépéseit, és indokoljuk a szerkesztés helyességét!
b) Szerkesszümk a piramis testmagasságával egyenlő hosszú szakaszt!

14.12. (M) *Kornis Kristóf feladata*
Egy négyzet alapú gúla mind a nyolc éle egyenlő. Össze lehet-e állítani hat ilyen gúlából egy kockát, úgy hogy összeérjenek az alappal szemköztes csúcsuknál?

14.13. (M) Az $ABCDE$ négyszög alapú gúla $ABCD$ alapjának adatai (a távolságok cm-ben értendők): $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $CD = 6$, $DA = 2$, $ABC\angle = CDA\angle = 90°$, $BCD\angle = 45°$, $DAB\angle = 135°$.
Adott még három oldalél hossza: $AE = 3$, $BE = 4$, $CE = 5$. Szerkesszünk a DE oldaléllel egyenlő hosszúságú szakaszt!

14.14. Nagy Szerkesztő a következőképpen bizonyítja, hogy bármely háromszögben a három magasságvonal egy közös ponton halad át.

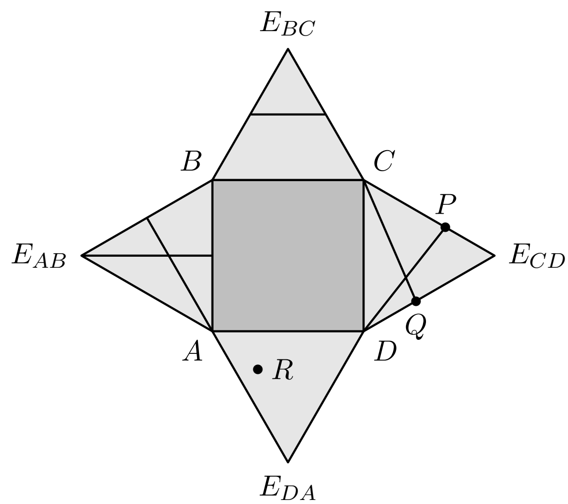
Bizonyítás: tekintsük a tetszőleges $D_AD_BD_C$ háromszöget, erről fogjuk megmutatni, hogy magasságvonalai egy ponton mennek át.
1. lépés Rajzoljuk be a háromszög AB, BC, CA középvonalait: AB párhuzamos D_AD_B-vel, $D_AC = CD_B$ és hasonló összefüggések igazak a BC, CA középvonalakra és a D_BD_C ill. D_CD_A oldalakra.
2. lépés Képzeljük el, hogy az ABC, ABD_C, BCD_A, CAD_B háromszögek egy $ABCD$ gúla kiterített hálóját alkotják.
3. lépés Hajtsuk fel az ABD_C, BCD_A, CAD_B oldallapokat (forgatás AB, BC, ill. CA körül), hogy a D_C, D_A, D_B pontok a tér valamely D pontjában egyesüljenek.
4. lépés A forgatás közben a forgó D_C pontnak az alapsíkon való vetülete az eredeti D_C pontból az AB-re bocsájtott merőleges egyenesen mozog. Mivel $AB \parallel D_AD_B$ így ez ez egyenes épp a $D_AD_BD_C$ háromszög D_C-ből induló magasságvonala. A többi csúcs is egy-egy magasságvonal felett forog.
5. lépés Ezek szerint a magasságvonalak mind átmennek a gúla D csúcsának a $D_AD_BD_C$ síkra való merőleges vetületén. Az állítást bizonyítottuk.

Helyes-e a bizonyítás?

14.15. *Gúlát felező sík*
Egy háromszögalapú gúla csúcsa A, az A-ból az alapra bocsájtott merőleges egyenes talppontja T (tehát AT a gúla testmagassága). Az AT szakasz M pontján át a gúla BCD alapsíkjával párhuzamos sík a gúla AB, AC, AD éleit rendre a B', C', D' pontokban metszi. Határozzuk meg az $\frac{AM}{AT}$ arány értékét, ha
a) $\frac{AB'}{AB} = \frac{1}{2}$; **b)** $\frac{T_{B'C'D'}}{T_{BCD}} = \frac{1}{2}$; **c)** $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}$.
d) $\frac{AB'}{AB} = \frac{1}{64}$; **e)** $\frac{T_{B'C'D'}}{T_{BCD}} = \frac{1}{64}$; **f)** $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{64}$.
g) Értelmezzük és válaszoljuk meg az a)-f) kérdéssel analóg problémákat négyszögalapú gúla esetén!

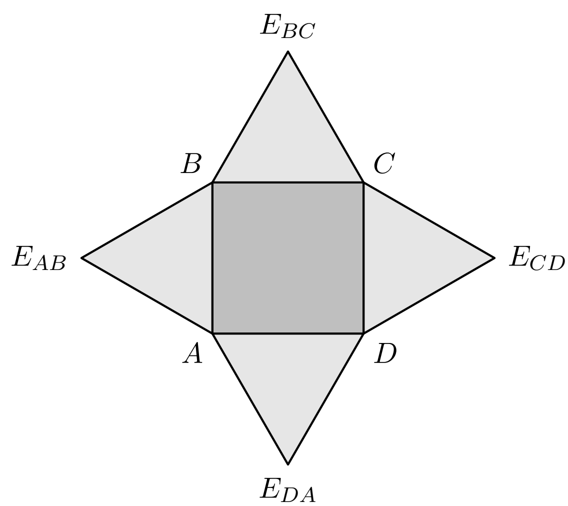
14.16. Az 1. ábrán egy szabályos négyoldalú gúla kiterített hálóját láthatjuk. A gúla oldallapjain felvettük bizonyos pontokat és vonalakat. Ha az oldallapokat felhajtjuk, hogy igazi gúlává álljanak össze, akkor ezek a vonalak és pontok kikerülnek a térbe. Szerkesszük meg ezen térbeli vonalak és pontok alapsíkon való merőleges vetületét egy megfelelően nagyított ábrán.

Az ABE oldallapon két súlyvonalat, a BCE oldalon egy középvonalat, a CDE oldallapon egy-egy C-ből ill. D-ből induló és a szemköztes oldalélig futó szakaszt rajzoltunk be, míg DAE-n egy tetszőleges pontot vettünk fel.



14.16.1. ábra.

14.17. Az 1. ábrán egy szabályos négyoldalú gúla kiterített hálóját láthatjuk. Bele szeretnénk rakni egy kockát a gúlába úgy, hogy a kocka egyik lapja a gúla alapján feküdjön, a kocka szemközti lapjának csúcsai pedig a gúla oldaléleire illeszkedjenek. Szerkesszük meg a kocka alapsíkra illeszkedő csúcsait egy megfelelően nagyított ábrán!



14.17.1. ábra.

14.18. Adott egy szabályos tetraéder éle. Szerkesszük meg a gúla
a) testmagasságát;
b) körülít gömbjének sugarát;
c) beírt gömbjének sugarát;
d) éleit érintő gömbjének sugarát!

14.19. Adott egy szabályos háromoldalú gúla alapéle és oldaléle. Szerkesszük meg a gúla
a) testmagasságát;
b) körülít gömbjének sugarát;
c) beírt gömbjének sugarát;
d) éleit érintő gömbjének sugarát!

14.20. Adott egy szabályos négyoldalú gúla alapéle és oldaléle. Szerkesszük meg a gúla
a) testmagasságát;

b) körülít gömbjének sugarát;
c) beírt gömbjének sugarát;
d) éleit érintő gömbjének sugarát!

14.21. A gizai Kheopsz piramis közelítőleg olyan négyzet alapú gúla alakú, melynek magassága 146,6 méter, alapéle pedig 230,6 méter. Határozzuk meg a piramis
a) oldalélének hosszát;
b) térfogatát!

14.22. Egy szabályos tatraéder élének hossza 10 cm. Számítsuk ki a gúla
a) testmagasságát;
b) térfogatát;
c) körülít gömbjének sugarát;
d) beírt gömbjének sugarát;
e) éleit érintő gömbjének sugarát!

14.23. Egy szabályos háromoldalú gúla alapélének hossza 10 cm, míg az oldaléle 13 cm-es. Számítsuk ki a gúla
a) testmagasságát;
b) térfogatát;
c) körülít gömbjének sugarát;
d) beírt gömbjének sugarát;
e) éleit érintő gömbjének sugarát!

14.24. Egy szabályos négyoldalú gúla alapélének hossza 10 cm, míg az oldaléle 13 cm-es. Számítsuk ki a gúla
a) testmagasságát;
b) térfogatát;
c) körülít gömbjének sugarát;
d) beírt gömbjének sugarát;
e) éleit érintő gömbjének sugarát!

14.25. Határozzuk meg a szabályos tatraéder élének hosszát, ha tudjuk, hogy a tetraéder
a) testmagassága
b) körülít gömbjének sugara;
c) beírt gömbjének sugara;
d) éleit érintő gömbjének sugara
10 cm hosszú!

14.26. Határozzuk meg az 1000 cm^3 térfogatú szabályos tatraéder élének hosszát!

15. FEJEZET
Gúla (teszt)

15.1. (M)
Hány igaz állítás van az alábbiak között?

– A tetraéder bármelyik éle rövidebb bármelyik két másik él hosszának összegénél.

– A tetraéder bármelyik éle rövidebb valamelyik két másik él hosszának összegénél.

– A tetraéder bármelyik lapjának területe kisebb, mint a másik három lap területének összege.

– A tetraéder bármelyik lapjának területe kisebb, mint valamelyik másik két területének összege.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

15.2. (M)
Az $ABCDE$ gúla alapja az $ABCD$ téglalap, melynek oldalai: $AB = CD = 8$ cm, $BC = DA = 5$ cm. Adott még a gúla három oldalélének hossza: $AE = 4$ cm, $CE = 6$ cm, $DE = 7$ cm. Szerkesszünk a BE éllel egyenlő hosszú szakaszt! Milyen hosszú a BE él (cm-ben)?
A) $\overline{BE} < 4{,}5$ **B)** $4{,}5 \le \overline{BE} < 5{,}1$ **C)** $5{,}1 \le \overline{BE} < 5{,}7$
D) $5{,}7 \le \overline{BE} < 6{,}3$ **E)** $6{,}3 \le \overline{BE}$

15.3. (M) Adott egy négyszögalapú gúla. Három, a gúla alapjával párhuzamos síkot vizsgálunk:

– Σ_V a gúlát két egyenlő térfogatú részre osztja;

– Σ_T a gúlát egy olyan síkidomban metszi, amely feleakkora területű, mint a gúla alapja;

– Σ_E a gúla egyik oldalélét két egyenlő részre osztja;

Milyen sorrendben következnek ezek a síkok a gúla csúcsától az alaőja felé?
A) $\Sigma_E, \Sigma_T, \Sigma_V$ **B)** $\Sigma_V, \Sigma_T, \Sigma_E$
C) más sorrend **D)** van köztük egybeeső sík
E) függ a gúla alakjától

15.4. (M) Határozzuk meg annak a szabályos tetraédernek a V térfogatát cm^3-ben, amelynek mindegyik éle 12 cm hosszú! Melyik reláció teljesül?
A) $V < 150$ **B)** $150 \le V < 200$ **C)** $200 \le V < 250$ **D)** $250 \le V < 300$
E) $300 \le V$

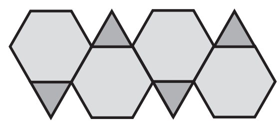
15.5. (M) Egy szabályos négyoldalú gúla testmagassága 24 cm, míg az oldaléle 25 cm-es. Melyik egyenlőtlenség teljesül a gúla alapjának cm^2-ben mért T területére?
A) $T < 20$ **B)** $20 \le T < 50$ **C)** $50 \le T < 90$ **D)** $90 \le T < 140$
E) $140 \le T$

16. FEJEZET
Poliéder

A feladatokhoz segédeszköznek ajánljuk a Polydron[17] készletet.

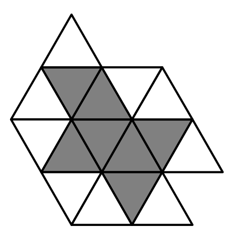
16.1. Testháló

16.1. (M) az 1. ábrán egy kiterített poliéder, azaz egy poliéder *háló*ja látható. Hány éle és hány csúcsa van ennek a poliédernek?



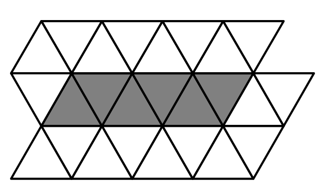
16.1.1. ábra.

16.2. (M) Az 1. ábra sötétszürke háromszögei egy oktaéder hálóját alkotják. Az egyik háromszög azonban még hiányzik. Melyik fehér háromszöggel egészíthetjük ki a hálót? Hány megoldás van?



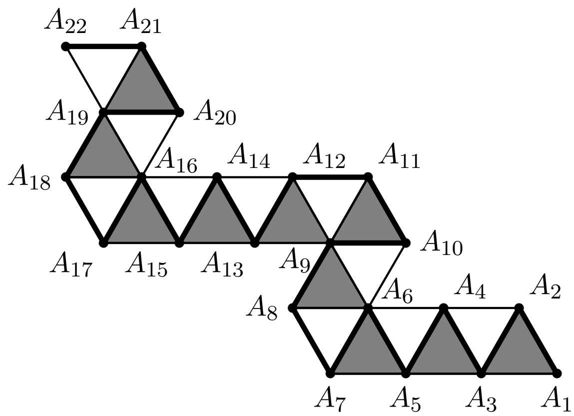
16.2.1. ábra.

16.3. (M) Az 1. ábra sötétszürke háromszögei egy oktaéder hálóját alkotják. Két háromszög azonban még hiányzik. Melyik két fehér háromszöggel kell kiegészítenünk a hálót? Hány megoldás van?



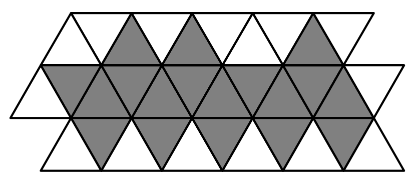
16.3.1. ábra.

16.4. (M) Az 1. ábrán egy „ikozaéder-kígyó” látható. A 20 háromszöglapból álló lánc egy szabályos poliéderré hajtogatható össze, amelynek minden csúcsában öt egybevágó szabályos háromszög találkozik. Az ikozaédernek csak 12 csúcsa van, míg a kígyónak 22. Melyik „kígyócsúcs” melyik másikkal ragad össze, mikor a kígyóból ikozaédert hajtogatunk?



16.4.1. ábra.

16.5. (M) Az 1. ábra sötétszürke háromszögei egy oktaéder hálóját alkotják. Két háromszög azonban még hiányzik. Melyik két fehér háromszöggel kell kiegészítenünk a hálót? Hány megoldás van?



16.5.1. ábra.

16.2. Dualitás

16.1. (M) Adott egy kocka. A kocka lapjainak középpontjai egy másik poliéder csúcsai. A poliéder két csúcsát él köti össze, ha a kocka megfelelő lapjai élben szomszédosak. Ezt a poliéder a kocka *duálisa*).

a) Hány csúcsa, lapja és éle van a kocka duálisának?

b) Hanyadrésze a kockába így beírt poliéder térfogata a a kockáénak?

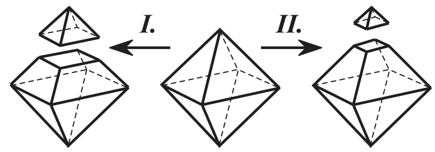
c) Készítsünk a kocka duálisából a fent leírt módon újabb poliédert! Ez lesz a kocka duálisának duálisa.Tehát legyenek az új csúcsok előbb kapott poliéderünk lapjainak középpontjai és kössük össze éllel azoknak a lapoknak a középpontját, amelyek élben szomszédosak voltak. Így milyen poliéderhez jutunk?

d) Hanyadrésze a kocka duálisába beírt poliéder térfogata a kocka duálisának?

16.3. Csonkolás

16.1. A tömör oktaéder minden egyes csúcsánál, a csúcsból induló mind a négy élbe belevágva levágunk az oktaéderből egy-egy kis négyzet alapú gúlát, úgy, hogy a megmaradt test minden éle egyenlő legyen.

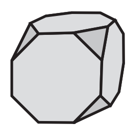
Ha az éleket a felezőpontjuknál vágjuk el (az 1. ábrán I. vágás), akkor a *kuboktaéder* (cuboctahedron) nevezetű testhez jutunk, míg ha ennél kisebb gúlákat vágunk le, akkor a *csonkolt oktaéder*t (truncated octahedrod) kapjuk. Mindkét test lapjai szabályos sokszögek.



16.1.1. ábra.

a) Milyen (hány oldalú) szabályos sokszögek alkotják a kuboktaédert illetve a csonkolt oktaédert?
b) Melyik típusú lapból hány van az egyik illetve a másik testen?
c) Hány éle és csúcsa van az egyes poliédereknek?
d) Szerkesszük meg a kuboktaéder és a csonkolt oktaéder kiterített hálóját!
e) Készítsük is el a testeket!
f) Ha egységnyi térfogatú oktaéderből indulunk ki, akkor mekkora térfogatú kuboktaédert kapunk? Próbáljuk meg kiszámolni a kapott csonkolt oktaéder térfogatát!

16.2. A kocka minden egyes csúcsánál levágunk a kockából egy háromszög alapú gúlát úgy, hogy a kocka lapjaiból egy-egy szabályos hatszög maradjon meg (lásd az 1. ábrát). Az így kapott testet *csonkolt kocká*nak nevezik.



16.2.1. ábra.

a) Hány csúcsa, éle és lapja van a csonkolt kockának?
b) Igaz-e, hogy a levágott gúlák szabályos tetraéderek?
c) Szerkesszük meg a csonkolt kocka kiterített hálóját!
d) Készítsük el a csonkolt kockát!
e) Hányad része a csonkolt kocka térfogata annak a kockáénak, amelyikből csonkoltuk?

16.4. Leszámlálási feladatok

16.1. (M) Próbáljuk meg kitalálni a poliéder éleinek és csúcsainak számát, ha lapjainak száma az alábbi táblázatban megadott érték, és tudjuk, hogy minden lapja szabályos háromszög!

Először fejben számoljunk és töltsük ki a táblázatot, utána készítsük el a poliédereket. Melyik esetben van több megoldás?

Lapok száma	Élek száma	Csúcsok száma
6		
7		
8		
9		

16.2. A híres professzor érdekes állításokat fogalmazott meg a sokszöglapú testekről:

Butusz Maximusz poliédertétele
Ha egy poliéder lapjai l_1, l_2, $\dots l_L$ oldalúak (L a poliéder lapjainak száma), akkor a poliéder éleinek száma
$$E = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_L}{2},$$

míg a csúcsok száma

$$C = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_L}{3}.$$

Helyes-e a professzor két formulája? Próbáljuk igazolni vagy cáfolni!

16.3. Egy poliéder minden lapja háromszög és minden csúcsánál öt háromszög találkozik. Legyen a lapok száma L.

a) Fejezzük ki az élek számát L-lel!
b) Fejezzük ki a csúcsok számát L-lel!
c) Igazoljuk, hogy $10|L$.
d) Készítsük el a poliédert! Mennyi L értéke?

16.4. *Vetélkedő*
Készítsünk minél többféle

a) hét-, **b)** nyolc-

lapú poliédert. Írjuk fel csúcsaik, éleik, lapjaik számát!

16.5. (M) Az alábbi adatokból melyikhez létezik poliéder?

	Lapok száma	Élek száma	Csúcsok száma
a)	7	10	5
b)	7	11	5

16.6. Készítsünk a megadott feltételeknek megfelelő poliédert! Keressünk több megoldást! Töltsük ki a táblázat hiányosságait! Adjunk föl hasonló rejtvényt a többieknek!

Lapok száma	Élek száma	Csúcsok száma
5		
6		
$10 = 8\triangle + 2\square$		

16.7. (M) [8] Négylapú poliéderből egyféle van, a tetraéder. Négy háromszög lapja van, négy csúcsa, melyeknél három-három lap találkozik és összesen hat éle. Természetesen sok különböző alakú tetraéder van, a lapok és az élek nagysága, egymással bezárt szöge különböző lehet, de ebben a feladatban ezektől eltekintünk. „Topológiai” nézőpontból csak az számít, hogy hány lap, él és csúcs van és ezek közül melyik melyikhez kapcsolódik.

a) Topológiai nézőpontból hány különböző ötlapú poliéder létezik?
b) Soroljunk fel minél több topológiai értelemben különböző hatlapú poliédert!

16.8. Keressünk összefüggést az eddig összegyűjtött adatok alapján (lásd a 16.1., 16.4., 16.6. feladatokat) a poliéderek lapjainak, éleinek és csúcsainak száma között!

16.9. Készítsünk szabályos poliédereket!
A poliéder legyen konvex, lapjai legyenek egymással egybevágó szabályos sokszögek és minden csúcsban ugyanannyi lap fusson össze.

16.10. Feltételezzük, hogy a konvex poliéder lapjai

a) háromszögek, **b)** négyszögek, **c)** ötszögek, **d)** hatszögek,
e) hétszögek.

Hány ilyen sokszög találkozhat egy csúcsnál? Adjuk meg az összes lehetőséget!

16.11. a) Számítsuk ki, hogy hány lapja, éle, csúcsa van az egyes szabályos poliédereknek (használható az Euler-féle poliéder-tétel)

b) Készítsük is el őket! Adataikat gyűjtsük össze a 16.1. 16.6. feladatokban látott táblázatba!

c) A táblázat alapján megfigyelhető-e „rokonság” a szabályos poliéderek között?

16.5. A poliédertétel bizonyítása és alkalmazásai

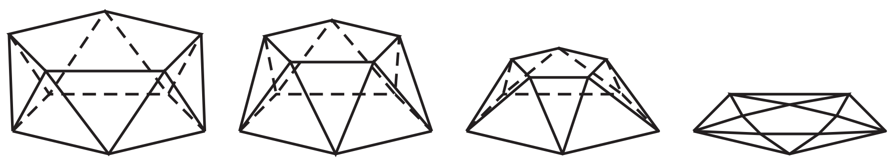
16.1. (M) [5] *A Descartes-féle szögösszeg és a poliédertétel*

Legyen egy poliéder csúcsainak, éleinek, lapjainak száma rendre C, E és L, míg jelölje $\Sigma_\angle$ a poliéder összes oldallapja összes belső szögének összegét! Tegyük fel, hogy a háromszöglapok, a négyszöglapok, ..., a k-szöglapok száma rendre L_3, L_4, ..., L_k ($L_3 + L_4 + \ldots + L_k = L$).

a) Fejezzük ki L_3, L_4, ..., L_k segítségével $\Sigma_\angle$ értékét!

b) Fejezzük ki L_3, L_4, ..., L_k segítségével E értékét!

c) Fejezzük ki E és L segítségével $\Sigma_\angle$ értékét!



16.1.1. ábra.

d) Mutassuk meg, hogy $\Sigma_\angle$ értéke nem változik, ha a poliédert úgy deformáljuk (lásd az 1. ábrát), hogy minden lapja ugyanannyi oldalú maradjon, mint eredetileg volt!

e) „Nyomjuk rá” a poliédert az egyik oldallapjára (1. ábra utolsó képe)! Igazoljuk, hogy $\Sigma_\angle$ értéke egyenlő a bennfoglaló sokszög(1. ábra utolsó képén a külső ötszög) belső szögeinek és a sokszöget felosztó összes ki sokszög szögeinek összegével!

f) Legyen a bennfoglaló sokszög csúcsainak száma C_B. Fejezzük ki C és C_B segítségével $\Sigma_\angle$ értékét! Mutassuk meg, hogy az így kapott kifejezésből összevonás után kiesik C_B.

g) Bizonyítsuk be Euler poliéder-tételét!

16.2. (M) A focilabdát szabályos hatszög és szabályos ötszög alakú bőrlapokból varrják össze. Minden „csúcsnál” két hatszöglap és egy ötszöglap találkozik. Jelölje a teljes poliéder ötszöglapjainak számát L_5, a hatszöglapokét L_6.

a) Fejezzük ki a poliéder csúcsainak C számát L_5 segítségével!

b) Fejezzük ki C-t L_6 segítségével!

c) Fejezzük ki a poliéder éleinek E számát L_5 és L_6 segítségével!

d) Írjuk fel Euler poliédertételét és határozzuk meg az L_5, L_6, C, E mennyiségeket!

e) Készítsük el a poliédert!

16.3. (MS) Képzeljük el azt a konvex poliédert, amelynek minden éle egységnyi hosszú, minden lapja szabályos sokszög és a poliéder minden csúcsa egyforma (egybevágó egymással). Bármelyik csúcsot körbejárva rendre az alábbi sokszögekkel találkozunk:

a) négyzet, háromszög, négyzet, háromszög.

b) négyzet, háromszög, négyzet, négyzet.

Fejezzük ki a poliéder négyzet és háromszöglapjainak számát, valamint a poliéder éleinek és csúcsainak számát!

c) Készítsük el a poliédereket!

16.6. Félig szabályos parketták és poliéderek

16.1. (MS) Mely n_1, n_2 és n_3 esetén lehet egy-egy szabályos n_1-szöget, szabályos n_2-szöget és egy szabályos n_3-szöget egy közös csúcsuknál egymás mellé helyezni a síkban úgy, hogy ne fedjék egymást, de ne is maradjon a csúcs mellett szabadon hely?

a) Írjunk fel egyenletet az n_1,n_2, n_3 számokra!

b) Keressük meg az egyenlet összes megoldását!

c) A fenti megoldások közül melyik terjeszthető úgy tovább, hogy az egyenlő oldalhosszúságú szabályos sokszögek kiparkettázzák a teljes síkot és mindegyik sokszög mindegyik csúcsánál összesen 3 szabályos sokszög találkozzék, mindenütt egymással egybevágó elrendezésben?

16.2. (M)

a) Mely n_1, n_2, n_3 és n_4 esetén lehet egy-egy szabályos n_1-szöget, szabályos n_2-szöget, szabályos n_3-szöget és egy szabályos n_4-szöget egy közös csúcsuknál egymás mellé helyezni a síkban úgy, hogy ne fedjék egymást, de ne is maradjon a csúcs mellett szabadon hely?

b) A fenti megoldások közül melyik terjeszthető úgy tovább, hogy az egyenlő oldalhosszúságú szabályos sokszögek kiparkettázzák a teljes síkot és mindegyik sokszög mindegyik csúcsánál összesen 4 szabályos sokszög találkozzék, mindenütt egymással egybevágó elrendezésben?

c) Folytassuk a fenti a)-b) feladatokat, illetve a 16.1 példát! Lehet-e öt, hat vagy annál több szabályos sokszöget egymás mellé illeszteni, hogy épp lefedjenek egy teljes szöget? Mely esetkhez tartozik parkettázás?

16.3. Olyan konvex poliédert szeretnénk készíteni, amelynek mindegyik lapja egységnyi oldalú szabályos sokszög és mindegyik csúcsánál ugyanolyan sokszöglapok találkoznak.

a) Először keressünk olyan poliédereket, amelyek csúcsainál három lap találkozik, egy-egy szabályos n_1-, n_2- és n_3-szög. Mely n_1, n_2, n_3 számhármas esetén lehetséges ez?

b) Mely $k > 3$ esetén lehetséges, hogy minden csúcsnál k lap találkozzék? Mely szabályos n_1-, n_2-, $\ldots$, n_k- sokszögek alkotnak ilyen poliédert?

17. FEJEZET

Poliéderek (teszt)

17.1. (M) A *nagy rombikozaéder* 30 négyzetlapból, 20 szabályos hatszöglapból és 12 szabályos tízszöglapból áll. Más lapja nincs. Minden csúcsánál három lap találkozik, mind a három fajta sokszögből egy-egy-egy.

A nagy rombikozaéder éleinek E száma mely értékek közés esik?

A) $E < 120$ **B)** $120 \leq E < 145$ **C)** $145 \leq E < 170$ **D)** $170 \leq E < 195$ **E)** $195 \leq E$

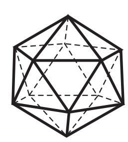
17.2. (M) A nagy rombikozaéder (lásd a 17.1. feladatot) csúcsainak C száma mely értékek közés esik?

A) $C < 120$ **B)** $120 \leq C < 145$ **C)** $145 \leq C < 170$ **D)** $170 \leq C < 195$ **E)** $195 \leq C$

17.3. (M) A kocka minden egyes csúcsánál levágunk a kockából egy háromszög alapú gúlát úgy, hogy a metsző sík átmenjen a csúcsból induló három él felezőpontján. Hány csúcsa, éle és lapja van az így kapott testnek? E három szám n összege melyik értékek közé esik?

A) $n < 30$ **B)** $30 \leq n < 40$ **C)** $40 \leq n < 50$ **D)** $50 \leq n < 60$ **E)** $60 \leq n$

17.4. (M) Melyik poliéder az 1. ábrán látható test duálisa?



17.4.1. ábra.

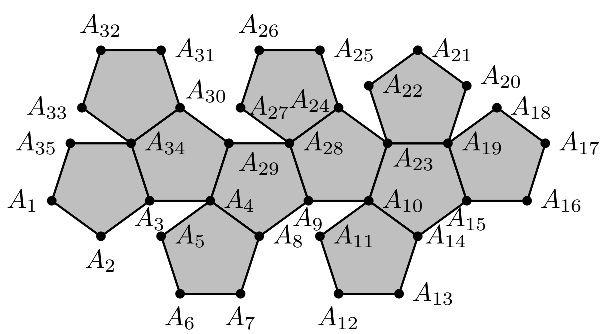
A) tetraéder **B)** kocka **C)** oktaéder **D)** dodekaéder **E)** ikozaéder

17.5. (M) Az 1. ábrán egy dodekaéder (tizenkét ötszögből álló szabályos test kiterített palástjából 11 ötszög látható. Melyik élhez csatlakozhat a tizenkettedik ötszög? Alább tizenkét élpárt adunk meg, válasszuk ki azt a párt, amelyikből az egyik jó, a másik nem megfelelő!

A) $A_{20}A_{21}$, $A_{25}A_{26}$ **B)** $A_{17}A_{18}$, $A_{31}A_{32}$ **C)** $A_{13}A_{14}$, $A_{15}A_{16}$ **D)** A_1A_2, $A_{14}A_{15}$ **E)** A_6A_7, $A_{12}A_{13}$

17.6. (M) Képzeljük el azt a konvex poliédert, amelynek minden éle egységnyi hosszú, minden lapja szabályos sokszög és a poliéder minden csúcsa egyforma (egybevágó egymással). Bármelyik csúcsnál egy ötszög és négy háromszög találkozik egymással. Határozzuk meg az így kapott test éleinek E számát!

A) $30 \leq E < 60$ **B)** $60 \leq E < 90$ **C)** $90 \leq E < 120$ **D)** $120 \leq E < 150$ **E)** $150 \leq E$


A_{32}
A_{31}
A_{26}
A_{25}
A_{21}
A_{20}
A_{22}
A_{30}
A_{33}
A_{27}
A_{24}
A_{18}
A_{35}
A_{34}
A_{28}
A_{19}
A_{17}
A_{29}
A_{23}
A_1
A_4
A_{10}
A_{16}
A_3
A_9
A_{15}
A_5
A_8
A_{11}
A_{14}
A_2
A_{13}
A_6
A_7
A_{12}

17.5.1. ábra.

18. FEJEZET
Vegyes feladatok

18.1. Az $ABCD$ téglalap belsejében úgy helyezkednek el a k_u, k_v körök, hogy k_u érinti az AB, BC, CD oldalakat, míg k_v érinti a CD, DA, AB oldalakat. A két kör középpontját összekötős szakasz az egyik kört a P, a másik kört a Q pontban metszi.

a) Készítsünk vázlatot!

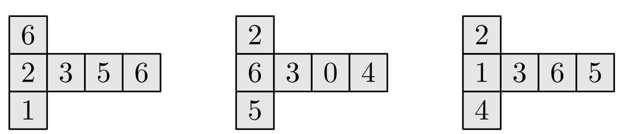
b) Határozzuk meg a PQ szakasz hosszát, ha tudjuk, hogy a két kör sugara 3 cm és a téglalap kerülete 32 cm!

c) Határozzuk meg a PQ szakasz hosszát, ha tudjuk, hogy a két kör sugara 3 cm és a téglalap területe 69 cm^2!

d) A b)-c) kérdések közül melyikre adható válasz, ha az $ABCD$ négyszögről csak annyit tudunk, hogy paralelogramma?

18.2. Ketten játszanak. Egy kockát kell eljuttatni a startról a célba. A kezdő a kockát tetszőleges helyzetben a startra állítja. Ezután a következő játékos egy él körüli 90°-os elfordítással gördítheti a kockát egy szomszédos mezőre. (Legfeljebb négy ilyen van.) A gördítés előtt szabad forgatni a kockát a táblára merőleges tengely körül. Az nyer, aki a célba gördíti a kockát úgy, hogy a hatos van felül. Elemezzük a játékot különböző hosszúságú pályákon!

18.3. Az 1. ábrán látható hálókból kockákat állítunk össze. A kapott három kockát egymás tetejére rakva négyzetes oszlopot építünk. Ennek négy oldalán felülről lefelé olvasva a számjegyeket, egy-egy háromjegyű számot kapunk. A kapott számokat összeadjuk. Legfeljebb mekkora lehet az összeg?



18.3.1. ábra.

18.4. (M) Kockákat ragaszthatunk egy vízszintes lapra és oldallapjaik mentén egymáshoz. Minimum hány kockára van szükség, hogy az 1. ábrán látható oldalnézetet és elölnézetet kapjuk?

oldalnézet elölnézet

18.4.1. ábra.

18.5. (M)

a) Legfeljebb hány bástya helyezhető el a térbeli $3 \times 3 \times 3$-as „sakktáblán” úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást (azaz semelyik kettő se legyen egy – a kocka valamelyik oldalélével párhuzamos – egyenesen)?

b) Hányféle maximális elhelyezés van?

18.6. Hány olyan téglatest van, amelynek térfogata 2007 cm^3 és

a) oldalélei cm-ben mérve egész számok?

b) mindegyik oldallapjának területe cm^2-ben mérve egész szám?

18.7. Egy háromszögről annyit tudunk, hogy egyik szöge 30°-os, és valamelyik

a) magasságvonala; **b)** szögfelezője

két olyan háromszögre osztja, amelyek közt van az eredeti háromszöghöz hasonló is. Mekkorák lehetnek a háromszög szögei? Adjuk meg az összes lehetőséget!

18.8. 27 egységkockából összeraktunk egy $3 \times 3 \times 3$-as kockát. Legfeljebb hány kis kockát lehet elvenni az építményből úgy, hogy a maradék olyan összefüggő test legyen, amelynek felszíne nem kisebb a nagy kocka felszínénél? Összefüggőségen lapösszefüggést értünk, vagyis hogy a maradék testben bármely kiskockától bármelyik másikig eljuthatunk lapszomszédos kockákon keresztül.

18.9. Egy egér rágcsál egy 3 egység oldalú, kocka alakú sajtot, amely 27 egységkockából van összerakva. Amikor egy egységkocka sajtot megevett, átmegy a szomszédos, vele közös lappal rendelkező egységkockába és azt eszi. Előfordulhat-e, hogy az egér a középső kocka kivételével a többi 26 egységkockát megeszi?

18.10. [2] **a)** Egységnyi élű kockákból egységnyi alapélű négyzetes oszlopokat készítünk, melyeknek a felszíne egy egységnyi élű kocka felszínének egész számú többszöröse. Hányféle ilyen négyzetes oszlop készíthető, ha legfeljebb 1997 darab egységnyi élű kocka áll rendelkezésünkre egy négyzetes oszlop előállításához?

A fenti típusú négyzetes oszlopok közül három darab alkot egy készletet. Hányféle készlet építhető, ha összesen legfeljebb 1997 darab egységnyi élű kocka áll a rendelkezésünkre és

b) a készlet elemei között lehet egyforma is;

c) a készlet elemei mind különbözőek.

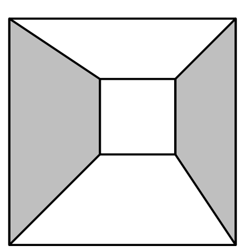
18.11. [12] Egy országnak az Északi féltekén nagyobb a területe, mint a Délin és a Nyugatin nagyobb, mint a Keletin. Következik-e ebből, hogy

a) Az Északnyugati rész a legnagyobb?

b) A Délkeleti rész a legkisebb?

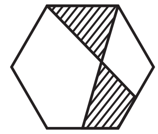
c) Az Északnyugati rész nagyobb, mint a Délkeleti?

18.12. Egy négyzet belsejébe egy kisebb négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a két négyzet megfelelő oldalai párhuzamosak. Ezután összekötöttük a két négyzet csúcsait az 1. ábrán látható módon. Mutassuk meg, hogy a két satírozott trapéz területének összege megegyezik a satírozatlan trapézok területösszegével!



18.12.1. ábra.

18.13. (M) Szabályos hatszögben egy-egy csúcsot összekötöttünk a szemköztes oldalak felezőpontjával (lásd az 1. ábrát). Melyik satírozott alakzat területe nagyobb, a négyszögé vagy a háromszögé?



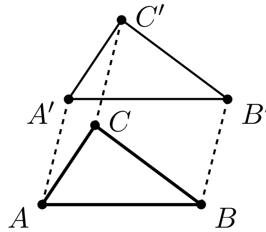
18.13.1. ábra.

18.14. [9]

a) Igazoljuk a 3. században Alexandriában élt Pappus alábbi tételét:

ha a háromszöget a síkban eltoljuk, a háromszög két oldala által súrolt paralelogrammák területének összege egyenlő lesz a harmadik oldal által súrolt paralelogramma területével.

Az 1. ábrán pl az $ABB'A'$ paralelogramma területe megegyezik a $CBB'C'$, $ACC'A'$ paralelogrammák területének összegével.

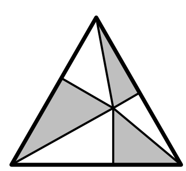


18.14.1. ábra.

b) Igazoljuk Pappus tételének segítségével a Pitagórasz tételt!

18.15. Egy téglalap oldalai 18 és 8 egység. Bontsuk fel a téglalapot egyenes szakaszokkal két részre úgy, hogy a kapott részekből négyzetet lehessen összeállítani!

18.16. Az 1. ábrán egy szabályos háromszög látható, amelynek egy belső pontjából merőlegest állítottunk mindhárom oldalra, és a pontot összekötöttük a háromszög csúcsaival. Bizonyítsuk be, hogy a satírozott háromszögek területének összege megegyezik a satírozatlan háromszögek összterületével!



18.16.1. ábra.

18.17. Az ABC háromszögben $ACB\angle = 90°$, $BAC\angle = 15°$ és $AB = 12$ cm. Határozzuk meg a háromszög területét!

18.18. Egy paralelogramma oldalai 11 és 13 cm hosszúak, területe 132 cm^2. Határozzuk meg a paralelogramma hosszabbik átlójának hosszát!

18.19. [3] Egy konvex négyszöget átlói négy olyan háromszögre bontanak, amelyek területei (cm^2-ben mérve) egymástól különböző 1-nél nagyobb egész számok. Egyikük területe épp

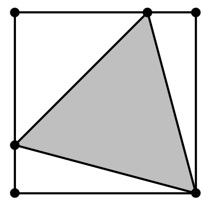
a) 13 cm^2; **b)** 14 cm^2.

Biztosak lehetünk-e benne, hogy ez a háromszög a legkisebb területű a négy közül?

18.20. (MS) Határozzuk meg az átfogó és a hozzá tartozó magasság arányát abban a derékszögű háéromszögben, amelynek egyik szöge 15°!

18.21. (M)

a) Adott négyzetbe szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, melynek egyik csúcsa megegyezik a négyzet egyik csúcsával, míg a négyzet nem ebben a csúcsban végződő oldalaira illeszkedik a szabályos háromszög másik két csúcsa (lásd az 1. ábrát).



18.21.1. ábra.

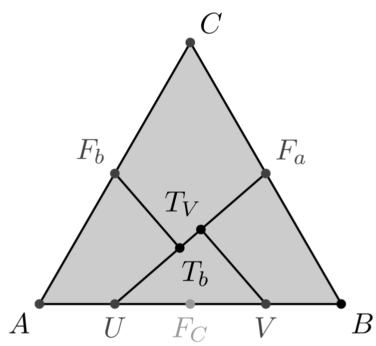
b) Határozzuk meg a szabályos háromszög oldalának hosszát, ha a kiindulásul vett négyzet egységnyi oldalú!

18.22. Egy adott AB szakasz hosszát jelölje d. B-n át húzunk e egyenest, és B-ből felmérjük rá a d távolságot. Így megkapjuk a C pontot. C-n át párhuzamost húzunk AB-vel, és C-ből felmérjük rá d-t. Így kapjuk a D pontot. A szerkesztést megismételjük minden (AB-től különböző) e egyenesre. Mi a BD szakaszok F felezőpontjának a halmaza?

18.23. [15] Berajzoltuk egy kör néhány (véges sok) húrját úgy, hogy mindegyik húr átmenjen valamelyik másik húr felezőpontján. Bizonyítsuk be, hogy ez csak úgy lehetséges, hogy mindegyik húr átmérő!

18.24. [19] Van-e két olyan konvex négyszög, amelyek bármelyikének bármelyik oldala rajta van a másik négyszög valamelyik oldalának felezőmerőlegesén?

18.25. Az ABC szabályos háromszög oldalai 16 cm hosszúak. Az AB, BC, CA oldalak felezőpontja rendre F_c, F_a, F_b, az AF_c, F_cB szakaszok felezőpontjai U és V. Az F_b, V pontok merőleges vetülete az UF_A szakaszon T_b és T_V (lásd az 1. ábrát).

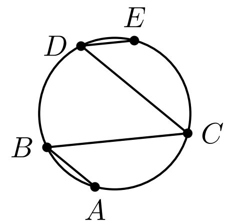


18.25.1. ábra.

Igaz-e, hogy ha az ABC háromszöget feldaraboljuk az UF_a, F_bT_b, VT_V szakaszokkal, akkor a kapott négy darabból négyzet állítható össze?

18.26. [15] Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AC átfogóján úgy vettük fel az M és K pontokat, hogy K az M és C közé essék és, hogy az $MBK\angle$ 45°-os legyen. Bizonyítsuk be, hogy $MK^2 = AM^2 + KC^2$!

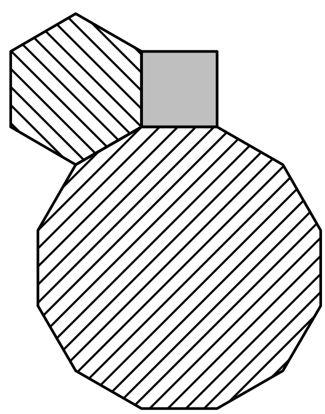
18.27. [15] Az $ABCDE$ töröttvonal minden csúcsa illeszkedik egy előre adott körre. Az ABC, BCD és CDE szögek mind 45°-osak (lásd az 1. ábrát). Bizonyítsuk be, hogy $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$!



18.27.1. ábra.

18.28. Egy háromszög beírt körének az oldalakkal való érintési pontjain át párhuzamost húztunk a szemközti szög szögfelezőjével. Mutassuk meg, hogy az így kapott három egyenes egy ponton megy át!

18.29. Egy-egy egységnyi oldalú négyzet, szabályos hatszög és szabályos tizenkétszög elhelyezhető egymás mellé úgy, hogy egy csúcsuknál összeérjenek és körülötte átfedés és hézag nélkül lefedjék a sík csúcs körüli tartományát, egy fél egységnyi sugarú körlapot.



18.29.1. ábra.

Mely három különböző oldalszámú szabályos sokszöggel tehető meg még ugyanez? Adjuk meg az összes megoldást!

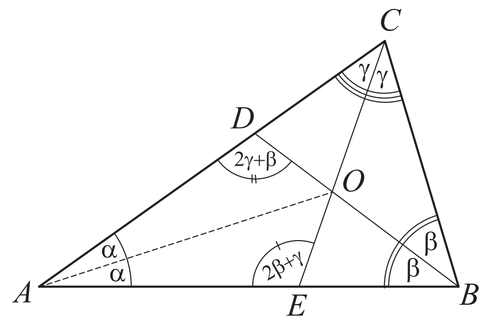
18.30. [22] A Nagy Szerkesztő feljegyzései között találtam a következőt:

„Ügyes módszert találtam ki, hogyan lehet megszerkeszteni egy tetszőleges háromszög kerületének bármely pontján át a háromszög területét felező egyenest. A szerkesztés menete a következő:”

Sajnos a következő oldalra ráborult a tintásüveg, így olvashatatlanná vált. Találjuk ki mi lehetett a módszer!

18.31. Butusz Maximusz professzor nevezetes felfedezése az alábbi tétel:

Szögfeleződarabok tétele *Ha egy háromszögben két belső szögfelezőnek a beírt kör középpontjától az oldalig terjedő része (az ábrán OE és OD) egyenlő egymással, akkor a háromszög egyenlő szárú.*



18.31.1. ábra.

Bizonyítás:

I. Jelölje az ABC háromszög B-ből induló belső szögfelezőjének az AC oldallal való metszéspontját D, a C-ből induló belső szögfelező és AB metszéspontját E, a két szögfelező közös pontját, azaz a beírt kör középpontját O, az ABC háromszög belső szögeinek felét α, β, γ!

II. Az ABC háromszög szögeinek összege:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ. \tag{1}$$

Az ADB háromszögben $DAB\angle = 2\alpha, DBA\angle = 2\beta$, így (1) alapján $ADB\angle = 2\gamma + \beta$. Az AEC háromszögben ehhez hasonlóan $AEC\angle = 2\beta + \gamma$.

III. A háromszög belső szögfelezői egy ponton mennek át, így az AO szakasz is felezi az A-nál fekvő szöget: $OAE\angle = OAD\angle = \alpha$.

IV. Az AOE, AOD háromszögek egybevágóak, hiszen megegyezik bennük két oldal és egy szög: $OA = OA$, $OE = OD$ és $OAE\angle = OAD\angle = \alpha$.

V. Az egybevágóságnál D és E az egymásnak megfelelő csúcsok, így az itt fekvő belső szögek is egyenlők: $2\beta + \gamma = 2\gamma + \beta$, amiből $\beta = \gamma$.

VI. Ha $\beta = \gamma$, akkor $2\beta = 2\gamma$, azaz $ABC\angle = ACB\angle$, tehát a háromszög egyenlő szárú.

a) Helyes-e Butusz Maximusz bizonyítása?
b) Igaz-e a „Szögfeleződarabok tétele”?

18.32. Alább négyszögekre vonatkozó állításokat sorolunk föl:

a) A négyszög oldalfelezőpontjai egy körön vannak;
b) A négyszög átlói merőlegesek egymásra;
c) A négyszög két szemközti oldala négyzetének összege egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével;
d) A négyszög deltoid.

A négy állítás közül melyikből melyik másik következik?

Segítség, útmutatás

1. Szerkesztések I.

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

2. Mértani helyek I.

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Speciális síkidomok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

4. A Descartes koordinátarendszer

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

5. Szimmetriák, transzformációk

5.1. Először feledkezzünk meg arról, hogy a C pontnak c-re kell illeszkednie. Vegyünk fel öt próbapontot b-n: B_1, B_2, B_3, B_4 és B_5. Szerkesszük meg a hozzájuk tartozó C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 pontokat úgy, hogy AB_iC_i olyan egyenlő szárú háromszög legyen, amelyben a szárak szöge A-nál $60°$ (ill. α). Tegyünk megfigyelést a C_i pontok elhelyezkedésére vonatkozólag!

5.2. Hogyan tudnánk megszerkeszteni ugyanannak az oldalnak két különböző pontját? A szimmetriatengely illetve a szimmetriaközéppont segít.

5.11. Lásd az 5.5. feladatot!

5.12. Lásd az 5.1. feladatot!

6. Terület I.

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

7. Terület I. (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

8. Hasonlóság

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

9. Terület II.

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

10. Terület II. (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

11. Síkgeometriai számítások

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

12. Kockák

12.5. Be lehet.

13. Kockák (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

14. Gúla

14.1. Az egy élen található számok összege 30, ami a tetraéder hat élére összesen 180-at ad ki. Ez hogyan viszonyul az $1+2+3+\ldots+16$ összeghez?

15. Gúla (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

16. Poliéder

16.3. Lásd a 16.2. feladatot!

16.1. **a)** Fejezzük ki a szabályos n-szög belső szögeinek nagyságát!
b) Tegyük fel, hogy $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, és becsüljük n_1 értékét!

17. Poliéderek (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

18. Vegyes feladatok

18.20. Rajzoljuk meg a háromszög körülírt körének a csúcsokhoz menő sugarait, határozzuk meg ezek hosszát, az oldalakkal bezárt szögét!

Megoldások

1. Szerkesztések I.

1.1. *Elemzés*: A két adott ponttól (A és B) egyenlő távolságban lévő pontok mértani helye a síkban egy egyenes, a két pont felezőmerőlegese. Könnyen tudunk szerkeszteni olyan pontokat, amelyek egyforma messze vannak A-tól és B-től (alább Q_1 és Q_2) és ezek összekötő egyenesén lesz a felezőpont is.

Először megszerkesztjük ezt a felezőmerőlegest, mert erre később is szükségünk lehet:

Szerkesztés:
Eljárás neve: Felezőmerőleges
Bemenet: A pont és B pont
Kimenet: f egyenes
Lépések:
1. $k_A = \text{Körp}[A, B]$;
2. $k_B = \text{Körp}[B, A]$;
3. $\{Q_1, Q_2\} = \text{Mpont}[k_A, k_B]$;
4. $f = \text{Egy}[Q_1, Q_2]$;

Bizonyítás: A Q_1, Q_2 pontokat úgy szerkesztettük meg, hogy egyforma messze legyenek A-tól és B-től, nevezetesen AB távolságra. A felezőmerőleges egy egyenes, amelyet meghatároz két pontja, tehát tényleg a Q_1Q_2 egyenest kellett megszerkeszteni.
Diszkusszió: Q_1 és Q_2 a szerkesztésben valóban két különböző pont.
Jöjjön ezután e felezőpont!

Szerkesztés:
Eljárás neve: Felezőpont
Bemenet: A pont és B pont
Kimenet: F pont
Lépések:
1. $f = \text{Felezőmerőleges}[A, B]$;
2. $e = \text{Egy}[A, B]$;
3. $F = \text{Mpont}[e, f]$;

Bizonyítás: A felezőpont is egyenlő távolságra van A-tól és B-től, tehát az AB egyenesen és az A, B pontpár felezőmerőlegesén is rajta van, tehát azok metszéspontja.
Diszkusszió: Az A, B pontpár felezőmerőlegese és az AB egyenes nem is párhuzamosak nem is egybeesők tehát a szerkesztett pont létezik és egyértelmű.

1.2. *Szerkesztés*::
Eljárás neve: Kptükrözés
Bemenet: A pont (amit tükrözünk) és O pont (amire tükrözünk)
Kimenet: A' pont
Lépések:
1. $f = \text{Egy}[A, O]$;
2. $k = \text{Körp}[O, A]$;

3. $\{A, A'\} = \text{Mpont}[k, f]$;
Bizonyítás: $A' \neq A$, $A \in OA$ és $OA = OA'$, így A' valóban az A pont O-ra vonatkozó tükörképe.
Diszkusszió: Nincs speciális elrendeződés. Sőt, a kizárt $O = A$ esetben is jó az eljárás, de az Euklideszi szerkesztés követelményeit nem teljesíti.

1.3. *Elemzés*: Egyenlő szögeket egybevágó háromszögekkel tudunk csinálni. Az $A_0A_1A_2$ háromszöget „másoljuk" a B_1 ponthoz.
Szerkesztés::
Eljárás neve: Szögmásolás
Bemenet: A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 pontok (az első három nem kollineáris);
Kimenet: e_1, e_2 egyenesek;

Lépések:
1. $b = \text{Egy}[B_0, B_1]$;
2. $r_{01} = \text{Táv}[A_0, A_1]$, $r_{02} = \text{Táv}[A_0, A_2]$, $r_{12} = \text{Táv}[A_1, A_2]$;
3. $k_{01} = \text{Kör}[B_1, r_{01}]$;
4. $\{A'_0, A"_0\} = \text{Mpont}[b, k_{01}]$;
5. $k_{02} = \text{Kör}[A'_0, r_{12}]$;
6. $k_{12} = \text{Kör}[B_1, r_{12}]$;
7. $\{A'_2, A"_2\} = \text{Mpont}[k_{02}, k_{12}]$;
8. $e_1 = Egy[B_1, A'_2]$, $e_2 = Egy[B_1, A"_2]$.

Bizonyítás: Az $A'_0B_1A'_2$, $A'_0B_1A"_2$ háromszögek egybevágók az $A_0A_1A_2$ háromszöggel, hiszen oldalaik páronként egyenlők. Ebből következően szögeik is egyenlők, az $A_0A_1A_2$ háromszög A_1-nél fekvő szög megegyezik a $A'_0B_1A'_2$, $A'_0B_1A"_2$ háromszögek B_1-nél fekvő szögével.
Diszkusszió: A szerkesztés eredményét nem befolyásolja, hogy ha az A'_0 pont helyett a tőle a szerkesztésben megkülönböztethetetlen szerepű $A"_0$ ponttal dolgozunk tovább, mert a kapott $\{e_1, e_2\}$ egyenespár szimmetrikus a b egyenesre B_1-ben állított merőlegesre és ennél a szimmetriánál az A'_0, $A"_0$ pontok is egymásnak felelnek meg.

1.4. Eljárás neve: Szögfelezés
Bemenet: az egymást metsző e, f egyenesek;
Kimenet: g_1, g_2 egyenesek;

Lépések:
1. $O = \text{Mpont}[e, f]$;
2. $r_{01} = \text{Táv}[A_0, A_1]$, $r_{02} = \text{Táv}[A_0, A_2]$, $r_{12} = \text{Táv}[A_1, A_2]$;
3. $k_{01} = \text{Kör}[B_1, r_{01}]$;
4. $\{A'_0, A"_0\} = \text{Mpont}[b, k_{01}]$;
5. $k_{02} = \text{Kör}[A'_0, r_{12}]$;
6. $k_{12} = \text{Kör}[B_1, r_{12}]$;
7. $\{A'_2, A"_2\} = \text{Mpont}[k_{02}, k_{12}]$;
8. $e_1 = Egy[B_1, A'_2]$, $e_2 = Egy[B_1, A"_2]$.

Bizonyítás: Az $A'_0B_1A'_2$, $A'_0B_1A"_2$ háromszögek egybevágók az $A_0A_1A_2$ háromszöggel, hiszen oldalaik páronként egyenlők. Ebből következően szögeik is egyenlők, az $A_0A_1A_2$ háromszög A_1-nél fekvő szög megegyezik a $A'_0B_1A'_2$, $A'_0B_1A"_2$ háromszögek B_1-nél fekvő szögével.
Diszkusszió: A szerkesztés eredményét nem befolyásolja, hogy ha az A'_0 pont helyett a tőle a szerkesztésben megkülönböztethetetlen szerepű $A"_0$ ponttal dolgozunk tovább, mert a kapott $\{e_1, e_2\}$ egyenespár szimmetrikus a b egyenesre B_1-ben állított merőlegesre és ennél a szimmetriánál az A'_0, $A"_0$ pontok is egymásnak felelnek meg.

1.5. A szerkesztés nem végezhető el, mert el sem tudunk indulni. Nem tudunk kegyenest húzni, mert csak egy pont van, nem tudjuk a körzőt kinyitni, mert nincs mire.

1.6.

1. megoldás. Eljárás neve: Merőlegesegyenes0
Bemenet: az e egyenesek, az $E \in e$ és a $P \neq E$ pontok.
Kimenet: f egyenes;

Lépések:
1. $r = \text{Táv}[P, E]$;
2. $k = \text{Kör}[P, r]$;
3. $\{E', E\} = \text{Mpont}[k, e]$;
4. $f = \text{Felezőmerőleges}[E, E']$; (lásd 1.1M)

Bizonyítás: A $PE = PE'$, hiszen E és E' egy P középpontú körön vannak. Mivel EE' felezőmerőlegese az E-től és E'-től egyenlő távolságra levő pontok mértani helye, így $P \in f$. Az f felezőmerőleges merőleges az EE' egyenesre, azaz e-re, így f valóban a szerkesztendő egyenes.

Diszkusszió: A szerkesztéshez azt kellene biztosítani, hogy E és E' az e egyenes *különböző* pontjai, azaz a k kör két pontban metszi az e egyenest. Sajnos ez nem mindig teljesül, akkor van gond, ha a PE egyenes merőleges e-re. Így ez a megoldás nem teljes, a szerkesztés nem mindig jó.

2. megoldás. az 1.6M1. megoldásban szerkesztett k kör érinthette e-t, ezt kell kizárnunk. A P középpontú és E helyett a P pont E-re vonatkozó középpontos tükörképén átmenő kör megfelelő lesz.

Eljárás neve: Merőlegesegyenes
Bemenet: az e egyenesek, az $E \in e$ és a $P \neq E$ pontok.
Kimenet: f egyenes;

Lépések:
1. $F = \text{Kptükrözés}[P, E]$ (lásd 1.2M.)
2. $k = \text{Kör}[P, F]$;
3. $\{G, G'\} = \text{Mpont}[k, e]$;
4. $f = \text{Felezőmerőleges}[G, G']$; (lásd 1.1M)

Bizonyítás: Lásd 1.6M1.

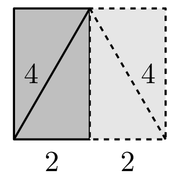
Diszkusszió: Mivel $P \neq E$, így $P \neq F$. Most k két mindig pontban metszi e-t. Ha $P \neq e$, akkor azért, mert P és F az e egyenes különböző oldalán vannak, míg $P \in e$ esetén azért, mert $P \neq F$.

2. Mértani helyek I.

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

3. Speciális síkidomok

3.9. Tükrözzük a téglalapot az átlójával együtt a hosszabbik (nem 2 cm-es) oldalára (lásd az 1. ábrát). Az átló, a tükrözött képe és a 2 cm-es oldal a tükrözött képével szabályos háromszöget alkot, hoiszen mind a három oldala egyenlő. Ezért az átló és az oldal szöge 60° ill. 30°.



3.9M.1. ábra.

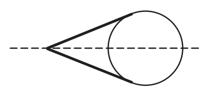
3.10. $FCB\angle = 30°$. Legyen T a C-ből induló magasság talppontja.

$$TAC\angle = 30° \Rightarrow CAB\angle = 60° \Rightarrow AB = 2AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = AF \Rightarrow ACF\angle = 60° \Rightarrow FCB\angle = 30°.$$

3.1. Egyenlőek.

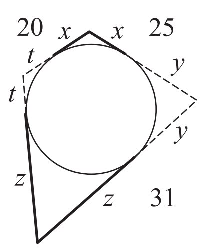
3.1. A bizonyítás az alábbi egyszerű lemmán múlik (lásd a 2. ábrát):



3.1M.2. ábra.

Lemma („*Az érintőszakaszok egyenlősége*")
Külső pontból a körhöz két érintő húzható, és a két érintőnek a közös pontjuktól a körön való érintési pontig terjedő szakasza egyenlő hosszú.

A lemmát itt nem bizonyítjuk, de felhasználjuk. Következik belőle, hogy a 3. ábrán egyforma betűvel jelölt szakaszok hossza egyenlő. Tehát $t + x + y + z = 20 + 31$, míg $x + y = 25$, így a keresett oldal hossza $t + z = 20 + 31 - 25 = 26$.

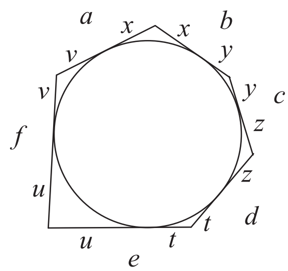


3.1M.3. ábra.

Megjegyzés
Hasonlóan bizonyítható, hogy ha egy érintőnégyszög oldalai elhelyezkedési sorrendjük szerint a, b, c, d, akkor $a + c = b + d$.

Tanári megjegyzés
Az is igaz – de sokkal nehezebb igazolni –, hogy ha egy négyszög oldalaira teljesül az $a + c = b + d$ összefüggés, akkor van olyan kör, amely mind a négy oldalegyenest érinti, ha még konvex is a négyszög, akkor az is igaz, hogy van olyan kör, amely mind a négy oldalt érinti. Ez azért is érdekes, mert a négy oldal hossza nem határozza meg egyértelműen a négyszöget. Ha úgy adott az a, b, c, d oldalak hossza, hogy teljesül rájuk az $a + c = b + d$ reláció, akkor az a oldal rögzítése mellett is a b, c, d oldalak még tudnak mozogni, de a négyszög bármely elrendeződése esetén található hozzá beírt kör.

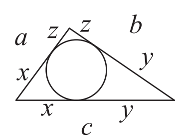
3.2. Az 1. ábra alapján
$$a + c + e = b + d + f,$$
hiszen mindkét kifejezés egyenlő az
$$x + y + z + t + u + v$$
összeggel.



3.2M.1. ábra.

Megjegyzés
Hasonlóan igazolható, hogy bármely páros oldalszámú érintősokszögben minden második oldal összege egyenlő a többi oldal összegével.

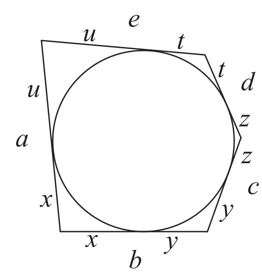
3.3. Az érintőszakaszok összege (lásd az 1. ábrát):



3.3M.1. ábra.

$$x + y + z = (a + b + c)/2 = s.$$
s tehát a kerület felét (*s*emiparameter) rövidíti. Most
$$x = (x + y + z) - (y + z) = s - b,$$
$$y = (x + y + z) - (z + x) = s - a,$$
$$z = s - c,$$
tehát az oldalak hosszának ismeretében egyszerűen megadható, hogy hol érinti a beírt kör az oldalakat.

3.4.
$$x + y + z + t + u = (a + b + c + d + e)/2 = s,$$
(lásd az 1. ábrát) így pld
$$x = x + y + z + t + u - (y + z) - (t + u) = s - c - e.$$



3.4M.1. ábra.

3.5. b) Az érintőszakaszok egyenlősége szerint (lásd az 1. ábrát illetve a 3.1M. megoldást)

$$AT_B = AT_C = x_A, \qquad BT_C = BT_A = x_B, \qquad CT_A = CT_B = x_C,$$

ahol

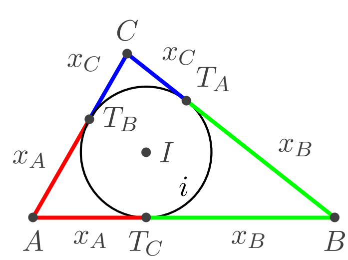
$$x_A + x_B = c, \qquad x_B + x_C = a, \qquad x_C + x_A = b. \tag{1}$$

Az utóbbi három egyenlet összegének fele:

$$x_A + x_B + x_C = \frac{a+b+c}{2}. \tag{2}$$

Az $\frac{a+b+c}{2}$ mennyiséget – a háromszög kerületének felét – szokás s-sel jelölni (angolul a félkerület: semiperimeter). A (2) egyenletből kivonva (1) egyenleteit kapjuk rendre, hogy

$$x_C = \frac{a+b-c}{2} = s-c, \qquad x_A = \frac{-a+b+c}{2} = s-a, \qquad x_B = \frac{a-b+c}{2} = s-b. \tag{3}$$



3.5M.1. ábra.

3.6. b) Az érintőszakaszok egyenlősége szerint (lásd az 1. ábrát illetve a 3.1M. megoldást)

$$AU_B = AU_C = y_A, \qquad BU_C = BU_A = y_B, \qquad CU_A = CU_B = y_C,$$

ahol

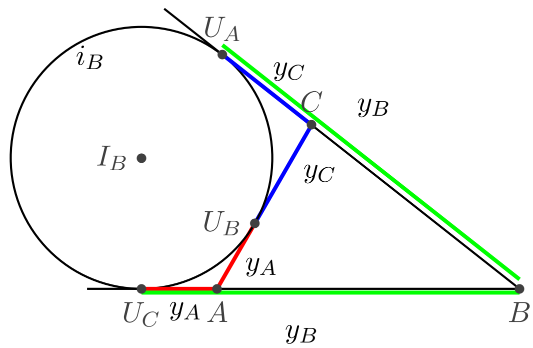
$$y_B - y_A = c, \qquad y_B - y_C = a, \qquad y_C + y_A = b. \tag{1}$$

Az utóbbi három egyenlet összegének fele:

$$y_B = \frac{a+b+c}{2} = s. \tag{2}$$

Innen

$$y_A = \frac{a+b-c}{2} = s-c, \qquad y_C = \frac{-a+b+c}{2} = s-a. \tag{3}$$



3.6M.1. ábra.

4. A Descartes koordinátarendszer

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

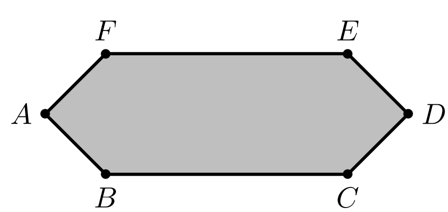
5. Szimmetriák, transzformációk

5.3. Lásd [22][60. fel]

5.1. **a)** Igaz **b)** Igaz **c)** Igaz

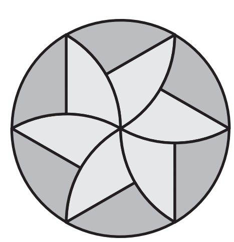
5.2. **a)** Hamis, lásd a rombuszt.
b) Hamis, lásd a téglalapot.
c) Hamis, lásd a téglalapot vagy a rombuszt.

5.3. **a)** Igaz;
b) Ez nem is lehetséges;
c) Hamis, lásd az 1. ábrán látható hatszöget, amely az AD átlójára és a BC,EF oldalak közös felezőmerőlegesére is szimmetrikus.



5.3M.1. ábra.

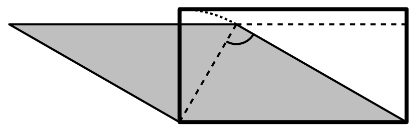
5.4. Igen, feldarabolható. Lásd pl. az 1. ábrát!



5.4M.1. ábra.

6. Terület I.

6.2. Nem igaz. Egy ellenpélda látható az 1. ábrán.



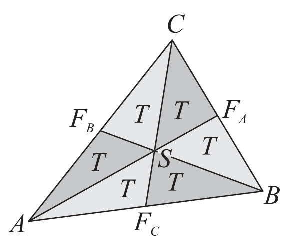
6.2M.1. ábra.

A helyes állítás: *ha két paralelogramma egy-egy oldala egyenlő egymással és az egyenlő oldalakhoz tartozó magasságaik is egyenlők, akkor a két paralelogramma átdarabolható egymásba.*

6.2. Lásd a Bergengóc példatár[22] 67. feladatát és megoldását a 129. oldalon.

6.3. Lásd a Bergengóc példatár[22] 67. feladatát követő Tanári megjegyzést a 130. oldalon.

6.4. A 6.3. feladat megoldásából kiderül, hogy a három súlyvonal hat egyenlő területű részre osztja a háromszöget.

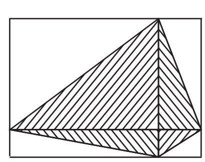


6.4M.1. ábra.

Hasonlítsuk össze a **??**. ábrán látható ASC és SF_AC háromszöget! Az előbbi kétszer akkora területű, mint az utóbbi. A C csúcshoz tartozó magasságuk közös, hiszen a C-vel szemközti oldaluk egyenese is közös. Így a háromszög területképlete szerint területük aránya megegyezik a C-vel szemközti oldaluk arányával, azaz $\frac{AS}{SF_A} = 2$. Hasonlóan igazolható a többi súlyvonalra is az összefüggés.

6.1. Kössük össze a középvonalak metszéspontját s csúcsokkal. Így négy háromszöget kapunk, a súlyvonalaikkal.

6.4. Ezek pontosan azok a négyszögek, amelyek átlói merőlegesek egymásra.

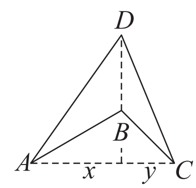


6.4M.1. ábra.

Az ilyen négyszögek téglalapba foglalhatók az 1. ábrán látható módon. A téglalap oldalai egyenlő hosszúságúak az átlókkal, és a négy szélső „fölösleges” rész épp megegyezik az eredeti négyszög egyik olyan részével, amelyet a két átló kivág belőle, így az eredeti négyszög területe fele a téglalap területének, azaz az átlók szorzatának felével egyenlő. Ha az átlók nem merőlegesek egymásra, akkor is párhuzamosokat húzhatunk a csúcsokon át az átlókkal. Ilyenkor téglalaptól különböző paralelogrammát kapunk, de annak oldalai is egyenlők lesznek az átlókkal. Mivel a téglalaptól különböző paralelogramma oldalához tartozó magassága kisebb a másik oldalnál, így területe kisebb az oldalak szorzatánál. Ebből következik, hogy ha a négyszög átlói nem derékszögek, akkor területe kisebb az átlói szorzatának felénél.

Megjegyzés

A megoldás kihasználja, hogy a négyszög konvex. Konkáv négyszögnél érdemesebb így okoskodni (lásd a 2. ábrát):



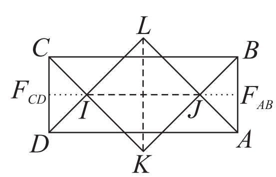
6.4M.2. ábra.

Legyen BD a belső átló. Az $ABCD$ négyszög területe megegyezik az ABD, CBD háromszögek területének összegével, azaz $\frac{BD\cdot x}{2}+\frac{BD\cdot y}{2}$-vel. Kiemelve kapjuk a terület egyszerű képletét:

$$\frac{BD\cdot(x+y)}{2}=\frac{BD\cdot AC}{2}.$$

Ha az átlók szöge nem derékszög, akkor $\frac{BD\cdot x}{2}$ és $\frac{BD\cdot y}{2}$ nagyobb az ABD és a CBD háromszög területénél, így nem lesz jó a képlet.

6.1. b) A létrejött $IKJL$ négyszög (lásd az 1. ábrát) négyzet, hiszen szögei derékszögek (a CID, AJB, BKC, ALD) háromszögeknek két 45°-os szöge van, így a harmadik mindig derékszög), és szimmetrikus az átlóira (az eredeti téglalap oldalfelező merőlegeseire). A négyzet területe $\frac{IJ^2}{2}$. Az ábrán $IJ=F_{AB}F_{CD}-(IF_{CD}+JF_{AB})$. Mivel $IF_{CD}=JF_{AB}$ és az AJB egyenlő szárú derékszögű háromszögben $JF_{AB}=\frac{AB}{2}$, így $IJ=AD-AB$, amiből a keresett terület $\frac{(a-b)^2}{2}$.



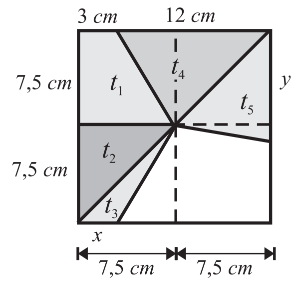
6.1M.1. ábra.

6.2.

1. megoldás. A négyzet teljes területe $15^2=225\text{ cm}^2$, a harmada 75 cm^2. A 2. ábrán jelölt t_1,t_2,t_4 területek a háromszög és a trapéz területképletével számolhatók (cm^2-ben):

$$t_1=\frac{(3+7{,}5)\cdot 7{,}5}{2}=39{,}375;\qquad t_2=\frac{7{,}5\cdot 7{,}5}{2}=28{,}125;\qquad t_3=\frac{12\cdot 7{,}5}{2}=45.$$

A kezdő vágás egyik irányában $t_1+t_2=67{,}5\text{ cm}^2$, amit még $t_3=7{,}5\text{ cm}^2$-rel kellene megnövelni. A jelölt háromszög magassága 7,5 cm, így területe akkor lesz a kívánt érték, ha alapja $x=2$



6.2M1.2. ábra.

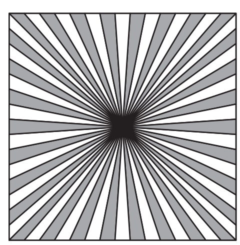
cm. A másik irányban t_4-et még $t_5 = 30$ cm^2-nel kell növelni, a jelölt háromszög magassága 7,5 cm, így alapnak az $y = 8$ cm értéket kell választani.

Tehát az ábrán x-szel, illetve y-nal jelölt szakasznak a sarokkal ellenkező végpontjához kellene vágni, ahol $x = 2$ cm, $y = 8$ cm.

Megjegyzés Felmerül az igény, hogy arra is kellene törekedni, hogy a torta szélére vastagon kerülő krémből is mindenkinek egyforma adag jusson.

Megfigyelhető, hogy szerencsénk volt(?), mindenkinek ugyanakkora kerületrész jutott ($3+ +15+2 = 12+8 = 20$, a kimaradt kerület $60-2\cdot 20 = 20$ cm), így ha körben azonos magasságú a torta, akkor a krém mennyisége is egyenlő a három részben.

2. megoldás. Osszuk fel a tortát olyan kis részekre, amelyek háromszög alakúak és egyik csúcsuk a négyzet O középpontja! A létrejövő kis háromszögek mindegyikében az O-hoz tartozó magasság $m = 7{,}5$ cm lesz, így a terület csakis az O-val szemközti, tehát a négyzet kerületére eső rész hosszától függ. Mivel a teljes kerület 60 cm, így a jelölt ponttól mindkét irányban $20-20$ cm-t kell „haladni”, és a középpontból odáig kell vágni.



6.2M2.2. ábra.

A megoldást szemlélteti a 2. ábra. A váltakozó színnel jelölt háromszögeknek a négyzet kerületére eső oldala $1-1$ cm hosszú, az ehhez tartozó magasság minden esetben a négyzet oldalának fele, így ezek egyenlő területű háromszögek. A 60 háromszögből $20-20-20$-at kell venni mindegyik részhez.

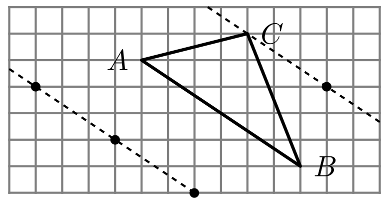
6.3. Az a lényeg, hogy a sokszögnek legyen beírt köre, azaz olyan O pont, amely mindegyik oldalegyenestől egyenlő távolságra van, és a sokszög belsejében helyezkedik el. Így azoknak a háromszögeknek a területe, amelyeknek egyik csúcsa O, az ezzel szemközti oldala pedig a sokszög kerületén van, arányos a kerületrész hosszával.

7. Terület I. (teszt)

7.1. D

A, B, C, E $\to$ 6.7.

7.2. D A 4 megoldás leolvasható a 2. ábráról.



7.2M.2. ábra.

A, B, C, E → 6.7, 6.2.

7.3. A Az adott AB oldalhoz tartozó magasság CT_C, így a háromszög területe $\frac{AB \cdot CT_C}{2} = 7{,}5$ cm^2.
B, C, D, E → 6.5, 6.6.

7.4. D
A, B, C, E → 6.3.

7.5. B
Az 1. ábra jelöléseit használjuk, ahol T_C illetve T_A a C-ből illetve az A-ból a BD átlóra bocsájtott merőleges talppontja és az ismert területek:

$$t_{DAE} = 30, \qquad t_{CDE} = 24, \qquad t_{BCE} = 20.$$

A BCE, CDE háromszögek területének aránya:

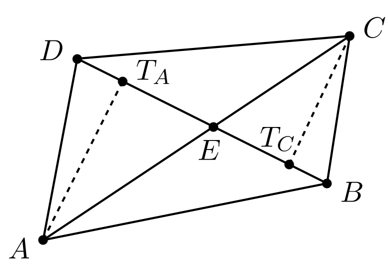
$$\frac{t_{BCE}}{t_{CDE}} = \frac{EB \cdot CT_C/2}{DE \cdot CT_C/2} = \frac{EB}{DE},$$

az ABE, DAE háromszögek területének aránya ugyanennyi:

$$\frac{t_{ABE}}{t_{DAE}} = \frac{EB \cdot AT_A/2}{DE \cdot AT_A/2} = \frac{EB}{DE},$$

azaz

$$t_{ABE} = \frac{t_{DAE} \cdot t_{BCE}}{t_{CDE}} = \frac{30 \cdot 20}{24} = 25.$$



7.5M.1. ábra.

A, C, D, E → 6.6.

7.6. C A trapéz területe az alapok átlagának az alapegyenesek távolságával vett szorzata.
A, B, D, E → 6.5.

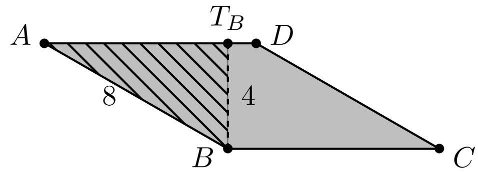
7.7. C

Pontosan azokra a négyszögekre igaz az állítás, amelyek átlói merőlegesek egymásra (lásd a 6.4. feladatot). Az öt típus közül tehát a deltoid, a négyzet, és a rombusz (mindegyik deltoid) megfelelő.

A, B, D, E → 6.4.

7.8. A

Ha behúzzuk az egyik csúcsból a rombusz magasságvonalát (lásd az 1. ábrán a BT_B szakaszt), akkor létrejön egy félszabályos háromszög (ABT_B), amelyből számítható a magasság ($BT_B = 4$ cm), majd a terület: $8 \cdot 4 = 32$ cm^2.



7.8M.1. ábra.

B, C, D, E → 6.5.

7.9. B

A, C, D, E → 3.1.

7.10. B

A terület értéke $\frac{(AB+BC+CD+DA)\cdot r_k}{2} = 65$.

A, C, D, E → 6.2, 6.3.

8. Hasonlóság

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

9. Terület II.

9.3. Lásd [22][37. fel.]

9.14. a) Lásd [23][134. fel.]

10. Terület II. (teszt)

10.1. D A feltétel azzal egyenértékű, hogy a téglalap területe megegyezik a két félkörlap tarületének összegével, azaz π-vel. Innen $a = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

A, B, C, E → 6.10, 9.3.

10.2. A

B, C, D, E → 6.4, 9.10, 9.11.

10.3. C $\sqrt{2}a = 10$, azaz $a = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}071$.

A, B, D, E → 9.14.

10.4. E $T = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

A, B, C, D → 9.11.

10.5. B A háromszög alaphoz tartozó m magasságára $m^2 + 5^2 = 13^2$, amiből $m = 12$, $T = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60$.
A, C, D, E $\to$.

10.6. D A kör sugara 21 cm.
A, B, C, E $\to$.

10.7. A
Ha a kör sugara r, akkor

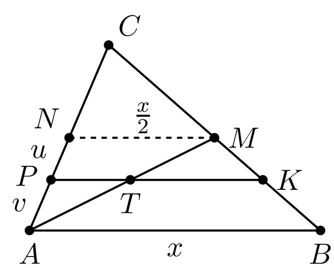
$$\begin{aligned} S &= \tfrac{4r^2 - r^2\pi}{4} && = (4-\pi)\tfrac{r^2}{4} && \approx 0{,}86\tfrac{r^2}{4} \\ C &= \tfrac{r^2\pi - 2r^2}{4} && = (\pi - 2)\tfrac{r^2}{4} && \approx 1{,}14\tfrac{r^2}{4} \\ V &= \tfrac{r^2}{4} && = 1\tfrac{r^2}{4} && = 1\tfrac{r^2}{4}. \end{aligned}$$

B, C, D, E $\to$ 9.15.

10.8. B
A, C, D, E $\to$.

11. Síkgeometriai számítások

11.2. Rajzoljuk meg a háromszög AC-vel párhuzamos MN középvonalát. Legyen $AC = x$, így $MN = \frac{x}{2}$, $AP = v$, $PN = u$, így $NB = u + v$ (lásd az 1. ábrát).



11.2M.1. ábra.

Az APT, ANM háromszögek hasonlóságából

$$\frac{3}{x/2} = \frac{v}{u+v},$$

míg az MTK, MAC háromszögek hasonlóságából

$$\frac{5}{x} = \frac{u}{u+v}.$$

A két egyenlet összegéből

$$\frac{5}{x} + \frac{6}{x} = \frac{u}{u+v} + \frac{v}{u+v} = 1,$$

ahonnan $x = 11$.

12. Kockák

12.2. a) Térfogat: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ cm^3; felszín: $6 \cdot (5 \cdot 5) = 150$ cm^2.
b) Térfogat: a^3 cm^3; felszín $6a^2$ cm^2.

12.3. a) Egy lap területe $294/6 = 49$ cm^2. Az oldalél: $\sqrt{49} = 7$ cm.
b) Az él: $\sqrt[3]{729} = 9$ cm.

12.4. **a)** $\sqrt{\frac{A}{6}}$ cm; **b)** $\sqrt[3]{V}$ cm.

12.7. a) 1,5 m= 15 dm. A kocka térfogata $15^3 = 3375$ dm$^3 = 3375$ liter.
b) 1 dm = 10 cm, így a kocka térfogata 1000 cm^3, tömege $19{,}3 \cdot 1000 = 19300$ g $= 19{,}3$ kg.
c) 10,3818 kg = 10381,8 g. Ennyi vas térfogata $10381{,}8 : 7{,}8 = 1331$ cm^3. A vaskocka éle $\sqrt[3]{1331} = 11$ cm. A kocka felszíne $6 \cdot 11^2 = 726$ cm^2.

12.2. A kockának hat lapja van. Egy vágás két új lapot hoz létre. Ezért három vágásra van szükség.

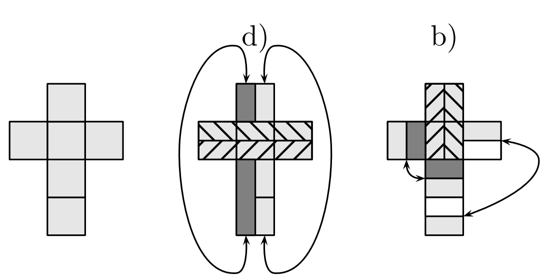
12.6.

1. megoldás. A nagy kocka felszíne 6 cm^2, egy kis kockáé $\frac{6}{25}$ cm^2, így a kiskockák befestésekor $125 \cdot \frac{6}{25}$, azaz 30 cm^2 felületet festünk be. Ez az érték ötször nagyobb az eredetinél.

2. megoldás. Tekintsük a kocka két párhuzamos lapját. Ezekkel párhuzamosan 4 vágássík helyezkedik el, azaz nyolc lapnyi befestendő felület. Mivel minden oldallal párhuzamosan 2 lap helyett (8+2)-t kell befesteni, így ötször annyi festék kell a kis kockák befestéséhez, mint a nagyéhoz.

12.9. Az eredeti nagy kockában 8 olyan kis kocka volt (a 8 sarokkocka), amelynek 3 oldala piros. A Bence által összeállított téglatestben azok a kis kockák, amelyeknek nincs kék oldala egy kisebb téglatestet alkotnak. Ez 11 kis kockából áll, ezért mérete csak $1 \times 1 \times 11$ lehetett. A téglatest méretei minden irányban 2 kis kockával nagyobbak, tehát $3 \times 3 \times 13$-as lehetett. Így az eredeti nagy kockában $8 + 3 \times 3 \times 13 = 125$ kis kocka lehetett. Ennyi kis kockából valóban össze lehetett állítani egy $5 \times 5 \times 5$-ös nagy kockát. Ha a nagy piros kockából „lehámozzuk” azokat a kis kockákat, amelyeknek van piros oldala, akkor egy $3 \times 3 \times 3$-as kocka, azaz 27 kis kocka maradt. A „lehámozott” kis kockák száma $125 - 27 = 98$. Tehát Bence nagy kockájában 98 kis kockának volt piros oldala.

12.8. Hajtsuk ki a kockát úgy, hogy a felületét lássuk (lásd az 1. ábrát)!
c) Öttel nem lehet meg csinálni, mert huszonnégy 1×1-es négyzetből áll a kocka felülete, ami nem osztható öttel.
d) 24 osztható hattal ezért nincs eleve kizárva. Meg is lehet csinálni! Először rakjunk kettőt keresztbe és utána kettőt vízszintesen úgy, hogy az egyik oldalról átmenjen a másik oldalra.
a) Hárommal úgy kell megcsinálni, hogy a d) kérdésben levő hatosokat két részre vágjuk.
b) Először rakjunk négyet (2×2) vízszintesen és kettőt függőlegesen úgy, hogy az egyik oldalról átmenjen a másik oldalra.



12.8M.1. ábra.

12.1. a) 90°: a CB és merőleges az $ABFE$ síkra, így EB-re is.
b) 60°: az EBD háromszög minden oldala egyenlő, tehát szabályos.
c) 45°: az EBA háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

12.1. Kétféle szimmetriasík van: egyrészt az élek felezőmerőleges síkjai, másrészt a lapátlók felezőmerőleges síkjai. Az előbbiből 3 van (12 éle van a kockának, de 4-4-4 élnek ugyanaz a felezőmerőleges síkja), az utóbbiból 6 (6 lapja, 12 lapátlója van a kockának, de a felezőmerőleges síkok páronként megegyeznek). Összesen tehát 9 szimmetriasík van.

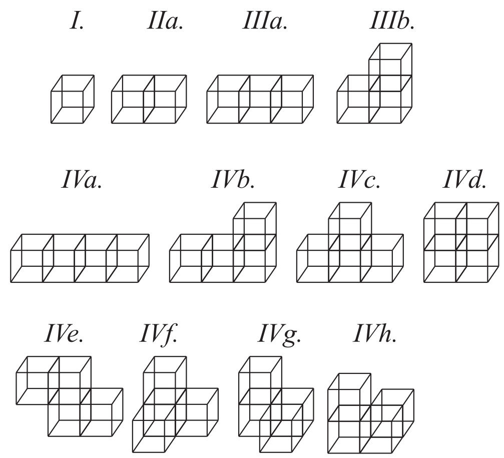
12.2. a) Az $ABCD$ lap csúcsaiba.
b) H-ba.
c) Az A-val szomszédos csúcsokba: D-be és E-be
d) 90°-kal vagy annak többszöröseivel.
e) 180°-kal.
f) Az ADE háromszög szabályos, ezt kell önmagába forgatni a középpontján átmenő, a síkjára merőleges tengely körül. A forgatás szöge $\pm 120°$.
g) 13.
h) 23.

12.2. Válasz: 2.
Vegyünk pl. azokat az oldalakat, amelyeken az 1, 2, 3 számok vannak. Ezek közül semelyik kettő sincs ellenkező oldalon, azaz bármelyik kettő szomszédos. Tehát e három oldal egy csúcs mellett találkozik. Elrendezésük meghatározza a dobókocka teljes elrendezését: a 4, 5, 6-os oldal helyét.
Tegyük a kockát az egyik kezünkbe, hogy az említett csúcs legyen a tenyerünkön. Fordítsuk hüvelykujjunkat az 1-es oldal felé, Mutatóujjunkat a 2-es oldal felé. Középsőujjunkat nem biztos, hogy a 3-as oldal felé tudjuk fordítani. Ez függ a kezünktől (ill. a kocka számozásától). Ennek megfelelően vannak balkezes és jobbkezes dobókockák. Ezek nem egyformák a feladat szövegének megfelelő értelemben. Számozásuk síkra való tükrözéssel feleltethető meg egymásnak, térbeli mozgatással nem.

12.3. a)
1, 2, 3 ill. 4 kockából álló idomból rendre 1, 1, 2, 8 van (lásd az 1. ábrát). Messzemenően nem nyilvánvaló, hogy az utolsó kettő (az ábrán $IV.g$ és $IV.h$) nem mozgatható egymásba. El kell készíteni. Ez a két idom síkra való tükrözéssel egymásba vihető, de mozgatással nem. A kémiában is előfordul hasonló jelenség: két molekula szerkezete szerint lehet teljesen azonos, de egymás tükörképeik (kiralitás).
b) Kiszámoljuk az 1. ábrán látható egyes idomok különböző színezéseinek számát. Az eredmények az alábbi táblázatban olvashatók:

I	II	$IIIa$	$IIIb$	IVa	IVb	IVc	IVd	IVe	IVf	IVg	IVh
4	**6**	12	12	12	24	12	3	12	8	12	12
		24		**95**							

Magyarázat:
II. A négy színből hatféleképpen választható ki kettő.
$IIIa - IIIb$. Melyik szín marad ki (4 lehetőség), melyik lesz a középső (3 lehetőség).
$IVa.-IVc.-IVe$. A $4! = 24$ eset a középpontos vagy tengelyes szimmetria miatt megfeleződik.
IVd. I. magyarázat: mi van a pirossal szemben? II. magyarázat: nyolcféle szimmetria van, ezért így számolunk: $24/8 = 3$.
IVf. I. magyarázat: a sarok négyféle lehet, a maradék három kétféle (egy-egy „sodrás”). II. magyarázat: a 24 eset a harmadfokú (azaz 120°-os) forgásszimmetria miatt harmadolódik.



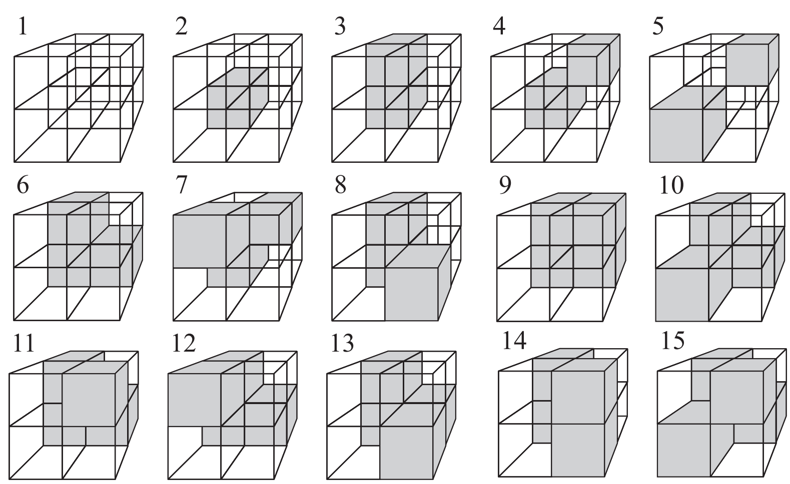
12.3M.1. ábra.

$IVg - h$. Itt is megfeleződnek a lehetőségek. Tessék elkészíteni!

12.4. A végeredmény: 23. Az alábbi táblázatban a piros kockák száma szerint csoportosítottuk az eseteket.

piros kockák száma:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
elrendezések száma:	1	1	3	3	7	3	3	1	1

Az 1. ábrán a piros helyett szürke kockák, a kékek helyett átlátszók láthatók. Az 5 piros és 3 kék kockának megfelelő eseteket nem rajzoltuk fel, hiszen az ilyen lehetőségek száma megegyezik a 3 piros és 5 kék kockával kirakható esetek számának. Ugyanezért nem rajzoltuk meg a 6, 7, 8 piros kockának megfelelő ábrákat.



12.4M.1. ábra.

12.1. cm-ben: **a)** $\approx 1{,}732$, **b)** $\approx 8{,}660$, **c)** $\sqrt{3}a \approx 1{,}732a$.

12.2. **a)** $\approx 0{,}577$, **b)** $\approx 2{,}887$, **c)** $\frac{a}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577a$ egység.

12.3. **a)** $\approx 1{,}225$, **b)** $\approx 6{,}124$, **c)** $a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1{,}225a$ egység.

12.6. cm-ben: **a)** 0,5, **b)** 2,5, **c)** $a/2$.

12.7. cm-ben: **a)** $\approx 0{,}886$, **b)** $\approx 4{,}330$, **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}a \approx 0{,}886a$.

12.8. cm-ben: **a)** $\approx 0{,}707$, **b)** $\approx 3{,}536$, **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}}a \approx 0{,}707a$.

12.10. Ha a kocka éle a, akkor körülírt gömbjének és beírt gömbjének sugara rendre $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ és $\frac{1}{2}a$.

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}a = 7 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{14}{\sqrt{3}-1} \approx 19{,}124\text{cm}.$$

13. Kockák (teszt)

13.1. C 1 lap területe 181,5/6=30,25 cm^2. A kocka élének hossza: $\sqrt{30{,}25} = 5{,}5$ cm. A kocka térfogata: $5.5^3 = 166{,}375$ cm^3. A rézkocka tömege: $166{,}375 \cdot 8{,}960 = 1490{,}72$ g $= 1{,}49072$ kg.

A, B, D, E $\to$ 12.3, 12.7.

13.2. D

Minden csúcsnál 3 kis lap eltűnik, 3 új kis lap keletkezik, nem változik a felszín. Minden élnél 2 kis lap eltűnik, 4 új kis lap keletkezik, így élenként 2 cm^2 nel nő a felszín. Minden lap közepénél 1 kis lap eltűnik, 5 új kis lap keletkezik, így laponként 4 cm^2 nel nő a felszín. Összesen $12 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 48$ cm^2-nel nő.

A, B, C, E $\to$ 12.3, 12.7.

13.3. C

A, B, D, E $\to$ 12.2, 12.3.

13.4. B

Tegyük fel, hogy az éleket $(k+2)$ részre osztottuk. Azok a kis kockák, amelyeknek két festett oldala van, az élek mentén helyezkednek el, de különböznek a csúcsoktól. Ilyenekből minden élen k-van, összesen tehát $12k$. Van ilyen kis kocka, tehát $k > 0$.

Azok a kis kockák, amelyeknek egy festett oldala van a lapok közepén helyezkednek el, minden lapon k^2 van belőlük, összesen tehát $6k^2$. A $12k = 6k^2$ egyenlet egyetlen pozitív megoldása a $k = 2$. A kis kockák száma tehát $(k+2)^3 = 4^3 = 64$.

A, C, D, E $\to$ 12.4.

13.5. C

Legyen A az a él egyik végpontja, a kocka egyik csúcsa. Legyenek b végpontjai B_1 és B_2 (lehet, hogy egyikük megegyezik A-val. Az a és átvihető b-be úgy is, hogy A a B_1-be és úgy is, hogy A a B_2-be kerüljön, de mindkettő csak egyféleképpen lehetséges.

A, B, D, E $\to$ 12.2.

13.6. D Vizsgáljuk meg, hogy hány olyan szín van, amelynek megfelelő lapok egymással szemben vannak.

Ha mindhárom szín szemköztes, az 1 lehetőség, az ilyen kockák mind egymásba forgathatók.

Ha két szín szemköztes, akkor a harmadik is.

Ha pontosan egy szín szemköztes, akkor a másik két szín szomszédos, az ilyen elrendezések az azonos színű lapok középpontján átmenő tengely körül egymásba forgathatók. A szemköztes szín választása miatt 3 ilyen mintázat van.

Ha nincs szemköztes szín, akkor mindegyik színből szomszédosak a lapok. Tekintsük a két piros lapot. Két olyan lap van, amely mindkét pirossal szomszédos. Ezek egymással szemben vannak, így egyikük kék, a másik zöld. Bármely két hasonló típusú kockánál ez a négy lap – a két szomszédos piros, és kék zöld szomszédaik, amelyek egymással átellenesek – egymásba mozgathatók, de a maradék két lap mozgatására nincs lehetőség. Ezért 2 lehetőség van attól függően, hogy a maradék két lap közül melyik a kék és melyik a zöld.

A, B, C, E → 12.2, 12.3, 12.4.

13.7. D

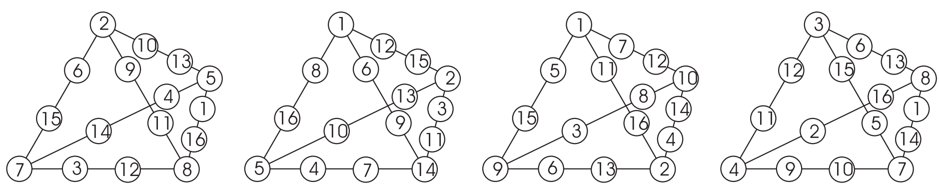
Ha a kocka éle a, akkor testátlójának hossza $\sqrt{3}a$, a kettő különbsége

$$(\sqrt{3}-1)a = 10 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{10}{\sqrt{3}-1} \approx 13{,}66\text{cm}.$$

A, B, C, E → 12.1, 12.10.

14. Gúla

14.1. Bármelyik élen található négy szám összege $E = 30$. Jelölje a négy csúcsba írt szám összegét C. A 16 szám összege így is kiszámítható $1 + 2 + 3 + \ldots + 16 = 136$, de ez így is kiszámítható: $6E - 2C = 180 - 2C$. Ebből $C = 22$. Innen már esélyes próbálkozni. Néhány megoldás látható a 2. ábrán.



14.1M.2. ábra.

14.2. **a)** „=”; **b)** „⊂”; **c)** diszjunktak.

14.3. **a)** Nem ér össze a három háromszög.

b) Létrejön a tetraéder.

14.4. **1. sor**: nincs; a háromszögegyenlőtlenség nem teljesül az AB, BD, AD hosszakra;

2. sor: van;

3. sor: nincs; a háromszögegyenlőtlenségekkel nincs baj, mégsem érnek össze a lapok.

4. sor: nincs; a háromszögegyenlőtlenségekkel nincs baj, mégsem érnek össze a lapok.

5. sor: van.

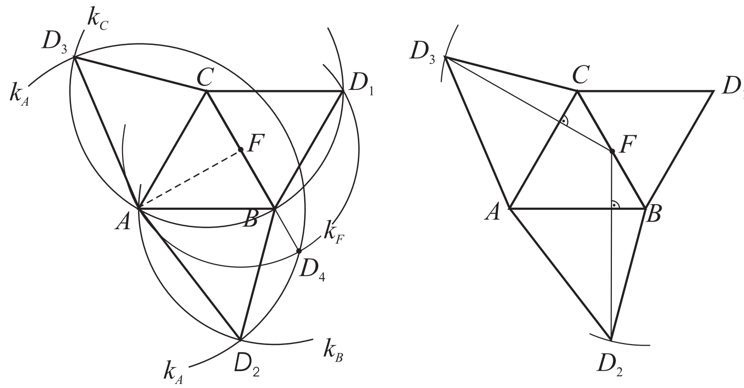
14.6. A test magassága legfeljebb akkora lehet, mint bármelyik oldallapjának magassága. A szabályos háromszög oldallapot tehát úgy kell felhajtanunk, hogy merőlegesen álljon az alaplapra.

Jelölje az alap csúcsait A, B és C, a piramisnak az alappal szemközti csúcsát a térben D, és az oldallapoknak az ABC háromszög síkjában kiterített hálójának csúcsai legyenek BCD_1, ABD_2 és CAD_3 (lásd az 1. ábrát). Legyen BCD_1 a szabályos háromszög alakú oldallap! Az A, B, C, D_1 pontokat tehát adottnak tekinthetjük, a feladat D_2 és D_3 megszerkesztéséből áll.

$BD = BD_1 = BD_2$, tehát D_2 a B középpontú BD_1 sugarú k_B körön van, míg D_3 a C középpontú CD sugarú k_C körön.

Innen kétféle befejezést is adunk. Első eljárásunkban megszerkesztjük az AD távolságot.

Forgassuk le az AFD háromszöget az AF tengely körül az alapsíkba. $AF \perp FD$ és $AF \perp FB$, így D a forgatásnál a BC egyenes egy D_4 pontjába kerül. Az alapsíkban dolgozva D_4-et az F középpontú FD_1 sugarú k_F kör metszi ki BC-ből. Az $AD_4 = AD$ sugarú A középpontú k_A körnek a k_B, k_C körökkel való metszéspontja lesz D_2 ill. D_3. (A megoldásban sehol sem kellett



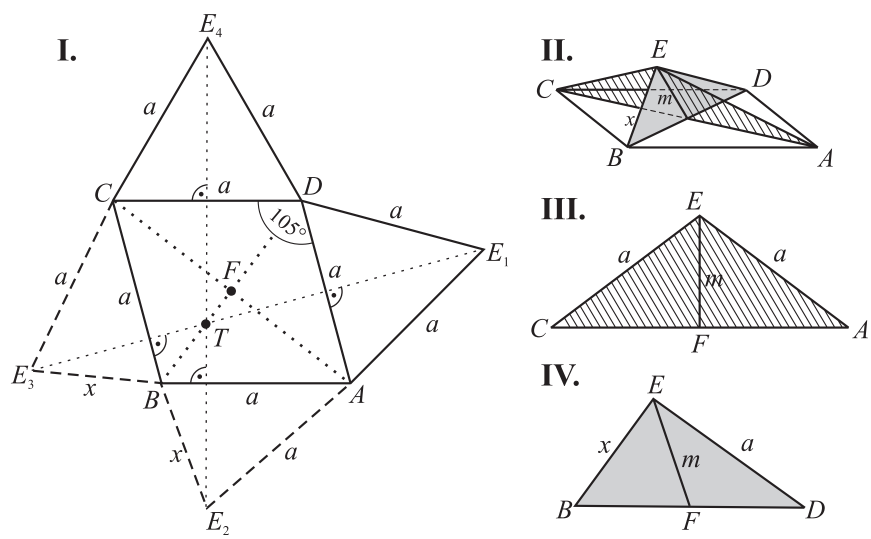
14.6M.1. ábra.

törődni az 1. ábrába nem berajzolt másik metszéspontokkal, mert azok mindig az eredetivel egybevágó megoldást adtak.)

A második gondolatmenetben azt vesszük figyelembe, hogy a BD_2A palástdarab felhajtásakor a D_2 pontnak az F pont feletti D pontba kell kerülnie. A felhajtás egy AB tengely körüli folyamatos forgatás, aminek során D_2 olyan pályát ír le, hogy az alapsíkra való merőleges vetülete az AB forgástengelyre merőleges egyenesen mozog. Ezek szerint $FD_2 \perp AB$, így D_2-t az F pontból az AB egyenesre állított merőleges egyenes metszi ki k_B-ból.

Ehhez hasonlóan szerkeszthető a D_3 pont is.

14.7. Legyen a piramis alapja az a oldalú $ABCD$ rombusz, $CDA\angle = 105°$, a piramis alappal szemközti csúcsát jelölje E, az alapsíkba kiterített oldallapok legyenek ADE_1, BAE_2, CBE_3 és DCE_4 (lásd az 1. ábrát).



14.7M.1. ábra.

Legyenek ADE_1 és DCE_4 a szabályos háromszögek. Az A, B, C, D, E_1, E_4 pontokat tehát adottnak tekinthetjük, az E_2, E_3 pontokat kell megszerkesztenünk. Ehhez rendekezésünkre állnak az $AE_2 = CE_3 = a$ sugarú A ill. C középpontú körök.

Innen kétféle befejezést is adunk. Első eljárásunkban megszerkesztjük a $BE_2 = BE_3 = x$ szakaszt, ami után E_2 és E_3 a megfelelő körök metszéspontjaként könnyen adódik.

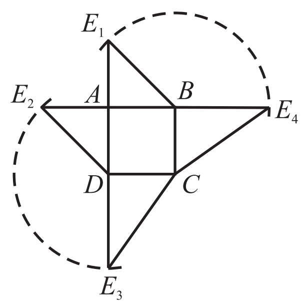
Az AEC, BED térbeli háromszöglapok közös része egy m szakasz, melynek egyik végpontja az AC, BD szakaszok közös F felezőpontja. Az AEC háromszögben m súlyvonal, így m az AEC-vel egybevágó ABC háromszögből épp BF-nek adódik.

A BDE háromszöget (illetve egy azzal egybevágó háromszöget a síkban) könnyen megszerkeszthetünk, hiszen adott benne BD, $DE = a$ és az E-hez tartozó m súlyvonal. A $BE = x$ szakaszt ezzel elő is állítottuk.

A második gondolatmenetben az E csúcsnak az alapsíkra való T merőleges vetületét keressük meg és használjuk fel. Vegyük észre, hogy a DE_1A, CE_4D palástdarabok felhajtásakor, tehát a DA illetve CD tengelyek körüli forgatáskor E_1 illetve E_4 a T pont „fölé” kerül. A forgatás során E_1 és E_4 alapsíkra vonatkozó merőleges vetülete egy-egy DA-ra illetve CD-re merőleges egyenesen mozog. Ezek szerint T az E_1-ből DA-ra és az E_4-ből CD-re állított merőleges egyenesek metszéspontja.

E két egyenes meghosszabbítására illeszkedik E_3 illetve E_2. Ennek igazolásához csak a CE_3B, BE_2A lapok „felhajtását” kell meggondolnunk és a BA, CD illetve a CB, DA egyenesek párhuzamosságát kell figyelembe vennünk.

14.8. a) Az $ABCDE$ piramis kiterített vázát szerkesztjük meg. Az $ABCD$ alapnégyzetet könnyen megrajzolhatjuk, majd emellé kell megkeresnünk az ABE, DAE, CDE, BCE oldallapok ABE_1, DAE_2, CDE_3, BCE_4 kiterített megfelelőit (lásd az 1. ábrát). A szerkesztés lépései:



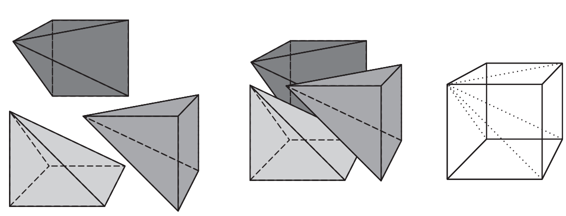
14.8M.1. ábra.

1. Az AB, AD oldalakra egy-egy derékszögű, egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk: BAE_1 és DAE_2.

2. Az E_3 csúcs a CD él körüli forgatáskor (felhajtáskor) az A fölötti E csúcsba kerül, ezért E_3 az AD egyenesen van, D-től A-val ellenkező irányban. Másrészt $DE = DE_2 = DE_3$, tehát E_3 a D középpontú DE_2 sugarú körre is illeszkedik. A kör és a félegyenes metszéspontjaként kapjuk az E_3 pontot.

3. Hasonlóan szerkeszthető az E_4 pont.

b) Lehetséges, a három piramisból kaphatunk egy kockát (lásd a 2. ábrát). Ehhez úgy kell összeilleszteni őket, hogy a három piramisban a négyzetlappal szemközti csúcs (E) ugyanott legyen.

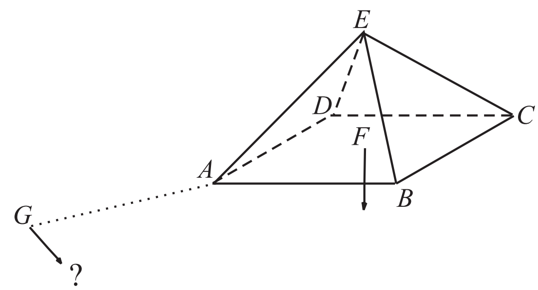


14.8M.2. ábra.

Megjegyzés

A feladatban három egybevágó négyzet alapú gúla térfogatának összege egy ugyanolyan alapú, ugyanakkora magasságú téglatest (kocka) térfogatával volt egyenlő. Megmutatható, hogy bármely A alapterületű, M magasságú gúla vagy kúp térfogata $V = \frac{A \cdot M}{3}$. Ezt a formulát csak később bizonyítjuk be.

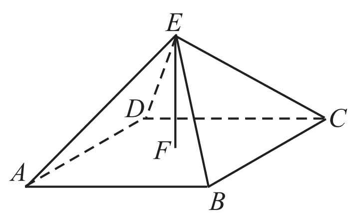
14.9. A 2. ábrán az AEC, ABC háromszögek egybevágóak, hiszen megfelelő oldalaik egyenlők. Így AEC is egyenlő szárú derékszögű háromszög, benne $FE = FA$ $(= FB)$. Így $FG = FA + AG = 70 + 77 = 147$ cvimedli. A kút alja a G, F pontokkal félszabályos háromszöget alkot, így a ferde alagút hossza $2 \cdot 147 = 294$ cvimedli.



14.9M.2. ábra.

14.12.

1. megoldás. Használjuk az 1. ábra jelöléseit!



14.12M1.1. ábra.

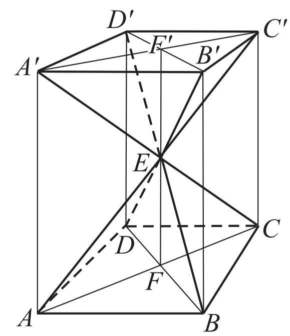
A kocka térfogata AB^3. A gúla térfogata az alapterület és a testmagasság szorzatának harmada, tehát $AB^2 \cdot \frac{FE}{3}$. Hat ilyen gúla térfogatának összege $2FE \cdot AB^2$. Ha a hat gúla kiadná a kockát, akkor $2FE = AB = AE$, tehát az AFE háromszög félszabályos lenne: $AEF\angle = 60°$. Így $AEC\angle = 120°$, ami ellentmond annak, hogy az AEB, BEC szögek összege is épp ennyi $(60° + 60°)$, hiszen a térbe kilépve nagyobb szöget kellene kapnunk. Tehát a hat gúla nem adhatja ki a kockát.

2. megoldás. Első pillanatban úgy tűnik, hogy hat ilyen testből épp egy kocka áll össze. Ez azonban tévedés.

A 14.9. feladat megoldásában láttuk, hogy a gúla EF testmagassága egyenlő az alapnégyzet átlójának felével $(EF = FA)$. Ezért, ha két ilyen gúlát E csúcsuknál összeragasztva egymással szemben helyezünk el, akkor az oldalt nem négyzetek jönnek létre, hanem olyan téglalapok (pl. $ABB'A'$), amelyek egyik párhuzamos oldalpárja az alapnégyzet oldalaival egyenlő, másik két oldala azonban ennél hosszabb, az alapnégyzet átlójával egyenlő hosszú $(BB' = AA' = 2AF = AC)$. Tehát hat ilyen piramis nem alkot kockát.

14.13. A szerkesztés lépései (lásd az 1. ábrát):

I. Megszerkesztjük az $ABCD$ négyszöget (itt nem részletezzük).



14.12M2.1. ábra.

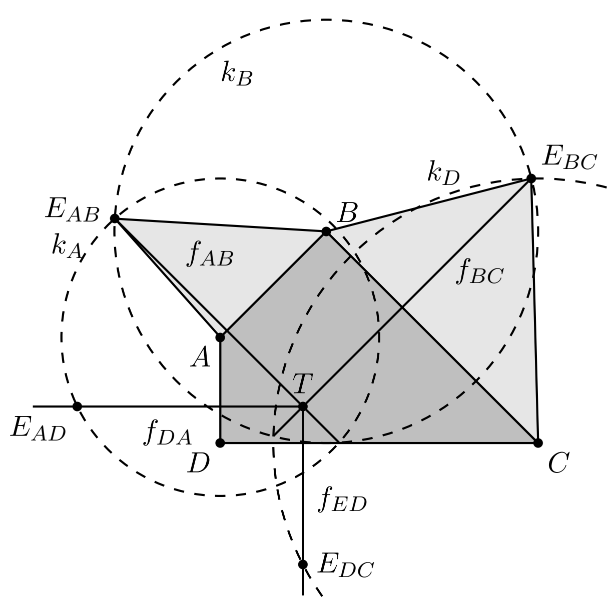
II. Az A középpontú $AE = 3$ cm sugarú k_A kör és a B középpontú $BE = 4$ sugarú k_B kör egyik metszéspontja E_{AB}, míg k_B és a C középpontú $CE = 5$ cm sugarú k_C kör egyik metszéspontja E_{BC}. Eddig megszerkesztettük a palást adott részeit.

III. Legyen f_{AB} az E_{AB}-ből AB-re állított merőleges egyenes, míg f_{BC} az E_{BC}-ről BC-re bocsájtott merőleges. f_{AB} és f_{BC} metszéspontja, T, a gúla testmagasságának talppontja.

IV. A T-ből CD-re állított f_{CD} merőleges egyenes kimetszi a k_C körből az E_{CD} pontot. A DE él hossza megegyezik DE_{CD} hosszával.

Megjegyzés

A T-ből meghúzhatnánk a DA-ra merőleges f_{DA} egyenest is, ami kimetszi k_A-ból E_{DA}-t. A DE_{AD} és a DE_{CD} szakasz egyforma hosszú lesz. Miért?



14.13M.1. ábra.

15. Gúla (teszt)

15.1. C
A, B, D, E → 14.4, 14.5.

15.2. C
$BE = \sqrt{29} \approx 5{,}39$ cm. Igaz az $AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$ összefüggés is. Miért?
A, B, D, E → 14.6, 14.7, 14.8, 14.13.

15.3. A
B, C, D, E → 15.3.

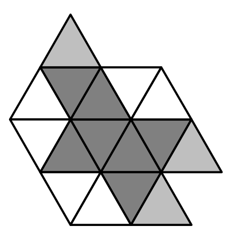
15.4. C
A pontos eredmény $V = 144\sqrt{2} \approx 203{,}647$ cm^3.
A, B, D, E → 14.8, 14.19.

15.5. D
A gúla oldaléle egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek két befogója a testmagasság és az alap átlójának fele. Innen az átló fele 7 cm-nek, az alap területe 98 cm^2-nek adódik.
A, B, C, E → 14.24.

16. Poliéder

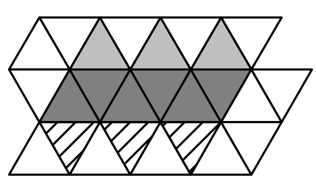
16.1. A vizsgált poliéder a *csonkolt tetraéder*, éleinek száma 18, csúcsainak száma 12.

16.2. Három megoldás van, a 2. ábrán a halványszürke háromszögek.



16.2M.2. ábra.

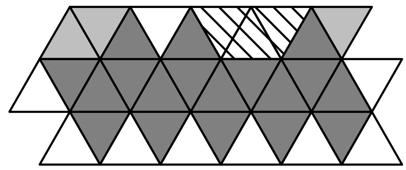
16.3. Kilenc megoldás van, a 2. ábrán a halványszürke háromszögek közül és a csíkozott háromszögek közül is egyet-egyet kell hozzávennünk a hálóhoz.



16.3M.2. ábra.

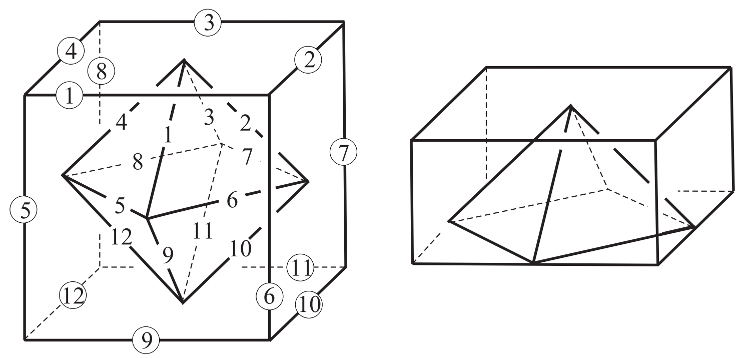
16.4. $A_{20} = A_{14}$, $A_{21} = A_{12}$, $A_{22} = A_{11} = A_2$, $A_{10} = A_4$, $A_{19} = A_1$, $A_{18} = A_3$, $A_{17} = A_5$, $A_{15} = A_7$, $A_{13} = A_8$.

16.5. Kilenc megoldás van, a 2. ábrán a halványszürke háromszögek közül és a csíkozott háromszögek közül is egyet-egyet kell hozzávennünk a hálóhoz.



16.5M.2. ábra.

16.1. a) Az így kapott test az *oktaéder*. 6 csúcsa, 8 lapja és 12 éle van.



16.1M.1. ábra.

A poliéder egy éle két lap közös határa. Ennek az élnek a duális poliéderban is megfelel egy él, az eredeti poliéder adott élben találkozó két lapjának középpontját összekötő él. A **??**. ábrán azonosan számoztuk a poliéder és a duális poliéder egymásnak megfelelő éleit.

A definícióból nem volt világos mely éleket kell lappal „összekötni”. A duális poliéder lapja az eredeti poliéder valamely csúcsában találkozó lapok középpontjai által meghatározott sokszög. A duális poliédernek annyi csúcsa van, ahány lapja az eredeti poliédernek és annyi lapja, ahány csúcsa van az eredetinek.

b) Hatoda.

Az oktaéder két négyzet alapú gúlából rakható össze. Hasonlítsunk össze egy ilyen gúlát egy olyan hasábbal, amelynek alapja a kocka egy lapja, magassága pedig fele a kocka élének (lásd a **??**. ábra jobb oldali felét).

A gúla alapja olyan négyzet, amelynek területe feleakkora, mint a kocka egy lapja és a gúla magassága is fele a kocka élhosszának. Ha egy hasáb és egy gúla alaplapja egymással egyenlő területűek és magasságuk is egyenlő egymással, akkor a hasáb háromszor akkora térfogatú, mint a gúla. Így a gúla térfogata a fél-kocka térfogatának hatoda.

c) A kocka duálisának duálisa is kocka.

d) $\frac{2}{9}$-e.

16.1. 6 lap esetén egy megoldás van: két szabályos tetraéderből kidobunk egy-egy lapot és a két lukas testet a kidobott lapok pereménél összeragasztjuk. Az élek száma 9, a csúcsoké 5.

7 és 9 lap esetén nincs megoldás.

8 lap esetén több megoldás is van. Az egyik a szabályos oktaéder (két négyzet alapú gúla alapjait kidobjuk, szabaddá váló peremeiket összeragasztjuk). Egy másik: az előbbi hat lapú test egyik lapját dobjuk ki, egy szabályos tatraéder egyik lapját is dobjuk ki és a két lukas testet

ragasszuk össze a peremüknél, a szabaddá vált háromszögeknél. Az élek száma mindkét esetben 12, a csúcsoké pedig 6.

16.5. Egyikhez sem.

5 csúcs között legfeljebb $\binom{5}{2} = 10$ él futhat, így b) kiesik és a) is csak úgy teljesülhet, ha bármely két csúcs között van él. Ilyenkor egy csúcsból 4 él indul, tehát 4 lap találkozik ott. Ezen kívül csak egy másik lap van, tehát a test négyszög alapú gúla, ami nem jó.

16.7. **a)** 2, a négyszögalapú gúla és a háromszögalapú hasáb.

b) Összesen 7 van. Nehéz annak bizonyítása, hogy nincs több.

16.1. Lásd [5]. Egy másik bizonyítás Hajós György könyvének[**?**] 195. oldalán (26.2. Tétel) is olvasható (ugyanaz a neten: [1]).

16.2. **a)** $C = 5L_5$; **b)** $C = \frac{6L_6}{2} = 3L_6$; **c)** $E = \frac{5L_5+6L_6}{2}$.

d) $L_5 = 12$;, $L_6 = 20$, $E = 90$, $C = 60$.

16.3. **a)** Ha L_3 és L_4 jelöli a háromszöglapok illetve a négyszöglapok számát, akkor $C = \frac{3L_3}{2} = \frac{4L_4}{2}$, $E = \frac{3L_3+4L_4}{2}$, így a poliédertételből $L_3 = 12$, $L_4 = 9$, $C = 18$ és $E = 36$.

b) Most $C = 3L_3 = \frac{4L_4}{3}$, $E = \frac{3L_3+4L_4}{2}$, így a poliédertételből $L_3 = 8$, $L_4 = 18$, $C = 24$ és $E = 48$.

16.1. **a)** $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$.

b) Feltehető, hogy $n_1 \le n_2 \le n_3$. Az egyenlet bal oldalán lévő törtek összege 1/2, tehát a törtek átlaga 1/6. Az megoldás is, hogy mindegyik 1/6.

$$n_{1,1} = 6, \qquad n_{2,1} = 6, \qquad n_{3,1} = 6.$$

Ha a nem mindegyik tört 1/6, akkor van közöttük nagyobb is, kisebb is. Tehát minden további esetben $n_1 < 6$. Vegyük sorra a lehetőségeket!

$n_1 = 5$. Az egyenlet bal oldalán szereplő két tört átlaga 1,5/10, azaz 1/6,666 …. Így $n_2 < 7$. A lehetséges esetek:

$n_2 = 6$. $1/n_3 = 3/10 - 1/6 = (9-5)/30 = 2/15$, így n_3 nem poz. egész.
$n_2 = 5$. $1/n_3 = 3/10 - 1/5 = (9-6)/30 = 1/10$, így $n_3 = 10$.

$$n_{1,2} = 5, \qquad n_{2,2} = 5, \qquad n_{3,2} = 10.$$

Mivel $n_1 \le n_2$, így itt tovább már nem kell keresnünk.

A további megoldások hasonló módon gyűjthetők össze. Alább már csak az eredményt közöljük:
$n_1 = 4$.

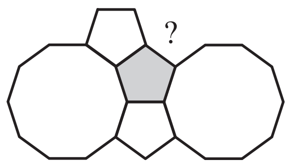
$$\begin{aligned} n_{1,3} &= 4, & n_{2,3} &= 8, & n_{3,3} &= 8.\\ n_{1,4} &= 4, & n_{2,4} &= 6, & n_{3,4} &= 12.\\ n_{1,5} &= 4, & n_{2,5} &= 5, & n_{3,5} &= 20. \end{aligned}$$

$n_1 = 3$.

$$\begin{aligned} n_{1,6} &= 3, & n_{2,6} &= 12, & n_{3,6} &= 12.\\ n_{1,7} &= 3, & n_{2,7} &= 10, & n_{3,7} &= 15.\\ n_{1,8} &= 3, & n_{2,8} &= 9, & n_{3,8} &= 18. \end{aligned}$$

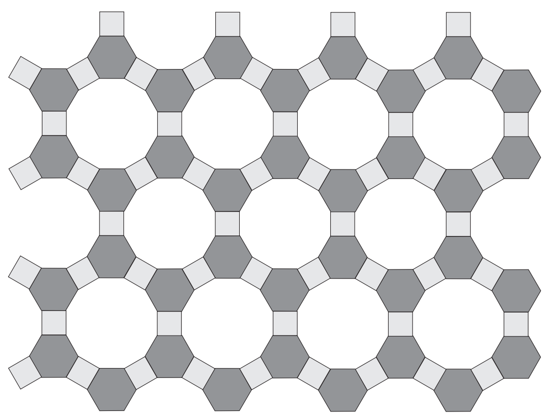
$$n_{1,9} = 3, \qquad n_{2,9} = 8, \qquad n_{3,9} = 24.$$
$$n_{1,10} = 3, \qquad n_{2,10} = 7, \qquad n_{3,6} = 42.$$

c) Ha az egyik sokszög páratlan oldalú, akkor a másik kettő nem lehet különböző oldalszámú. Valóban, a páratlan oldalú sokszög oldalai mellé a másik kétfajta sokszöget felváltva kellene tenni, egyik oldal túloldalára az egyiket, a következő oldal túloldalára a másikat, de így nem lehet körbevenni a páratlan oldalú sokszöge. Az az 1. ábrán a fenti második megoldást próbáljuk elrendezni, de látható, hogy az ötszög köré nem rakható körbe felváltva egy ötszög és egy tízszög. Ezen az elven kiesik a fenti 2., 5., 7., 8. és 9. megoldás.

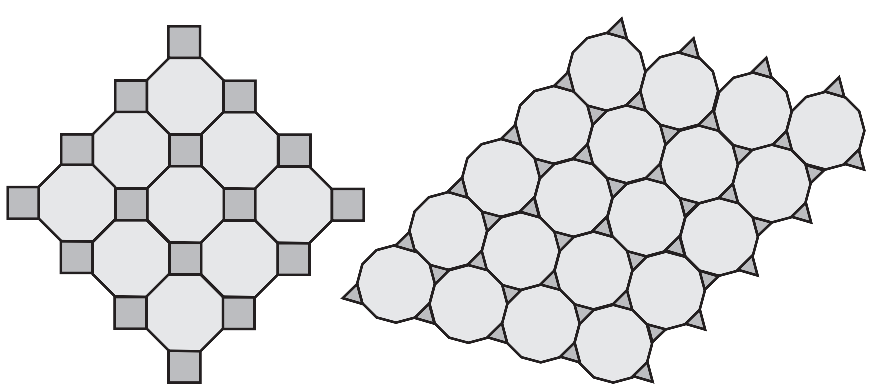


16.1M.1. ábra.

Az 1., 3., 4. és 6. megoldásokhoz található parketta is, az 1. megoldás a hatszögrács, a 4. megoldás a 2. ábrán, a 3. és 6. megoldás parkettája pedig a 3. ábrán látható.



16.1M.2. ábra.



16.1M.3. ábra.

16.2. a) A szögek alapján az $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$ egyenlet írható fel. Ennek megoldásai a 16.1. feladat b) részénél leírt módszer alapján találhatók meg:

$n_1 = 4$.

$$n_{1,11} = 4, \quad n_{2,11} = 4, \quad n_{3,11} = 4, \quad n_{4,11} = 4.$$

$n_1 = 3$.

$$\begin{array}{llll} n_{1,12} = 3, & n_{2,12} = 4, & n_{3,12} = 4, & n_{4,12} = 6. \\ n_{1,13} = 3, & n_{2,13} = 3, & n_{3,13} = 6, & n_{4,13} = 6. \\ n_{1,14} = 3, & n_{2,14} = 3, & n_{3,14} = 12, & n_{4,14} = 12. \end{array}$$

b) Mindegyikhez tartozik parketta.

c) Minden szabályos sokszögnek legalább 60°-os a belső szöge, így csak $k = 5$ és $k = 6$ jön szóba. $k = 6$ is csak hat szabályos háromszöggel, tehát a háromszögráccsal. A $k = 5$ eset a $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$ egyenlethez vezet, melynek megoldásai

$$\begin{array}{lllll} n_{1,15} = 3, & n_{2,15} = 3, & n_{3,15} = 3, & n_{4,15} = 4, & n_{5,15} = 4. \\ n_{1,16} = 3, & n_{2,16} = 3, & n_{3,16} = 3, & n_{4,16} = 3, & n_{5,16} = 6. \end{array}$$

és volt még

$$n_{1,17} = 3, \quad n_{2,17} = 3, \quad n_{3,17} = 3, \quad n_{4,17} = 3, \quad n_{5,17} = 3, \quad n_{6,17} = 3.$$

Ezek mindegyikéhez tartozik legalább egyféle parketta.

17. Poliéderek (teszt)

17.1. D!!!!PóTLANDÓ!!!

Az élek száma $180 = \frac{30 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 12 \cdot 10}{2}$.

A, B, C, E → 16.1.

17.2. B!!!!PóTLANDÓ!!!

A csúcsok száma $120 = \frac{30 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 12 \cdot 10}{3}$ (ha a minden lapra összeadjuk a csúcsainak számát, akkor a poliéder minden csúcsát háromszor számoljuk, a csúcsban összefutó mindegyik lapnál egyszer-egyszer).

A, C, D, E → 16.1.

17.3. D

A kapott poliéder a kuboktaéder, a 16.1. feladatban másképp származtattuk, de ugyanazt a testet kaptuk. Lapjainak, éleinek, csúcsainak száma rendre 14, 24 és 12.

A, B, C, E → 16.1, 16.2.

17.4. D

Az ábrán az ikozaéder látható, melynek duálisa a dodekaéder.

A, B, C, E → 16.1, 16.11.

17.5. E

Az alábbi élekhez illeszthető a hiányzó lap: A_1A_2, A_6A_7, $A_{13}A_{14}$, $A_{14}A_{15}$, $A_{15}A_{16}$.

A, B, C, D → 16.2, 16.3, 16.4.

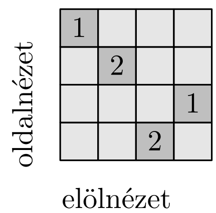
17.6. E

Ha L_3 és L_5 jelöli a háromszöglapok illetve az ötszöglapok számát, akkor $C = \frac{3L_3}{4} = 5L_5$, $E = \frac{3L_3+5L_5}{2}$, így a poliédertételből $L_5 = 12$, $L_3 = 80$, $C = 60$ és $E = 150$.

A, B, C, D → 16.2, 16.3.

18. Vegyes feladatok

18.4. 6 a jó válasz, pontosabban 6 a minimum. Kevesebb nyilván nem lehet, 6 viszont lehet. Egy lehetséges fölülnézet (a számok az egymásra rakott kockák számát jelzik) látható a 2. ábrán.



18.4M.2. ábra.

18.5. a) Legfeljebb 9. Vetítsük a kockát az egyik lapján látható 3×3-as táblára. Ennek minden mezőjére legfeljebb 1 bábu kerülhet, tehát legfeljebb 9 bástya lehetséges. 9 bástyát el lehet helyezni a térbeli táblán, pl az 1. ábrán látható módon. A számok azt jelzik, hogy hányadik szinten helyezkedik el az adott bástya. Tehát mind a három szintre három bástyát, összesen 9-et teszünk a térbeli táblára.

a) Válasz: 12. Az 1. ábrán az 1, 2, 3 számoknak hatféle sorrendje lehet mindkét táblán.

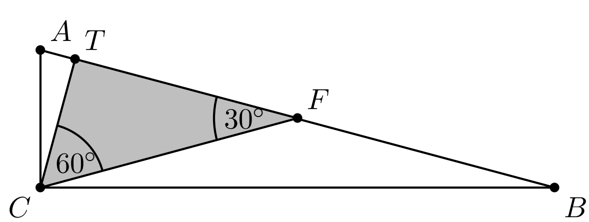
1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

18.5M.1. ábra.

18.13. Lásd [22][86. fel.]

18.20. Vizsgájuk az AB átfogó F felezőpontja, a derékszögű C csúcs és az abból induló magasság T talppontja által alkotott FTC derékszögű háromszöget!

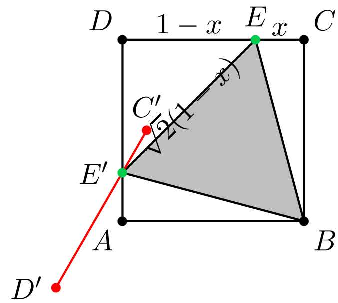


18.20M.1. ábra.

A Thalesz tétel megfordítása szerint az AB szakasz az ABC háromszög körülírt körének átmérője, tehát $FA = FB = FC$. Az FBC egyenlő szárú háromszögben $FCB\angle = FBC\angle = 15°$, így ennek a háromszögnek a külső szöge: $TFC\angle = 15° + 15° = 30°$. Az FTC háromszög tehát félszabályos háromszög, melyben $CT = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{4}AB$.

A vizsgált derékszögű háromszög magassága tehát az átfogó negyede.

18.21.



18.21M1.2. ábra.

1. megoldás. Induljunk ki a kész 2. ábrából, használjuk annak jelöléseit!

a) Az EBE' szabályos háromszög CD oldalra eső E csúcsát B körül $60°$-kal elforgatva kapjuk az E' csúcsot. Forgassuk el az egész CD oldalt! Ahol képe elmetszi DA-t ott lehet csak az E', amit B körül $-60°$-kal „visszaforgatva” kapjuk E-t. Az így kapott EBE' háromszög valóban szabályos, mert BE oldalának elforgatottja BE'.

b) Legyen $CE = x$ és így $ED = 1 - x$. A BCE derékszögű háromszögben $BE^2 = 1^2 + x^2$. Az BAE háromszuögben is felírhatjuk a Pitagórasz tételt és azt kapjuk, hogy a $BE' = BE$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $AE' = x$. Így az EDE' háromszög egyenlő szárú, benne $EE'^2 = 2 \cdot (1 - x)^2$. Ezek után a BEE' háromszög akkor és csak is akkor egyenlő szárú, ha

$$1^2 + x^2 = 2 \cdot (1 - x)^2.$$

A zárójelet felbontva, rendezéls után az

$$0 = x^2 - 4x + 1$$

egyenlethez jutunk. A bal oldalon teljes négyzethez jutunk, ha mindkét oldalhoz 3-at adunk:

$$3 = (x - 2)^2,$$

azaz $\sqrt{3} = x - 2$ vagy $-\sqrt{3} = x - 2$, tehát $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Mivel $0 < x < 1$ és $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, így $x = 2 - \sqrt{3}$ a megfelelő gyök. A szabályos háromszög oldala

$$a = \sqrt{2}(1 - x) = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 1{,}03527618.$$

2. megoldás. b) Jelölje a szabályos háromszög oldalát a. Az egységnégyzetet ez a háromszög négy részre bontja: egy a oldalú szabályos háromszögre, egy a átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögre és két egymással egybevágó a átfogójú, $15°$ és $75°$-os belső szögekke rendelkező derékszögű háromszögre. Az utóbbiról ismeretes (lásd a 18.20. feladatot), hogy átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyede. Az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, az egyenlő szárú derékszögű háromszögé $\frac{1}{4}a^2$, a $15°$-os derékszögűé $\frac{1}{8}a^2$. Így a négyzet területe

$$1 = a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right),$$

amiből $a^2 = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$, tehát

$$a = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \approx 1{,}03527618.$$

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Stipsicz András: Csomók és invariánsaik, 2006. URL http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2005/eloadas_2006_01_24_stipsicz.html. Előadás 2006. január 24-én a Fővárosi Fazekas Mihály Gimnáziumban.

[2] Arany Dániel Matematika Verseny.

[3] Bóra Eszter diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[4] Andrásfai Béla: *Versenymatek gyerekeknek*. Budapest, 1988, Calibra kiadó. ISBN 963 7740 20 1.

[5] Peter L. Glidden Erin K. Frye: Illustrating Mathematical Connections: A Geometric Proof of Euler's Theorem. 89. évf. (1996) 1. sz., *Mathematics Teacher*, 62–65. p. Magyarul olvasható a http://matek.fazekas.hu/portal/kutatomunkak/euler/euler.pdf weboldalon.

[6] Az M. C. Escher Company weboldala. URL http://www.mcescher.com/.

[7] E. Fourrey: *Curiosités Géométriques*. 4. kiad. Paris, 1938, Librairie Vuibert.

[8] Martin Gardner: *New Mathematical Diversions from Scientific American*. Chicago and London, 1961, The University of Chicago Press. ISBN 0-226-28247-3.

[9] Breznai Gyula: *Pitagorasz tétele*. Általános Iskolai szakköri füzet sorozat. 2. kiad. Budapest, 1972, Tankönyvkiadó.

[10] Homonnai Bálint diák, 2014c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[11] Urbán János Imrecze Zoltánné, Reiman István: *Fejtörő feladatok felsősöknek*. 3. átdolgozott. kiad. H-5310, Kisújszállás, Mikes utca 14., 1999, Szalay Könyvkiadó.

[12] Kalló Bernát diák, 2009c. Fővárosi Fazekas Mihály Gimnázium.

[13] Kalmár László Matematikaverseny. a Kis Matematikus Baráti Körök versenye. URL http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Kalmar_Laszlo_verseny.html.

[14] Kozmáné Jakab Ágnes Dr Szederkényi Antalné Vincze István Kosztolányi József, Mike János: *Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek*. 10. kiad. Szeged, 2004, Mozaik Oktatási Stúdió. ISBN 963 697 100 5.

[15] Kvant, fizikai és matematikai tudományos népszerűsítő folyóirat. A Szovjet, majd az Orosz Tudományos Akadémia és a Pedagógiai Tudományok Akadémiájának lapja. URL http://kvant.mirror0.mccme.ru/.

[16] A „matematika határok nélkül" weblapja. URL http://berzsenyi.tvnet.hu/~kulcsar/. Készíti és fenntartja Dr. Ökördi Péterné, a Berzsenyi Dániel Gimnázium tanára.

[17] A Polydron cég weblapja. URL http://www.polydron.co.uk/.

[18] Róka Sándor: *2000 feladat az elemi matematika köréből.* Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 50 0.

[19] Sz. I. Tokarev (szerk.): *Matematika 6-8, Kvant kis iskolások részére.* A Kvant újság melléklete sorozat, No. 3/98. köt. 1998, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 011 2. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Kvant/Kvant.htm`. A Kvant folyóiratban a 6-8-osoknak kitűzött versenyfeladatok 1990-től 1997-ig. A jelölt url-en magyar fordításban olvashatók a példák, és megoldásaik.

[20] Gombos Éva és Somogyi László: *Matematika határok nélkül.* Budapest, 1997, Scolar Kiadó. ISBN 963 85341 7 6.

[21] Faragó László és Forgó Péterné: *Geometriai szerkesztések.* Középiskolai szakköri füzetek sorozat. Budapest, 1954, Tankönyvkiadó.

[22] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár.* Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 31 4.

[23] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár 2.* Budapest, 2001, Typotex. ISBN 963 9326 10 0.

[24] Horvay Katalin és Reiman István: *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* 33. kiad. Budapest, 2004, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. ISBN 963 19 4795 5.