



Speciális gráfelméleti témák

9–10. évfolyam

Szerkesztette:
Surányi László
Ábrák: Hraskó András

Technikai munkák

(MatKönyv project, T_EX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Tartalomjegyzék

Feladatok	3
1. A skatulyaelv a gráfelméletben, I.	3
1.1. Bevezető feladatok	3
1.2. „Dirac-gráfok” és hasonlóak	3
1.3. Gráfszínezések	4
1.4. A végtelen skatulyaelv	6
2. A skatulyaelv gráfelméleti élesítései, II.	9
2.1. Turán tétele	9
2.2. Néhány geometriai alkalmazás	11
2.3. „Turán-típusú” tételek körökre	11
3. A skatulyaelv gráfelméleti élesítése, I.	15
3.1. Ramsey-típusú tételek	15
3.2. Ramsey-tétel több színre	16
3.3. Ramsey-típusú tételek körökre	17
3.4. „Geometriai Ramsey”	19
4. Szimmetria és aszimmetria, I.	21
4.1. Gráfok izomorfiája	21
4.2. Komplementerükkel izomorf gráfok	22
5. Szimmetria és aszimmetria, II.	23
5.1. Gráfok automorfizmusai	23
6. Szimmetria és aszimmetria, III.	27
6.1. Szimmetrizálás	27
Segítség, útmutatás	29
1. A skatulyaelv a gráfelméletben, I.	29
2. A skatulyaelv gráfelméleti élesítései, II.	30
3. A skatulyaelv gráfelméleti élesítése, I.	31
4. Szimmetria és aszimmetria, I.	32
5. Szimmetria és aszimmetria, II.	33
6. Szimmetria és aszimmetria, III.	34
Megoldások	35
1. A skatulyaelv a gráfelméletben, I.	35
2. A skatulyaelv gráfelméleti élesítései, II.	44
3. A skatulyaelv gráfelméleti élesítése, I.	56
4. Szimmetria és aszimmetria, I.	64
5. Szimmetria és aszimmetria, II.	67
6. Szimmetria és aszimmetria, III.	72

Alkalmazott rövidítések	73
Könyvek neveinek rövidítései	73
Segítség és megoldás jelzése	73
Hivatkozás jelzése	73
Irodalomjegyzék	75

1. FEJEZET

A skatulyaelv a gráfelméletben, I.

A fejezet témájához tartozó feladatok: a K.II.9.4. feladat

1.1. Bevezető feladatok

- 1.1. (MS) a) Igazoljuk, hogy egy véges egyszerű gráfban mindig van két azonos fokú pont.
b) Mutassunk példát olyan n pontú gráfra, amelyben csak egyetlen azonos fokú pontpár van.

1.2. (M)

- a) Az 1.1. feladatban a következő állítást kellett igazolni:

Egy kilenctagú társaságban mindenki pontosan öt másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a vagyona. (Arany Dániel-verseny 1990H)

Igaz-e az is, hogy vagy van három ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a vagyona, vagy van két-két ember, akiknek ugyanannyival változott a vagyona?

- b) Fogalmazzuk át gráfelméleti nyelvre az 1.1. feladatot és a fenti feladatot is!
c) Hogyan általánosítható a feladat?

1.3. (M) Igaz-e a következő állítás:

Egy n pontú, $3n$ élű egyszerű gráf vagy 6-reguláris, vagy van benne legalább hetedfokú pont?

1.4. (M) Hogyan általánosítható az 1.3. feladat állítása?

1.5. (MS) Egy $n = 2k$ pontú egyszerű gráfban több, mint k^2 él van. Bizonyítsuk be, hogy

- a) van benne háromszög;
b) van benne négy hosszú kör.
c) Bizonyítsuk be, hogy (izomorfiától eltekintve) egyetlen olyan $2k$ pontú, k^2 élű gráf van, amelyben nincs háromszög: az a teljes páros gráf, amelynek mindkét osztályában $k - k$ él van.

Megjegyzés. A feladat folytatását l. a Turán-típusú tételeknél: K.II.12.2. feladat,

1.6. (M) * a) Bizonyítsuk be a részben rendezett halmazokra vonatkozó alábbi tételt:

Tétel. Ha egy részben rendezett halmazban a leghosszabb lánc n elemből áll, akkor a halmaz elemei beoszthatók n osztályba úgy, hogy az azonos osztályba tartozó elemek nem összehasonlíthatók.

- b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy tranzitívan irányított gráfban a leghosszabb irányított útnak n pontja van, akkor a pontjai n színnel színezhethők úgy, hogy az egyszínűek között ne fusson él. (Egy irányított gráfot akkor és csak akkor nevezünk *tranzitív*nak, ha valahányszor \vec{ab} , \vec{bc} éle a gráfnak, mindig éle az \vec{ac} él is. L. a Bevezetőt.)

1.2. „Dirac-gráfok” és hasonlók

A témához tartozó korábbi feladatok: K.II.5.1., K.II.5.2.

1.1. (M) Egy gyár hat különböző színű fonalból kétszínű kelmét gyárt. Minden szín legalább háromféle párosításban szerepel. Bizonyítandó, hogy kiválasztható háromféle kelme úgy, hogy mindegyik szín előfordul valamelyikben. (Kürschák verseny, 1957. I. [6])

1.2. (MS) a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú gráfban minden pont foka legalább n , akkor a gráf összefüggő.

Csökkenhető-e itt a fokszámra tett kikötés?

b) Igaz-e az is, hogy a gráf kétszeresen összefüggő?

1.3. (M) a) Egy húsztagú társaságban mindenki ismeri a társaság legalább 11 másik tagját (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy van három ember, akik közül bármely kettő ismeri egymást.

Mutassuk meg, hogy ha mindenki csak 10 másikat ismer, akkor ez már nem feltétlenül igaz.

b) Hogyan általánosítható ez az állítás n tagú társaságra?

1.4. (M) Bizonyítsuk be, hogy

a) ha egy húszpontú egyszerű gráfban bármely két pont fokszámának összege legalább 21, akkor van benne háromszög;

b) ha egy n pontú egyszerű gráfban bármely két pont fokszámának összege legalább $n + 1$, akkor van benne háromszög.

c) Egy húsztagú társaságban minden ember megszámolja ismerőseit (az ismeretségek kölcsönösek). Azt tapasztalják, hogy ha bármely két ember összeadja az ismerőseinek a számát, akkor legalább 22 az eredmény. Bizonyítsuk be, hogy van négy ember, akik közül legfeljebb ketten vannak, akik nem ismerik egymást.

d) Egy n pontú egyszerű gráfban bármely két pont fokszámának összege legalább $n + 2$. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban olyan négypontú részgráf, amelyben legalább öt él van.

Ehhez a fejezethez kapcsolódnak a K.II.9.2., K.II.12.2., a K.II.12.4. feladatok.

1.3. Gráfszínezések

1.1. (M) [5] Adottak az a_1, a_2, \dots, a_{3n} egész számok, és képezzük belőlük az összes $a_i - a_j$ különbséget ($i < j$). Bizonyítsuk be, hogy az így kapott $3n(3n - 1)/2$ különbség közül legfeljebb $3n^2$ nem osztható hárommal. (Arany Dániel verseny, 1977/K, döntő)

1.2. Próbáljuk meg az 1.1. feladatot gráfelméleti feladattá átfogalmazni:

A $3n$ számnak egy $3n$ pontú gráf pontjait feleltetjük meg, két pontot akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő számok különbsége nem osztható hárommal. Azt kell belátnunk, hogy a gráfnak legfeljebb $3n^2$ éle van. A kérdés az, hogy mit tudunk a gráfról, ami alapján be tudtuk látni a feladat állítását?

1.3. (M) Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai egy 8×8 sakktábla mezői, és kössük össze két csúcsot, ha a megfelelő mezőknek

a) van közös éle,

b) van közös csúcsa.

Mennyi az így kapott gráfok kromatikus száma?

1.4. (M) ([4] 66. old.)*

Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai egy 100×100 sakktábla mezője, és tekintsük egy lépésnek azt, amikor egyik mezőről átlépünk egy vele élben szomszédos mezőre. Kössünk össze két csúcsot, ha a megfelelő mezők egymástól pontosan két lépésnyire vannak. Mennyi ennek a gráfnak a kromatikus száma?

1.5. (M) ([4] 66. old.)

Egy gráf pontjai az $1, 2, \dots, 100$ számok, két számot akkor köt össze él, ha közülük a nagyobbikat a kisebbikkel osztva kettőhatványt kapunk. Mennyi ennek a gráfnak a kromatikus száma?

1.6. (M) a) Egy gráfról tudjuk, hogy minden pont foka legalább három. Bizonyítsuk be, hogy négy színnel jól-színezhető.

b) Hogyan általánosítható a)?

1.7. (S) Bizonyítsuk be, hogy egy gráf kromatikus száma pontosan akkor kettő, ha van benne él és minden köre páros.

1.8. (MS) Hány színnel színezhető jól egy $2k + 1$ pontú kör?

1.9. (M) a) Hány lényegesen különböző három színű jólszínezése van egy ötpontú körnek?

b) És egy hétpontú körnek?

Két színezés akkor lényegesen különböző, ha a színek permutálásával és a gráf izomorfiájával nem vihetők egymásba.

1.10. (M) Bizonyítsuk be, hogy K.II.8.3. feladat gráfja nem tartalmaz három hosszú kört, és nem színezhető jól három színnel.

1.11. (S) Konstruáljunk olyan gráfot, amelyben

a) nincsen négy pontú teljes részgráf, mégsem színezhető jól négy színnel;

* b) nincsen három pontú teljes részgráf mégsem színezhető jól négy színnel.

1.12. (M) * Egy sakkedzésen minden játékos legfeljebb k pontot szerzett (döntetlenért fél pont, győzelemért egy pont jár). Bizonyítsuk be, hogy akkor

a) van olyan játékos, aki legfeljebb $2k$ mérkőzést játszott;

b) a játékosok elhelyezhetők $2k + 1$ teremben úgy, hogy az azonos terembe kerülő játékosok még nem játszottak egymással. (Arany Dániel-verseny, 1990H)

1.13. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban több, mint $n^2/4$ él van, akkor legalább három szín kell a pontjai jólszínezéséhez.

1.14. (M) a) Egy $3n$ pontú gráfról tudjuk, hogy három színnel jólszínezhető. Bizonyítsuk be, hogy a komplementere jólszínezéséhez legalább n színre van szükség.

b) Egy jn pontú gráfról tudjuk, hogy j színnel jólszínezhető. Bizonyítsuk be, hogy a komplementere jólszínezéséhez legalább n színre van szükség.

1.15. (M) * Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n pontú egyszerű gráf, akkor G kromatikus számának és a komplementere kromatikus számának az összege legalább $2\sqrt{n}$.

Fennállhat-e egyenlőség?

1.16. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha G egy n pontú egyszerű gráf, akkor G kromatikus számának és a komplementere kromatikus számának az összege legfeljebb $n + 1$.

Fennállhat-e itt egyenlőség?

1.17. (MS) * Egy százegy pontú teljes gráf éleit kiszíneztük úgy, hogy minden háromszög vagy egyszínű, vagy teljesen tarka (mind a három éle más színű). A színezéshez egynél több színt használtunk. Bizonyítsuk be, hogy ekkor legalább 12 színt használtunk.

1.18. (M) * Egy 1993 szögpontú teljes gráf minden élét kiszíneztük úgy, hogy semelyik csúcsba sem fut két azonos színű él. Bizonyítsuk be, hogy van 17 olyan pont, amelyek közül bármely kettőt különböző színű él köt össze.

1.19. (S) Bizonyítsuk be, hogy egy gráf élszínezési száma nem kisebb a gráfban fellépő maximális fokszámánál.

1.20. (M) Mennyi a Petersen-gráf

- a) kromatikus száma és
- b) élszínezési száma?

1.21. (MS) * Egy véges egyszerű 3-reguláris gráf élei lényegében – azaz a színek permutálásától eltekintve – egyértelműen színezhetők ki 3 színnel. Bizonyítsuk be, hogy a gráfban van Hamilton-kör.

1.4. A végtelen skatulyaelv

1.1. (MS) Egy zsákban végtelen sok golyó van, mindegyik színe a három alapszín egyike: piros, kék vagy sárga. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik színű golyóból végtelen sok van.

1.2. (MS) Fogalmazzuk meg a skatulyaelvet végtelen halmazokra!

1.3. (M) a) Kijelöltünk a koordinátasík pozitív negyedsíkjában végtelen sok téglalapot, mindegyiknek az origó az egyik csúcsa és egy-egy oldala a két tengelyen van, és az origóval szemközi csúcsa is rácspont. Bizonyítandó, hogy van a kijelöltek között kettő (különböző), amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat. (Vö. Kürschák verseny, 1934. [6])

Mutassuk meg, hogy viszont tetszőlegesen sok ilyen téglalap megadható, amelyek közül egyik sem tartalmazza a másikat.

b) Kijelöltünk végtelen sok egész számot azok közül, amelyeknek csak (legfeljebb) két prímosztójuk van: a 2 és a 3. Bizonyítandó, hogy e számok között van kettő, amelyek közül az egyik osztója a másiknak.

1.4. (MS) * Adott k darab prím szám, p_1, p_2, \dots, p_k , továbbá adott végtelen sok szám, amelyek mindegyikének a prímosztói e k darab prím közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy van a megadott számok között kettő, amelyek közül a kisebb osztója a nagyobbak. (Dickson, vö. [7], 240. oldal.)

1.5. (MS) Bizonyítsuk be a „végtelen Ramsey-tételt” a következő formájában:

Végtelen Ramsey-tétel/1: Bármely egyszerű végtelen gráfra igaz, hogy vagy maga a gráf, vagy a komplementere tartalmaz végtelen teljes részgráfot. Vagy másképp fogalmazva: bármely egyszerű végtelen gráf tartalmaz vagy teljes, vagy üres végtelen részgráfot.

Ezt így jelöljük: $\aleph_0 \rightarrow (\aleph_0, \aleph_0)$.

1.6. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy végtelen számsorozatban vagy van szigorúan monoton növekvő végtelen részsorozat, vagy van monoton csökkenő végtelen részsorozat.

1.7. (MS) Az 1.5. feladatban kimondott Ramsey-tétel más megfogalmazásban azt állítja, hogy ha egy megszámlálható halmaz pontpárjait kiszínezzük két színnel, akkor van olyan megszámlálható részhalmaz, amelynek minden elempárja azonos színű. Vajon igaz-e ugyanez, ha nem a kételemű, hanem a háromelemű részhalmazokat színezzük?

- a) Próbáljuk meg ezt az állítást igazolni az 1.5. feladatban adott megoldással:
- b) Fogalmazzuk meg azt a segédállítást, amire szükségünk volna ahhoz, hogy a bizonyítást át tudjuk vinni erre az esetre is!
- c) Ha jól fogalmazzuk meg, be is fogjuk tudni bizonyítani, mert valójában egy már bizonyított állításról van szó.

2. FEJEZET

A skatulyaelv gráfelméleti élesítései, II.

„TURÁN-TÍPUSÚ” TÉTELEK

Ez a típus az 1.5. feladatban részben – páros pontszámra – már bizonyított tételről nyerte nevét. (A minden gráfra érvényes tétel bizonyítását l. a K.II.12.2. feladatban, illetve a 2.3. feladatban.) Maga a kérdés és a rá adott válasz is Turán Páltól származik. Általános megfogalmazásban azt kérdezzük, hogy egy n pontú gráfban hány él kell ahhoz, hogy egy bizonyos meghatározott gráffal izomorf részgráf (az eredeti problémában: háromszög) biztosan legyen benne. Pontosán a következőképp fogalmazhatunk:

Legyen G egy tetszőleges véges gráf. Jelölje $e_G(n)$ azt a legnagyobb e számot, amelyre igaz, hogy van olyan n pontú, e élű egyszerű gráf, amelyben nincs G -vel izomorf részgráf. (Tehát minden n pontú, $e_G(n)+1$ élű egyszerű gráfban már van G -vel izomorf részgráf.) A későbbiekben a kétszeres indexelés elkerülése érdekében $e_{C_k}(n)$ -et egyszerűen $e_k(n)$ -nel fogjuk jelölni.

Azokat az n pontú, $e_G(n)$ élű gráfokat, amelyekben nincs G -vel izomorf részgráf, *extremális gráfoknak* nevezzük.

Ilyen típusú egyszerű kérdéseket foglal össze a 2.1. feladat.

Itt is egy bonyolultabb formájú skatulyaelvvel állunk szemben. Kétszeresen is. A skatulyaelv pusztán „mennyiségi” formájában azt mondja ki, hogy ha elég sok objektumom van és beosztom aránylag kevés csoportba őket, akkor az egyik csoportban jó sok lesz. Már a Ramsey-típusú tételeknél sem elégszünk meg azzal, hogy jó sok legyen valamiből (élből), hanem ezeknek az egymáshoz való viszonyáról, struktúrájáról is tudni akarunk valamit. Ezeknél tehát már valamivel minőségibb, „strukturált skatulyaelvről” van szó. Most viszont még egy élesítést bevezetünk: nem *minden* él közül válogathatunk, hanem egy bizonyos struktúrájú gráf élei között.

Egy nagyon egyszerű ilyen típusú állítás a K.II.12.1. feladat állítása: eszerint ha egy egyszerű véges gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor van benne kör. De azt ennyiből még nem tudhatjuk, hogy pontosan milyen hosszú kört tudunk garantálni. A legkézenfekvőbb kérdés – és ez volt Turán kérdése – így szól: milyen feltétel mellett tudjuk garantálni, hogy legyen háromszög a gráfban?

2.1. Turán tétele

2.1. (MS) Állapítsuk meg $e_G(n)$ értékét, ha

- G a k pontú csillag (feltesszük, hogy $n(k-1)$ páros);
- G k független élből áll, $k = 1, 2$;
- G n pontú kör.

2.2. (MS) Mutassunk példát olyan gráfra, amelyben

- minden pont foka legalább három, mégis benne három hosszú kör.
- amelyben minden pont foka legalább három, mégis benne sem három, sem négy hosszú kör.
- amelyben minden pont foka legalább $\lfloor n/2 \rfloor$ (ahol n a gráf pontszáma), mégis benne három hosszú kör.

Megmaradt tehát a kérdés: mit kell megkövetelnünk a legkisebb fokszámról ahhoz, hogy biztosan legyen a gráfban háromszög? A fenti (2.2.) feladat c) része mutatja, hogy „nagyon sokat”. De vajon elég-e ez? Az 1.3. feladat erre ad választ: ha azt kérdezzük, hogy mit kell feltennünk a legkisebb fokszámról ahhoz, hogy biztosan legyen a gráfban háromszög, akkor több, mint a pontszám fele kell: legalább $\lceil (n+1)/2 \rceil$.

Vajon nem jutunk-e jobb eredményhez, ha nem a *minimális* fokszámmra teszünk kikötést, hanem csak az *átlagfokszámmra*, vagy ami ugyanaz: az élszámmra? Hiszen elképzelhető, hogy így erősebb tételhez jutunk. Erre is láttunk már példát: láttuk, hogy ha minden pont foka legalább kettő, akkor van kör a gráfban. De azt is láttuk, hogy ennél kevesebb is elég. A K.II.7.4. feladat azt mondja, hogy elég, hogy ha az *átlagfokszám* 2 – vagyis az élszám legalább annyi, mint a foksám –, már akkor is van kör a gráfban. (Végig egyszerű gráfokról van szó.)

A következő (2.3.) feladat háromszögre mond ki hasonlót.

2.3. (MS) Bizonyítsuk be Turán Pál következő tételét:

Tétel. Ha egy n pontú egyszerű gráfban több, mint $\lfloor n^2/4 \rfloor$ él van (azaz az átlagfokszám nagyobb $n/2$ -nél), akkor van benne háromszög.

A becslés pontos: van (izomorfia erejéig pontosan egy) olyan n pontú, $\lfloor n^2/4 \rfloor$ élű egyszerű gráf, amelyben nincs háromszög.

Vagyis a bevezetett jelöléssel: $e_3(n) = \lfloor n^2/4 \rfloor$.

2.4. Bizonyítsuk be a 2.3. feladat állítását páratlan pontszám esetén az 1.5. feladat megoldásának gondolatmenetével!

2.5. (MS) * a) Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$ és egy $2n$ pontú egyszerű gráfban több, mint n^2 él van, akkor van benne négy olyan pont, amelyek között legalább öt él fut. [1]

b) Bizonyítsuk be, hogy n^2 él esetén a) állítás már nem mindig igaz: van olyan n pontú, n^2 élű egyszerű gráf, amelyben bármely négy pont között legfeljebb négy él fut.

Tehát $e_G(2n) = n^2$, ahol G a négypontú, ötélű gráf.

2.6. (MS) Fogalmazzuk meg, hogy mi köze van a háromszögekre vonatkozó Turán-tételnek (2.3. feladat) a következő kérdéshez:

Legalább hány éle van annak az n pontú egyszerű gráfnak, amelyben nincs három független pont (vagyis bármely három pontja között van kettő, amelyik össze van kötve)?

Megjegyzés. A következő (=2.7.-2.10.) feladatok ezzel a kérdéssel foglalkoznak. Érdekes azt is meggondolni, hogy az itt kapott bizonyításnak mi a köze a Turán-tételre a 2.3. feladatban adott bizonyításhoz.

2.7. (M) a) Mit tudunk mondani a maximális fokszámról egy olyan hétpontú gráfban, amelynek legalább nyolc éle van?

b) Mit tudunk mondani a maximális fokszámról egy olyan kilencpontú egyszerű gráfban, amelynek 14 éle van?

2.8. (M) Legalább hány éle van egy olyan n pontú egyszerű gráfnak, amelyben bármely három pont közül legalább kettő össze van kötve, ha $n = 4, 5, 6, 7, 8$ vagy 9 ?

A feladat kérdését úgy is megfogalmazhatjuk, hogy minimálisan hány éle van egy olyan n pontú gráfnak, amelyben nincs három független pont?

2.9. (M) Egy n pontú egyszerű gráfban nincs független ponthármas (vagyis bármely három pont közül van kettő, amelyik össze van kötve). Mit tudunk mondani a gráf maximális fokszámról?

2.10. (MS) Minimálisan hány éle lehet egy olyan n pontú egyszerű gráfnak, amelyben nincs három független pont (azaz bármely három pontja közül legalább kettő között fut él)?

Megjegyzés. Turán Pál a tételét általánosabban is felállította. Általánosan az a kérdés, hogy legfeljebb hány éle van egy olyan gráfnak, amelyben nincs teljes k -as (k pontú teljes részgráf). Vagy a komplementerre átfogalmazva: legalább hány éle van egy olyan gráfnak, amelyben nincs k független pont? Ez utóbbi kérdésre adnak választ a 2.11-2.12. feladatok.

2.11. (MS) a) Egy $3k+1$ pontú egyszerű gráfban nincs független pontnégyes. Legalább mekkora a legmagasabb fokú pont fokszáma?

b) Egy $mk+1$ pontú egyszerű gráfban nincs $m+1$ darab független pont. Legalább mekkora a legmagasabb fokú pont fokszáma?

2.12. (MS) Minimálisan hány éle lehet egy olyan n pontú egyszerű gráfnak, amelyben nincs négy független pont (azaz bármely négy pontja közül legalább kettő között fut él)?

2.13. (S) Fogalmazzuk át a 2.12. feladat a) részének eredményét arra az esetre, ha azt kérdezzük: maximálisan hány éle lehet egy $3n$ pontú egyszerű gráfnak, ha nincs benne négy pontú teljes gráf? Vagyis határozzuk meg $e_{K_4}(n)$ értékét.

2.14. (M) Legyen $n > 4$. Egy n pontú egyszerű gráfban bármely öt pont között legalább két él fut. Minimálisan hány éle van a gráfnak?

2.2. Néhány geometriai alkalmazás

2.1. (MS) * Adott egy kör területén 100 pont. Két pont „távolságán” a kör területén vett távolságát, azaz a két pont által határolt két ív közül a kisebbik hosszát értjük. (Átmérő esetén a távolság a félkörív.) Bizonyítsuk be, hogy a 100 pont között fellépő távolságok közül legfeljebb 2500 lehet a kör területének harmadánál nagyobb.

2.2. (M) a) Adott a síkon öt pont, bármely kettő távolsága legfeljebb egységnyi. Bizonyítsuk be, hogy a köztük fellépő tíz távolság közül legalább kettő kisebb, mint $1/\sqrt{2}$.

b) Adott a síkon hat pont, bármely kettő távolsága legfeljebb egységnyi. Bizonyítsuk be, hogy a köztük fellépő 15 távolság közül legalább három kisebb, mint $1/\sqrt{2}$.

c) Adott a síkon hét pont, bármely kettő távolsága legfeljebb egységnyi. Bizonyítsuk be, hogy a köztük fellépő 21 távolság közül legalább öt kisebb, mint $1/\sqrt{2}$.

d) Adott a síkon kilenc pont, bármely kettő távolsága legfeljebb egységnyi. Bizonyítsuk be, hogy a köztük fellépő 36 távolság közül legalább kilenc kisebb, mint $1/\sqrt{2}$.

2.3. (M) Adott a síkon $3n$ pont ($n > 1$) úgy, hogy bármely két pont távolsága legfeljebb egységnyi. Bizonyítsuk be, hogy a $3n$ pont között fellépő $3n(3n-1)/2$ távolság közül legfeljebb $3n^2$ van, amely nagyobb, mint $1/\sqrt{2}$. [1]

2.3. „Turán-típusú” tételek körökre

A háromszögekre vonatkozó Turán-tételnek létezik azonban másféle általánosítása is. A három pontú teljes gráf egyben három hosszú kör is. Vajon milyen feltétel mellett van például négy hosszú kör a gráfban? A K.II.12.6. feladat szerint ha minden pont foka legalább három, akkor már van benne *legalább* négy hosszú kör. De mi *pontosan* négy hosszú kört keresünk, és ez már sokkal fogasabb kérdés. A 2.2-2.4. feladatok ezt a kérdést járják körül. Előbb azonban egy valamivel egyszerűbben eldönthető esettel foglalkozunk: $e_5(n)$ meghatározásával. Érdekes

módon ugyanis könnyebb megmondani, hány él kell ahhoz, hogy legyen ötpontú kör a gráfban, mint azt, hogy hány él kell ahhoz, hogy legyen benne négypontú kör. Az egyszerűség kedvéért a páros pontszám esetére szorítkozunk.

2.1. (MS) * Bizonyítsuk be, hogy ha $k > 2$ és egy $n = 2k$ egyszerű gráfban legalább $k^2 + 1$ él van, akkor van benne C_5 . Mutassunk példát olyan $2k$ pontú, k^2 élű gráfra, amelyben nincs C_5 .

Képlettel kifejezve a feladat azt mondja, hogy $e_5(2k) = e_3(2k) = k^2$.

2.2. (M) Nyilvánvaló, hogy ha egy négypontú egyszerű gráfban legalább öt él van, akkor van benne négy hosszú kör. És – izomorfiától eltekintve – egyetlen olyan négypontú, négyélű gráf van, amelyben nincs négy hosszú kör: ez egy (háromágú) csillag, amelynek két végpontja még össze van kötve.

Bizonyítsuk be, hogy

- a) ha egy ötpontú egyszerű gráfban legalább hét él van,
- b) ha egy hatpontú egyszerű gráfban legalább nyolc él van,
- c) ha egy hétpontú egyszerű gráfban legalább kilenc él van,

akkor van benne C_4 (azaz négy hosszú kör), de kevesebb él esetén ez nem mindig igaz.

Vagyis bizonyítandó, hogy

$$e_4(4) = 4,$$

$$e_4(5) = 6,$$

$$e_4(6) = 7,$$

$$e_4(7) = 9.$$

Az általános tételt ld. a 2.4. és a 2.12 feladatban.

2.3. (MS) a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban nincs C_4 , és egy x pontjának a foka d , akkor az x -szel összekötött pontokból induló élek száma legfeljebb $n - 1 + \lfloor d/2 \rfloor$.

Bizonyítsuk be, hogy

b) $e_4(8) = 11$, azaz ha egy nyolcpontú egyszerű gráfban legalább 12 él van, akkor van benne C_4 , de ugyanez nem minden 11 élű (nyolcpontú egyszerű) gráfra igaz.

c) Bizonyítsuk be, hogy $e_4(9) = 13$, azaz ha egy kilencpontú egyszerű gráfban legalább 14 él van, akkor van benne C_4 , de ugyanez nem minden 13 élű gráfra igaz.

2.4. (MS) a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú gráfban nincs C_4 és van egy d -edfokú pontja, akkor élszáma legfeljebb $n - 1 + \lfloor d/2 \rfloor + e_4(n - 1 - d)$.

b) Bizonyítsuk be, hogy $e_4(n) \leq n - 1 + \lfloor d \rfloor + e_4(n - 1 - 2d)$ valamely $d \geq 2e_4(n)/n$ egész számra.

c) Próbáljuk c) alapján felső becslést adni $e_4(n)$ -re.

2.5. (M) a) Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban pontosan akkor nincs négypontú kör (C_4), ha semelyik két pontnak nincs két közös szomszédja.

b) Mutassuk meg, hogy ha van egy 15 pontú 4-reguláris gráf, amely nem tartalmaz C_4 -et, akkor igaz a következő: ha H egy 15-elemű halmaz, akkor a H halmaznak megadható 15 olyan négyelemű részhalmaza, amelyek közül bármely kettőnek legfeljebb egy közös eleme van.

2.6. (M) a) Mutassuk meg, hogy minden 12 pontú, 4-reguláris egyszerű gráf tartalmaz C_4 -et.

b) Tudjuk, hogy van egy n pontú, k reguláris egyszerű gráf, amelyben nincs C_4 és legyen H egy n elemű halmaz. Bizonyítsuk be, hogy megadható a H halmaznak n darab k elemű részhalmaza úgy, hogy bármely kettőnek legfeljebb egy közös eleme van.

2.7. (M) Mutassuk meg, hogy a 2.6. feladatban használt gondolatmenet „egyirányú”, az ottani b) állítás megfordítása nem igaz: abból, hogy egy n elemű halmaznak megadható n darab k elemű részhalmaza úgy, hogy közülük bármely kettőnek legfeljebb egy közös eleme van, még nem következik, hogy van olyan n pontú k -reguláris gráf, amelyben nincs C_4 .

2.8. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy húszpontú egyszerű gráf nem tartalmaz C_4 -et, akkor van egy legfeljebb negyedfokú pontja. Vagy másképp: ha egy húszpontú egyszerű gráf minden pontja legalább ötödfokú, akkor tartalmaz C_4 -et.

2.9. (M) a) Legyen G egy n^2 pontú, $n + 1$ -reguláris gráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz C_4 -et.

b) Igaz-e az állítás akkor is, ha csak azt tudjuk, hogy minden pont legalább $n + 1$ -ed fokú?

2.10. (M) a) Most azt akarjuk bebizonyítani, hogy egy húszpontú gráf már akkor is tartalmaz C_4 -et, ha az *átlagfokszám* legalább öt. Keressük meg, hogy melyik ponton akad el a 2.8. bizonyítása.

b) A K.II.10.3. feladat felhasználásával válaszoljunk a következő kérdésre: Adott egy egyszerű (véges) gráf. Összeadjuk minden csúcsra a szomszédjaiból képezhető pontpárok számát. Hogyan becsülhető alulról ez az összeg az élszámmal (és a pontszámmal)?

Hogyan becsülhető ez az összeg felülről a pontszám segítségével, ha a gráfban nincs négypontú kör?

c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy húszpontú egyszerű gráfnak legalább 50 éle van - azaz az átlagfokszáma legalább öt -, akkor van benne négypontú kör.

2.11. (M) Bizonyítsuk be az előző, 2.10. feladatot a 2.9. feladat második megoldásában használt „cseresznyékkal”.

2.12. (M) * a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban nincs C_4 (négypontú kör), akkor legfeljebb $n(\sqrt{n} + 1)/2$ éle van. Azaz $e_4(n) \leq n(\sqrt{n} + 1)/2$.

*** b) Mutassuk meg, hogy az a) feladat állítása nagyságrendileg pontos a következő értelemben. Végtelen sok n -re van olyan $n^2 - 1$ pontú, legalább $n^2(n - 1)/2$ élű egyszerű gráf, amelyben nincs négypontú kör. Vagyis végtelen sok n -re igaz, hogy $e_4(n) \geq n(\sqrt{n}/2 - 1)/2$.

2.13. (M) Döntsük el a 2.12. feladat d) részének megoldása segítségével, hogy van-e olyan m szám amelyre igaz a következő: ha egy gráfban minden pont foka legalább m , akkor a gráf tartalmaz négypontú kört.

3. FEJEZET

A skatulyaelv gráfelméleti élesítése, I.

RAMSEY-TÍPUSÚ TÉTELEK

Ez a tétel-típus olyan szerkezet? kérdésekre keresi a választ, hogy ha egy n pontú teljes gráf éleit beosztjuk néhány osztályba (kiszínezzük például két színnel, minden él egy színt kap), akkor van-e egyszínű valamilyen meghatározott gráfból, például k pontú teljes gráfból, vagy k pontú körb?l. Ez már egy finomított, "strukturáltabb" skatulyaelv: nemcsak sok egyszínű élt keresünk, hanem valamilyen – ha mégoly egyszer? – struktúrát is megkövetelünk az egyszín? élekt?l.

A fejezet "el?zménye" a K.II.3.5. feladat, valamint a K.I.18.26. feladat.

3.1. Ramsey-típusú tételek

3.1. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy hattagú társaságnak mindig van vagy három olyan tagja, akik egymással ismeretségben vannak, vagy három olyan tagja, akik között nincs két ismeretségben levő. (Kürschák-verseny, 1947, [6])

Az ismeretséget kölcsönösnek feltételezzük.

3.2. (MS) Egy öttagú társaságban nincs három ember, akik ismernék egymást, és nincs három ember, akik közül egyik sem ismerné a másikat. Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindegyikük ismerje a két szomszédját, de ne ismerje a másik két embert.

3.3. (S) Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatpontú teljes gráf éleit két színnel színezzük, akkor van három pont, amelyek között futó élek egyszínűek.

Jelölés. A fenti állítást így jelöljük: $6 \rightarrow (3, 3)$. Általában $m \rightarrow (n, k)$ jelöli azt, hogy igaz a következő állítás:

Akárhogyan is színezzük két színnel az m pontú teljes gráf éleit (egy él egy színt kap), vagy van n pontú teljes gráf az első színből, vagy van k pontú teljes gráf a második színből.

3.4. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatpontú teljes gráf éleit két színnel színezzük, akkor van legalább két egyszínű háromszög. Van-e mindig három egyszínű háromszög is?

3.5. (MS) a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy tízpontú teljes gráfban nincs háromszög, akkor a komplementerében van négypontú teljes gráf. Vagyis $10 \rightarrow (3, 4)$.

b) Igaz-e ez kilencpontú gráfra is?

c) Mi a helyzet nyolcpontú gráf esetén? (Arany Dániel-verseny 1994)

3.6. (M) Mutassuk meg, hogy ha egy 4-reguláris gráfban bármely pont szomszédai között két független él a komplementerben fut, akkor a gráfban nincs négypontú teljes részgráf.

3.7. (M) Mutassunk olyan nyolcpontú gráfot, amelyben nincs háromszög, és a komplementerében nincs négypontú teljes gráf. Vagyis mutassuk meg, hogy $8 \rightarrow (4, 3)$ (és $8 \rightarrow (3, 4)$) nem igaz.

Jelölés. Bevezetjük a következő jelölést: $r(n, k)$ jelöli azt a legkisebb pozitív r számot, amelyre igaz, hogy $r \rightarrow (n, k)$. Eddig beláttuk, hogy

$$r(3, 3) = 6 \text{ és } r(4, 3) = 9.$$

3.8. (M) Tudjuk, hogy $9 \rightarrow (4, 3)$ és $9 \rightarrow (3, 4)$. Következik-e ebből, hogy

a) $9 \rightarrow (4, 4)$?

b) ha egy 9-pontú teljes gráf éleit úgy színezzük két színnel, hogy nincs egyszínű K_4 , mind a két színből van egyszínű háromszög?

3.9. (S) Bizonyítsuk be, hogy $r(n, 2) = n$.

3.10. (MS) Bizonyítsuk be, hogy $r(n, 3) \leq \binom{n+1}{2}$, ha $n \geq 2$.

3.11. (MS) Bizonyítsuk be, hogy

a) $r(n, k) \leq r(n, k-1) + r(n-1, k)$;

b) $r(n, k) \leq \binom{n+k-2}{k-1}$, ha $n, k \geq 2$. (Erdős Pál és Szekeres György tétele.)

3.2. Ramsey-tétel több színre

3.1. (MS) a) Egy 17 tagú társaságból mindenki levelezik mindenkivel. A levelezés két ember között mindig ugyanazon a nyelven folyik, vagy franciául vagy németül vagy angolul. Bizonyítsuk be, hogy van három ember, akik ugyanazon a nyelven leveleznek egymással. (OKTV?)

Jelölés. Az állítás egyenértékű azzal, hogy ha egy 17 pontú teljes gráf éleit három színnel színezzük (minden él egy színt kap), akkor van egyszínű háromszög. Ezt így jelöljük: $17 \rightarrow (3, 3, 3)$.

3.2. (MS) Legyen $n > 17$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy m pontú teljes gráf éleit három színnel színezzük, akkor a hármasoknak legalább a 680-ad része egyszínű lesz.

3.3. (MS) Egy m csúcsú teljes gráf éleit akarjuk három színnel színezni úgy, hogy mind a három szín valóban elő is forduljon, de ne legyen „tarka” háromszög, azaz olyan háromszög, amelynek mind a három éle különböző.

Lehetséges-e ez?

3.4. (M) * Újra felkeressük a K.II.19.2. feladat $3n + 1$ tagú társaságot, amelynek bármely két tagja vagy teniszezni, vagy sakkozni, vagy pingpongozni szokott egymással. Mindegyiküknek n tenisz-, n sakk- és n pingpongpartnere van. A feladat megoldásában láttuk, hogy a társaság tagjaiból legalább $(3n + 1)n$ olyan hármas állítható össze, amelyek egymás között mind a három játékot játsszák. Azt is láttuk, hogy ez nagy n -ekre elenyészően csekély, $2/(3n - 1)$ -ed része az összes hármasnak. Vajon javítható-e az ottani eredményünk? Van-e olyan pozitív c szám, amelyre igaz, hogy a társaság tagjaiból kiválasztható legalább $c \binom{3n+1}{3}$ -féléképp három úgy, hogy azok egymás között mind a három játékot játsszák (vagyis a hármasoknak legalább a c -ed része „tarka” hármas ebben az értelemben)?

3.5. (MS) Hogyan általánosítható a 3.1. feladat állítása, ha n színnel színezzük a teljes gráfot és egyszínű háromszöget keresünk?

3.6. (M) * Bizonyítsuk be a Ramsey-tétel következő, véges (egyszerű) gráfokra vonatkozó legáltalánosabb alakját:

Általános Ramsey-tétel gráfokra. Akárhogyan adunk meg egy pozitív egész k számot, továbbá akárhogyan adjuk meg az $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$ egész számokat, van olyan m szám, amelyre (és minden nála nagyobbra) igaz, hogy

$$m \rightarrow (n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Szavakkal: van olyan m szám, hogy ha egy m pontú teljes gráfot kiszínezzük k színnel (egy él egy színt kap), akkor valamelyik i -re van n_i pontú teljes részgráf, amelynek minden éle i színű.

Jelölés. A legkisebb olyan m számot, amelyre ez az állítás teljesül, $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$ -val jelöljük.

Megjegyzés. Az állítás általánosítható úgynevezett hipergráfokra is, ekkor azt mondja ki, hogy ha egy m pontú halmaz minden l pontú részhalmazát kiszínezzük k szín valamelyikével, akkor valamelyik i -re van olyan n_i elemű részhalmaz, amelynek minden l elemű részhalmaza i színű. Ez a *Ramsey-tétel l -hipergráfokra*.

3.3. Ramsey-típusú tételek körökre

3.1. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy hat pontú gráfban, vagy a komplementerében van négy hosszú kör.

Jelölés. Ezt így jelöljük: $6 \rightarrow (C_4, C_4)$. Általában $m \rightarrow (C_k, C_n)$ jelöli azt, hogy egy m pontú teljes gráf éleit akárhogyan színezzük két színnel, vagy van az első színű k -pontú kör, vagy van a második színű n pontú kör.

3.2. (MS) a) Bizonyítsuk be, hogy $5 \rightarrow (C_4, C_4)$ nem igaz.

b) Mutassuk meg, hogy $3n - 2 \rightarrow (C_{2n}, C_{2n})$ nem igaz, tehát van olyan $3n - 2$ pontú gráf, amelyben nincs C_n és ez a komplementerére is igaz.

c) Mutassuk meg, hogy $2n - 2 \rightarrow (C_n, C_n)$ nem igaz, ha n páratlan. Vagyis páratlan n -re van olyan $2n - 2$ pontú gráf, amelyben nincs C_n és a komplementerében sincs C_n .

Megjegyzés. Igaz viszont, hogy $3n - 1 \rightarrow (C_{2n}, C_{2n})$, ha $n \geq 3$; valamint páratlan n -re $2n - 1 \rightarrow (C_n, C_n)$, ha $n \geq 5$. Ennek bizonyítása azonban sokkal bonyolultabb. Az alábbiakban (3.3.-3.11. feladat) néhány olyan feladatot mutatunk, amelyek legalább a bizonyítás gondolatvilágába bevezetnek.

3.3. (M) a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatpontú gráfban van C_5 , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_4 is.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban van C_6 , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_4 is.

c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban valamely négynél nagyobb n -re van C_n és a gráf nem egy átló nélküli C_5 , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_4 .

3.4. (MS) a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban van C_7 , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_6 is.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban van C_8 , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_6 is.

3.5. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban

- a) van C_9 , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_8 is;
- b) van C_9 , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_6 is;
- c) valamely ötnél nagyobb n -re van C_n , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_6 ;
- d) van C_{10} , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_8 .

3.6. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban van C_{2n+2} , akkor vagy van benne C_{2n+1} is, vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_{2n} .

3.7. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban

- a) van C_{11} , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_{10} is;
- b) van C_{13} , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_{12} is;
- c) van C_{15} , akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_{14} is;
- d) * van C_{2n+1} , ahol n legalább 3, akkor vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_{2n} is.

3.8. (MS) Mutassunk példát arra, hogy egy gráfban van C_{2k} , de sem a gráfban, sem a komplementerében nincs C_{2k-1} .

Megjegyzés. Ha e feladat állítását összevetjük a 3.7. feladat d) részével, akkor jól láthatjuk, mennyivel „nehezebb” egy páratlan kört találni, mint párosat. Hogy páros kört mennyivel „könnyebb”, ezt mutatja a 3.9. és a 3.9. feladat, továbbá összefoglalóan a 3.11. feladat.

3.9. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha n legalább kettő és egy gráf tartalmaz C_{2n+2} -t, akkor vagy a gráf, vagy a komplementere tartalmaz C_{2n} -et is.

3.10. (M) Legyen $m > 2n$ páros, n legalább kettő. Bizonyítandó, hogy ha egy gráf tartalmaz C_m -et, akkor vagy a gráf, vagy a komplementere tartalmaz C_{2n} -et is.

3.11. (M) Legyen $m > 2n \geq 4$. Bizonyítsuk be, hogy ha a gráf tartalmaz C_m -et és nem egyetlen átló nélkül ötszög, akkor vagy a gráf, vagy a komplementere tartalmaz C_{2n} -et.

3.12. (M) Bizonyítsuk be Schur tételének következő két speciális esetét:

a) Ha az első öt pozitív egész számot két csoportba osztjuk, akkor az egyik csoportban van megoldása az $x+y=z$ egyenletnek. Azaz van három szám valamelyik csoportban, amelyek közül az egyik a másik kettő összege. (Az $x=y$ esetet is megengedjük.) Vagy másképp fogalmazva: valamelyik csoportban van két szám, amelyek különbsége is ugyanabban a csoportban van.

b) Egy versenyen 3 ország összesen 16 versenyzője indult. Bizonyítandó, hogy van egy olyan versenyző, akinek helyezése megegyezik két másik honfitársa helyezési számának az összegével, vagy kétszer akkora, mint egy honfitársa helyezési száma.

c)* Egy nemzetközi társaságnak 1978 tagja van 6 különböző országból. A tagokat 1-től 1978-ig számozták meg. Mutassuk meg, hogy van legalább egy olyan tag, akinek a sorszáma megegyezik két honfitársa sorszáma az összegével, vagy kétszer akkora, mint egy honfitársa sorszáma. (IMO 1978/6.)

d)* Igazoljuk Schur tételét az általános formájában:

Schur-tétel. Ha n elég nagy és az első n pozitív számot k csoportba osztjuk, akkor valamelyik csoportban van megoldása az $x+y=z$ egyenletnek, vagyis valamelyik csoportban van három szám, amelyek közül az egyik a másik kettő összege.

3.4. „Geometriai Ramsey”

3.1. (M) * Bizonyítsuk be, hogy minden k pozitív egész számhoz van olyan N_k szám, amelyre igaz a következő:

Akárhogyan is adunk meg több, mint N_k darab általános helyzetű pontot a síkon, azok között van k csúcs konvex sokszög.

3.2. (MS) Adott egy d pozitív szám. Ezenkívül egy sík pontjait kiszíneztük két színnel. Bizonyítandó, hogy van két pont, A és B , amelyek azonos színűek és AB hossza pont d .

3.3. Igaz-e a 3.2. feladat állítása akkor is, ha a sík pontjait három színnel színeztük?

3.4. (S) Bizonyítsuk be, hogy a sík pontjai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy ne legyen olyan d oldalú szabályos háromszög, amelynek mindhárom csúcsa azonos színű.

3.5. (M) Adott egy d pozitív szám, továbbá kiszíneztük a sík pontjait két színnel. Bizonyítsuk be, hogy vagy van egy d oldalú szabályos háromszög, vagy van egy $2d$ oldalú szabályos háromszög, vagy van egy $\sqrt{3}d$ oldalú szabályos háromszög, amelynek mindhárom csúcsa azonos színű.

3.6. * A sík pontjait két színnel színeztük. Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor van olyan a , b , c oldalú háromszög, amelynek minden csúcsa azonos színű, ha vagy van a oldalú szabályos háromszög, vagy van b oldalú szabályos háromszög, vagy van c oldalú szabályos háromszög, amelynek minden csúcsa azonos színű.

4. FEJEZET

Szimmetria és aszimmetria, I.

A fejezet még fejlesztés alatt áll. Az első alfejezetben tárgyalt izomorfia fogalmának bevezetését lásd a K.II.2.2. feladat után az első fejezetben.

Lásd még az 1.9., ALG.II.3.9., ALG.II.3.10. ALG.II.3.11. ALG.II.3.12., ALG.II.3.13., ALG.II.3.10. feladatokat.

A fejezetben szerepelni fognak az úgynevezett **Kneser-gráfok**, ezek definícióját lásd az K.II.5.8. feladatnál.

4.1. Gráfok izomorfája

- 4.1. (M) Izomorf-e egymással a ?? ábrán látható két gráf?
- 4.2. (M) Izomorf-e egymással a 4.2. ábrán látható két gráf?
- 4.3. (M) Egy hétpontú körbe behúztuk a „rövidebb” átlókat, egy másik hétpontú körben pedig behúztuk a „hosszabb” átlókat. Izomorf-e az így kapott két hétpontú gráf? L. a ?? ábrát!
- 4.4. (S) Izomorf-e egymással a ?? ábrán látható két gráf?
- 4.5. (S) Van-e két, egymással nem izomorf ötpontú 2-reguláris gráf?
- 4.6. (S) Van-e két, egymással nem izomorf 2-reguláris hatpontú gráf?
- 4.7. (S) Izomorf-e egymással bármely két hatpontú, 2-reguláris összefüggő gráf?
- 4.8. (S) a) Van-e két, egymással nem izomorf 3-reguláris hétpontú gráf?
b) Hány egymással nem izomorf hétpontú 4-reguláris gráf van?
- 4.9. (M) Melyik állítások igazak az alábbiak közül: Ha két gráf izomorf, akkor
a) azonos a kromatikus számuk;
b) ugyanakkora az átmérőjük;
c) mindkettőben ugyanannyi a független pontok maximális száma.
- 4.10. (S) Izomorf-e egymással a következő három gráf:
a) a kocka gráfja,
b) az a nyolcpontú páros gráf, amelyet úgy kapunk a $K_{4,4}$ teljes páros gráfból, hogy elhagyunk egy teljes párosítást (?? ábra),
c) az a nyolcpontú gráf, amely egy nyolc hosszú körből áll, ennek pontjai sorban a P_i pontok, $i = 1, 2, \dots, 8$, a gráf éle még a következő négy átló: $P_1P_3, P_2P_4, P_5P_7, P_6P_8$ (4.10. ábra).
- 4.11. (S) Igaz-e, hogy izomorf gráfok komplementerei is izomorfak?
- 4.12. (MS) Hány különböző, egymással nem izomorf n pontú egyszerű gráf van, ha
a) $n = 3$,
b) $n = 4$?

- 4.13. (S) Számoljuk meg, hány egymással nem izomorf 2-reguláris n pontú egyszerű gráf van az $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ esetben!
- 4.14. (S) Igaz-e, hogy ha két összefüggő, hatpontú gráfban a fokszámok rendre $1, 1, 1, 1, 3, 3$, akkor a két gráf izomorf?
- 4.15. (M) [4], 14. old. Igaz-e, hogy ha két összefüggő, hétpontú gráfban a fokszámok rendre $1, 1, 1, 1, 2, 3, 3$, akkor a két gráf izomorf?
- 4.16. (M) Hány egymással nem izomorf hétpontú fa van, amelyben van negyedfokú pont?
- 4.17. (M) Hány olyan nem-izomorf tízpontú fa van, amelyben van két, legalább ötödfokú pont?
- 4.18. (MS) Hány olyan nem-izomorf $2k$ pontú fa van, amelyben van két, legalább k -adfokú pont?
- 4.19. (M) Hány olyan nem-izomorf tízpontú összefüggő gráf van, amelyben van két-két negyed- és másodfokú pont van, a többi pont pedig elsőfokú?
- 4.20. (M) Bizonyítsuk be, hogy a K.II.8.4. feladat megoldásában kapott gráf a ?? ábrán látható Petersen-gráf
- 4.21. (S) Melyik ismert gráf a $KG(4, 2)$ Kneser-gráf komplementere?
- 4.22. (M) Melyik ismert gráf a $KG(5, 2)$ Kneser-gráf?
- 4.23. (M) Adott két n pontú egyszerű gráf. Az egyik gráf mindegyik $n - 1$ pontú feszített részgráfiájához van a másiknak ezzel izomorf $n - 1$ pontú feszített részgráfiája. Következik-e ebből, hogy a két gráf is izomorf?
- 4.24. (M) Két négypontú gráf minden hárompontú feszített részgráfiája két élt tartalmaz. Következik-e ebből, hogy a két négypontú gráf izomorf?
- 4.25. (MS) Egy G gráfról tudjuk, hogy bármely pontját elhagyva egymással izomorf részgráfokat kapunk. Következik-e ebből, hogy a gráf reguláris?
- 4.26. (M) G és G' azonos pontszámú d -reguláris gráfok. Tudjuk, hogy G -nek van olyan x pontja és G' -nek van olyan x' pontja, amelyre $G - x$ és $G' - x'$ izomorfak. Következik-e ebből, hogy G és G' is izomorf?

4.2. Komplementerükkel izomorf gráfok

- 4.1. (M) [4], 14. old. Mely G páros gráfok izomorfak a komplementerükkel?
- 4.2. (M) [4], 14. old. Mely fák izomorfak a komplementerükkel?
- 4.3. (MS) Azt vizsgáljuk, hogy milyen n -ekre van olyan n pontú egyszerű gráf, amely izomorf saját komplementerével.
- Döntsük el a kérdést az $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ esetekben!
 - Döntsük el a kérdést $n = 8, 9$ esetben!
- 4.4. (M) Döntsük el általában, hogy n milyen értékeire van olyan n pontú egyszerű gráf, amely izomorf a komplementerével!
- 4.5. (MS) [4], 14. old. Legyen n páratlan egész szám és legyen G egy n pontú gráf, amely izomorf a komplementerével. Bizonyítandó, hogy van olyan pontja, amelynek $(n - 1)/2$ a fokszáma.

5. FEJEZET

Szimmetria és aszimmetria, II.

A fejezet még fejlesztés alatt áll.

A fejezetben a következő definíciókat használjuk:

Definíció. Egy G egyszerű gráf *automorfizmusának* a pontoknak egy olyan permutációját nevezzük, amely éllel összekötött pontoknak éllel összekötött pontokat feleltet meg és éllel össze nem kötött pontoknak éllel össze nem kötött pontokat feleltet meg. („A gráfnak önmagára való izomorf leképezése.”)

Megjegyzés. Minden gráfnak van egy triviális automorfizmusa: az, amely minden pontját önmagába viszi.

Megjegyzés. A definíció természetesen terjeszthető ki nem egyszerű gráfokra is, de erre nem lesz szükségünk.

Definíció. Egy egyszerű gráfot pontosan akkor nevezünk *csúcstranzitívnek*, ha bármely a és b pontjához található olyan automorfizmus, amely az a pontot a b pontba viszi.

Definíció. Egy egyszerű gráfot pontosan akkor nevezünk *éltranzitívnek*, ha bármely (a, b) és (c, d) éléhez van olyan automorfizmus, amely a -t c -be és b -t d -be viszi.

Megjegyzés. Tehát az éltranzitivitás nem csak azt követeli meg, hogy bármely két él egymásba vihető legyen, hanem azt is ki kell tudnunk jelölni, hogy melyik legyen az él „kezdőpontja” és melyik a „végpontja”. Hogy a gyengébb követelmény elég-e az éltranzitivitáshoz, arra vonatkozóan lásd az 5.37. feladatot.

5.1. Gráfok automorfizmusai

5.1. Igaz-e, hogy minden csúcstranzitív gráf reguláris?

5.2. (M) Hány automorfizmusa van

- a) a háromszögnek (három pontú teljes gráfnak);
- b) a négy-, öt-, hatpontú teljes gráfnak;
- c) az n pontú teljes gráfnak?

5.3. (M) Tekintsük a kocka két tetszőleges teljes párosítását. Igaz-e, hogy van a gráfnak olyan automorfizmusa, ami egyiket a másikba viszi?

5.4. (M) Tekintsük a Petersen-gráf két tetszőleges teljes párosítását. Igaz-e, hogy van a gráfnak olyan automorfizmusa, ami egyiket a másikba viszi?

5.5. (M) Hány automorfizmusa van

- a) a négy, az öt és a hat hosszú körnek;
- b) a k hosszú körnek?

Határozzuk meg e gráfok orbitjait!

- 5.6.** (M) Hány automorfizmusa van
 a) annak az ötpontú gráfnak, amely egy öt pontú körből és egy átlójából áll;
 b) a K.II.8.3. feladatban definiált gráfnak?
 Határozzuk meg e gráfok orbitjait!
- 5.7.** (M) Tekintsük a 4.1. feladat c) pontjában definiált gráfot.
 a) Hány orbitja van ennek a gráfnak?
 b) Hány automorfizmusa van ennek a gráfnak?
- 5.8.** (M) Legyen P és Q egy gráf két pontja.
 a) Bizonyítsuk be, hogy pontosan annyi automorfizmus viszi a P pontot Q -ba, mint a Q pontot P -be.
 b) Bizonyítsuk be az 5.7. feladat megoldásában használt állítást:
 Ha a P pontot a helyén hagyó automorfizmusok száma k , akkor ugyanennyi automorfizmus viszi át a gráfot a P -vel egy orbitban levő Q pontba.
- 5.9.** (M) Hány automorfizmusa van a szabályos testek gráfjának? Hány orbitja van e gráfoknak?
- 5.10.** (MS) Hány automorfizmusa van a $KG(4,2)$ Kneser-gráfnak?
- 5.11.** (MS) Hány automorfizmusa van
 a) a három-ház-három-kút gráfnak;
 b) annak a teljes páros gráfnak, amelynek egyik csoportjában három, másik csoportjában öt pont van?
 Határozzuk meg a gráfok orbitjait.
- 5.12.** (MS) Határozzuk meg minden n, k számpárra, hogy hány automorfizmusa van annak a páros gráfnak, amelynek egyik csoportjában k , másik csoportjában n pont van? (A $K_{n,k}$ teljes páros gráfnak.)
 Hány orbitja van ezeknek a gráfoknak?
- 5.13.** (M) Hány automorfizmusa van annak a $2n$ pontú gráfnak, amely n darab független élből áll?
- 5.14.** (M) Hány automorfizmusa van a következő 9 pontú, 13 élű gráfnak (ez a 2.3. feladat c) részének megoldásában szereplő gráf):
 A gráf pontjai legyenek az $x, y, z, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ pontok. A gráf egyrészt két összeragasztott ötszögből áll, ezek $xyu_1u_2u_3x$ és $xyv_1v_2v_3x$. Ezen kívül még négy él van, mind a z pontból indul és azt az u_2, u_3, v_2, v_1 pontokkal köti össze.
- 5.15.** (MS) * Hány automorfizmusa van a Petersen-gráfnak?
- 5.16.** (S) Igaz-e, hogy minden reguláris gráf csúcstranzitív?
- 5.17.** (S) Igaz-e, hogy csúcstranzitív gráf komplementere is csúcstranzitív?
- 5.18.** (S) Éltranzitív-e az a hatpontú gráf, amelyet a szabályos hatszög gráfjából úgy kapunk, hogy összekötjük a másodsomszéd pontokat is?
- 5.19.** (M) Csúcstranzitív-e a Petersen-gráf?
- 5.20.** (M) * Döntsük el, hogy milyen n és k értékekre csúcstranzitív a $KG(n, k)$ Kneser-gráf.

- 5.21.** (M) * Egy G gráfról tudjuk, hogy bármely x pontját elhagyva a kapott $G - x$ gráfok mind izomorfak. Következik-e ebből, hogy G csúcstranzitív?
- 5.22.** (M) Éltranszítív-e a Petersen-gráf?
- 5.23.** (S) Éltranszítív-e az oktaéder gráfjának komplementere?
- 5.24.** (S) Az 5.23. és az 5.22. feladatban a $KG(4,2)$ és a $KG(5,2)$ Kneser-gráfok éltranszítívitasáról volt szó. Milyen n és k értékekre igaz, hogy $KG(n, k)$ éltranszítív?
- 5.25.** (S) Éltranszítív-e a „3-ház-3-kút” gráf komplementere?
- 5.26.** (S) Igaz-e, hogy minden éltranszítív gráf komplementere is éltranszítív?
- 5.27.** (S) Igaz-e, hogy minden összefüggő éltranszítív gráf komplementere is éltranszítív?
- 5.28.** (S) Éltranszítív-e a kocka gráfjának komplementere?
- 5.29.** (M) Éltranszítív-e a Petersen-gráf komplementere?
- 5.30.** (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy éltranszítív (egyszerű) gráf komplementere összefüggő, akkor átmérője legfeljebb 2.
- 5.31.** (S) * A 4.22. feladatban láttuk, hogy a Petersen-gráf azonos a $KG(5,2)$ gráffal és az 5.29. feladatban láttuk, hogy ennek a gráfnak a komplementere éltranszítív. Az 5.18. feladatban szereplő gráf – amely a $KG(4,2)$ gráf komplementere (lásd a 4.21. feladatot) – szintén éltranszítív. Igaz-e, hogy a $KG(n,2)$ gráf komplementere minden n -re éltranszítív?
- 5.32.** (M) * Igaz-e, hogy minden Kneser-gráf komplementere éltranszítív?
- 5.33.** (S) Igaz-e, hogy minden éltranszítív gráf komplementere csúcstranzitív?
- 5.34.** (MS) * Az ikozaéder automorfizmuscsoportja és az ötpontú teljes gráf automorfizmuscsoportja is 120 elemű (l. az 5.2. és az 5.9. feladatot) Azonos-e ez a két automorfizmuscsoport?
- 5.35.** (M) * Az 5.15. feladatban láttuk, hogy a Petersen-gráfnak 120 automorfizmusa van. A 4.22. feladat szerint a Petersen-gráf a $KG(5,2)$ gráf, láttuk továbbá, hogy a Petersen-gráf automorfizmusai megegyeznek az ötelemű alaphalmaz 120 permutációjából kapható 120 automorfizmussal.
Igaz-e általában is, hogy a $KG(n, k)$ Kneser-gráfnak pontosan $n!$ automorfizmusa van?
- 5.36.** (MS) * Mi a Petersen-gráf automorfizmus-csoportja?
- 5.37.** (S) Egy gráfról tudjuk, hogy bármely két éléhez van olyan automorfizmus, amely az egyiket a másikba viszi. Következik-e ebből, hogy a gráf éltranszítív?

6. FEJEZET

Szimmetria és aszimmetria, III.

A fejezet még embrionális állapotban van.

6.1. Szimmetrizálás

6.1. (MS) Bizonyítsuk be a

Turán-tételt: Ha egy n pontú egyszerű gráfnak több mint $n^2/4$ éle van, akkor van benne háromszög. Másrészt minden n -re van (izomorfiától eltekintve pontosan egy) olyan $\lfloor n^2/4 \rfloor$ élű gráf, amelyben nincs háromszög.

Megjegyzés. Erre a tételre több bizonyítást is adunk, lásd még a 2.10. feladat megoldását és a K.II.12.2. feladat megoldását.

6.2. (M) Készítsünk egy 2000 darab valós számból álló H halmazt, amelynek egyik eleme sem nulla. Jelöljük k -val a H -ből kiválasztható olyan négyelemű részhalmazok számát, amelyekben a négy elem szorzata negatív. A H elemei közül hányat kell negatívnak választanunk ahhoz, hogy k értéke a lehető legnagyobb legyen?

Segítség, útmutatás

1. A skatulyaelv a gráfelméletben, I.

1.1. A feladat mindkét része szerepelt már korábban is.

1.5. Alkalmazzunk teljes indukciót k -ra.

a) és c) Tekintsünk két olyan pontot, amelyek össze vannak kötve egymással, és nézzük, hány él futhat ki belőlük.

b) Most két olyan pontot vegyünk, amelyek nincsenek összekötve egymással.

1.2. a) Gondoljuk meg, mit jelent, ha egy gráf nem összefüggő?

b) Ha egy gráf nem kétszeresen összefüggő, akkor van benne elvágó pont. Hagyjuk el.

1.7. Egy gráf pontosan akkor páros, ha két színnel jólszínezhető. Másrészt pontosan akkor páros, ha minden köre páros. Végül ha van benne él, akkor kell is két szín a jólszínezéséhez.

1.8. $k + 1$ csúcs között van két szomszédos.

1.11. a) Vegyük az előző feladat gráfját (a gráf definícióját l. a K.II.8.3. feladatban), vegyünk hozzá egy további v pontot és v -t kössük össze a gráf minden pontjával.

b) Hasonló módon másoljuk át a w_i $i = 1, 2, \dots, 11$ pontokra a K.II.8.3. feladat gráfját, ahogyan ott az ötponútú kört „átmásoltuk” az y_i pontokra, majd minden w_i pontot kössük össze egy további v ponttal. Ha ez a gráf jól színezhető volna négy színnel, akkor a w_i pontok összesen három különféle színt kapnának. Feltehetjük, hogy az 1,2,3 színeket kapták. Másrészt az 1.10. feladatban láttuk, hogy a K.II.8.3. feladat gráfjának jól színezéséhez legalább négy szín kell, tehát szerepelnie kell a 4-es színnek is. Vegyünk egy olyan 4-es színű pontot, amelynek van 1-es, 2-es, 3-as színű szomszédja. (Ha ilyen nincs, akkor minden ilyen pont színe 3-asra változtatható volna, tehát a gráf három színnel jólszínezhető volna.) De akkor e 4-es színű pontnak megfelelő w_i -nek is volna 1-es, 2-es és 3-as színű szomszédja, tehát nem kaphatta volna e színek egyikét sem.

Megjegyzés. Ezt az eljárást akármeddig folytathatjuk, s így a következőhöz jutunk:

Tetszőleges k pozitív egészhez van olyan gráf, amelyben nincs háromszög, kromatikus száma mégis nagyobb k -nál.

Az itt jelzett konstrukciót *Mycielski-konstrukciónak* nevezik. Lásd pl. [4], 69. és 298. oldal.

Vagyis egy G gráfból általában úgy nyerjük az úgynevezett Mycielski-konstrukcióval a G' gráfot, hogy minden x_i pontjához hozzáveszünk még egy új y_i pontot, amelyet x_i szomszédjaival kötünk össze, és veszünk egy további z pontot, amelyet az új pontokkal kötünk össze. Az 1.10. feladat gráfja az ötszögből keletkezik ezzel a konstrukcióval.

1.17. Osszuk először aszerint csoportokba a pontokat, hogy egy adott ponttal milyen színű él köti össze. Vizsgáljuk meg, milyen színű él köthet össze két azonos csoportba tartozó pontot és két különböző csoportba tartozó pontot.

1.19. A definíció egyszerű következménye!

1.21. Színezzük jól a gráf éleit három színnel és hagyjuk el a gráfból az egyik színű éleket.

1.1. Mi annak az állításnak a tagadása, hogy „valamelyik színű golyóból végtelen sok van”?

1.2. A skatulyaelv véges halmazokra egyszerűbb esetben azt mondja ki, hogy ha egy k elemű (véges) halmaz elemeit k -nál kevesebb skatulyába osztjuk (k -nál kevesebb színnel színezzük), akkor valamelyik skatulyában legalább két elem lesz (legalább két elem ugyanolyan színű lesz). Azt kell meggondolni, hogy a) mit jelent a „kevesebb”, ha az alaphalmaz végtelen, b) elég-e annyit mondani, hogy „legalább két elem ugyanolyan színű lesz”.

1.4. Az 1.3 feladat éppen ez az állítás $k = 2$ -re. Próbáljuk az ott használt gondolat alapján teljes indukcióval bizonyítani a feladatot.

1.5. Elég megszámlálhatóan végtelen gráfokra bizonyítani az állítást. Számozzuk meg a gráf pontjait és vegyük az elsőt. Két eset van: vagy végtelen sok ponttal van összekötve, akkor elég ezeket tekinteni. Vagy véges sok ponttal van összekötve, akkor viszont végtelen sok ponttal nincs összekötve, most elég ezeket tekinteni. De hogyan tovább?

1.6. A megoldáshoz használjuk a végtelen Ramsey-tételt (lásd a K.II.14.3. és az 1.5. feladatot).

1.7. Épp a gráfokra vonatkozó (végtelen) Ramsey-tételre van szükségünk!

2. A skatulyaelv gráfelméleti élesítései, II.

2.1. a)-ra a K.II.2.13. feladat ad választ.

b)-re a K.II.9.6. és K.II.9.9. feladatok adnak választ.

c)-re a K.II.10.3. feladat válaszol.

2.2. a) Korábbi feladatban szerepelt példát érdemes nézni.

b) L. a K.II.8.4. feladatot.

c) Gondoljuk meg, mit tudunk a páros gráfokról.

2.3. Alkalmazzunk indukciót. Ha minden pont foka „nagy”, akkor az előző (=1.3.) feladat szerint van benne háromszög. Ha viszont van „kis” fokú pont, akkor azt elhagyva a maradó gráfban még mindig „sok” él marad és alkalmazhatjuk az indukciós feltevést.

2.5. b) részre már láttunk példát.

a) részhez használjuk az 1.4. feladat d) részének megoldásában alkalmazott gondolatmenetet!

2.6. Tekintsük a komplementer gráfot.

2.10. Alkalmazzuk a 2.9. feladatot és a 2.7. feladat megoldásának gondolatmenetét.

2.11. Alkalmazzuk ugyanazt a gondolatmenetet – tkp. „mohó algoritmust”, mint a 2.9. feladatban.

2.12. A 2.10. feladat megoldásának gondolatmenete most is alkalmazható.

2.13. Láttuk, hogy az extrém gráfot most az a gráf szolgáltatja, amelynek pontjai három n - n pontú csoportba vannak osztva, és két pont pontosan akkor van összekötve, ha különböző csoporthoz tartoznak. Ez $3n^2$ élt jelent. És ha egy $3n$ pontú gráfban ennél több él van, akkor biztosan van benne négy pontú teljes részgráf.

2.1. Próbáljuk gráfelméleti feladatra visszavezetni a feladatot!

2.1. Használjuk azt, hogy az 1.5. feladat szerint minden $n = 2k$ pontú, $k^2 + 1$ élű gráfban van C_4 . Használjunk teljes indukciót és vizsgáljuk meg, a kör hány pontjával lehetnek a maradó pontok összekötve.

2.3. a)-hoz használjuk a 3.1. feladat megoldásában használt gondolatmenetet.

b)-hez és c)-hez használjuk egyrészt a)-t, másrészt azt, hogy ha van legfeljebb másodfokú pont, akkor azt elhagyva $e_4(8)$ értéke visszavezethető $e_4(7)$ -re, $e_4(9)$ értéke pedig $e_4(8)$ -ra.

2.4. a) következik a 2.3. feladat a) részéből.

b) abból következik, hogy ha egy gráfnak $e_4(n)$ éle van, akkor van egy olyan pontja, amelynek foka legalább $d \geq 2e_4(n)/n$.

3. A skatulyaelv gráfelméleti élesítése, I.

3.1. Válasszuk ki az egyik embert és osszuk a lehetőségeket két esetre: amikor legalább három embert ismer és amikor legfeljebb kettőt.

3.2. Gondoljuk át a 3.1. feladat megoldását.

3.3. A feladat megegyezik a 3.1. feladattal.

3.5. Most is két esetet érdemes megkülönböztetni aszerint, hogy egy pontnak hány szomszédja van.

3.9. Az állítás tautológia: azt mondja, hogy az n pontú egyszerű gráfban van vagy n pontú teljes gráf, vagy van be nem húzott él.

3.10. Használjunk teljes indukciót és alkalmazzuk a már bevált esetszétválasztást (l. például a 3.6. feladatot): vegyünk egy tetszőleges x pontot. Ha ez legalább n ponttal nincs összekötve, akkor könnyű dolgunk van. Ha viszont kevesebbrel nincs összekötve, alkalmazhatjuk az indukciós feltevést.

3.11. a) Alkalmazzuk ebben az esetben is az előző (a 3.10.) feladat gondolatmenetét.

a)-ból b) teljes indukcióval következik.

3.1. Alkalmazzuk a 3.1. feladat gondolatmenetét és magát a feladatot is!

3.2. A 3.1. feladat szerint bárhogyan választunk 17 pontot, azokból kiválasztható három, amelyek között futó három él egyszínű lesz. Hogyan lehet ezt a legjobban kiaknázni?

3.3. Először színezzünk ki egy négy pontú teljes gráfot két színnel úgy, hogy ne legyen háromszínű háromszög, majd sokszorozzuk meg a pontjait.

3.5. Alkalmazzuk a 3.1. feladat gondolatmenetét és magát a feladatot is!

3.2. a) Érdemes olyan ötpontú gráfot keresni, amely izomorf a komplementerével.

b) Használjuk ki, hogy ha egy páros gráf egyik osztályában k pont van, akkor a gráfban a leghosszabb kör legfeljebb $2k$ hosszú. (l. a K.II.8.7. feladatot.)

c) Használjuk ki, hogy n páratlan: vagy a gráf, vagy a komplementere legyen páros gráf!

3.4. Mindkét feladatnál vizsgáljuk a kör legrövidebb átlóit, és használjuk, hogy páratlan kör legrövidebb átlói ugyanolyan hosszú kört zárnak be.

3.8. A megjegyzés már sejteti az ellenpéldát.

3.2. Vegyünk egy d oldalú szabályos háromszöget. Ennek valamelyik két csúcsa azonos színű.

3.4. Osszuk fel párhuzamos sávokra a síkot egymástól $\sqrt{3}d/2$ távolságra levő egyenesekkel. Egy-egy sáv belső pontjai mind azonos színűek, viszont a szomszédos sávok felváltva 1-es és 2-es színűek. A sávhatároló egyenesek pontjai is azonos színűek és szintén felváltva 1-es és 2-es színűek. Könnyen látható, hogy emellett a színezés mellett minden d oldalú szabályos háromszögnek lesz két különböző színű csúcsa.

4. Szimmetria és aszimmetria, I.

4.4. Nem. Az egyikben van háromszög, a másikban nincs. (A második gráf páros gráf.)

4.5. Nincs, csak az ötszög ilyen.

4.6. Van: a hatpontú kör és a két, pontdiszjunkt háromszögből álló gráf nem izomorf.

4.7. Igen, mert csak egy hatszög lehet.

4.8. a) Vigyázat! Hány hétpontú 3-reguláris gráf van?

b) Egy hétpontú, 4-reguláris gráf komplementere 2-reguláris. Két darab, egymással nem izomorf, hétpontú 2-reguláris gráf van: az egyik egy hétszög (C_7), a másik egy-egy pontdiszjunkt C_4 és C_3 -ből áll.

4.10. Az a) és b) gráfok izomorfak, viszont a c) gráf nem páros gráf, tehát nem izomorf velük.

4.11. Ugyanaz a megfeleltetés, amely a gráfok között izomorfiát létesít, a komplementerek között is izomorfiát létesít.

4.12. a): négy különböző gráf van.

b): 11 különböző gráf van.

4.13. Egy 2-reguláris egyszerű gráf minden komponense kör. Tehát $n = 3, 4, 5$ esetén csak egy ilyen gráf van: a C_n . $n = 6$ esetén kettő: C_6 és a két diszjunkt háromszögből álló gráf, $n = 7$ -re is kettő: C_7 és az egy-egy háromszögből és C_4 -ből álló gráf ($C_3 \cup C_4$). $n = 8$ -ra három: C_8 , $C_3 \cup C_5$ és $C_4 \cup C_4$. $n = 9$ esetén már lehet három komponens is, tehát gráf van: C_9 , $C_6 \cup C_3$, $C_5 \cup C_4$ és $C_3 \cup C_3 \cup C_3$.

4.14. Igen. Az elsőfokú pontok nem lehetnek egymással összekötve, és a két harmadfokú pont össze van kötve egymással. (A megoldásban segít, ha meggondoljuk, hogy összefüggő gráfról van szó, s így az élszámból következik, hogy fáról van szó.)

4.18. Pontosan egy ilyen fa van. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a 4.17. feladat bizonyítása.

4.21. Az oktaéder gráfja.

4.25. Könnyít a megoldásban, ha kevesebbet használunk: elég annyi, hogy bármely $G - x$ részgráfnak ugyanannyi éle van.

4.3. a) Csak $n = 1, 4, 5$ -re van ilyen gráf.

b) Mind $n = 8$ -ra, mind $n = 9$ -re van ilyen gráf: előbbi esetben érdemes „megduplázni” a három élű út pontjait.

4.5. Mutassuk meg, hogy a gráf pontjai között az izomorfia olyan megfeleltetést hoz létre, amely megfeleltetésben bármely pontnak és a megfelelőjének a fokszámát összeadva $n - 1$ -et kapunk.

5. Szimmetria és aszimmetria, II.

5.10. Lásd a 4.21. és az 5.9. feladatot!

5.11. Érdekes először tisztázni, hány orbit van. A csoport pontjai egymás között szabadon permutálhatók.

5.12. Érdekes először tisztázni, hány orbit van. A csoport pontjai egymás között szabadon permutálhatók.

5.15. Lásd a K.II.8.4. feladat megoldását.

5.16. Nem. Ellenpélda például az a hétpontú gráf, amely egy háromszög és egy négy hosszú kör diszjunkt uniója. Ha összefüggő ellenpéldát keresünk, akkor ennek a gráfnak a komplementerét vehetjük.

5.17. Igaz. Ha van a csúcsot b csúcsba vivő automorfizmus a gráfon, akkor ez az automorfizmus a gráf komplementerén is ugyanezt teszi, mert egy automorfizmus a gráf komplementerén is automorfizmus.

5.18. Nyilvánvaló, hogy a hatszög hat oldalát ábrázoló két él (bármilyen sorrendben) egymásba vihető, ugyanígy bármely két átló is. Azt kell még meggondolni, hogy a csúcsoknak az az permutációja, amely a hatszög valamelyik két szemközti csúcsát felcseréli a többi csúcs változatlanul tartásával, a gráf egy automorfizmusa.

5.23. Igen. Ugyanis az oktaéder gráfjának komplementere olyan hatpontú gráf, amely három független élből áll.

5.24. A Kneser-gráf minden n és k értékre éltranzitív. A bizonyítás ugyanúgy megy általában is, mint a $KG(5,2)$ gráf esetében: lásd az 5.22. feladat második megoldását.

5.25. A komplementer két diszjunkt háromszög, ez éltranzitív.

5.26. A legegyszerűbb ellenpélda egy négypontú csillag komplementere. Ez egy háromszögből és egy izolált pontból áll. Tehát éltranzitív. A négypontú csillag viszont nem éltranzitív.

5.27. Ellenpélda egy hatszög. Ennek komplementere a háromoldalú hasáb gráfja, s az nem éltranzitív.

5.28. Nem. A kocka gráfjának nincsen olyan automorfizmusa, amely egy testátlót egy lapátlóba vinne át. Utóbbi két végpontjának ugyanis van közös szomszédja, a testátló két végpontjának nincs közös szomszédja.

5.31. Igen. A bizonyítás ugyanúgy megy általában is, mint a $KG(5,2)$ gráf esetében (lásd az 5.29. feladatot).

5.33. Nem igaz: ellenpélda a négypontú csillag komplementere.

Ha azonban a gráfban nincs izolált pont, akkor az állítás igaz. Vegyünk két csúcsot, a -t és b -t. Mindkettőből indul él, legyen a, a' és b, b' egy-egy ilyen él. Van olyan automorfizmus, amely az (a, a') élt (ilyen sorrendben) a (b, b') élbe viszi, s ez az automorfizmus az a csúcsot b -be viszi.

5.34. Az ötpontú teljes gráf automorfizmuscsoportja S_5 . Az ikozaédernek van tizedrendű automorfizmusa.

5.36. A feladat megoldásához sokat segít a 4.22. feladat.

5.37. Nem. A legegyszerűbb ellenpélda a négy pontból álló csillag.

6. Szimmetria és aszimmetria, III.

6.1. Válasszunk ki egy legnagyobb fokú pontot és egy másik, vele össze nem kötött pontot próbáljunk „hasznalóvá tenni” hozzá!

Megoldások

1. A skatulyaelv a gráfelméletben, I.

1.1. a) A feladat a) része szolgált a gráf fogalmának bevezetésére az első fejezetben. Emlekeztetőül megismételjük a bizonyítást.

A gráf pontszámát jelöljük n -nel.

Soroljuk fel a gráfban fellépő összes fellépő fokszámot. Minden fokszám 0 és $n - 1$ között van, ami n lehetőség. De a fokszámok között nem szerepelhet egyszerre a 0 és az $n - 1$, mert az előbbi egy izolált pontot jelent, az utóbbi viszont olyan pontot, amelyik minden más ponttal össze van kötve. Tehát a fokszámok között csak $n - 1$ szám különböző szám szerepelhet. Másrészt n pont van, tehát valamelyik fokszám kétszer fordul elő.

b) $n = 2$ -re példa egy egyetlen élből álló gráf (!), $n = 3$ -ra példa egy két élből álló út (lehetne az egy él és egy izolált pontból álló gráf is, de ez további konstrukciónk szempontjából nem előnyös). Ha már n -re találtunk egy n pontú G_n gráfot, amelyben nincs izolált pont és amelyben csak egyetlen fokszám ismétlődik és az is csak egyszer, akkor vegyünk hozzá ehhez a gráfhoz egy új pontot és kössük össze G_n minden pontjával. Az új pont foka n , de a G_n gráfban is volt egy telített pont (azaz minden más ponttal össze kötött pont), ennek a foka is n lesz. Másrészt az új gráfban nincs elsőfokú pont. Mindezen úgy segítünk, hogy az új gráfhoz még hozzáveszünk egy új y pontot és egyetlen belőle induló xy élt. Ekkor az x pont foka $n + 1$, y -é 1 és a régi gráf pontjainak foka eggyel nőtt, tehát 2 és n közé esik. Így az új $n + 2$ pontú gráfban pontosan azok az azonos fokú pontok, mint a régiben.

Ily módon minden n -re konstruáltunk egy n pontú gráfot, amelyben a fokszámok az 1 és $n - 1$ közötti számok, és pontosan egy ismétlődik közülük (pontosan egyszer).

1.2. a) Az 1.1. feladat megoldásából indulunk ki. Ha csak egy pár ember van, akik ugyanannyi petákot kaptak, s a többi hét petákjainak száma az övékétől is, egymásétól is különböző, akkor a kapott petákok összege legfeljebb nyolccal lehet több 36-nál, ami még mindig kevesebb 45-nél. Tehát b) állítás is igaz.

b) Gráfelméleti nyelven adott egy kilencpontú irányított gráf, amelyben nincs hurokél és többszörös irányított él (az xy és az yx él szerepelhet egyszerre!), továbbá minden pont kifoka öt. Azt állítjuk, hogy van két pont, amelynek a befoka egyenlő. Sőt, vagy van három pont, amelynek befoka azonos, vagy van két-két pont, amelyeknek a befoka azonos.

c) Ha adott egy n pontú irányított gráf, amelyben nincs hurokél és többszörös irányított él, továbbá minden pont kifoka legalább $n/2$, akkor van két pont, amelyek befoka egyenlő. A kifokok összege ugyanis egyenlő a befokok összegével. Ha nincs hurokél, és minden pont befoka különböző volna, akkor a befokok összege $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$ volna. De minden pont kifoka legalább $n/2$, ezért a kifokok összege legalább $n^2/2 > n(n - 1)/2$, tehát a kifokok és befokok összege nem egyezne. Ez az ellentmondás bizonyítja az állítás helyességét.

Valójában elég azt feltételezni, hogy a kifokok *átlag*a nagyobb $(n - 1)/2$ -nél, már akkor is igaz, hogy van két azonos befokú pont.

1.3. Ha a gráfnak n pontja és $3n$ éle van, akkor az átlagfokszáma 6 . Tehát az állítás igaz.

1.4. Ha a gráfnak n pontja és kn éle van (k pozitív egész), akkor az átlagfokszáma $2k$. Tehát vagy $2k$ -reguláris a gráf, vagy van legalább egy legalább $2k + 1$ -ed fokú pontja.

1.5. a)-t is, b)-t is teljes indukcióval bizonyítjuk. Egy kis csel: $k = 1$ a kezdő lépés. Ugyanis ekkor az állítás semmitmondóan teljesül: nincs kétpontú, 1-nél több élű gráf! De akit ez nem nyugtat meg, az ellenőrizheti, hogy egy négypontú, legalább ötélű gráfban van háromszög és van négyszög is. (A komplementere egyetlen él.)

a) Tegyük fel ezután, hogy k -nál kisebb értékekre már tudjuk az állítást. Legyen G egy $n = 2k$ pontú, legalább $k^2 + 1$ élű gráf és legyen x és y két egymással összekötött pontja. Ha van közös szomszédjuk, akkor ez a pont és x, y egy háromszöget alkot. Ha viszont nincs közös szomszédjuk, akkor a többi $2k - 2$ pont mindegyike legfeljebb egyikükkel van összekötve. Ez azt jelenti, hogy $G - x - y$ -ban legalább $k^2 + 1 - 1 - (2k - 2) = (k - 1)^2 + 1$ él van. Ez a gráf $2(k - 2)$ pontú, tehát az indukciós feltevés szerint van benne háromszög.

c) is hasonlóan jön ki. $k = 2$ -re ellenőrizhető, hogy csak a négypontú kör jó. Tegyük fel, hogy $k - 1$ -re már tudjuk az állítást és legyen G egy $2k$ pontú, k^2 élű gráf, amelyben nincs háromszög. Ismét vegyünk két éllel összekötött pontot, x -et és y -t. Nincs közös szomszédjuk, hiszen nincs háromszög. $G - x - y$ minden pontja legfeljebb az egyikkel van összekötve, tehát legalább $k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$ él fut $G - x - y$ -ban. Mivel $G - x - y$ -ban sincs háromszög, ezért több él nem futhat, és ennyi is csak úgy, hogy egy teljes páros gráfról van szó, amelynek mindkét osztályában $k - 1$ pont van. Másrészt x és y -ből kell kiindulnia a maradó $2k - 1$ élnek. Mivel xy össze vannak kötve és a gráfban nincs háromszög, ezért x -ből az egyik osztályba fut minden él, y -ből a másikba. Vagyis G is teljes páros gráf és mindkét osztályában $k - k$ pont van.

b) Tegyük fel, hogy k -nál kisebb értékekre már tudjuk az állítást. Legyen G egy $n = 2k$ pontú, legalább $k^2 + 1$ élű gráf és legyen most x és y két össze nem kötött pont. (Ha ilyen nincs, akkor teljes gráfról van szó, az állítás triviálisan teljesül.) Ha x -nek és y -nak van legalább két közös szomszédja, akkor ezekkel együtt egy négy hosszú kört (C_4 -et) alkotnak. (Ha u és v két közös szomszéd, akkor $xuyv$ négy pontú kör.) Ha viszont legfeljebb egy közös szomszédjuk van, akkor $G - x - y$ -ban ismét legalább $k^2 + 1 - 1 - (2k - 2) = (k - 1)^2 + 1$ él van. Ez a gráf $2(k - 2)$ pontú, tehát az indukciós feltevés szerint van benne négypontú kör.

1.6. a) és b) állítás ekvivalens: egy részben rendezett halmazt legegyszerűbben éppen egy tranzitívan irányított gráffal ábrázolunk, ahol az \overrightarrow{ab} irányított él éppen azt jelenti, hogy a „kisebb” b -nél.

Ami pedig a feladat állítását illeti, a K.II.16.2. feladat megoldásában éppen ezt láttuk be.

1.1.

1. megoldás. Válasszunk ki egy kelmét, ennek színeit nevezzük el 1-esnek és 2-esnek. Vegyünk egy másik színt, ez biztosan szerepel párban egy, az 1-estől és 2-estől különböző színnel (különben csak kétféle kelmében fordulna elő). Legyenek ennek a kelmének a színei tehát 3 és 4. Ha a kimaradt ötödik és hatodik szín szerepel együtt valamelyik kelmén, már kész is vagyunk. Ellenkező esetben mind az 5-ös szín, mind a 6-os szín az 1-es, 2-es, 3-as és 4-es szín közül hárommal szerepel együtt. Szimmetria okokból feltehetjük, hogy például az 5-ös szín az 1-essel és a 2-essel is szerepel. Ám a 6-os színnek is kell valamelyikkel együtt szerepelnie. Ha például az 1-essel szerepel együtt, akkor az 1,6, a 2,5 és a 3,4 színű kelmék megfelelnek. Ha a 2-essel, akkor a 2,6, 1,5 és a 3,4 kelmék megfelelőek.

2. megoldás. Vegyük észre, hogy ez a feladat szinte azonos a K.II.9.1. feladattal. Az ottani ismeretségnak az itteni kelmék felelnek meg. Gráfelméleti nyelven megfogalmazva a különbséget: ott azt mondtuk, hogy minden pont foka három, itt azt mondjuk, hogy minden pont foka legalább három.

1.2. a) Ha a gráf nem volna összefüggő, akkor legalább két komponensre bomlana. Volna tehát olyan komponense, amelyben legfeljebb n pont van. Ebben a komponensben levő pontok fokszáma legfeljebb $n - 1$ lehetne, amit a feltétel kizár.

A foksámra tett kikötés nem csökkenthető, hiszen abban a gráfban, amely két darab pontdiszjunkt, n pontú teljes gráfból áll, minden pont foka $n - 1$ és nem összefüggő.

b) Az a)-ban adott bizonyítás szinte szó szerint megismételhető. Tegyük fel, hogy a gráf nem kétszeresen összefüggő. Ekkor van elvágó pontja, azaz olyan x pontja, amelyet elhagyva a gráf több komponensre hullik szét. Ezek egyikében legfeljebb $n - 1$ pont van. Azok a pontok, amelyek ebben a komponensben vannak, legfeljebb e komponens pontjaival, valamint x -szel lehetnek összekötve, ami összesen legfeljebb $n - 1$ pont. Ezt a feltételünk kizárja.

Megjegyzés. Természetesen az a) pontban adott példa most is érvényes: ha a minimális fokszámot csak eggyel csökkentjük, már nem igaz az állítás.

1.3. a) Vegyünk két embert, aki ismeri egymást. A többi 18 emberből mindketten legalább tizet-tizet ismernek. Kell tehát lennie közös ismerősüknek. Ezt kellett bizonyítanunk.

Ha a társaság két, tíztagú csoportra bontható úgy, hogy mindenki csak a másik csoport tagjait ismerje, akkor mindenki 10 másik embert ismer és mégis három, akik kölcsönösen ismernék egymást.

b) Az a) megoldás gondolatmenetével a következőt kapjuk:

Ha egy n tagú társaságban (ahol az ismeretségek kölcsönösek), mindenki legalább $\lceil (n + 1)/2 \rceil$ másikat ismer, akkor van három ember, akik közül bármely kettő ismeri egymást. Viszont elképzelhető olyan társaság, ahol mindenki legalább $\lceil (n - 1)/2 \rceil$ másikat ismer, de nincs három ember, akik közül bármely kettő ismerné egymást.

Valóban: vegyünk két embert, akik ismerik egymást. Mindketten $\lceil (n - 1)/2 \rceil$ másikat ismernek a társaság többi tagja közül, ez összesen legalább $n - 1$ ember, de rajtuk kívül csak $n - 2$ ember van, tehát van közös ismerősük, és ezt akartuk belátni.

Az ellenpélda pedig a következő. Ha a társaság két olyan csoportra bontható, ahol mindenki csak a másik csoport tagjait ismeri, akkor nincs három ember, aki közül bármely kettő ismerné egymást.

Páros n esetében álljon mindkét csoport $n/2 - n/2$ tagból. Páratlan n -re álljon az egyik csoport $(n - 1)/2$ tagból, a másik csoport $(n + 1)/2$ tagból. Mindkét esetben igaz, hogy mindenki ismer legalább $\lceil (n - 1)/2 \rceil$ embert.

1.4. b) Legyen x és y két éllel összekötött pont. Ha van közös szomszédjuk, akkor e közös szomszédokkal egy háromszöget feszítenek. Ha nem volna közös szomszédjuk, akkor a maradó $n - 2$ pont egyikébe sem mehet két él x, y halmazból, tehát összesen legfeljebb $n - 2$ él fut ki x -ből és y -ből. Ez azt jelenti, hogy fokszámaik összege legfeljebb n . Ez az ellentmondás bizonyítja az állításunkat.

d) Legyen x és y két éllel összekötött pont. Ha van két közös szomszédjuk, akkor e két közös szomszéd és x, y egy megfelelő pontnégyes. Ha nem volna két közös szomszédjuk, akkor a $2n - 2$ pont közül legfeljebb eggyel lehetne mindkettő összekötve, a maradó $2n - 3$ ponttal legfeljebb egyikük volna összekötve. Ez összesen legfeljebb $2n - 1$ él volna. Tehát x és y fokszámának összege legfeljebb $2n + 1$ volna.

1.1.

1. megoldás. Osszuk be a számokat a hármas maradékuk szerint három csoportba, legyen k a hárommal oszthatók száma, l a hárommal osztva egy maradékot adók száma és m a hárommal osztva -1 maradékot adók száma. Az egy csoportban levők különbsége osztható hárommal, a különböző csoportokban levőké nem, tehát pontosan $kl + lm + km$ olyan különbség van, amelyik

nem osztható hárommal. Tudjuk, hogy $k + l + m = 3n$, és azt kell bizonyítani, hogy $kl + lm + km \leq 3n^2 = (k + l + m)^2/3$. Ebből hárommal való szorzás és rendezés után az ismert $kl + lm + km \leq k^2 + l^2 + m^2$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Egyenlőség csak $k = l = m = n$ esetén van.

2. megoldás. Azt tudjuk, hogy a gráf pontjai három csoportba sorolhatók úgy, hogy az egy csoportba tartozó pontok között nem fut él. Vagyis három részre vágható úgy, hogy a három rész egy-egy független pontrendszeret alkosson.

1.3. a) A sakktábla szokásos színezése bizonyítja, hogy ez a gráf két színnel színezhető (páros) gráf.

b) A sakktábla bal alsó sarkában álló négy mező (A1, A2, B1, B2) mindegyikét él köti össze mindegyikkel, tehát a színezéshez legalább négy szín kell.

Négy szín elég is a színezéshez. Ha két nem szomszédos sor mezői közül semelyiket semelyikkel nem köt össze él, tehát ha minden második sorban meghagyjuk a szokásos színezést, viszont a többiben a feketét kékre, a fehérét zöldre változtatjuk, akkor a gráf egy megfelelő színezését kapjuk.

1.4. Számozzuk meg az oszlopokat és a sorokat egytől százig és jelölje $(i|j)$ az i -edik oszlop j -edik sorában álló mezőt. Két ilyen pont akkor van összekötve, ha vagy mindkét „koordinátájuk” eggyel különbözik, vagy valamelyik „koordinátájuk” azonos, a másik különbsége kettő.

Az $(1|2)$, $(2|1)$, $(2|3)$, $(3|2)$ mezők közül mindegyik össze van kötve mindegyikkel, tehát K_4 -et alkot, így a színezéshez kell legalább négy szín.

Megmutatjuk, hogy ha nem a 100×100 sakktáblát, hanem az egész sík rácspontjait vesszük, azok is kiszínezhetők négy színnel úgy, hogy a feladat értelmében két lépésre levő pontok ne legyenek egyszínűek.

Világos, hogy ha $(a|b)$ és $(c|d)$ össze van kötve, akkor $a+b$ és $(c+d)$ paritása azonos. Tehát elég például azokat a mezőket négy színnel jól színeznünk, amelyekben a koordináták összege páros és utána eggyel eltolni a színezést „felfelé”. Ezt például a következőképpen tehetjük. A páros abszcisszájú oszlopokban a páratlan ordinátájú pontokat felváltva fehérre és feketére színezzük, a páratlan abszcisszájú oszlopokban pedig felváltva kékre és zöldre. Könnyen látható, hogy ez a színezés jólszínezi az összes pontot.

1.5. Írjunk fel minden a számot $a = 2^k b$ alakban, ahol b páratlan. Ez a felírás egyértelmű. Színezzük a -t ezután a k -edik színnel. Ha b is ugyanezt a színt kapta, akkor hányadosuk különbözik 1-től és két páratlan szám hányadosa, tehát nem kettőhatvány. Ez tehát a gráf egy jólszínezése 7 színnel. Másrészt az 1,2,4,8,16,32,64 számok közül bármely kettő össze van kötve éllel, tehát K_7 -et alkot a gráfban, így hétnél kevesebb színnel nem is színezhető a gráf.

1.6. a) Vegyük sorra a pontokat, az elsőt színezzük tetszőlegesen. Minden soron következőt ki tudunk színezni egy olyan színnel, amilyen színűvel még nincs összekötve, hiszen összesen legfeljebb három ponttal van összekötve, s ha már mindegyiket kiszíneztük, akkor is marad még egy szín a négy közül, amelyik nem szerepel közöttük. Ezzel kiszínezzük, majd vesszük a következő pontot.

Ez az eljárás a gráfot négy színnel jól színezi.

b) Ugyanígy bizonyítható, hogy ha egy gráfban minden pont foka legfeljebb k , akkor $k + 1$ színnel jól színezhető. A bizonyítást lásd a ALG.II.2.10. feladatnál. Lásd továbbá a megoldáshoz fűzött megjegyzéseket arról, hogy mennyiben élesíthető ez az állítás.

1.8. Akárhogyan osztjuk két csoportba a gráf pontjait, valamelyik csoportban lesz két szomszédos, ezek össze vannak kötve éllel, tehát nem lehetnek azonos színűek. A páratlan körök tehát

nem színezhetők két színnel. Három színnel viszont jól színezhetők: egy tetszőleges pontját kiszínezzük a 3-as színnel, a maradó pontokat pedig felváltva 1-es és 2-essel.

1.9. a) A C_5 kör pontjait három nem üres csoportba kell sorolni, tehát az egyikbe pontosan egy jut. Kapja ez a pont a hármast színt. A másik két csoportba pedig a maradó négy pontot felváltva kell besorolni, ami megint egyértelmű. A kör pontjait tehát lényegében egy féleképpen tudjuk kiszínezni: a körön sorba haladva az 1,2,1,2,3 színekkel.

b) A hétpontú kör 3-színezésénél biztosan lesz három azonos színű pont, szimmetria okokból feltehető, hogy ezek az 1-es színt kapják. Nyilván másodsomszédok, tehát megintcsak szimmetria okokból feltehető, hogy a kör első, harmadik és ötödik pontja 1-es színű. A hatodik és hetedik pontnak a másik két színt kell kapnia, és a színek szabad permutálhatósága miatt feltehető, hogy a hatodik kapta a 2-es színt, a hetedik a 3-as színt.

Ezután látszólag még négy lehetőség van: a második és a negyedik pont egymástól függetlenül lehet 2-es és 3-as is. De ha mindkettő azonos színű, akkor a színeloszlás 3-3-1, és az összes ilyen színezés a csúcsok forgatásával, tükrözésével, valamint a színek permutálásával átvihető az 1,2,1,2,1,2,3 színezésbe. Ezekből tehát csak egy van. Marad az az eset, ha a második pont 2-es színű és a negyedik pont 3-as színű, vagy fordítva: 1,2,1,3,1,2,3 és 1,3,1,2,1,2,3. E kettő viszont nem vihető egymásba. Ezt a legegyszerűbben úgy láthatjuk be, hogy mindkettőben 3-2-2 ugyan a színeloszlás, de az utóbbiban az egyik szín, amiből kettő van, két másodsomszédos ponthoz tartozik, míg a másikban nincs két ilyen pont.

A hétpontú körnek tehát három lényegesen különböző három színű jólszínezése van.

Megjegyzés. A helyzet lényegesen bonyolódik már kilencpontú körnél is (a színeloszlás is háromféle lehet: 4-4-1, 4-3-2 vagy 3-3-3), és az általános esetben a $2k + 1$ pontú kör 3-színezései szinte áttekinthetetlenek.

1.10. Tegyük fel, hogy a gráf jól színezhető három színnel. Legyen a z pont színe 3-as. Az y_i pontok ebben a színezésben csak az 1 és a 2 színeket kaphatják. Viszont az x_i pontok egy C_5 -öt alkotnak, tehát a színezésük az 1.9. feladat a) része szerint valamelyik ponttól indulva az 1,2,3,1,2. Ha a 3-as színt az x_i pont kapta, akkor a neki megfelelő y_i pont színe sem lehet sem 1-es, sem 2-es, mert x_i -nek, s így y_i -nek mindkét színű szomszédja van.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a feladat gráfiának kromatikus száma legalább négy. Másrészt négy színnel nyilvánvalóan jól is színezhető: az x_i pontokat jól színezzük három színnel, az y_i pont ugyanazt a színt kapja, mint a neki megfelelő x_i pont, s végül z színe a negyedik szín lesz.

1.12. a) Ha n versenyző volt és mindenki legfeljebb k pontot szerzett, akkor az összesen megszerzett pontszám legfeljebb nk . Ez ugyanennyi mérkőzést jelent. Tehát összesen legfeljebb nk mérkőzés zajlott már le. De ha mindenki legalább $2k + 1$ mérkőzést játszott volna, akkor ez összesen legalább $n(2k + 1)/2$ mérkőzést jelentene, ami több, mint nk .

b) A résztvevők számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n < 2k + 2$, akkor az állítás triviális, így kezdő lépésünk van.

Tegyük fel, hogy $n - 1$ versenyző esetén az állítást már tudjuk. Ha n versenyzőnk van, akkor is tudjuk a) szerint, hogy van egy V versenyző, aki legfeljebb $2k$ mérkőzést játszott. Osszuk be tehát a többi $n - 1$ versenyzőt $2k + 1$ terembe a megfelelő módon. Ezt az indukciós feltétel szerint meg tudjuk tenni, hiszen ha csak erre az $n - 1$ versenyzőre szorítkozunk, akkor is igaz, hogy a közöttük lejátszott mérkőzéseket nézve is mindenki legfeljebb k pontot szerzett.

Nézzük, hány teremben lehet olyan versenyző, akivel V már játszott. Mivel ő legfeljebb $2k$ versenyzővel játszott, legfeljebb $2k$ ilyen terem van. Van tehát olyan terem, amelybe be tudjuk tenni. Ezt akartuk bizonyítani.

1.13. Tegyük fel, hogy két színnel sikerült kiszíneznünk a gráfot. Az egyik színt k , a másik színt $n - k$ pont kapta. Ekkor a gráfban futó minden él az első k pont valamelyikét köti össze a második

n – k pont valamelyikével. Ez összesen $k(n - k) \leq n^2/4$ él (használtuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést).

1.14. a) A három színnel jól színezhetőség azt jelenti, hogy három osztályba sorolhatók a gráf úgy, hogy azonos csoportbeli pontok között ne fusson él. Ha $3n$ pont van, akkor az egyik csoport legalább n pontból áll, s ezek között minden él a komplementerben fut. Tehát a komplementerben minden pontnak más színűnek kell lennie.

b) Az a)-ban adott gondolatmenet szó szerint elismételhető.

1.15. * Ha az n pontú gráf kromatikus száma k , akkor az előző (=1.14.) feladat a) és b) gondolatmenete szerint van egy legalább $\lceil n/k \rceil$ pontból álló független ponthalmaz. Ennek pontjai között minden él a komplementerben fut, tehát a komplementer kromatikus száma legalább ennyi. A kettő összege tehát legalább

$$k + \lceil n/k \rceil \geq 2\sqrt{n}$$

(Használtuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést.)

Egyenlőség nyilván csak akkor állhat, ha $n = m^2$ négyzetszám. Ezesetben a gráf pontjait osszuk m darab m -es csoportra és kössük össze a különböző csoportokhoz tartozó pontokat. Az így kapott gráf kromatikus száma éppen m . Másrészt komplementere m darab páronként pontdiszjunkt m pontú teljes gráfokból áll, ezek kromatikus száma is m . Tehát mind a gráfnak, mind a komplementerének a kromatikus száma \sqrt{n} , azaz e gráfra fennáll az egyenlőség.

1.16. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 1$ -re igaz, mert egy egy pontú gráf és a komplementere is 1-kromatikus.

Tegyük fel, hogy n -re már tudjuk az állítást és vegyünk egy $n + 1$ pontú gráfot. Válasszuk ki egy tetszőleges x pontját. Tekintsük a $G - x$ gráfot és komplementerét. Ha $G - x$ kromatikus száma k , akkor az indukciós feltevésünk szerint a komplementer kromatikus száma legfeljebb $n - k$. Másrészt ha x pont foka a G -ben $< k$, akkor $G - x$ egy k színű jól színezése gond nélkül kiterjeszthető rá is: azt a színt kapja, amilyen színűvel nincs összekötve. Ellenkező esetben a foka legalább k , de akkor a komplementerben a foka legfeljebb $n - k - 1$, s ekkor a komplementer egy $n - k$ színű jólszínezéséhez vehetjük ugyanígy hozzá. A komplementernek pedig van $n - k$ színű jólszínezése, mert kromatikus száma legfeljebb $n - k$.

Ha a gráf egy csillag, akkor két színnel színezhető. A komplementere pedig egy izolált pont és egy $n - 1$ pontú teljes gráf, aminek $n - 1$ a kromatikus száma, ez összesen $n + 1$. Az egyenlőség tehát fennállhat.

Van általánosabb példa is. Ha veszünk egy k pontú teljes gráfot és annak pontjait a maradó $n - k$ ponttal is összekötjük, akkor a kapott gráf $k + 1$ kromatikus, a komplementere pedig k darab izolált pontból és egy $n - k$ pontú teljes gráfokból áll, aminek $n - k$ a kromatikus száma.

1.17. Tegyük fel, hogy a teljes n pontú gráf színezéséhez $k > 1$ színt használtunk. Vegyünk egy a pontot a gráfból és osszuk a gráf többi pontját csoportokba aszerint, hogy x -szel milyen színű él köti össze őket. Az i -edik csoportba kerülnek azok, amelyeket x -szel i -edik szín köt össze. Az i -edik csoport pontjait a feltétel szerint i színű él köti össze, viszont az i -edik és j -edik csoport egy-egy pontját az i -edikről és a j -edikről különböző színű él köti össze. Ebből viszont következik, hogy ha veszünk az egyik csoportból két pontot, egy másiktól egyet, ezek tarka háromszöget alkotnak. Ha ugyanis az i -edik csoport egyik pontja x , a j -edik csoport két pontja y és z , akkor az yz él j színű, viszont sem az xy , sem az xz él nem lehet j színű (az axy , illetve az axz háromszög miatt). Ez viszont azt jelenti, hogy a j -edik csoportban legfeljebb kettővel kevesebb pont van, mint ahány színt használtunk, tehát legfeljebb $k - 2$ pont van. Ugyanez

minden csoportra elmondható. Mivel a csoportok száma is legfeljebb k , azt kapjuk, hogy $n \leq k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$. Ebből következik, hogy $n = 101$ esetén k legalább 12. Ezt kellett bizonyítani.

1.18. Válasszunk ki először két pontot, a közöttük futó él legyen $e = xy$, színe legyen 1-es. Nézzük meg, hogy egy harmadik mikor „nem illik” e két ponthoz. Nyilván akkor nem, ha valamelyikükkel az 1-es szín köti össze. Mármost a feladat feltételét x -re alkalmazva azt kapjuk, hogy nem lehet két olyan pont, amellyel x -et 1-es színű él köt össze. Ugyanígy nem lehet két olyan pont sem, amellyel y -t 1-es színű él köt össze. Tehát összesen legfeljebb két pont van kizárva, a többi 1989 pontból bármelyiket hozzávehetjük xy -hoz. Attól nem kell félnünk, hogy az új pontot x -szel és y -nal ugyanolyan színű él fogja összekötni, hiszen a feladat feltétele az új pontra is vonatkozik.

Tegyük fel ezek után, hogy találtunk már k darab pontot, amelyek között futó $k(k - 1)/2$ él színe páronként különböző. Megint nézzük meg, hány olyan pont van a maradék között, amelyik „nem illik” a kiválasztott k -hoz. Nyilván csak az olyan pontok nem illenek, amelyek a kiválasztott k pont valamelyikével a $k(k - 1)/2$ él színe köti össze. Legyen x a k pont valamelyike. A feladat feltételét rá alkalmazva azt kapjuk, hogy a ki nem választott pontok között nincsen kettő, amelyekhez azonos színű él futna belőle. Vagyis x legfeljebb $k(k - 1)/2$ pontot zár ki. Ha ezt mind a k pontra végigvisszük, azt kapjuk, hogy összesen legfeljebb $k^2(k - 1)/2$ pont van kizárva. Ha tehát valamely k -ra ehhez a számhoz k -t adva még 1993-nál kevesebbet kapunk, akkor ki tudunk választani egy $k + 1$ -edik pontot, amelyik „illik” hozzájuk a feladat értelmében.

Mivel $k + k^2(k - 1)/2$ k -val szigorúan monoton növekszik és $16 + 16^2 \cdot 15/2 = 1936 < 1993$, 17 megfelelő pontot még ki tudunk választani.

1.20. a) Van benne ötszög, azaz páratlan kör, tehát legalább három szín kell a jólszínezéséhez. Könnyen belátható, hogy három színnel a pontok valóban jól is színezhetők.

b) A „külső” ötszög és a „belső” élei egyaránt jólszínezhetők három színnel, ha tehát a „küllöket” egy negyedik színnel színezzük, ez a gráf éleit négy színnel jólszínezi. Másrészt könnyen ellenőrizhető, hogy az élek nem színezhetők jól három színnel. A „külső” ötszög élei lényegében egyértelműen színezhetők jól három színnel. Ezután a „küllők” színe már meg van határozva és lesz a „belső” ötszögben két szomszédos él, aminek közös csúcsába futó küllő színe valamely a színű, és a másik két végpontjába futó küllő színe azonos, de a -tól különböző színű.

1.21. Minden pont foka három, tehát az élek csak úgy színezhetők jól három színnel, ha minden csúcsból mind a három színű él indul. Számozzuk meg a színeket az 1, 2, 3 számokkal és hagyjuk el a gráfból a 3-színű éleket. Kapunk egy 2-reguláris gráfot, ami körökből áll. Ha több körből állna, akkor az egyik körben az 1-es és 2-es színeket felcserélve és a gráfba visszatéve a 3-as színű éleket kapnánk a gráf éleinek egy olyan jólszínezését, amit nem kaphatunk meg a korábbiból a színek permutációjával. Ez ellentmondana feltételünknek. Tehát az 1-es és 2-es színű élekből álló gráf pontosan egy kör, azaz egy Hamilton-köre a gráfnak.

Megjegyzés. Azt is beláttuk, hogy legalább három Hamilton-köre van a gráfnak.

1.1. Ha mindhárom színű golyóból csak véges sok volna, akkor e három véges halmaz egyesítése is véges volna, vagyis összesen is csak véges sok golyó volna.

1.2. Ha egy végtelen halmazt véges sok részhalmaz egyesítésére bontunk, akkor az egyik részhalmaz végtelen lesz.

Vagy másképp: ha egy végtelen halmaz minden elemét kiszínezzük és a színezéshez véges sok színt használunk, akkor az egyik színből végtelen sok lesz.

1.3. a) A téglalapokat az origóval szemközti csúccsal jellemezzük és jelöljük. Vegyünk tehát egy kijelölt (a, b) téglalapot (vagyis egy kijelölt T téglalapot, amelynek az origóval szemközti

csúcát (a, b) -vel jelöljük). Ha van egy másik téglalap, amelyik tartalmazza az (a, b) pontot, akkor tartalmazza az egész T téglalapot és kész vagyunk.

Ellenkező esetben minden további (c, d) csúcsú téglalaphoz vagy az első koordinátája kisebb a -nál, tehát a lehetséges esetek $c = 1, 2, \dots, a-1$ pont, vagy a második koordinátája kisebb d -nél, tehát a lehetséges esetek $d = 1, 2, \dots, b-1$. Ha van két olyan téglalap, amelynek ugyanaz az első koordinátája, akkor megint kész vagyunk. Ha van két olyan téglalap, amelynek a második koordinátája azonos, akkor is kész vagyunk. De ha egyik eset sem állna fent, akkor összesen $a + b - 1$ téglalap lehetne csak, ami véges. Ez az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását.

Másrészt ha n darab ilyen téglalapot akarunk megadni, amelyek közül egyik sem tartalmazza a másikat, akkor vegyük az olyan téglalapokat, amelyeknek origóval szemközti (a, b) csúcsa kielégíti az $a + b = n$ egyenlőséget ($a, b > 0$). Pontosan n darab ilyen téglalap van, s ezek közül nyilván egyik sem tartalmazza a másikat.

b) Vegyünk egy tetszőleges $t = 2^a 3^b$ alakú kijelölt számot. Ha van egy olyan kijelölt $2^c 3^d$ szám, amelyre $a \leq c$ és $b \leq d$, akkor ezt a számot osztja t . A továbbiakban feltesszük, hogy ilyen szám nincs a kijelöltek között.

Ha van két olyan kijelölt szám, amelyben a 2 kitevője megegyezik, ezek közül is a kisebb osztója a nagyobbaknak. Ugyanígy kész vagyunk, ha van két olyan kijelölt szám, amelyben a három kitevője megegyezik. Márpedig most már minden kijelölt $2^c 3^d$ számra $c < a$, s ekkor a lehetséges értékek $c = 1, 2, \dots, a-1$ vagy $d < b$, s ekkor a lehetséges értékek $d = 1, 2, \dots, b-1$. Ez összesen $a + b - 2$ lehetőség. De végtelen sok téglalap van, tehát valamelyikből van legalább kettő (ennél többre nincs szükségünk!), s ezek közül a kisebb osztója a nagyobbaknak.

Megjegyzés. A megoldások menete mutatja, hogy a két feladat lényegében azonos. Ennek igazolásához elég az (a, b) csúcsú téglalaphoz (értsd: ahhoz a téglalaphoz, amelynek origóval szemközti csúcsa (a, b)) hozzárendelni a $2^a 3^b$ számot.

1.4. A bizonyítást k -ra való indukcióval végezzük. A $k = 2$ esetet az 1.3 bizonyítja. Tegyük fel, hogy már $k - 1$ -re tudjuk az állítást.

Vegyünk ki egy tetszőleges megadott számot, legyen ez a $t = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ szám. Ha van olyan $s = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ szám, amelyre a megfelelő b_i kitevők mindegyike $\geq a_i$ kitevőnél, akkor a két szám jó, mert $t | s$. Ellenkező esetben minden s számban valamelyik kitevő kisebb, mint a megfelelő t -beli kitevő. Vagyis valamelyik i -re $b_i = 1, 2, \dots$ vagy $a_i - 1$. Összesen véges sok (k darab) a_i van, és minden esetben csak véges sok lehetőség. Ez összesen is csak véges sok lehetőség, tehát valamelyik esetből végtelen sok van. Szimmetria okokból feltehetjük, hogy a k -adik prím fordul elő végtelen sokszor ugyanazon a $(a_k$ -nál kisebb) kitevőn.

Most már csak ezt a végtelen sok számot kell figyelni. Ha ezekből elhagyjuk az (azonos) $p_k^{b_k}$ kitevőt, akkor végtelen sok olyan számot kapunk, amelyek közül mindegyiknek a prímosztói $k - 1$ prím közül kerülnek ki. Ezekről már tudjuk, hogy van köztük kettő, amelyek közül a kisebbik osztója a nagyobbiknak. De akkor ugyanez igaz a $p_k^{b_k}$ -szeresükre is, tehát az eredeti számok között is találunk kettőt, amelyek közül a kisebb osztója a nagyobbaknak.

1.5. A tételt (ebben a formájában) nyilván elég megszámlálhatóan végtelen gráfra (vagyis olyan gráfra, amelynek csúcshalmaza – s így élhalmaza is – megszámlálható) bebizonyítani.

Számozzuk meg a csúcsokat a természetes számokkal. Mivel a csúcshalmaz megszámlálható, ezt megtehetjük. Vegyük az egyes számú pontot (a továbbiak kedvéért x_1 -gyel jelöljük), és nézzük meg, hogy a gráfban végtelen sok ponttal van-e összekötve. Ha igen, írjunk rá egy plusz jelet és hagyjuk el azokat a pontokat, amelyekkel nincs összekötve. Ha az egyes számú pont a gráfban csak véges sok ponttal van összekötve, akkor írjunk rá egy mínusz jelet és hagyjuk el azokat a pontokat, amelyekkel össze van kötve. Mindkét esetben jelöljük H_1 -gyel a maradó halmazt, ez mindkét esetben végtelen halmaz.

Most keressük meg a H_1 halmaz legkisebb számú elemét, legyen ez x_2 , és nézzük meg, hogy végtelen sok H_1 -beli ponttal van-e összekötve. Ha igen, hagyjuk el a többi pontot, és írjunk erre a pontra egy plusz jelet, ha viszont csak véges sok ponttal van összekötve, hagyjuk el ezeket, és írjunk az x_2 pontra egy mínusz jelet. A maradó ponthalmazt jelöljük H_2 -vel. Ez a halmaz továbbra is végtelen halmaz, és igaz rá, hogy ha x_2 -re plusz jel van írva, akkor minden H_2 -beli pont össze van vele kötve, ha mínusz, akkor H_2 egyik pontja sincs összekötve vele, és ugyanez igaz x_1 -re is.

Ezt az eljárást folytatva teljes indukcióval minden n -re kiválasztunk egy x_n pontot H_{n-1} -ből, és hozzá H_{n-1} egy végtelen H_n részalmazát úgy, hogy igaz maradjon az, hogy ha x_i -re plusz jel van írva, akkor H_n minden pontja össze van kötve vele, ha mínusz jel van rá írva, akkor H_n egyik pontja sincs összekötve vele. Minthogy H_{n-1} végtelen, ezt nyilván továbbra is ugyanúgy megtehetjük, mint az első két esetben: legyen H_{n-1} legkisebb pontja x_n . Ha x_n a H_{n-1} ponthalmaz végtelen sok pontjával van összekötve, akkor plusz jelet írunk rá és elhagyjuk a többi pontot, ha viszont H_{n-1} -nek csak véges sok pontjával van összekötve, akkor ezeket hagyjuk el és x_n -re mínusz jelet írunk. A maradó ponthalmaz lesz H_n .

Így teljes indukcióval kiválasztjuk a gráf egy végtelen

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

ponthalmazát. Mivel minden n -nél nagyobb indexű pontot H_n -ből (egy részalmazából) választottuk, ezért igaz a következő: ha x_n -re plusz jelet írtunk, akkor minden n -nél nagyobb indexű ponttal össze van kötve, ha mínusz jelet írtunk rá, akkor egyetlen nagyobb indexű ponttal sincs összekötve. Tehát a plusz jelű pontok egy teljes részgráfot alkotnak, míg a mínusz jelűek a komplementerben alkotnak teljes részgráfot. E két ponthalmaz valamelyike végtelen (hiszen uniójuk végtelen: kiadja az összes x_n pontot), tehát vagy a gráfban, vagy a komplementerében találtunk végtelen részgráfot.

1. megjegyzés: A tételt tehát csak megszámlálhatóan végtelen gráfokra bizonyítottuk be. De minden végtelen gráfnak van megszámlálhatóan végtelen részgráfja, így ez elég is az általánosabb tétel bizonyításához.

A tétel azonban ennél erősebb alakban is igaz:

Végtelen Ramsey-tétel/2: Bármely egyszerű végtelen gráfra igaz, hogy vagy maga a gráf tartalmaz egy, a gráf csúcshalmazával azonos számosságú teljes részgráfot, vagy a komplementere tartalmaz egy megszámlálhatóan végtelen teljes részgráfot. Az állítás így is fogalmazható: egy \aleph számosságú egyszerű gráf vagy tartalmaz \aleph számosságú teljes részgráfot, vagy tartalmaz üres megszámlálható részgráfot.

Ennek az erősebb tételnek a bizonyításához már nem elég az egyszerű teljes indukció, úgynevezett transzfinit indukcióra van szükség. Ezt itt nem részletezzük.

Az viszont általában nem igaz, hogy egy végtelen gráfban vagy a komplementerében van a csúcshalmazzal azonos számosságú teljes részgráf. Sőt, a halmazelmélet axiómáival összeegyeztethető, hogy ez csakis a megszámlálható számosságú gráfokra igaz.

2. megjegyzés: E tételek felhasználásával könnyen bizonyítható, hogy ha egy megszámlálhatóan végtelen gráf éleit k színnel színezzük, akkor valamelyik színből van teljes végtelen részgráf. Másrészt ha egy \aleph számosságú gráf éleit színezzük k színnel, akkor vagy az első színből van \aleph számosságú teljes részgráf, vagy valamelyik másik színből megszámlálhatóan végtelen teljes részgráf.

3. megjegyzés: Ugyanúgy, ahogy véges gráfokra, végtelen gráfokra is felvethető a kérdés, hogy adott \aleph_a és \aleph_b számosság esetén milyen \aleph számosságú gráfokra tudjuk garantálni, hogy ha a gráf éleit két színnel színezzük, vagy van első színű \aleph_a számosságú teljes részgráf, vagy van

második színű \aleph_b számosságú teljes részgráf. Természetesen ezek a kérdések is általánosíthatók több színnel való színezésre. A kérdésnek nagy irodalma van.

1.6. Legyen a sorozat $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Definiálunk egy gráfot, amelynek pontjai sorozatunk elemei. A sorozat i -edik elemét a sorozat j -edik elemével akkor kötjük össze, ha $i < j$ és $a_i < a_j$. A végtelen Ramsey-tétel szerint ebben vagy van végtelen teljes gráf, vagy van végtelen üres gráf. Az előbbi esetben a pontok egy szigorúan monoton növekvő részsorozatot alkotnak, utóbbi esetben egy monoton csökkenőt.

Megjegyzés. A bizonyított állításból már következik, hogy korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. Hiszen van monoton részsorozata és az korlátos lévén konvergens is.

Az is igaz, hogy korlátos (síkbeli) pontsorozatnak van konvergens részsorozata. Ha ugyanis a pontsorozat koordinátái x_n, y_n , akkor mind az abszcisszák, mind az ordináták sorozata korlátos. Először kiválasztjuk az abszcisszák egy konvergens x_{n_i} részsorozatát. Majd az n_i sorozatnak kiválasztjuk egy olyan n_j részsorozatát, amelyre már az ordináták y_{n_j} is sorozata is konvergens.

1.7. Ha megpróbáljuk végigvinni az 1.5. feladatban alkalmazott gondolatmenetet, akkor a következő helyzettel állunk szemben: van egy H (megszámlálhatóan) végtelen halmazunk, és ennek egy x eleme. Vennünk kell a H halmaz x, y, z alakú elemhármait. Ezek két színnel vannak színezve. Arra van szükségünk, hogy H -nak legyen olyan szintén végtelen részhalmaza, hogy az abból vett bármely két y, z pontra az x, y, z hármas színe azonos színű legyen. Ha ezt tudjuk, akkor a gondolatmenet változtatás nélkül végigvihető.

Az az állítás viszont, hogy H -nak van ilyen végtelen részhalmaza, nem más, mint az 1.5. feladatban bizonyított Ramsey-tétel, hiszen éppen arról van szó, hogy a $H - \{x\}$ végtelen halmaz kételemű részhalmazai vannak két színnel színezve, s ezekből kell egy egyszínű végtelen teljes részgráfot találnunk.

Megjegyzés. Az is világos, hogy k -ra vonatkozó teljes indukcióval ugyanígy bizonyítható, hogy ha egy megszámlálhatóan végtelen halmaz minden k elemű részhalmazát megszínezzük két szín valamelyikével (minden k -as egy színt kap), akkor van olyan végtelen részhalmaz, amelynek minden k -asa azonos színű.

2. A skatulyaelv gráfelméleti élesítései, II.

2.1. a) azt kérdezi, hogy maximálisan hány éle van egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nincs benne k pontú csillag (vagyis egy legalább $k - 1$ -edfokú pont)? Erre a K.II.2.13. feladat ad választ. Ha k páratlan, vagy k és n is páros, akkor az n pontú, $k - 1$ -reguláris gráfok az extrém gráfok. (A pozitív állítást úgy is fogalmazhatjuk, hogy egy legalább $n(k - 1)/2 + 1$ élű gráfban van k pontú csillag.) Tehát – mivel a k pontú csillag $K_{1,k-1}$ -gyel azonos –

$$e_{K_{1,k-1}(n)} = n(k - 1)/2,$$

ha $n(k - 1)$ páros.

b) azt kérdezi, hogy maximálisan hány éle van egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nincs benne $k + 1$ darab független él. A K.II.9.6. feladatban láttuk, hogy $k = 1$ esetben $n = 3$ -ra a maximum három és az extrém gráf a háromszög. Minden más n -re a maximális élszám $n - 1$ és az extrém gráf az n pontú csillag. ($n = 4$ esetén a háromszög plusz egy izolált pont is extrém gráf.) $k = 2$ -re a K.II.9.9. feladatban azt bizonyítottuk, hogy a maximális élszám $n > 6$ esetén $2n - 3$ (tehát $2n - 2$ él esetén már biztosan van három független él) és az extrém gráf n darab olyan

háromszögből áll, amelyek egy közös élben illeszkednek. (Vagyis két telített pont van a gráfban, minden más pont másodfokú.)

Megjegyzés. Nagyobb k értékekre csak annyit bizonyítottunk, hogy e_k független él $\leq kn - k$, ha n legalább $2k + 2$, és $n = 2k + 1$ -re a teljes gráf az extrém gráf (l. a K.II.9.7. feladatot).

c) azt kérdezi, hogy hány él kell ahhoz, hogy n pontú gráfban legyen Hamilton-kör. A választ a K.II.10.3. feladat adja meg: legalább $\binom{n-1}{2} + 2$ él kell. Tehát

$$e_{C_n}(n) = \binom{n-1}{2} + 1$$

Az extrém gráf egy $n - 1$ pontú teljes gráf plusz egy él.

2.2. a) Megfelel például a K.II.8.3. feladatban szereplő gráf. Ebben a gráfban vannak magasabb fokú pontok is.

b) Van 3-reguláris gráf is, amelyben nincs háromszög: ilyen a Petersen-gráf. Ebben a gráfban négy hosszú kör sincsen. (L. a K.II.8.4. feladatot.)

c) Páros n -re vegyük azt a páros gráfot, amelynek mindkét osztályában $n/2$ pont van, és a két osztály között minden él be van húzva (vagyis a $K_{n/2, n/2}$ teljes páros gráfot, páratlan n -re pedig a $K_{(n-1)/2, (n+1)/2}$ teljes páros gráfot. Páros gráfban nincs páratlan kör, így három hosszú kör sincsen, másrészt a minimális foksám mindkét példában $\lfloor n/2 \rfloor$.

2.3. A pontszámra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Kezdő lépés: ha $n = 3$, akkor az állítás annyit mond, hogy ha három él van, akkor van háromszög. Mivel a gráf egyszerű, ez igaz.

A továbbiakban a gondolatmenet a következő: ha minden pont foka „nagy”, akkor az előző (=1.3.) feladat szerint van benne háromszög. Ha viszont van „kis” fokú pont, akkor azt elhagyva a maradó gráfban még mindig „sok” él marad és alkalmazhatjuk az indukciós feltevést. (Kicsit közelebről: ha a gráfban minden pont foka legalább annyi, mint az élszámkorlátból következő átlag, akkor alkalmazható az 1.3. feladat, ha viszont kisebb az átlagnál, akkor elhagyásával növekszik az átlag, ezért alkalmazható lesz az indukció.)

Tehát tegyük fel, hogy $n - 1$ -re már tudjuk az állítást. Legyen először n páratlan. Vegyünk egy n pontú gráfot, amelynek több, mint $(n^2 - 1)/4$ éle van. Ha a gráfban minden pont foka legalább $(n + 1)/2$, akkor az előző (=1.3.) feladat szerint van benne háromszög. Ha viszont van benne egy legfeljebb $(n - 1)/2$ fokú x pont, akkor hagyjuk el a gráfból x -et és a belőle induló éleket. A maradó $n - 1$ pontú (egyszerű) gráfnak több, mint $(n - 1)^2/4$ él marad. Az indukciós feltevés szerint tehát van benne háromszög.

Legyen most $n = 2k$ páros és legyen G egy n pontú egyszerű gráf, amelynek több, mint $n^2/4 = k^2$ éle van. Ha minden pont foka legalább $k + 1 = \lceil (n + 1)/2 \rceil$, akkor az előző (=1.3.) feladat szerint van benne háromszög. Ha viszont van benne egy legfeljebb k -adfokú x pont, akkor hagyjuk el a belőle induló élekkel együtt. Kapunk egy $n - 1 = 2k - 1$ pontú gráfot, amelyben az élszám több, mint $k^2 - k > (n - 1)^2/4$. Az indukciós feltevés szerint van tehát benne háromszög.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Másrészt az előző (=1.3.) feladatban adott ellenpélda most is jó: ha az n pontot a lehető legegyszerűbben osztjuk két csoportra és csak a két csoport között futó éleket húzzuk be, pontosan $\lfloor n^2/4 \rfloor$ élű egyszerű gráfot kapunk, amelyben nincs háromszög. A bizonyításunkból az is kivehető, hogy ez az egyetlen ellenpélda.

2.5. a) n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 2$ -re az állítás tautológia. Tegyük fel, hogy $2n - 2$ pontú gráfokra már tudjuk az állítást és legyen G egy $2n$ pontú gráf, amelynek több, mint n^2 éle van. Az 1.4. feladat gondolatmenetét alkalmazzuk. Legyen x és y két éllel

összekötött pont. Ha az x -ből és y -ből induló élek száma legfeljebb $2n - 1$, akkor elhagyhatjuk a gráfból e két pontot a belőlük induló élekkel együtt, s a maradék $2n - 2 = 2(n - 1)$ pontú gráfban több, mint $n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$ él van, tehát az indukciós feltevés szerint van benne megfelelő pontnégyes.

Akkor van csak „baj”, ha x -ből és y -ből együtt legalább $2n$ él indul. Nézzük, ez hogyan lehetséges. Egy él köti össze őket, tehát „kifele” legalább $2n - 1$ él indul a maradék $2n - 2$ pontba. Ez azt jelenti, hogy legalább egy közös szomszédjuk van. Ha legalább kettő van, akkor két közös szomszéd és x, y egy megfelelő pontnégyes. Tehát feltehetjük a továbbiakban, hogy x -nek és y -nak pontosan egy közös szomszédjuk van, legyen ez z . x, y, z tehát egy háromszöget alkot, ez három él, a maradék $2n - 3$ pontba x és y közül legfeljebb az egyikből indul él. Viszont legalább $2n - 3$ él indul ki a maradék $2n - 3$ pontba, tehát minden további pontba pontosan az egyikükből indul él. Ha tehát z -ből egy további u pontba indul él, akkor x, y, z, u egy megfelelő pontnégyes. Megint kész vagyunk, kivéve, ha z másodfokú. De akkor x és y helyett ugyanezt y és z -re elmondva azt kapnánk, hogy x is másodfokú, továbbá ugyanígy y is másodfokú, vagyis bármely pont, amelyből indul ki él, másodfokú és a gráf pontdiszjunkt háromszögekből áll. Az élszáma tehát $2n$. Ez viszont $n > 1$ esetén nem több, mint n^2 . Ezzel a feladat a) részének állítását bebizonyítottuk.

Ha van két közös szomszédjuk, akkor e két közös szomszéd és x, y egy megfelelő pontnégyes. Ha egy közös szomszédjuk van és van egy pont, amellyel sem x , sem y nincs összekötve, akkor számoljuk össze azokat az éleket, amelyek egyik végpontja x vagy y . Van a kettőt összekötő él, van a közös szomszédba futó két él és van még legfeljebb $2n - 4$ él, hiszen van legalább egy pont, amellyel egyikük sincs összekötve. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb $2n - 1$ él indul x -ből és y -ből. Ugyanez a helyzet akkor is, ha x -nek és y -nak nincs közös szomszédja. Hagyjuk el tehát x -et és y -t a belőlük induló élekkel együtt a gráfból. A maradék $2n - 2 = 2(n - 1)$ pontú gráfban több, mint $n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$ él van, tehát az indukciós feltevés szerint van benne megfelelő pontnégyes.

Maradt az az eset, amikor

b) Most is jó az a teljes páros gráf, amelynek mindkét osztályában n pont van.

2.6. A kérdést a komplementer gráfra átfogalmazva azt kapjuk, hogy legfeljebb hány éle van egy olyan n pontú egyszerű gráfnak, amelyben nincs háromszög. Erre a Turán-tétel (2.3. feladat) szerint az a válasz, hogy $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

2.7. a) A gráfban az átlagfokszám $16/7 > 2$, tehát van egy legalább harmadfokú pontja. Egy hét hosszú kör és egy átló mutatja, hogy három lehet is. Négy lesz a maximális fokszám, ha két darab négy pontú kört egy pontjánál „összeragasztunk”. Öt lesz a maximális fokszám, ha veszünk öt pontot, összekötjük egy hatodik ponttal, és hármat közülük összekötünk egy hetedik ponttal is. Hat lesz a maximális fokszám, ha egy pontot összekötünk hat másikkal, s e hat között még két élt behúzunk.

b) A gráfban az átlagfokszám $28/9 > 3$, tehát biztosan van benne egy legalább negyedfokú pont.

Ennél többet a maximális fokszámról nem tudunk mondani, mert bármely négy és nyolc közötti d számra tudunk most is olyan kilencpontú, 14 élű egyszerű gráfot konstruálni, amelyben a maximális fokszám éppen d . Ezt az olvasóra bízunk.

2.8. Az $n = 4$ esetben két független él elég ahhoz, hogy ne legyen a gráfban három független pont, egy él viszont nem elég.

Az $n = 5$ esetben bármely négy pont közt kell futnia legalább két élnek. Ez azt jelenti, hogy van legalább három él. De akkor van a gráfban egy legalább másodfokú pont. Ha ezt elhagyjuk, akkor két élt hagytunk el, és a maradékban még mindig kell lennie két élnek. Vagyis összesen

legalább négy élnek kell lennie. Ennyi viszont lehet is: ha a gráf egy élből és egy tőle pontdiszjunkt háromszögből áll.

Az $n = 6$ esetben az előző bekezdés szerint kell lennie legalább másodfokú pontnak (már bármely öt pont között kell lennie ilyennek) és ezt elhagyva a maradó öt pont között kell futnia legalább négy élnek, ez összesen legalább hat él. Ennyi lehet is: két pontdiszjunkt háromszög megfelel.

Az $n = 7$ esetben ismét van egy legalább másodfokú pont, ezt elhagyva a maradó gráfban még mindig van legalább hat él, ami összesen legalább nyolc él. De akkor a gráfban van egy legalább harmadfokú pont is (l. az 1.3. feladat a) részét). A maradó gráfban van legalább hat él, ami összesen legalább kilenc él. Egy négypontú teljes gráf és egy tőle pontdiszjunkt háromszög a példa arra, hogy kilenc él lehet is.

Az $n = 8$ esetben megint van egy legalább harmadfokú pont, ezt elhagyva a maradó hét-pontú gráfban pedig az előzőek szerint legalább kilenc él van, ez összesen legalább 12 él. Két pontdiszjunkt négypontú teljes gráf példája mutatja, hogy ennyi lehet is.

Az $n = 9$ esetben van egy legalább harmadfokú pont. Ezt elhagyva a maradó nyolcpontú gráfban az előző bekezdés szerint van még legalább 12 él, ami összesen legalább 15 él. Ekkor az 1.3. b) része szerint van egy legalább negyedfokú pont. Ezt elhagyva a maradó nyolcpontú gráfban még van legalább 12 él, s ez összesen legalább 16 él. Egy-egy pontdiszjunkt négypontú és öt-pontú teljes gráf mutatja, hogy ennyi lehet is.

Megjegyzés. A bizonyításban megfigyelhetjük a következőt: a gráfban mindig egy legnagyobb fokú pontot kerestünk, majd alkalmaztuk az eggyel kisebb pontszámú gráfra kapott eredményt. A kulcs tehát az, hogy a maximális fokszám két lépésenként nőtt eggyel, s ennek megfelelően az élszám *növekménye* is két lépésenként nőtt eggyel. A következő (=2.9.) feladat azt vizsgálja, hogy ez a fokszámra vonatkozó szabályszerűség érvényben marad-e.

2.9. Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, amelyben nincs független ponthármas. Ha a maximális fokszám k , akkor vegyünk egy tetszőleges x pontot és hagyjuk el az összes szomszédjával a gráfból. Ekkor legfeljebb $k + 1$ pontot hagytunk el. A maradó gráf minden pontja független x -től. Válasszuk ki közülük a(z egyik) maximális fokút, legyen ez y , és hagyjuk el az összes szomszédjával. Így legfeljebb újabb $k + 1$ pontot hagytunk el. Ha a gráfban maradna még egy z pont, ez sem x -szel, sem y -nal nem lenne összekötve, így x, y, z egy független ponthármas volna. Tehát a maradó gráf üres. Ezért az elhagyott pontok száma n , másrészt legfeljebb $2(k + 1)$. Ebből következik, hogy k legalább $\lfloor n/2 \rfloor$.

Vagyis $n = 2k + 1$ és $n = 2k + 2$ pont esetén a maximális fokszám legalább $k + 1$. Ennyi lehet is, ezt utóbbi esetben két pontdiszjunkt $k + 1$ pontú teljes gráf uniója mutatja, előbbi esetben egy k pontú teljes gráf és egy $k + 1$ pontú teljes gráf diszjunkt uniója mutatja.

2.10. Jelöljük egyelőre $f(n)$ -nel a minimális élszámot, és próbáljuk alkalmazni a 2.8.) feladat gondolatmenetét. Ha $n = 2k + 1$ vagy $n = 2k + 2$, akkor van egy legalább k -adfokú pont (lásd az előző, 2.9. feladatot). Ezt elhagyva a maradó gráfban van legalább $f(n - 1)$ él. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} f(2k + 1) &\leq k + f(2k), \\ f(2k + 2) &\leq k + f(2k + 1). \end{aligned}$$

Az utóbbiba az előbbit beírva azt kapjuk, hogy $f(2k + 2) = 2k + f(2k)$. Ha ezt folytatjuk, akkor végül arra jutunk, hogy

$$f(2k + 2) \leq 2(k + 1) + 2k + \dots + 4 + f(2) = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k) = k(k + 1).$$

Ha a gráf két darab pontdiszjunkt $k + 1$ pontú teljes gráf uniója, akkor pontosan $k(k + 1)$ éle van, tehát $f(2k + 2) = k(k + 1)$, vagy ami ugyanaz $f(2k) = k(k - 1)$.

Ugyanígy kiszámolható, hogy $f(2k + 1) \leq k^2$, és egy-egy pontdiszjunkt k pontú és $k + 1$ pontú teljes gráf uniójának pontosan k^2 éle van és nincs benne pontfüggetlen hármas. Tehát $f(2k + 1) = k^2$.

Ezzel ismét bebizonyítottuk Turán tételét, most a következő formában:

Turán-tétel. Ha egy n pontú egyszerű gráfban nincs három független pont (azaz bármely három pontja közül valamely kettő között fut él), akkor

ha $n = 2k$ páros, akkor legalább $k^2 - k$ éle van,

ha $n = 2k + 1$ páratlan, akkor legalább k^2 éle van.

Mint említettük (2.6. feladat), ez csak megfogalmazásában különbözik a 2.3. feladatban ki-mondott Turán-tételtől: itt a komplementer gráfra fogalmaztuk át az állítást. A tételre több bizonyítást is adunk. Az itt adott két bizonyításon kívül lásd még a 6.1. feladat megoldását és a K.II.12.2. feladat megoldását.

A bizonyítást nyomon követve az is kijön, hogy a megadott két példa az egyetlen példa $f(n)$ pontú gráfra, amelyben nincs független hármas. A tételre adandó többi bizonyításból ez a többlet hamarabb megkapható. Ezt már korábban bebizonyítottuk, itt nem bíbelődünk vele.

2.11. a) A 2.9. feladat megoldásának gondolatmenetét, illetve az ott alkalmazott „mohó algoritmust” használva válasszunk ki egy maximális fokú x pontot, hagyjuk el a szomszédjaival, majd ismételjük meg ezt az eljárást még kétszer. A harmadik lépés után nem szabad a gráfban pontnak maradnia, különben lenne négypontú teljes részgráfja. Vagyis a gráf pontszáma legfeljebb $3(d + 1)$, ahol d a maximális fokszám. Ebből következik, hogy d legalább k .

b) esetben ugyanezzel a módszerrel kapjuk, hogy a maximális fokszám legalább k . Mindkét esetben van olyan gráf, amely megfelel a feltételeknek és a maximális fokszám k . Az általános esetben venni kell $m - 1$ darab páronként pontdiszjunkt, k pontú teljes gráfot és egy szintén mindegyiktől diszjunkt $k + 1$ pontú teljes gráfot. Itt a maximális fokszám k és nincs $m + 1$ darab független pont.

2.12. Jelöljük $f(n)$ -nel a keresett minimális élszámot.

A 2.11. feladat a) részéből tudjuk, hogy ha $n > 3k$, és G olyan n pontú gráf, amelyben nincs független pontnégyes, akkor G -ben van egy legalább k -adfokú pont. Ha egy ilyen pontot a belőle induló élekkel együtt elhagyunk a gráfból, akkor továbbra sem lesz benne független pontnégyes, ezért tudjuk, hogy legfeljebb $f(n - 1)$ éle van. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(3k + 1) &\leq k + f(3k), \\ f(3k + 2) &\leq k + f(3k + 1), \\ f(3k + 3) &\leq k + f(3k + 2). \end{aligned}$$

Innen a három egyenlet összeadása után az jön ki, hogy

$$f(3k + 3) - f(3k) \leq 3k$$

Ha ezt $k = 1, 2, \dots, n - 1$ -re összeadjuk, és tekintetbe vesszük, hogy $f(3) = 0$, akkor azt kapjuk, hogy $f(3n) \leq 3n(n - 1)/2$.

Másrészt az a $3n$ pontú gráf, amely három, páronként pontdiszjunkt n pontú teljes gráfból áll, pontosan $3n(n - 1)/2$ élű és nincs benne független pontnégyes. Tehát $f(3n) = 3n(n - 1)/2$. (Ez a teljes gráf éleinek mintegy harmada.)

Hasonlóan kapjuk a fenti egyenletekből (most az utolsó helyett $f(3k)$ -ra kell felírni az egyenletet és úgy összeadni a hármat), hogy $f(3k + 2) - f(3k - 1) \leq 3k - 1$, s ezt $k = 1, 2, \dots, n - 1$ -re

összeadva azt kapjuk, hogy

$$f(3n-1) \leq 3n(n-1)/2 - (n-1) = (3n-2)(n-1)/2.$$

Az a gráf, amely két darab n pontú teljes gráf és egy $n-1$ pontú teljes gráf pontdiszjunkt uniója, pontosan ennyi élből áll, és nincs benne független pontnégyes. Tehát $f(3n-1) = (3n-2)(n-1)/2$.

Végül ugyanígy jön ki az is, hogy $f(3k+1) - f(3k-2) \leq 3k-2$, s ezt ismét $k = 1, 2, \dots, n-1$ -re összeadva $f(3n-2) \leq 3n(n-1)/2 - 2(n-1) = (3n-4)(n-1)/2$. Az a gráf, amely egy n pontú és két $n-1$ pontú teljes gráf pontdiszjunkt uniója, pontosan ennyi élű és nincs benne független pontnégyes. Tehát $f(3n-2) = (3n-4)(n-1)/2$.

A minimális élszámot tehát mindig úgy kapjuk, ha vesszük azt az „extrém gráfo”, amit úgy kapunk, hogy az n pontot beosztjuk lehetőleg egyenletesen három csoportba és az egy csoportban levőket összekötjük. (Tehát három olyan teljes gráf pontdiszjunkt unióját vesszük, ahol a teljes gráfok pontszáma között legfeljebb egy a különbség.)

Megjegyzés. Nem okoz ezután meglepetést, hogy az ugyanezzel a gondolatmenettel a 2.11. feladat b) részéből megkaphatjuk azt is, hogy minimálisan hány éle van egy olyan n pontú gráfnak, amelyben nincs k független pont. A válasz: a minimumot a következő gráf szolgáltatja: az n pontot felosztjuk a lehető legegyszerűsebben $k-1$ csoportra (azaz úgy, hogy bármely két csoport elemszáma között legfeljebb egy legyen a különbség), és minden csoport pontjai egy-egy teljes gráfot feszítenek.

2.14. Jelöljük $g(n)$ -nel a minimális élszámot. Kiszámoljuk a kezdőértékeit:

$g(5) = 2$ a feltétel szerint. $g(6) = 3$: három független él jó; két él nyilván nem elég.

$g(7) = 5$, egy háromszög és két független él jó; négy él nem elég, mert van köztük kettő, aminek közös a végpontja, ezt és egy másik él egyik végpontját elhagyva öt pontot kapunk, amelyek között csak egy él fut.

$g(8) = 7$, két háromszög és egy független él jó; hat él nem elég, mert van ha hat él van, akkor vagy van egy harmadfokú pont, vagy van két másodfokú. Tehát elhagyható két pont úgy, hogy már csak két él marad, egyiknek egyik végpontját elhagyjuk és kapunk öt pontot egyetlen éllel.

Most rátérünk az általános esetre.

Nyilvánvaló a következő: ha egy gráfban bármely négy pont között van legalább egy él, akkor teljesíti a feladat feltételét is. Ha tehát egy gráfnak legalább $f(n)$ éle van, ahol $f(n)$ a 2.12. feladatban definiált függvény, akkor biztosan teljesíti a feladat feltételét. Tehát $g(n) \leq f(n)$. A kérdés az, hogy $g(n)$ lehet-e kisebb, mint $f(n)$.

Emlékeztetöül: $f(3n-2) = (3n-4)(n-1)/2$, $f(3n-1) = (3n-2)(n-1)/2$, és $f(3n) = 3n(n-1)/2$.

Ezek szerint $n = 5, 6, 7, 8$ esetén $f(n) = g(n)$.

Tegyük fel, hogy valamely n -re $g(n) < f(n)$, és vegyük a legkisebb ilyen n -et. $n \geq 9$. Legyen G egy olyan n pontú gráf, amely megfelel a feladat feltételének és $g(n) < f(n)$ éle van. Ekkor a 2.12. feladat szerint van benne független pontnégyes. A feladat feltételéből most következik, hogy az $n-4$ további pont mindegyike e négy pont közül legalább kettővel össze van kötve. De akkor e négy pont egyikének fokszáma legalább $(n-4)/2$. Hagyjuk el ezt a pontot a belőle futó élekkel együtt. A feladat feltétele „öröklődő” tulajdonság, azaz minden feszített részgráfra, így erre az $n-1$ pontú részgráfra is öröklődik. Ennek tehát legalább $g(n-1)$ éle van. Azt kaptuk, hogy

$$g(n) - g(n-1) \geq (n-4)/2.$$

Vagyis az első helyen, ahol $g(n)$ kisebb $f(n)$ -nél, a $g(n)$ függvény „nagyon” (kb. a pontszám felével) növekszik. Másrészt $f(n)$ a pontszámoknak csak mintegy a harmadával nő, s ez nagy n

értékekre biztosan kevesebb. Rögtön ki fogjuk számolni, hogy $f(n)$ már $n \geq 9$ -re $(n-4)/2$ -nél kevesebbel nő, ami nyilván ellentmondás, hiszen tudjuk, hogy n legalább 9.

Már csak azt kell belátnunk, hogy $f(n) - f(n-1) < (n-4)/2$, ha n legalább 9. Ez egyszerű számolás:

Ha $n = 3k - 1$ és $k > 3$, akkor $f(3k-1) - f(3k-2) = k - 1 < (3k-5)/2$.

Ha $n = 3k$ és $k > 2$, akkor $f(3k) - f(3k-1) = k - 1 < (3k-4)/2$.

Ha $n = 3k + 1$ és $k > 2$, akkor $f(3k+1) - f(3k) = (3k-1)k/2 - 3k(k-1)/2 = k < (3k-3)/2$.

Ezzel a feladat megoldását befejeztük, a keresett $g(n)$ függvény azonos az $f(n)$ függvénnyel.

2.1. Tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjai a megadott 100 pont. Két pontot akkor kötünk össze éllel, ha (a feladat értelmében vett) távolságuk nagyobb a kör kerületének harmadánál. Ebben a gráfban nem lehet háromszög, hiszen a három pont által meghatározott három kisebbik körív együttes hossza nagyobb volna a kör kerületénél, ami lehetetlen. Tehát alkalmazható Turán háromszögekre vonatkozó tétele (2.3. feladat): ennek a gráfnak legfeljebb 2500 éle van. Ezt kellett bizonyítani.

2.2. a) A K.II.17.5. feladat szerint bármely négy adott pont között van kettő, amelynek távolsága legfeljebb $1/\sqrt{2}$. Legyen egy ilyen távolság a PQ és hagyjuk el a P pontot. A maradó négy pont között is van kettő, amelynek távolsága „kicsi”, azaz legfeljebb $1/\sqrt{2}$, így valóban találunk legalább két ilyen távolságot.

b) Válasszunk ki mind a hat lehetséges módon öt pontot az adottak közül. Minden választásnál találunk legalább két „kis” távolságot. Ez összesen 12. Egy ilyen „rövid” PQ szakaszt három négy találhatunk meg, vagyis összesen legalább három különböző „kis” távolságot találunk.

c) Alkalmazzuk a b) pont gondolatmenetét. Válasszunk ki mind a hét lehetséges módon hat pontot az adottak közül. Minden választásnál találunk legalább három „kis” távolságot, ez összesen 21. Egy-egy „kis” szakaszt legfeljebb ötször találunk meg (ahányszor a maradó öt pontból négyet kiválasztunk), tehát összesen legalább $21/5$ távolságot találtunk. **ÁMDE.** A távolságok száma egész szám, így legalább öt „kis” távolságot találtunk.

d) Ha most c) gondolatmenetét nyolc pontra hajtjuk végre, akkor $5 \cdot 8/6 = 20/3$ „kis” távolságot találunk, s megint egész szám az ilyen távolságok száma, tehát legalább hetet találunk. Ha most megismételjük a gondolatmenetet kilencre, akkor $7 \cdot 9/7 = 9$ „kis” távolságot találunk.

2.3. Az előző, 2.2 feladat megoldásában használt gondolatmenettel teljes indukcióval általában is kiszámolható, hogy a „kis” (tehát $1/\sqrt{2}$ -nál nem nagyobb) távolságok száma $3n$ pont esetén legalább $(3n^2 - 3n)/2$, $3n+1$ pont esetén legalább $(3n^2 - n)/2$, végül $3n+2$ pont esetén legalább $(3n^2 + n)/2$. Ez $3n$ pont esetén azt jelenti, hogy a „nagy”, tehát $1/\sqrt{2}$ nagyobb távolságok száma legfeljebb

$3n(3n-1)/2 - (3n^2 - 3n)/2 = 3n^2$. A bizonyításhoz három lépésben kell kiszámolni az adódó kifejezés felső egész részét. Most ehelyett egy elegánsabb bizonyítást adunk a feladat állítására.

Tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjai az adott pontok. Két pontot akkor kötünk össze, ha a távolságuk nagyobb, mint $1/\sqrt{2}$. A K.II.17.5. feladat szerint bármely négy adott pont között van kettő, amelynek távolsága legfeljebb $1/\sqrt{2}$, így ebben a gráfban nincs négypontú teljes gráf. Így a 2.13. feladat szerint ennek a gráfnak legfeljebb $3n^2$ éle van, és ezt kellett bizonyítanunk.

2.1. k -ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk, és pedig $k-2$ -ről k -ra. Ehhez bevonjuk a $k=1$ és $k=2$ eseteket is. Szerencsére a $k=1$ eset semmitmondóan igaz: kétpontú és legalább kétélű egyszerű gráf ugyanis nincsen, így nem kell semmit bizonyítani. Viszont $k=2$ esetén nem igaz a feladat állítása, hiszen a négypontú teljes gráfnak hat éle van és nincs benne C_5 . Az indukciós lépést tehát $k > 2$ -re fogjuk bizonyítani, de a $k=4$ esetben figyelni kell arra, hogy csak gyengébb feltételt tudunk. A továbbiakban tehát $k > 2$ és feltesszük, hogy $k-2$ -re

már $k = 2$ eset kivételével tudjuk az állítást, és az $n = 2k$ pontú, $k^2 + 1$ élű gráfra akarjuk bebizonyítani, hogy van benne C_5 .

Első lépésként megelégszünk kevesebbel: az 1.5. feladat szerint minden $n = 2k$ pontú, $k^2 + 1$ élű gráfban van C_4 . Legyenek ennek pontjai az 1,2,3,4 számokkal jelölve úgy, hogy az 12, 23, 34, 41 élek a gráfban vannak. Jelölje a gráf többi pontjának halmazát T . T elemszáma $2(k-2)$. Tehát ha T -ben legalább $(k-2)^2 + 1$ él fut, akkor az indukciós feltevés szerint van benne C_5 . A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy T -ben legfeljebb $(k-2)^2$ él van. Ekkor legalább $4k-3$ él van, amelynek egyik végpontja az 1234 kör valamelyik pontja.

(Külön kell vizsgálnunk a $k = 4$ esetet. Ekkor T -ben négy pont van. Ha közöttük is legfeljebb négy él fut, akkor itt is $4k-3 = 13$ él marad, amelynek egyik végpontja az 1234 kör valamelyik pontja. „Baj” tehát csak akkor van, ha T -ben öt vagy hat él fut. De ekkor választhatjuk ezt a négy pontot 1234-nek és még azt is tudjuk, hogy a körnek legalább egy átlója van.)

Ha valamely $u \in T$ össze van kötve e kör két szomszédos pontjával, akkor máris találtunk egy C_5 -öt. Tehát feltehetjük a továbbiakban, hogy T minden pontja a kör legfeljebb két pontjával van összekötve. Ez legfeljebb $4(k-2)$ él. A kör négy pontja között tehát legalább öt él fut. Feltehetjük, hogy az 13 él be van húzva. Ez azt jelenti, hogy ha T valamely u pontja 2-vel és 4-gyel is össze van kötve, akkor $u2134u$ egy C_5 -öt alkot. Ha a 24 él is be van húzva, akkor ugyanez a helyzet, ha u az 1 és 3 pontokkal van összekötve. Mivel azt már kizártuk, hogy szomszédos pontokkal legyen összekötve, ebben az esetben azt kapjuk, hogy T minden pontja körünk legfeljebb egy pontjával van összekötve, ami összesen legfeljebb $2k-4$ él. Ez a kör pontjai között futó hat éllel is legfeljebb $2k+2 < 4k-3$ él, ami ellentmondás.

(Itt megint külön kell vizsgálnunk a $k = 4$ esetet. Azt kaptuk, hogy a gráfnak legfeljebb $2k+2$ éle, plusz a T négy pontja között futó legfeljebb hat éle van, ami még mindig csak 16 él a feltételezett 17 helyett. Ez is ellentmondás.)

Marad az az eset, ha 24 nem él a gráfban, tehát a kör négy pontja között öt él fut. Ekkor a kör és T pontjai között legalább $4k-3-5 = 4(k-2)$ él fut. Láttuk már, hogy ez csak úgy lehetséges, ha minden pont az 1 és 3 pontokkal van összekötve. Legyen most T két éllel összekötött pontja u és v . Most például az $u143vu$ egy C_5 -öt alkot. Ha viszont T pontjai között egyáltalán nem futna él, akkor a gráfban összesen $4k-3 < k^2+1$ él van, ami ellentmondás. (Itt a $k = 4$ esetet nem kellett külön vizsgálnunk.)

Van olyan $2k$ pontú, k^2 élű gráf, amelyben nincs C_5 : a $K_{k,k}$ teljes páros gráf. Vagyis $e_5(2k) = e_3(2k)$ és az extrém gráf is megegyezik. (Bebizonyítható, hogy más extrém gráf C_5 esetében sincs.)

Ezzel a bizonyítást befejeztük annak bizonyítását, hogy $e_5(2k) = k^2$.

2.2. a) Ha egy ötpontú gráfban hét él van, akkor a komplementerében három. Ötpontú, háromélű egyszerű gráf – izomorfakat azonosnak tekintve – csak a következő lehet: egy háromszög és két izolált pont, egy négypontú út és egy izolált pont, egy él és egy tőle pontdiszjunkt kétélű út. Mindegyik komplementerében könnyen találunk C_4 -et.

Példa hatélű gráfra, amelyben nincs négy hosszú kör: két olyan háromszög, amelynek egy pontja közös.

b) Ha egy hatpontú gráfban legalább nyolc él van, akkor van benne olyan pont, amely legalább harmadfokú. Vegyük a legnagyobb fokú pontot, legyen ez x és legyen a fokszáma d . Szomszédainak halmaza legyen S_x ($|S_x| = d$), az x -szel össze nem kötött pontok halmaza legyen N_x ($|N_x| = 5-d$). Nézzük az S_x által feszített részgráfot. Ha ebben van egy másodfokú pont, akkor két szomszédjával és x -szel együtt egy négy hosszú kört alkotnak.

A továbbiakban feltehető tehát, hogy az S_x által feszített részgráfban minden pont foka legfeljebb egy. Ez azonban azt jelenti, hogy ebben a részgráfban legfeljebb $\lfloor d/2 \rfloor$ él van. Ez eddig az x -ből induló élekkel együtt $d + \lfloor d/2 \rfloor$ él.

Ha $d = 5$ volna, akkor a gráfban nem volna több él, tehát az élszám maximum hét volna.

Ha $d = 4$, akkor ez eddig hat él. N_x egyetlen pontból áll, ebből kell tehát a maradék két élnek kiindulnia. Mindkettő csak S_x -be futhat, s ekkor e két él, s a végpontjaikat x -szel összekötő két él egy négy hosszú kört alkot.

Ha $d = 3$, akkor eddig csak négy élünk van. S_x -nek most két pontja van. Ha valamelyikből két él indul N_x -be, akkor ugyanúgy, mint az előbb, megint van négy hosszú kör. Ha viszont mindegyikből csak egy-egy él indul N_x -be, akkor ez csak újabb két élt enged, N_x csak egy élt feszíthet, ez összesen csak hét él. Ezzel b)-t bebizonyítottuk.

Két pontdiszjunkt háromszög és egy őket összekötő él olyan hatpontú, hétélű gráf, amelyben nincs C_4 .

c) Ha egy hétpontú, tízélű gráfban van legfeljebb másodfokú pont, akkor hagyjuk el ezt az x pontot a belőle induló élekkel. A maradék hatpontú gráfban legalább nyolc él van, tehát b) szerint van benne C_4 .

Marad az az eset, ha minden pont foka legalább három. De ekkor az élszám legalább 11, tehát nem tízélű a gráf.

Példa hétpontú, kilencélű gráfra, amelyben nincs C_4 : három háromszög, amelynek egy közös csúcsa van.

Megjegyzés. A fenti bizonyításban van egy kis trükk. Csak *pontosan* tízélű gráfokra bizonyítottuk az állítást, mégis igaz a 11 élűekre is, hiszen hagyjunk el egy tíznél több élű gráfból éleket addig, amíg csak tíz éle lesz, s még mindig van benne C_4 .

2.3. a) Az előző (2.2.) feladat megoldásának jelöléseit és gondolatmenetét használjuk. Tehát legyen x egy d fokú pont, szomszédainak halmaza S_x ($|S_x| = d$), az x -szel össze nem kötött pontok halmaza N_x ($|N_x| = n - 1 - d$). Láttuk, hogy az S_x által feszített részgráfban minden pont foka legfeljebb egy, tehát ebben a részgráfban legfeljebb $\lfloor d/2 \rfloor$ él van. Az x -ből induló élek száma d . Végül az N_x -et és S_x -et összekötő élek száma legfeljebb $n - 1 - d$, ugyanis N_x minden pontjából csak egy él indulhat N_x -be. (Ha $y \in S_x$ össze van kötve $z, z' \in N_x$ -szel, akkor $yzxz'y$ egy C_4 .)

Ez összesen $d + \lfloor d/2 \rfloor + n - 1 - d = n - 1 + \lfloor d/2 \rfloor$, ahogy állítottuk.

b) Legyen G egy nyolcpontú, 12 élű egyszerű gráf. Ha van benne egy legfeljebb másodfokú pont, akkor hagyjuk ezt el a belőle induló élekkel együtt. Így egy hétpontú, legalább 10 élű gráfhoz jutunk, s arról a 3.1. feladat c) részéből már tudjuk, hogy van benne négy hosszú kör.

Marad az az eset, amikor minden pont foka legalább három. Mivel 12 él van, ez azt jelenti, hogy minden pont foka pontosan három.

Legyen x egy pont, S_x a három szomszédjának a halmaza és N_x a négy „nem-szomszédjának” a halmaza. a) szerint az S_x pontjaiból induló élek száma legfeljebb nyolc. Így N_x -ben legalább négy élnek kell lennie. Ezek csak egyetlen esetben nem alkotnak egy négy hosszú kört: ha egyikük – legyen ez z az összes többivel össze van kötve, és két szomszédja közt fut egy további él (l. a 3.1. feladatot). De akkor z -nek már nem lehet több szomszédja, így belőle nem futhat él S_x -be. Vagyis legfeljebb három olyan él van, amely S_x -et és N_x -et köti össze, ami azt jelenti, hogy az S_x -ből induló élek száma legfeljebb $3 + 1 + 3 = 7$. Ez viszont az N_x -beli legfeljebb négy éllel együtt is csak legfeljebb 11 él volna. Ezzel minden esetet elintéztünk és megmutattuk, hogy ha 12 él van, akkor van egy C_4 a gráfban.

Ha három háromszöget egy-egy pontjánál „összeragasztunk” (l. megint csak a 3.1. feladat c) részét), majd egy új pontot összekötünk két különböző háromszög egy-egy „szabad” csúcsával, akkor olyan nyolcpontú, 11 élű gráfot kapunk, amelyben nincs C_4 .

Ezzel beláttuk, hogy $e_4(8) = 11$.

c) Legyen G egy kilencpontú, 14 élű egyszerű gráf. Az ilyen gráfban van egy legalább negyedfokú pont. Másrészt ha van egy legfeljebb másodfokú pontja, akkor hagyjuk el a belőle induló élekkel együtt, így egy olyan nyolcpontú gráfot kapunk, amelynek legalább 12 éle van, tehát b) szerint van benne négy hosszú kör.

Marad az az eset, ha minden pont foka legalább három. Ekkor viszont egyetlen kivétellel minden pont foka három, tehát hat pont foka 3, egy ponté 4. Legyen a negyedfokú pont x , s megint jelöljük S_x -szel a négy szomszédjának a halmazát, N_x -szel a négy „nem-szomszédjának” a halmazát. Az S_x -ből induló élek száma a) szerint legfeljebb 10, tehát N_x -ben legalább négy él fut. Ezek között vagy van egy C_4 , vagy van egy olyan pont, amelyből mind a három további N_x -beli ponthoz fut él (l. a 3.1. feladatot). De akkor ebből a pont már nem futhat él S_x -be. A többi háromból is csak egy-egy él futhat S_x -be, tehát S_x pontjaiból legfeljebb $4 + 2 + 3 = 9$ él indul. Ez viszont az N_x -ben futó élekkel együtt is csak 13 él volna.

Ezzel beláttuk, hogy minden kilencpontú, 14 élű egyszerű gráfban van C_4 .

A megoldásból kapunk egy példát olyan gráfra is, amely 13 élű, de nincs benne C_4 . Ezt némi-
leg átrajzolva a következő gráfot kapjuk: Összeragasztunk két ötszöget egy élénél, ez eddig nyolc pont és kilenc él. A kilencedik pontot összekötjük az ötszögek összeragasztott élével szemközti csúccsal, és ezek egy-egy szomszédjával, de arra kell vigyázni, hogy ne keletkezzen négyszög, vagyis hogy a gráf ne legyen szimmetrikus az összeragasztott élre. Pontosán leírva: a gráf pontjai legyenek az $x, y, z, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ pontok. A két összeragasztott ötszög $xyu_1u_2u_3x$ és $xyv_1v_2v_3x$. A z pont össze van kötve az u_2, u_3, v_2, v_1 pontokkal.

2.4. a) következik a 2.3. feladat a) részéből.

b) abból következik, hogy ha egy gráfnak $e_4(n)$ éle van, akkor van egy olyan pontja, amelynek foka legalább $d \geq 2e_4(n)/n$.

c) Először csak heurisztikusan okoskodunk. Legyen $e_4(n) = nd$, akkor minden olyan gráfban, amelynek ennyi éle van, van egy legalább $2d$ -edfokú pont. Ha tehát nincs benne C_4 , az csak úgy lehet, ha legfeljebb $n - 1 - \lfloor d \rfloor + e_4(n - 1 - 2d)$ éle van. Itt próbáljuk meg az utolsó tagot is $(n - 1 - 2d)d$ -vel helyettesíteni. (Vagyis feltesszük, hogy $e_4(n)$ lineáris n -ben, ami nem lesz igaz, de ez a feltevés mégsem lesz túl pontatlan itt.) Vagyis valami olyasmit kapunk, hogy $nd \approx n + (n - 1 - 2d)d = n + nd - (1 + 2d)d$. Ez azt jelenti, hogy d nagyságrendileg \sqrt{n} (pontosabban $\sqrt{n/2}$).

Ennek fényében próbáljuk bebizonyítani, hogy $e_4(n) \leq n\sqrt{n}$. Ezt n kis értékeire már bőven tudjuk a 2.2. feladattól. Tegyük fel, hogy már minden, n -nél kisebb értékre tudjuk. Legyen G egy olyan gráf, amelynek több, mint $n\sqrt{n}$ éle van és tegyük fel indirekte, hogy nincs benne C_4 . Ekkor van egy olyan pontja, amelynek foka, $d \geq 2\sqrt{n}$. Alkalmazzuk erre a) -t és az indukciót. Azt kapjuk, hogy gráfunknak legfeljebb

$$\begin{aligned} n - 1 + \lfloor d/2 \rfloor + (n - 1 - d)\sqrt{n - 1 - d} &\leq n + \sqrt{n} + (n - 1 - 2\sqrt{n})^{3/2} \\ &< n + \sqrt{n} + (\sqrt{n} - 1)^{3/2} = n\sqrt{n} - 2n + 4\sqrt{n} - 1, \end{aligned}$$

s utóbbi már $n > 4$ -re kisebb $n\sqrt{n}$ -nél, ami ellentmond a gráfra tett feltevésünknek.

Ez az ellentmondás bizonyítja az indukciós lépést.

Megjegyzés. A 2.12. feladat megoldása egy ennél szemléletesebb bizonyítást ad egy ennél valamivel (egy $1/2$ -es szorzóval) élesebb állításra.

2.5. a) világos.

b) Minden ponthoz rendeljük hozzá a szomszédainak a halmazát. Mivel a gráf 4-reguláris, ezek a halmazok négyeleműek. Másrészt a gráfban nincs C_4 , ezért e halmazok közül semelyik kettőnek nem lehet két (vagy több) közös eleme. Ha ugyanis az a és b ponthoz rendelt szomszédossági halmaz tartalmazza x -et és y -t, akkor $axby$ négypontú kör volna. Tehát a „szomszédossági halmazok” megfelelnek.

2.6. a) Ha volna 12 pontú, 4-reguláris gráf, amelyben nincs C_4 , akkor ismét alkalmazható, amit a 2.5. feladat b) részében csináltunk: minden ponthoz hozzárendeljük a „szomszédossági” halmazát. Így 12 darab olyan négyelemű halmazt kapnánk, amelyek közül semelyik kettőnek

nincs egynél több közös pontja. De egy-egy négyelemű halmaz 6 elempárt fed le, tehát összesen 72 elempárt számolhatunk össze a 12 halmazban. A 12 pontú halmazból azonban csak 66 különböző elempárt választhatunk ki. Tehát van olyan elempár, amit a négyelemű pontok többszörösen lefednek. Ha x -et és y -t egyaránt lefedi az a -hoz és b -hez tartozó szomszédsági halmaz, akkor axy négypontú kör a gráfban.

b) bizonyítása pontosan ugyanúgy megy, mint a 2.5. feladat b)-é.

2.7. Megmutatjuk a következőt: egy hételemű halmaznak megadható hét darab háromelemű részhalmaza úgy, hogy közülük bármely kettőnek pontosan egy közös eleme van. Ez jó ellenpéldának, hiszen hétpontú 3-reguláris gráf egyáltalán nincsen, mert a fokszámösszeg nem lehet páratlan.

A konstrukció: Legyen a H halmaz hét eleme egy szabályos háromszög három csúcsa, három oldalfélező pontja és a háromszög súlypontja. A hét háromelemű halmaz: az egy oldalon levő pontok (három halmaz), a magasságokon levő pontok (három halmaz) és a beírt körön levő pontok (egy halmaz). E halmazok közül bármely kettőnek pontosan egy közös pontja van.

2.8. Rendeljük hozzá ismét a gráf minden pontjához a vele összekötött pontok halmazát. A 2.5. a) része szerint ez a húsz halmaz teljesíti azt a feltételt, hogy bármely kettőnek legfeljebb egy közös pontja van. Tegyük fel, hogy minden pont foka legalább öt. Akkor minden ilyen „szomszédsági” halmaz legalább ötelemű és uniójuk húszelemű. A K.II.19.5. feladat megoldása szerint viszont ilyenből legfeljebb 19 lehetne. Ez ellentmondás.

2.9.

1. megoldás. A 2.8. feladat megoldásának gondolatmenetét használjuk. Vagyis azt használjuk, hogy ha G minden pontjához hozzárendeljük a vele összekötött pontok halmazát és van olyan pontpár, amelyet legalább két ilyen halmaz tartalmaz, akkor (és csak akkor) van C_4 a gráfban.

Tekintsük tehát ezeket a halmazokat. Mindegyik legalább $n+1$ elemű, tehát az általa lefedett pontpárok száma legalább $n(n+1)/2$. Összesen n^2 halmaz van (mert G -ben ennyi pont van), tehát a lefedett pontpárok száma legalább $n^3(n+1)/2$. Viszont a gráfban összesen $n^2(n^2-1)/2$ különböző pontpár van, ami kevesebb, tehát van olyan pontpár, ami több „szomszédsági” halmazban is benne van. Ezzel a)-t is, b)-t is beláttuk.

2. megoldás. A megoldást elmondhatjuk másképp is. Tekintsük a gráf „cseresznyéit”, ezen az egy pontban érintkező xy, xz élpárokat értjük. Nevezzük x -et a cseresznye tövének, y -t és z -t a két szárának. Pontosán akkor van a gráfban C_4 , ha van két cseresznye, amelyben y és z megegyezik, vagyis van két azonos szárú, de különböző tövű cseresznye. Számoljuk össze a gráf cseresznyéit. Ha egy pont d fokú, akkor ő pontosan $d(d-1)/2$ cseresznye töve. A mi esetünkben tehát minden pont legalább $(n+1)n/2$ cseresznyének a töve. Ez összesen $n^3(n+1)/2$ cseresznyét jelent. Viszont a gráfban pontosan $(n^4 - n^2)/2$ y, z pontpár van, ami a cseresznyék számánál kevesebb. Ez csak úgy lehet, ha van két azonos szárú, de különböző tövű cseresznye, és ezt kellett bizonyítanunk. (Vö. [3] 60. oldal.)

2.10. a) Ha ismét hozzárendeljük minden csúcshoz a „szomszédsági” halmazát, azaz a vele összekötött pontok halmazát, akkor továbbra is igaz, hogy ha ezek között van kettő, aminek legalább két közös pontja van, akkor (és csak akkor) van C_4 a gráfban. A 2.8. feladat megoldásában azt használtuk, hogy ha minden halmaz legalább ötelemű, és semelyik kettőnek nincs két közös pontja, akkor nem lehet belőlük húsz darab, legfeljebb 19, és ez ellentmondás. Csakhogy most lehetnek két, három vagy négyelemű halmazok is, és ezek kevés pontpárt fednek le, tehát elképzelhető, hogy több ilyen halmaz van.

b) Egy-egy ilyen szomszédsági halmaz $(d_i^2 - d_i)/2$ párt fed le (d_i -vel jelölve az i -edik csúcs fokszámát), tehát az összesen lefedett pontpárok száma

$$\sum_{1 \leq i \leq n} d_i^2/2 - \sum_{1 \leq i \leq n} d_i/2.$$

A b) feladat erre a kifejezésre kér alsó és felső becslést. Itt a második összeg az élszám, e . Az első összeg pedig a K.II.10.3. feladat szerint legfeljebb $2e^2/n$. A keresett alsó becslés tehát $2e^2/n - e$. Egyenlőség csak reguláris gráfra áll fenn.

1. megjegyzés. Ez az a lépés, amivel sikerült az a)-ban jelzett nehézséget áthidalni. Lényegében beláttuk, hogy ha a fokszám nem egyenletes, akkor „rosszabb” a helyzet, mintha a fokszám egyenletes. Most már alkalmazhatjuk a 2.8. feladat megoldásának gondolatmenetét!

Ha a gráfban nincs négypontú kör, akkor ebben az összegben minden pontpárt legfeljebb egyszer számoltunk meg. Tehát a teljes gráf élszáma a felső becslés: $n(n-1)/2$.

c) Legyen tehát G egy húszpontú gráf, amelyben nincsen kör. Vessük össze a b)-ben kapott két becslést. Az élszáma, e -re a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$e^2/10 - e \leq 190.$$

Ez pedig $e \geq 50$ -re nem teljesül. Tehát egy 20 pontú és legalább 50 élű gráfban van C_4 .

2.11. Amikor egy pont „szomszédsági halmaza” által lefedett pontpárokat számoljuk, ehelyett számolhatjuk az olyan cseresznyéket, amelyeknek ez a pont a töve. A számolás pontosan ugyanúgy megy. Vö. Elekes György: *Véges matematika* ([3], 60-61. oldal) és ugyanó: *Kombinatorika feladatok* ([2] 64-65. oldal).

2.12. a) A 2.10. feladat szerint ha egy n pontú, e élű gráfban nincs négypontú kör, akkor teljesül rá a $2e^2/n - e \leq (n^2 - n)/2$ egyenlőtlenség. Ezt n -nel szorozva és egy oldalra rendezve a

$$4e^2 - 2en - n^3 + n^2 \leq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ezt e -re megoldva:

$$e \leq n/4 + \sqrt{4n^3 - 3n^2}/4 = n(\sqrt{n - 3/4} + 1/2)/2 < n\sqrt{n}/2 + n/4.$$

Ez valamivel élesebb a feladat c) részének állításánál.

b) Legyen p egy prím és legyenek a gráf pontjai az $0, 1, 2, \dots, p-1$ számokból képezhető számpárok a $(0,0)$ számpár kivételével. Ez $n = p^2 - 1$ pont. Az (a, b) és a (c, d) pontokat akkor kötjük össze, ha $ac + bd \equiv 1 \pmod{p}$. Rögzítsük az (a, b) pontot. Ekkor pontosan p olyan (c, d) pontpár van, amelyre $ac + bd \equiv 1 \pmod{p}$ (és a $(0,0)$ pontpár nincs közöttük). Ugyanis a és b közül legalább az egyik nem nulla. Ha például b nem nulla, akkor bd egy teljes maradékrendszer mod p , tehát minden c -hez pontosan egy d teljesíti a $bd \equiv 1 - ac$ kongruenciát. Ha b nulla, akkor a -ra mondjuk el ugyanezt.

Nincs kizárva, hogy egy (a, b) pont önmagával van összekötve (ez akkor fordul elő, ha $a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{p}$), de ezeket a hurokéleket elhagyjuk.

Azt kaptuk, hogy minden pontnak vagy p , vagy $p-1 > \sqrt{n} - 1$ a fokszáma. Ez azt jelenti, hogy a gráf élszáma legalább $n\sqrt{n}/2 - n/2$.

Belátjuk, hogy a gráfban nincs négypontú kör. Ez ugyanis azt jelentené, hogy van két különböző pontpár, (a, b) és (c, d) , amelyeknek van két közös szomszédja. Vagyis a gráf definíciója szerint az

$$\begin{aligned} ax + by &\equiv 1 \pmod{p} \\ cx + dy &\equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

kongruenciának két különböző megoldása volna az adott számpárok között. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen. Megjegyezzük, hogy „szemléletesen” arról van szó, hogy a mod p számpárok hasonlóan viselkednek, mint a valós számpárok, s a felírt két kongruencia két „egyenes” definiál, amelyek vagy „párhuzamosak”, vagy egy pontban metszik egymást. Azonos pedig csak úgy lehet a két egyenes, ha a két „normálvektor”, (a, b) és (c, d) párhuzamos, de mivel a bal oldalon azonos szám áll, ez csak $a = c, b = d$ esetén teljesülne, amit kizártunk.

A következőképp bizonyítunk. Nyilván elég megmutatni, hogy y (ha van), egyértelműen meghatározott: szimmetria okokból ugyanígy kapjuk, hogy x is egyértelmű (ha van megoldás).

Szorozzuk az első kongruenciát c -vel, a másodikat a -val (Gauss-féle elimináció) és vonjuk ki az elsőből a másodikat:

$$(bc - ad)y \equiv c - a.$$

Ha $bc - ad$ nem nulla mod p , akkor ennek a kongruenciának pontosan egy megoldása van y -ra (minden más fix), mert $(bc - ad)y$ teljes maradékrendszer. Ha viszont $bc - ad \equiv 0$, akkor a kongruenciának csak $c = a$ esetén van megoldása. De ebből és $bc - ad \equiv 0$ -ból következik, hogy $b \equiv d \pmod{p}$, tehát egyenlők is. Ez viszont azt jelentené, hogy az (a, b) és a (c, d) számpár különböző, amit kizártunk.

Ezzel beláttuk, hogy a gráfban nincs négypontú kör.

2.13. A 2.12. feladatban definiált gráfban minden pont foka legalább $p - 1$ és nincs benne négypontú kör. Viszont p tetszőleges prím lehet, tehát a foksám tetszőlegesen nagy lehet. Nincs tehát olyan m szám, amelyre a feladat állítása igaz volna.

3. A skatulyaelv gráfelméleti élesítése, I.

3.1. Válasszunk ki találomra egyvalakit a hattagú társaságból, mondjuk hívják őt Ádámnak. Ha Ádám ismerősei között van kettő, aki ismeri egymást, akkor ők ketten és Ádám megfelelnek. Tehát feltehetjük, hogy Ádám ismerősei közül senki nem ismeri a másikat. Ha tehát Ádám ismer legalább három embert, akkor három ismerőse megfelel. Ha viszont Ádám legfeljebb két embert ismer a társaságból, akkor legalább hármat nem ismer. Ha e „nem-ismerősei” között van kettő, aki szintén nem ismeri egymást, akkor ők ketten és Ádám megfelelnek. Ha viszont a „nem-ismerősei” közül senki nem ismeri a másikat, akkor Ádám három „nem-ismerőse” három megfelelő ember.

3.2. Válasszuk ki a társaság egy tetszőleges A tagját, és nézzük az ismerőseit. Biztos, hogy ismerősei közül senki nem ismeri a másikat, különben ők ketten és A három ember volna, akik kölcsönösen ismernék egymást. Viszont ugyanezért A -nak nem lehet kettőnél több ismerőse. Másrészt nézzük azokat, akiket nem ismer. Ezek közül mindenki ismeri egymást, mert ha ketten nem ismernék egymást, akkor ők és A olyan három ember volna, akik közül senki nem ismer senkit. Viszont ezért nem lehet A -nak kettőnél több „nem-ismerőse” sem. Összesen négyen vannak rajta kívül, tehát két embert ismer, azok nem ismerik egymást – és két embert nem ismer, akik viszont ismerik egymást. Ezt a társaság mindegyik tagjáról elmondhatjuk. Ha gráffal ábrázoljuk az ismeretségeket, akkor egy 2-reguláris ötpontú gráfot kaptunk. Nyilvánvaló, hogy egyetlen ilyen van: az ötpontú kör (átló nélkül). És éppen ezt állítja a feladat állítása is.

3.4. Egy egyszínű háromszög van a 3.3. feladat szerint. Hagyjuk el e háromszög egyik x pontját. A maradék ötpontú gráfban vagy van még egy egyszínű háromszög, vagy úgy van két színnel színezve, hogy mindkét színű él egy C_5 -öt alkotnak. (L. a 3.2. feladatot.) Előbbi esetben kész vagyunk.

Utóbbi esetben x -et az öt pont közül legalább hárommal azonos színű él köti össze, legyen ez az 1-es szín. Az 1-es színű C_5 szerint számozzuk a pontokat mod 5, tehát az 123451 kör élei 1-es színűek. Minthogy három 1-es színű él indul x -ből, ezek közül kettő a kör szomszédos pontjaihoz indul. Úgy számozzuk, hogy x össze van kötve 1-gyel és 2-vel. Ha 3-mal vagy 5-tel is 1-es színű él köti össze, akkor $x12$ mellett van még egy 1-es színű háromszögünk, ha viszont 3-mal is, 5-tel is 2-es színű él köti össze, akkor $x35$ egy 2-es színű háromszög.

A „három-ház-három-kút” ($K_{3,3}$) gráfban nincs háromszög (mert páros gráf) és a komplementere két diszjunkt háromszög. Legyenek a két diszjunkt háromszög élei 1-es színűek, a többi él 2-es színű. E mellett a színezés mellett nincs három egyszínű háromszög.

3.5. a) Vegyünk egy x pontot a gráfból. Nézzük, hány szomszédja lehet. Tudjuk, hogy a szomszédai között nem futhat él. Ha van legalább négy szomszédja, akkor ezek a komplementerben egy teljes négyest alkotnak. Ha viszont legfeljebb három szomszédja van, akkor van hat olyan pont, amellyel nincsen összekötve. Nézzük az ezek által feszített részgráfot. Itt a 3.1. feladat szerint vagy van háromszög, vagy a komplementerben van háromszög. Az előbbi esetet kizártuk, tehát a komplementerben van háromszög. Ennek pontjai x -szel együtt egy négy pontú teljes gráfot alkotnak.

b) Az a) részben azt kaptuk, hogy ha a gráfban nincs háromszög, és egy pontnak legalább négy szomszédja van, vagy legalább hat ponttal a komplementerben van összekötve, akkor van a komplementerben teljes négyes. Egyetlen eset marad: ha minden pont foka három (és a komplementerben öt). De kilencpontú gráfnál ez nem fordulhat elő, hiszen akkor a fokszámösszeg páratlan volna. Beláttuk tehát, hogy $9 \rightarrow (3, 4)$.

A c) részre a 3.7. feladatban fogunk válaszolni. Az világos, hogy ha van ellenpélda, ott minden pont foka legfeljebb három.

3.6. Tegyük fel, hogy van négy pontú teljes részgráf és legyen egyik pontja x . A másik három pont csak x szomszédai közül kerülhet ki. Legyenek a szomszédai y, z, u, v . A feladat feltétele szerint hiányzik például az yz és az uv él. Ezért y és z közül legfeljebb az egyik szerepelhet a teljes négyesben, s ugyanúgy u és v közül is. Ez viszont összesen legfeljebb három pont. Az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását.

3.7. A gráf álljon egy nyolcpontú körből: $x_1x_2 \dots x_8x_1$ és minden pontot kössünk még össze a szembenlevő ponttal. Ez a gráf csúcstranzitív (minden pontjából ugyanúgy néz ki), ezért elég belátni, hogy nincs benne olyan háromszög, amely tartalmazza x_1 és a komplementerében sincs olyan teljes négyszög, amely tartalmazza x_1 -et. Valóban: x_1 szomszédai között a gráfban nem fut él, tehát nincs benne háromszög. Másrészt nézzük a komplementer gráfot. Ez 4-reguláris gráf. A komplementerben x_1 szomszédai x_3, x_4, x_6, x_7 . Viszont az x_3x_4 és az x_6x_7 él nem a komplementerben fut, így a 3.6. feladat szerint a komplementerben nem lehet négy pontú teljes gráf.

3.8. a) Nem következik.

b) Következik. Ha ugyanis sem egyik színből sincs K_4 , akkor $9 \rightarrow (4, 3)$ -ből következik, hogy van 2-es színű háromszög, és $9 \rightarrow (3, 4)$ -ből következik, hogy van 1-es színű háromszög.

3.10. n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 2$, akkor $r(2, 3) = 3$ igaz. Ha $n = 3$, akkor beláttuk, hogy $r(3, 3) = 6 = \binom{4}{2}$. Ha $n = 4$, akkor azt is láttuk, hogy $r(4, 3) = 9 < \binom{5}{2}$. Tegyük fel, hogy $n - 1$ -re már tudjuk az állítást és legyen G egy $\binom{n+1}{2}$ pontú gráf. Azt kell belátnunk, hogy vagy van benne K_n , vagy van benne három független pont.

Vegyünk egy tetszőleges x pontot és tekintsük a vele össze nem kötött pontokat, ezek halmaza legyen H . Ha H valamely két pontja között nem fut él, akkor e két pont és x egy független

ponthármas. Ha viszont bármely két pontja között él, akkor H pontjai teljes részgráfot alkotnak. Ha tehát H -ban legalább n pont van, akkor van a gráfban K_n .

Marad az az eset, amikor H -nak legfeljebb $n - 1$ pontja van. Ez viszont azt jelenti, hogy x legalább $\binom{n+1}{2} - n = \binom{n}{2}$ ponttal van összekötve. Az indukciós feltevésünk szerint tehát az általuk feszített részgráfban vagy van üres hármas, vagy van K_n . Ezzel az indukciós lépés bizonyítását befejeztük.

3.11. a) Alkalmazzuk ebben az esetben is a 3.10. feladat gondolatmenetét. Vegyünk egy $r(n, k - 1) + r(n - 1, k)$ pontú egyszerű gráfot és annak egy x pontját. Tekintsük a vele össze nem kötött pontok által feszített részgráfot. Ha ebben van K_n , akkor kész vagyunk. Ha van $k - 1$ független pont, akkor ezek x -szel együtt k független pontot alkotnak, és megint kész vagyunk. Ha viszont egyik sem teljesül, akkor legfeljebb $r(n, k - 1) - 1$ ponttal nincs összekötve x , tehát legalább $r(n - 1, k)$ ponttal össze van kötve. Vagyis a szomszédai által feszített részgráfban vagy van K_{n-1} , s ennek pontjai x -szel kiegészítve egy K_n -et alkotnak, vagy van k független pont. Tehát minden esetben kész vagyunk a bizonyítással.

a)-ból b) a Pascal-háromszög képzési szabálya szerint következik teljes indukcióval.

3.1. Vegyünk egy embert a társaságból. Ő valamelyik nyelven legalább hat emberrel levelezik. Feltehetjük, hogy franciául. Ha e hat levelezőpartnere közül ketten szintén franciául leveleznek, akkor megvan a három ember, akik egymással egy nyelven leveleznek. Ha viszont e hat levelezőpartnere közül senki nem levelezik senkivel franciául, akkor ők csak két nyelvet használnak. Nézzük azt az általuk mint szögpontok által alkotott gráfot, amelyben a német nyelvű levelezések az élek. Ebben a hatpontú gráfban a 3.1. feladat szerint vagy van háromszög, vagy van üres háromszög. Előbbi esetben találtunk három embert, aki németül levelezik egymással, utóbbi esetben találtunk három embert, aki angolul levelezik egymással.

3.2. A 3.1. feladat szerint bárhogyan választunk 17 pontot, azokból kiválasztható három, amelyek között futó három él egyszínű lesz. Így $\binom{m}{17}$ egyszínű hármast találunk. Nézzük, hányszor számolhattunk meg egy egyszínű hármast. Nyilván annyiszor, ahányféleképpen a többi 14 pontot kiválaszthattuk hozzá. Ezt $\binom{m-3}{14}$ -féleképp tehetjük meg. Tehát legfeljebb ennyiszor számoltunk egy egyszínű hármast, így legalább

$$\binom{m}{17} / \binom{m-3}{14} = m(m-1)(m-2)/4080$$

egyszínű hármast kaptunk. Ez az összes, azaz $\binom{m}{3} = m(m-1)(m-2)/6$ hármast a 680-ad része.

3.3. Igen. Osszuk a gráf csúcsait négy osztályba, legyenek ezek A, B, C és D . Az AA, BB, CC és DD éleket színezzük pirosra, az AB és CD éleket színezzük kékre, a többit, tehát az AD, BC, BD és AC éleket színezzük zöldre. Ez a színezés megfelel.

3.4. A kényelem kedvéért fogalmazzuk át a feladatot gráfokra. Adott egy $3n + 1$ pontú teljes gráf, amelynek éleit három színnel, T -vel, P -vel és S -sel úgy, hogy minden csúcsból, az onnan kiinduló élek közül ugyanannyi (n) él lesz T, P és S színű. Az a kérdés, hogy legalább hány „tarka” hármast tudunk garantálni, azaz olyat, amelyekben mind a három szín szerepel.

Jelöljük a „tarka” háromszögek számát H_3 , az egyszínűekét (tehát ahol mind a három él azonos színű) H_1 és az olyanokét, amelyekben két szín szerepel, H_2 . Vezessük be a „cseresznye” fogalmát. Ez két, egy csúcsból induló élből álló alakzat. Ha megszámláljuk kétféleképpen, hogy hány egyszínű cseresznye van, akkor azt kapjuk, hogy

$$3H_1 + H_2 = (3n + 1)3n(n - 1)/2$$

hiszen egy egyszínű háromszögben három, egy kétszínűben egy egyszínű cseresznyét találunk; másrészt minden csúcsban minden színből $\binom{n}{2}$ -t.

Ha összeszámoljuk kétféleképpen, hogy hány kétszínű cseresznye van, akkor viszont azt kapjuk, hogy

$$2H_2 + 3H_3 = (3n + 1)3n^2$$

hiszen egy kétszínű háromszögben két kétszínű cseresznye van, egy háromszínűben pedig három. Másrészt egy csúcsból induló cseresznyék közül például T és P színű cseresznyéből n^2 van, és három ilyen színpárosítás lehetséges.

Ha most a második eredményből kivonjuk az első kétszeresét és osztunk hárommal, akkor átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$H_3 = (3n + 1)n + 2H_1$$

Ez az eredmény máris több, mint a K.II.19.2. feladat megoldásánál kapott $(3n + 1)n$ becslés. Persze, még mindig kevés, a feladat most úgy módosult, hogy most már az egyszínű háromszögekről kell belátnunk, hogy az összes háromszög pozitív százalékát adják nagy n -re is. Itt megkérdezhetnénk, hogy miért jobb nekünk, hogy H_1 -et kell megbecsülnünk, mint az eredeti feladat, ahol H_3 -at kellett becsülnünk. Erre elég érdekes válasz adható, s ezt a 3.3. feladat tartalmazza: ha egy m csúcsú teljes gráf éleit három színnel színezzük, akkor még ha kikötjük is, hogy mind a három színt használni kell, akkor sem biztos, hogy lesz benne háromszínű háromszög. Viszont egyszínű biztosan lesz benne, ha m legalább 17 - ezt a ?? . feladatban láttuk. Tehát van rá reményünk, hogy könnyítettünk a helyzetünkön. És valóban: a 3.2. feladat szerint egy ilyen színezésben a hármasoknak legalább a 680-ad része egyszínű!

Tehát $3n + 1 > 17$, azaz $n > 6$ esetén már kész is vagyunk: beláttuk, hogy a mi esetünkben a „tarka”, azaz háromszínű háromszögek száma legalább 340-ed része az összes hármasnak. n kisebb értékeire az állítás abból következik, hogy már $(3n + 1)n$ is több, mint 340-ed része az összes hármasnak $(2/(3n - 1) > 1/340)$, ha $n < 227$ - eredményünk csak ilyen n -ekre jobb, mint amit a K.II.19.2. feladat megoldásánál bizonyítottunk.

Megjegyzés. A 340-es konstans javítható. Erről részletesebben lásd a KöMaL 1988/8-9. számában Surányi László: *Megjegyzések az 1987. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 3. feladatához.* című cikkét.

3.5. n -re vonatkozó teljes indukcióval belátható, hogy ha egy $1 + n!(1/0! + 1/1! + \dots + 1/n!)$ pontú teljes gráf éleit n színnel színezzük (egy él egy színt kap), akkor van egyszínű háromszög. Könnyen kiszámolható ugyanis, hogy ha veszünk egy tetszőleges x pontot, akkor valamelyik színből legalább $1 + (n - 1)!(1/0! + 1/1! + \dots + 1/(n - 1)!)$ él indul ki belőle. Innen az a 3.1. feladat megoldásának gondolatmenete alkalmazható: vagy van ebből a színből egy él x szomszédai között és akkor ez az él és a végpontjaihoz x -ből vezető két él egyszínű, ellenkező esetben ez a szín ki van zárva a szomszédok közül és akkor alkalmazhatunk indukciót n -re.

3.6. Ha az n_i számok egy kivételével 2-vel egyenlők, akkor az $r(2, \dots, 2, n_i, 2, \dots, 2)$ -függvény értéke n . Hiszen az állítás éppen azt mondja ki, hogy vagy minden él az i -edik színt kapta, vagy van más színű él is. Másrészt a 3.11. feladat gondolatmenete átvihető több színre is, és akkor azt kapjuk, hogy

$$r(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq r(n_1 - 1, n_2, \dots, n_k) + r(n_1, n_2 - 1, \dots, n_k) + \dots + r(n_1, n_2, \dots, n_k - 1).$$

Vegyünk ugyanis egy

$$r(n_1 - 1, n_2, \dots, n_k) + r(n_1, n_2 - 1, \dots, n_k) + \dots + r(n_1, n_2, \dots, n_k - 1)$$

pontú teljes gráfot és színezzük ki éleit k színnel tetszőlegesen. Vegyünk egy x pontot és nézzük a belőle kiinduló első színű éleket. Ha ezekből legalább $r(n_1 - 1, n_2, \dots, n_k)$ darab van, akkor ezek végpontjai között vagy van első színű teljes $n_1 - 1$ -es és akkor x -et hozzávéve van teljes n_1 -es, vagy valamelyik másik i -re van i színű teljes n_i pontú rész. Ugyanígy járhatunk el bármelyik más szín esetén. Ha viszont minden i -re kevesebb volna az i színű éllel összekötött szomszédok száma, akkor a gráf pontszáma is kevesebb volna a megadottnál.

Innen az összes n_i -re vonatkozó teljes indukcióval az általános Ramsey-tétel nyilvánvalóan következik.

3.1. Vagy a gráfban, vagy a komplementerében legalább nyolc él van, mert összesen a kettőben 15 él van. Viszont egy nyolccélú egyszerű gráfban van négy hosszú kör a 3.1. feladat b) része szerint.

3.2. a) Ha G egy ötpontú kör (C_5), akkor a komplementere is az és egyikben sincs C_4 .

b) Álljon a gráf egy $2n - 1$ pontú teljes gráfból és egy $n - 1$ pontú teljes gráfból. Ebben a gráfban nyilván nincs C_{2n} , hiszen mindkét komponensének kevesebb pontja van $2n$ -nél. Viszont a komplementer egy páros gráf, amelynek egyik osztályában csak $n - 1$ pont van, így a leghosszabb kör is csak $2n - 2$ pontból áll.

c) Álljon a gráf két $n - 1$ pontú pontdiszjunkt teljes gráfból. Ebben a gráfban nyilván nincs n pontú kör. A komplementere viszont páros gráf, abban tehát egyáltalán nincs páratlan kör, így C_n sem.

3.3. a) A pontokat számokkal jelöljük. Legyen az ötszög öt pontja (sorrendben) 1,2,3,4,5. Ha az ötszög valamelyik átlója a gráfban van, akkor kész vagyunk, hiszen ez az átló egy négyhosszú kört zár be. Ha viszont minden átló a komplementerben van, akkor az 135241 a komplementerben egy öthosszú kör. Vegyük a hatodik pontot, ez vagy a gráfban, vagy a komplementerben az öthosszú körnek legalább három pontjával van összekötve, így össze van kötve a megfelelő kör két másodsomszédjával is. A két másodsomszéd, a köztük levő pont és a hatodik pont egy négyhosszú kört alkot.

b) Ha a gráfban van C_6 , akkor legalább hat pontból áll, így a) szerint kész vagyunk, ha van benne C_5 . Ha viszont nincs a gráfban sem öt-, sem négyhosszú kör, akkor a hatszög (C_6) minden átlója a komplementerben kell, hogy legyen. Tehát például 13641 egy C_4 a komplementerben. (A hatszög pontjait most is sorba számoztuk.)

c) n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy minden n -nél kisebb számra már tudjuk az állítást, és legyen adva egy gráf, benne egy n hosszú kör. Ha ennek a körnek valamelyik átlója a gráfban van, akkor találtunk egy n -nél rövidebb (és legalább négyhosszú!) kört. Ebből az indukciós feltevéssel következik az állítás. Ha viszont minden átló a komplementerben van, akkor például $13n41$ egy C_4 a komplementerben.

3.4. A pontokat ismét számokkal jelöljük.

a) Legyen a C_7 az 12345671 kör, a számozást mod 7 tekintjük (tehát például a 9-es pont azonos a 2-essel). Ha valamely i -re a gráfban van az i és $i + 2$ -t összekötő él, akkor ez egy C_6 -ot zár be és kész vagyunk. Ha minden i -re a komplementerben van az él, akkor az 13572461 egy C_7 -et alkot a komplementerben. Ha valamely i -re az i -t és $i + 4$ -et összekötő él a komplementerben van, akkor a komplementerben találtunk egy C_7 -et. Ha viszont minden $i, i + 4$ él a gráfban van, tehát például az 15 és a 37 él is a gráfban van, akkor az 1567321 egy C_6 a gráfban.

b) Legyen a C_8 az 123456781 kör, a számozást mod 8 tekintjük. Ha valamely $i, i+2$ él a gráfban van, akkor van C_7 a gráfban, s ekkor a) szerint kész vagyunk. Ha valamely $i, i+3$ él a gráfban van, akkor ez egy C_6 -ot zár be és ismét kész vagyunk. Marad az az eset, ha minden ilyen él a komplementerben van. Ekkor viszont az 1368241 egy C_6 a komplementerben.

3.5. A pontokat ismét számokkal jelöljük.

a) Legyen a C_9 az 1234567891 kör, a számozást mod 9 tekintjük. Ha valamely i -re az $i, i+2$ él a gráfban van, akkor ez a kör többi pontjával egy C_8 -at zár be. Ha minden ilyen él a komplementerben van, akkor 1357924681 egy C_9 a komplementerben. Ha ennek egyik legrövidebb átlója szintén a komplementerben van, akkor a komplementerben van egy C_8 . Ellenkező esetben minden $i, i+4$ él a gráfban van. Ekkor az 159432761 kör egy C_8 a gráfban. (A 2,7 él azonos a 7,11 éllel, a 6,1 él a 6,10 éllel.)

b) Ez következik a)-ból és a 3.4. feladat b) részéből.

c) Teljes indukció n -re, ugyanúgy megy, mint a 3.3. feladat c) részében.

d) Legyenek a C_{10} pontjai sorrendben 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,1, a pontokat mod 10 számozzuk. Ha valamelyik i -re a gráfban van az $i, i+2$ él, akkor ez egy C_9 -et zár be és a) szerint kész vagyunk. Ha pedig az $i, i+3$ él van a gráfban, akkor rögtön egy C_8 -at kapunk. Marad az az eset, ha minden $i, i+2$ és $i, i+3$ él a komplementerben van. Ekkor az 135798641 egy C_8 a komplementerben.

3.6. A pontokat ismét számokkal jelöljük. A 3.5. feladat d) pontjának bizonyítása általánosítható. Legyenek a C_{2n+2} sorrendben 1,2, ..., $2n+1, 2n+2, 1$. Ha valamely $i, i+2$ él a gráfban volna, akkor ez egy C_{2n+1} -et zárna be, amit a feladat feltétele kizár. Ha valamely $i, i+3$ a gráfban van, akkor ez egy C_{2n} -et zár be és kész vagyunk. Ha az összes $i, i+2$ és $i, i+3$ él a komplementerben van, akkor az 1,3,5,7, ..., $2n+1, 2n, 2n-2, \dots, 6, 4, 1$ egy C_{2n} a komplementerben (a $2n+2$ és a 2 pont maradt ki a körből).

3.7. A kör pontjait ismét megszámozzuk, a)-ban mod 11, b)-ben mod 13, c)-ben mod 15, d)-ben mod $2n+1$.

Ha valamelyik legrövidebb átló ($i, i+2$) a gráfban van, akkor máris találtunk egy C_{12} -t a) esetében, C_{14} -et b) esetében és C_{2n} -et c) esetében. Feltehetjük tehát, hogy ezek az élek mind a komplementerben vannak. De akkor a komplementerben egy ugyanilyen hosszú (13, 15 illetve $2n+1$ hosszú) kört zárnak be (itt használjuk, hogy páratlan körről van szó). Ez a kör az általános esetben: 1,3,5, ..., $2n+1, 2,4,6, \dots, 2n, 1$. Ezért ugyanúgy kész vagyunk, ha ennek valamelyik legrövidebb átlója, tehát ha valamelyik $i, i+4$ él a komplementerben van. Feltehető tehát, hogy az $i, i+4$ élek mind a gráfban vannak. Tekintsük

a) esetében a 2,6,7,8,9,5,1,11,10,3,2 kört, ez C_{10} a gráfban.

b) esetében a 2,6,10,11,7,8,12,13,9,5,4,3,2 kört, ez C_{12} a gráfban.

c) esetében a 2,6,10,11,7,8,12,13,9,5,1,15,14,3,2 kört, ez C_{14} a gráfban.

d)-nél feltehetjük immár, hogy $2n+1 > 15$ (l. az a),b)c) részt, továbbá a 3.4. és a 3.5. feladat a) részét). Két esetet különböztetünk meg:

Ha $2n+1 = 4k+1$ alakú, ekkor az a) mintájára tekintsük a 2,6, ..., $4k-6, 4k-2, 4k-1, 4k-3, \dots, 11, 7, 8, 12, \dots, 4k-4, 4k, 4k+1, 4k-3, \dots, 9, 5, 4, 3, 2$ kört, ez $C_{4k} = C_{2n}$ a gráfban (csak az 1 pont marad ki az eredeti kör pontjai közül).

Ha $2n+1 = 4k+3$ alakú, ekkor a b) mintájára tekintsük a 2,6,10, ..., $4k-2, 4k-1, 4k-5, \dots, 11, 7, 8, 12, \dots, 4k-4, 4k, 4k+1, 4k-3, \dots, 13, 9, 5, 1, 4k+3, 4k+2, 3, 2$ kört, ez $C_{4k+2} = C_{2n}$ a gráfban (csak a 4 pont marad ki az eredeti kör pontjai közül).

3.8. Ha veszünk egy $K_{k,k}$ teljes páros gráfot (vagyis olyat, amelynek mindkét osztályában $k-k$ pont van, akkor ebben a gráfban nyilván van C_{2k} , de egyáltalán nincs páratlan kör, így speciálisan C_{2k-1} sem. Másrészt a komplementere két diszjunkt, k pontú teljes gráfból áll, így

semmilyen k -nál nagyobb l -re nincs benne C_l . Ezzel beláttuk, hogy nemcsak az nem következik egy C_{2k} létezéséből, hogy a gráf vagy a komplementere tartalmaz C_{2k-1} -et, hanem arra is adtunk példát, hogy semmilyen k -nál nagyobb páratlan l -re sem tartalmaz C_l -et sem a gráf, sem a komplementere.

3.9. A 3.6. feladatban már láttuk, hogy ha a gráfban nincs C_{2n+1} akkor igaz az állítás. A 3.7. feladat d) részében pedig láttuk, hogy ha van benne C_{2n+1} akkor is igaz az állítás.

3.10. Jelölje $m = 2k$. A feladat állítása k -ra vonatkozó teljes indukcióval kijön a 3.9. feladatból.

3.11. Ha $m = 2n + 1$, akkor a 3.7. feladat d) része tartalmazza megoldást. Ha $m = 2n + 2$, akkor a 3.9. feladat tartalmazza a megoldást. A 3.10. feladat ezen túlmenően minden páros m -re is tartalmazza a megoldást. Ha m páratlan, akkor előbb a 3.7. feladat d) része szerint találunk egy C_{m-1} -et a gráfban vagy a komplementerében. Innen pedig a 3.10. feladattal kész vagyunk.

Nyitva marad a kérdés: ha k páratlan, vajon C_{2k} létezéséből következik-e, hogy vagy a gráfban, vagy a komplementerében van C_k ?

3.12. a) Ha egy szám az egyik csoportban van, akkor a kétszerese a másikban, különben kész vagyunk. Ezért az 1 és a 4 az egyik csoportban van, a 2 a másikban. Ha a 3 az 1 és 4-gyel van egy csoportban akkor ők hárman megfelelőek. Ha a 3 a 2-essel van egy csoportban, akkor mindkét csoportban olyan két elem van, amelyek összege 5, tehát az 5-öt bármelyikbe tesszük, ő és a másik két szám megfelelő.

b) A feladat állítása egyenértékű azzal az állítással, hogy a versenyzők között van kettő, akik honfitársak és helyezési számuk különbsége egy honfitársuk helyezési számával egyezik (ez utóbbi lehet a kettőjük közül való is).

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. A skatulyaelv szerint van egy ország – ezt nevezzük az első országnak –, amelyikből legalább hat versenyző indult. Legyen ezeknek a versenyzőknek a helyezése $a_1 < a_2 < \dots < a_6$. Ekkor az indirekt feltevésünk értelmében az $a_i - a_j$ helyezési versenyzők nem lehetnek az első országból valók, így az

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_4 - a_1, a_5 - a_1, a_6 - a_1$$

helyezési számú versenyzők sem. Ők tehát csak a második vagy harmadik országból valók lehetnek. De akkor van közöttük három, akik ugyanabból az országból valók, például a másodikból valók a $b_1 < b_2 < b_3$ helyezési versenyzők. Nézzük a $b_2 - b_1$, $b_3 - b_2$ és a $b_3 - b_1$ helyezési versenyzőket. Indirekt feltevésünk szerint egyikük sem lehet a második országból. De nem lehet az első országból sem, hiszen minden b_i felírható $a_j - a_1$ alakban, s így a különbségük felírható $a_j - a_k$ alakban. E három versenyző tehát a harmadik országból való, ám az első kettő helyezési számának különbsége éppen a harmadik helyezési száma. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

c) A feladat állítása egyenértékű azzal az állítással, hogy a társaságban van két tudós, akik honfitársak és sorszámaik különbsége egy honfitársuk sorszámaival egyezik.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Van egy ország – ezt nevezzük az első országnak –, amelyikből legalább 330-an vannak (skatulyaelv). Ha ezek sorszámai

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{330},$$

akkor az indirekt feltevés szerint az $a_k - a_i$ sorszáma tudósok egyike sem lehet az első országból való. Így az

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{330} - a_1$$

sorszáma tudósok egyike sem A -beli, vagyis a többi öt ország egyikébe való. A skatulyaelv szerint van közöttük 66, akik egyazon országból valók – ezt az országot nevezzük a második országnak

–, legyenek ezek a

$$b_1 < b_2 < \dots < b_{66}$$

sorszámú tudósok. Ekkor indirekt feltevésünk szeirnt a $b_j - b_k$ sorszámú tudósok egyike sem lehet a második orszábeli tudós. De nem lehet az első orszábeli sem, ugyanis minden $b_j - b_k$ valamilyen l és m -re $a_l - a_m$ alakú. Tehát a

$$b_2 - b_1, b_3 - b_1, \dots, b_{66} - b_1$$

sorszámú tudósok nem lehetnek sem az első, sem a második országból való. Ez 65 tudós.

A gondolatmenetet folytatva kapunk 17 tudóst, akik egy harmadik országból való. Ha ezek $c_1 < c_2 < \dots < c_{17}$, akkor ismét mondhatjuk, hogy a $c_k - c_j$ sorszámú tudósok sem lehetnek sem e harmadik országból, sem az első kettőből való. (Ugyanis minden ilyen különbség felírható két b különbségként, s azok viszont két a különbségként.) Kaptunk 16 tudóst, akik csak a maradó három országból lehetnek, és helyezési számuk különbsége is csak e három országból érkező versenyzőé lehet. Innentől a feladat megfelel a b) feladatnak.

Mielőtt d)-t bebizonyítanánk, adunk egy elegánsabb bizonyítást a)-ra, mert a gondolatmenet a d) részben is használató lesz (és segítségével c)-re is új bizonyítást nyerünk).

Legyen adva az első öt számnak egy felosztása két csoportra. Vegyük azt a gráfot, amelynek pontjai az 1,2,3,4,5,6 számok. Az i és a j között futó élt színezzük 1-essel, ha $|i - j|$ az első csoportban van, és 2-essel, ha $|i - j|$ a második csoportban van. Két szám különbsége legalább 1, legfeljebb 5, így minden élt kiszínezzük 1-essel vagy 2-essel. A 3.3. feladat szerint ebben a gráfban van három pont, amelyek között futó élek azonos színűek. Legyen ez a három pont $a > b > c$. Ezek szerint $|a - b| = a - b$, $|b - c| = b - c$ és $|c - a| = a - c$ azonos csoportban van. Márpedig az első kettő összege éppen a harmadik szám.

d) A bizonyítás ugyanúgy megy, csak a 3.3. feladat helyett a 3.5. feladatot kell használni: ha egy $1 + k!(1/0! + 1/1! + \dots + 1/k!)$ pontú teljes gráf éleit k színnel színezzük, akkor van benne egyszínű háromszög. Vagyis ha n legalább ekkora, akkor a Schur-tétel állítása teljesül: a gráf pontjai a)-hoz hasonlóan az 1,2, ..., n számok, az i és j között futó élt annyiadik színűre színezzük, amennyiedik csoportban $|i - j|$ van. Ekkor van egyszínű háromszög, és innen az a) rész befejezése „működik”.

3.1. Tekintsük azt a 4-hipergráfot, amelynek pontjai a megadott pontok és „élei” azok a pont-négyesek, amelyek konvex négyszöget határoznak meg. Ebben a hipergráfban nincs ötpontú üres gráf, mert a 2.9. feladat szerint bármely öt általános helyzetű pont között van négy, amely konvex négyszöget határoz meg. Ekkor viszont a 4-hipergráfokra és két színre vonatkozó Ramsey-tétel szerint van olyan N_k , hogy ha ennél több pontú a hipergráf, akkor van benne teljes k -as, azaz van olyan k pont, amelyekből alkotott *bármely* négyszög konvex.

A K.II.15.2. feladat b) része szerint ekkor e k pont egy konvex k -szöget alkot. Ezt akartuk bizonyítani.

3.2. Legyen $ABCD$ egy d oldalú, 60° -os rombusz, A -nál és C -nél van 60° , vagyis DB is d hosszú. Legyen A színe 1-es. Ha B és D valamelyike 1-es színű, kész vagyunk. Ha B és D színe azonos, akkor is kész vagyunk. Ha nem, akkor legyen B színe 2-es, D színe 3-as. Ha c színe nem 2-es, ismét kész vagyunk. Egyetlen eset maradt tehát: ha A színe is 1-es. Ebből következik, hogy ha az A középpontú, $\sqrt{3}d$ sugarú kör kerületén van 1-estől különböző színű pont, akkor kész vagyunk. Ha viszont e kör kerülete teljes egészében 1-es, akkor bármely d hosszú húrja megfelel.

3.5. A 3.2. feladat szerint van két egyszínű pont, A és B , amelyek távolsága d . Legyen a színük 1-es és legyen C és D a síknak az a két pontja, amely A -tól és B -tól is d távolságra van. Ha ezek valamelyike szintén 1-es színű, akkor készen vagyunk. Ha viszont mindkettő 2-es színű, akkor tekintsük azt az E pontot, az AB félegyenes meghosszabbításán, amelyik B -tól d távolságra

van. Ez C -vel és D -vel egy $\sqrt{3}d$ oldalú szabályos háromszöget alkot, tehát ha E színe is 2-es, akkor ismét kész vagyunk. Ha viszont 1-es színű, akkor legyen F az a pont C oldalán, amely B -től és E -től is d távolságra van. Ha ez is 1-es színű, akkor CEF megfelelő (egyszínű) d oldalú szabályos háromszög. Ha viszont 2-es színű, akkor legyen G az a pont, amely C -től és F -től d távolságra van (és nem azonos B -vel). Ha ez a pont 2-es színű, akkor CGF egy d oldalú szabályos háromszög, amely egyszínű, ha pedig 1-es színű, akkor AEG egy $2d$ oldalú, egyszínű szabályos háromszög.

4. Szimmetria és aszimmetria, I.

4.1. Igen.

4.2. Igen.

4.3.

1. megoldás. Igen. Ha a második gráf körében sorban számozzuk a pontokat, a másikon pedig 1,5,2,6,3,7,4 sorrendben, akkor éltartó (és nem-él tartó) egy-egy értelmű leképezést kapunk a két gráf pontjai között. L. a ??

2. megoldás. Egy másik megoldást kapunk, ha áttérünk a komplementerekre. Mindkét gráf komplementere 2-reguláris összefüggő gráf, tehát hétszög, s így a két gráf komplementere izomorf. Ebből viszont következik, hogy a két eredeti gráf is izomorf. (Lásd a 4.11. feladatot is.)

4.9. Mindhárom.

4.12. a) Az üres gráf, az egy élből álló gráf, a két élből álló gráf és a három élből álló gráf mindegyike olyan, hogy csak egy-egy van belőle. Tehát összesen négy gráf van „izomorfiától eltekintve”.

b) Ez a feladat megegyezik a K.II.2.2. feladattal. Ott megadtuk a gráfokat úgy, hogy nem használtuk az izomorfia fogalmát. (Utána vezettük be az izomorfia fogalmát.) Most elmondjuk ugyanazt a megoldást úgy, hogy explicite használjuk az izomorfia fogalmát.

Az üres gráf egyértelmű. Az egyélű gráf is. Kétélű gráfból most már kettő van: vagy két csatlakozó él és egy izolált pont, vagy két független él. Ez eddig négy gráf.

Ezek komplementerei alkotják a hat-, öt-, illetve négyélű gráfokat. Ez tehát már nyolc különböző gráf.

Maradnak még a háromélű gráfok. Ezekből három van: vagy egy háromszög és egy izolált pont, vagy egy három hosszú út, vagy egy csillag. (A háromszög és a háromágú csillag egymás komplementerei. A három hosszú út viszont önmaga komplementere. Ennek jelentősége lesz a 4.3. feladatban.)

Összesen tehát „izomorfiától eltekintve” 11 különböző négypontú gráf van.

4.15. Nem. Lehet, hogy a két harmadfokú pont egymással van összekötve és a másodfokú pont csak egyikükkel van összekötve, de az is lehet, hogy a másodfokú pont van összekötve a két harmadfokúval (s azok egymással nincsenek összekötve). Lásd a ??

4.16. Hétpontú fában nem lehet két negyedfokú pont. (L. a K.II.7.2. feladatot!)

A negyedfokú pontot és a szomszédait egyértelműen „helyezhetjük le”, ezután még két pontot kell elhelyeznünk. Ezek lehetnek valamelyik szomszéd szomszédai, lehetnek egy-egy különböző szomszéd szomszédai, vagy alkothatnak egy kettő hosszú utat az egyik szomszédból indulva. Ez összesen három lehetőség. Lásd ??

4.17. A tízpontú fának 9 éle van, tehát a foksámok összege 18. Ha van két ötödfokú pont és az összes többi pont elsőfokú, akkor pontosan 18 a foksámösszeg, tehát az ilyen fának két ötödfokú és nyolc elsőfokú pontja van. A fa összefüggő, tehát elsőfokú pontok nem lehetnek egymással összekötve. Ezért minden elsőfokú pont egy ötödfokúhoz csatlakozik és a két ötödfokú egymással is össze van kötve. Csak egy ilyen fa van.

4.18. A $2k$ pontú fának $2k - 1$ éle van, tehát a foksámok összege $4k - 2$. Ha van két, pontosan k -adfokú pont és az összes többi pont elsőfokú, akkor pontosan $4k - 2$ a foksámösszeg, tehát az ilyen fának két k -adfokú és $2k - 2$ elsőfokú pontja van. A fa összefüggő, tehát elsőfokú pontok nem lehetnek egymással összekötve. Ezért minden elsőfokú pont egy k -adfokúhoz csatlakozik és a két k -adfokú egymással is össze van kötve. Csak egy ilyen fa van.

4.19. A foksámok összege 18, tehát a gráfnak 9 éle van. Másrészt összefüggő, tehát fa. Elsőfokú pontok nem lehetnek egymással összekötve. Három eset van:

a) Ha a két negyedfokú pont össze van kötve. Ekkor a két másodfokú pont háromféle képpen helyezkedhet el: vagy mindkettő ugyanazzal a negyedfokú ponttal van összekötve, vagy egyik az egyikkel, másik a másikkal, végül lehet az is, hogy az egyik valamelyik negyedfokú ponttal és a másikkal van összekötve (ekkor a negyedfokú pontból indul ki egy háromélű út). Ez eddig három nem-izomorf gráf. (L. a ?? ábrát!)

b) A két negyedfokú pont az egyik másodfokú ponton keresztül kapcsolódik egymáshoz, a másik másodfokú pont valamelyik negyedfokúval van összekötve. Ez egy további, az eddigiekkel nem izomorf gráf.

c) Végül lehet az is, hogy a két negyedfokú pont egy három élből álló úttal van összekötve, ez egy további, az eddigiekkel nem izomorf gráfot ad. (L. a ?? ábrát!)

Összesen tehát öt, a feladatnak megfelelő nem-izomorf gráf van (mindegyik fa).

4.20. Ez többféleképpen is bizonyítható. Egyrészt megmutatható, hogy a Petersen-gráf bármely pontjából induló szélességi faváz éppen a K.II.8.4. feladat megoldásában leírt favázat adja.

Egyszerűbb azonban a következő okoskodás. A K.II.8.4. feladat megoldásában láttuk, hogy (izomorfától eltekintve) egyetlen 10 pontú, 3-reguláris, 2-átmérőjű gráf van. Elég tehát belátni, hogy a Petersen-gráf is 2-átmérőjű (a másik két feltétel triviálisan teljesül). Tudjuk, hogy a Petersen-gráf csúcstranzitív, tehát elég belátni, hogy egy tetszőleges pontjából bármelyik másik pont elérhető legfeljebb 2 hosszú úttal. Ez könnyen ellenőrizhető.

4.22.

1. megoldás. Egy ötelemű halmaznak tíz kételemű részhalmaza van, tehát a $KG(5,2)$ Kneser-gráfnak tíz pontja van. Egy kételemű részhalmaz pontosan három másiktól diszjunkt, tehát a Kneser-gráf minden pontjának fokszáma 3. Végül az is világos, hogy ha két kételemű halmaznak van közös pontja, akkor van olyan kételemű halmaz (pontosan egy), amely mindkettőtől diszjunkt. Tehát a Kneser-gráf bármely két, éllel össze nem kötött pontjának van közös szomszédja, tehát a $KG(5,2)$ Kneser-gráf 10-pontú, 3-reguláris, 2-átmérőjű gráf.

A K.II.8.4. feladatból tudjuk, hogy egyetlen ilyen gráf van, ami a K.II.8.4. feladat szerint a Petersen-gráf. Tehát a $KG(5,2)$ gráf a Petersen-gráf.

2. megoldás. Közvetlenül is megtalálhatjuk a megfeleltetést a Petersen-gráf és a $KG(5,2)$ Kneser-gráf között. Válasszuk az ötelemű alaphalmaznak az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazt. A „külső kerék” pontjai lehetnek (ilyen sorrendben) az $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,1\}$, $\{2,3\}$, $\{4,5\}$, a „belső kerék” pontjai az $\{3,5\}$, $\{5,2\}$, $\{2,4\}$, $\{4,1\}$, $\{1,3\}$, itt a sorrendet a „küllők” szerint adtuk meg, tehát itt minden második van éllel összekötve. Lásd a ?? ábrát.

4.23. Nem. A legegyszerűbb ellenpélda a két kétpontú gráf, az egyikben van él, a másikban nincs. Mindkettőnek azonosak az egy pontú feszített részgráfjai.

4.24. Legyen az egyik gráf egy hárompontú részgráfjának három pontja a, b, c és tegyük fel, hogy az (a, b) és (b, c) élek szerepelnek a gráfban, az (a, c) él nem. A másik gráf egy hárompontú részgráfja legyen a', b', c' , ezek között az (a', b') és (b', c') élek be vannak húzva, az (a', c') nincs. A feltételből következik, hogy az a, c, d hárompontú részgráfban az (a, d) és (d, c) élek be vannak húzva, s ugyanígy a másik gráfban az (a', d') és (d', c') élek is be vannak húzva. Végül például az a, b, d hárompontú részgráfban be van húzva az (a, b) és (a, d) élek, tehát a (b, d) él nincs behúzva, ugyanígy a másik gráfban a (b', d') él nincs behúzva. Az $a \rightarrow a', b \rightarrow b', c \rightarrow c', d \rightarrow d'$ leképezés tehát a két gráf közötti izomorfiát ad meg.

4.25. Legyen a G gráf egy tetszőleges pontja x . A $G - x$ gráf élszámát jelöljük k -val, az egész gráf élszámát jelöljük e -vel. Ekkor x fokszáma $e - k$. A feltétel szerint k minden x -re azonos, hiszen $G - x$ minden x -re izomorf. Ebből következik, hogy $e - k$ is ugyanaz minden x -re, tehát a gráf reguláris.

Megjegyzés. Csak annyit használtunk, hogy bármely pont elhagyásával keletkező részgráf élszáma azonos.

4.26. Igen. A feltételből következik ugyanis, hogy

- x és x' fokszáma is d ,
- $G - x$ -ben x szomszédainak fokszáma $d - 1$, minden más pont foka d ,
- $G - x'$ -ben x' szomszédainak fokszáma $d - 1$, minden más pont foka d .

Másrészt $G - x$ és $G - x'$ izomorf, s az az egy-egyértelmű t leképezés, amely ezt bizonyítja, x szomszédai és x' szomszédai között egy-egy értelmű megfeleltetés (mert csak ezek a pontok $d - 1$ -ed fokúak). Ha tehát a t izomorfiát kiterjesztjük úgy, hogy x -nek x' -t feleltesse meg, G egy izomorfiájához jutunk.

4.1. Ha G páros gráf, akkor két osztályba sorolhatók a pontjai úgy, hogy azonos osztálybeliek között nem fut él. Ha valamelyik osztályban legalább három pont volna, akkor a komplementerében volna háromszög, tehát a komplementer nem volna páros gráf. Így G mindkét osztályában legfeljebb két-két pont lehet. Az egy pontból álló gráf megfelel. Két és három pontú gráf esetében a teljes gráf élszáma 1, illetve 3, tehát páratlan, így a gráf és a komplementere nem tartalmazhat ugyanannyi élt. Ha G négypontú, akkor a gráf is, komplementere is három élből áll, s ez csak egy 3 élű út, egy háromszög vagy egy háromágú csillag lehet. Utóbbi kettő egymás komplementere, így nem izomorf a komplementerével.

Tehát két ilyen G páros gráf van: az egyetlen pontból álló gráf és a háromélű útból álló gráf.

4.2. Egy n pontú fában $n - 1$ él van. Ha izomorf a komplementerével, akkor a komplementerben is ennyi él van, tehát az n pontú teljes gráfban $2(n - 1)$ él van. Másrészt az n pontú teljes gráf élszáma $n(n - 1)/2$, tehát csak $n = 4$ -re lehet ilyen fa. $n = 4$ pontú fa a háromágú csillag és a háromélű út. Csak az utóbbi izomorf a komplementerével.

4.3. a) $n = 1$ -re az egy pontú gráf üres, tehát izomorf a komplementerével.

$n = 2$ -re vagy a gráf vagy a komplementere üres, a másik nem, tehát nincs ilyen gráf.

$n = 3$ esetén a teljes gráfnak három éle van, így nem tudjuk őket két egyforma osztályba sorolni, márpedig egy gráf és a komplementere azonos élszámú, ha izomorf.

$n = 4$ esetén a három hosszú út izomorf a komplementerével.

$n = 5$ esetén az ötpontú kör izomorf a komplementerével.

$n = 6$ esetén a teljes gráfnak 15 éle van, ami páratlan, tehát ismét nem lehet ilyen gráf.

$n = 7$ esetén a teljes gráfnak 21 éle van, ami ismét páratlan.

Az első hét szám közül csak $n = 1, 4, 5$ -re van a komplementerével izomorf gráf.

b) $n = 8$ és $n = 9$ esetében viszont van ilyen gráf. $n = 8$ -ra legyen a gráf nyolc pontja $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, u_1, u_2$. Húzzuk be a gráfba az $x_i y_j, y_i z_j, z_i u_j$ éleket ($i, j = 1, 2$). Ez eddig 12 él. Ha behúzzuk még az $x_1 x_2$ és az $u_1 u_2$ éleket, akkor egy olyan gráfot kapunk, amely izomorf a komplementerével. Az izomorfiát könnyű megadni: az x_i pontnak az y_i pont feleljen meg, az y_i pontnak az u_i , a z_i -nek a x_i és az u_i -nek az z_i .

$n = 9$ esetben ebből már könnyű megfelelő gráfot kapni: a kilencedik pontot az x és az u pontokkal kötjük össze.

4.4. Ha valamely n -re van ilyen gráf, akkor a gráfnak és a komplementerének azonos számú éle kell, hogy legyen. Másrészt a gráfnak és komplementerének együtt $n(n-1)/2$ éle van. Ha tehát e szám nem páros, akkor nincs ilyen gráf. Vagyis $n = 4k + 2$ és $n = 4k + 3$ alakú számokra biztosan nincs ilyen gráf.

Másrészt az $n = 4k$ esetben az $n = 8$ esethez egészen hasonlóan kapunk megfelelő gráfot (lásd a 4.3. feladatot), csak kettő helyett k darab x_i, y_i, z_i, u_i pontot kell felvenni, majd behúzni az xy, yz, uz éleket, továbbá az $x_i x_j$ és az $u_i u_j$ éleket ($i \neq j$). Az izomorfia most is ugyanúgy írható le, mint az $n = 8$ esetben.

Innen már $n = 4k + 1$ pontra ugyanúgy járhatunk el, mint az $n = 9$ esetben (lásd ugyancsak a 4.3. feladatot): a plusz egy pontot az x és az u pontokkal kötjük össze.

4.5. Tekintsük a gráf és a komplementere közötti izomorfiát. Ez a pontokat párokba állítja: minden x ponthoz hozzárendeli azt az x' pontot, amely a komplementerben megfelel neki. Páratlan sok pont van, tehát van olyan y pont, amely önmagának a képe, azaz $y = y'$. Márpedig $d_G(x)$, azaz x pont fokszáma a G gráfban megegyezik $d_G(x)$ -szel, azaz x' fokszámával G komplementerében. Tehát x' foka G -ben $n - 1 - d_G(x)$. Mivel $y = y'$, ezért $d_G(y) = (n - 1)/2$, ahogy a feladat állítja.

5. Szimmetria és aszimmetria, II.

5.2. Elég a c) feladatot megoldani. Az n pont bármely permutációja automorfizmusa a teljes gráfnak (és más nyilván nincs), tehát $n!$ automorfizmusa van.

5.3. Vegyük az egyik teljes párosításnak azt, ami a kocka négy párhuzamos éléből áll, a másiknak azt, ami a kocka egy lapjának két párhuzamos éléből, és a szemközti lap e két élre merőleges két éléből áll. Világos, hogy a kockának nincs olyan automorfizmusa, ami az egyik lapot elforgatja 90° -kal, és a szemközti lapot vagy nem forgatja el, vagy 108° -kal forgatja el.

5.4. IGAZ! Ez legkönnyebben talán a K.II.8.4. feladat megoldásában felrajzolt alakjából látszik, de kiolvasható a K.II.9.7. feladat megoldásából is.

5.5. Elég a b) feladatot megoldani. b) A k pontú kör automorfizmusai azonosak az ugyanannyi csúcsú szabályos sokszög automorfizmusával, tehát a „forgatások” és a „tükrözések”. Ez összesen $2k$ automorfizmus.

Csúcstranzitív gráfról van szó, tehát egyetlen orbitja van.

5.6. a) Számozzuk meg a gráf pontjait az $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_1$ a kör és az $x_2 x_4$ átló van behúzva. Egy külön orbit az x_1 pont, hiszen ez az egyetlen pont, aminek két harmadfokú szomszédja van. Ez tehát minden automorfizmusnál helyén marad. Egy másik orbit a két harmadfokú pont, x_2 és x_4 , ezek vagy helyben maradnak, vagy egymással cserélődnek. Első esetben a maradó két pont is helyben kell, hogy maradjon, második esetben ezek is helyet kell, hogy cseréljenek. Ez tehát összesen két automorfizmus, és megkaptuk a harmadik orbitot is: ez az x_3 és x_5 pontokból áll.

b) Először állapítsuk meg az orbitokat. Világos, hogy a z pont egyetlen elemű orbit, amely tehát minden automorfizmusnál a helyén marad. A másik orbitot az y_i pontok alkotják, a harmadikat az x_i pontok. Minthogy utóbbiak csak egymás között cserélhetők, viszont bármely automorfizmus, amely az általuk alkotott ötszöget önmagába viszi, kiterjeszthető az egész gráf automorfizmusára, ennek a gráfnak ugyanannyi automorfizmusa van, mint az ötpontú körnek, azaz tíz. (Azt is megkaptuk, hogy az automorfizmus csoportja is megegyezik az ötpontú kör automorfizmuscsoportjával.)

5.7. Ha a pontokat egy szabályos nyolcszög csúcaiban vesszük fel, akkor a P_2P_3 oldal (és egyben a P_6P_7 oldal) felezőmerőlegesére való tükrözés, a P_1P_8 oldal (és egyben a P_4P_5 oldal) felezőmerőlegesére való tükrözés, valamint a köré írható kör középpontjára való tükrözés a gráf egy-egy automorfizmusát adja. Ezek a tükrözések a P_1 pontot rendre a P_4, P_8, P_5 pontokba viszik, ezek tehát a P_1 ponttal azonos orbiton vannak. Ugyanígy a P_2 pont képe rendre P_3, P_7, P_6 , tehát a másik négy pont is egy orbiton van. Ez a két orbit valóban különböző, mert P_1 nem vihető át P_2 -be, ugyanis előbbi egy háromszögben van benne, az utóbbi kettőben.

A gráfnak tehát két orbitja van.

Könnyen látható, hogy ha egy automorfizmus a P_1 pontot a helyén hagyja, akkor helyén hagyja az orbitbeli szomszédját, P_8 -at is, de akkor a helyén hagyja P_4 -et és P_5 -öt is. Viszont a P_2 és P_3 pontokat vagy önmagukba viszi, vagy megcseréli, s ugyanez igaz a P_6 és P_7 pontokra is. Ez összesen négy lehetőség, tehát pontosan négy olyan automorfizmus van, ami a P_1 pontot a helyén hagyja.

Ebből viszont következik, hogy P_1 az orbitja bármely másik pontjába is pontosan négyféleképp vihető át.

A gráfnak tehát 16 automorfizmusa van.

5.8. a) Ha egy s automorfizmus a P pontot a Q pontba viszi, akkor az inverze is automorfizmus, és az a Q pontot viszi P -be. Ugyanígy ha a t automorfizmus a Q pontot a P pontba viszi, akkor az inverze a P pontot viszi a Q pontba. Mivel különböző automorfizmusok inverze is különböző, ebből következik, hogy a P -t Q -ba vivő automorfizmusok száma megegyezik a Q -t P -be vivő automorfizmusok számával.

b) Van egy olyan s automorfizmus, amely a P pontot a Q pontba viszi. Ha minden, a P pontot a helyén hagyó t automorfizmust megszorozzuk ezzel az s automorfizmussal, akkor az st automorfizmus (előbb hajtjuk végre t -t, aztán s -et) a P pontot a Q -ba vivő automorfizmust kapunk. Ha t és t' különböző, akkor az st és az st' automorfizmusok is különbözők. (Ha $st = st'$ volna, akkor s inverzével, s^{-1} -gyel mindkettőt megszorozva azt kapnánk, hogy $t = t'$.)

Ezzel beláttuk, hogy a P -t Q -ba vivő automorfizmusok száma legalább annyi, mint a P -t helyben hagyóké. Legyen most t egy olyan automorfizmus, ami P -t Q -ba viszi. Ha ez után rendre alkalmazzuk a Q -t P -be vivő automorfizmusokat, akkor rendre különböző, P -t a helyén hagyó automorfizmusokat kapunk. Tehát legalább annyi P -t a helyén hagyó automorfizmus van, mint ahány Q -t P -be vivő automorfizmus.

Jelöljük $n(P, Q)$ -val a P -t Q -ba vivő automorfizmusok számát. Azt kaptuk, hogy

$$n(P, Q) \geq n(P, P) \geq n(Q, P).$$

Az a) feladat szerint $n(P, Q) = n(Q, P)$, s ebből már következik, hogy $n(P, Q) = n(P, P)$, ami szavakban elmondva éppen a feladat állítása.

5.9. Mindegyik gráf csúcstranzitív, tehát egy orbitja van.

A tetraéder gráfja a négy pontú teljes gráf, 24 automorfizmussal.

A kocka csúcstranzitív, tehát bármely pontját átvihetjük bármelyikbe automorfizmussal. A pontból induló három csúcsot is szabadon permutálhatjuk, tehát a kockának 48 automorfizmusa van.

Az oktaéder csúcstranzitív, tehát bármely pontját átvihetjük bármelyikbe automorfizmussal. A csúccsal összekötött négy pontot annyiféleképp változtathatjuk, ahány automorfizmusa az általuk alkotott négy hosszú körnek van, tehát 8-féleképpen. Ez is 48 automorfizmus. Ami nem meglepő, hiszen az oktaéder a kocka duálisa.

Az ikozaéder is csúcstranzitív, ez egy 12-szeres szorzó. Ha egy csúcsát rögzítettük, akkor a belőle induló öt él annyiféleképp változtatható, ahány automorfizmusa van az általuk alkotott öt hosszú körnek, ez újabb 10-es szorzó. Az ikozaédernek tehát 120 automorfizmusa van.

A dodekaédernek is 120 automorfizmusa van, mert az ikozaéder duálisa.

5.10. A $KG(4,2)$ gráf komplementere az oktaéder gráfja, tehát 48 automorfizmusa van.

5.11. Az a) gráfnak egyetlen orbitja van. A b) gráfnak két orbitja van, a két csoport.

a) A három-ház-három-kút gráfnál először eldöntjük, hogy a két csoportot felcseréljük-e, vagy megtartjuk. Ez egy kettes szorzó. Utána külön-külön bárhogyan permutálhatjuk a két csoport pontjait, ez egy-egy hatos szorzót jelent, a gráfnak tehát 72 automorfizmusa van.

b) Itt a két csoport csak külön-külön permutálható (két orbit van), ezért $6 \cdot 120 = 720$ automorfizmust kapunk.

5.12. A $K_{n,k}$ teljes páros gráfnak két orbitja van, ha k és n különböző, viszont egy orbitja van, ha $k = n$.

Ha $k \neq n$, akkor a két csoport csak külön-külön permutálható, tehát $k!n!$ az automorfizmusok száma. Ha $k = n$, akkor a két csoport is felcserélhető, tehát $2n!^2$ az automorfizmusok száma.

5.13. Az első pont bármelyik ponttal szabadon felcserélhető (a helyén is maradhat), ez egy $2n$ -es szorzó. A szomszédja képét ez már meghatározza. Utána a következő pont megint szabadon cserélhető bármelyik megmaradt ponttal, ami egy $2n - 2$ -es szorzó, és a szomszédja képe megint egyértelmű. A gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy az automorfizmusok száma $(2n)!! = 2^n n!$.

5.14. Először állapítsuk meg a gráf orbitjait! A z pont az egyetlen negyedfokú pont, tehát önmagában egy orbit és minden automorfizmus a helyén hagyja. A szomszédjait pedig csak egymás között cserélheti. Ebből következik, hogy az x, y pontok vagy egy külön orbitot alkotnak, vagy mindkettő külön-külön egy-egy orbit. Ugyanez vonatkozik a két másodfokú pontra, u_1 és v_3 -re. Viszont van egy automorfizmus, ami x -et és y -t és ugyanígy u_1 -et és v_3 -at is felcseréli: ez az automorfizmus u_2 -t és v_2 -t is felcseréli, s ugyanígy v_1 -et és u_3 -at, z -t pedig a helyén hagyja. Ha a gráfot egy szabályos nyolcszög nyolc csúcsának tekintjük, a z pontot pedig a nyolcszög középpontjának, akkor a középpontra vonatkozó tükrözésről van szó.

Könnyen beláthatjuk, hogy a gráfnak nincs több automorfizmusa ezen a „tükrözésen” és az identitáson kívül. Ha például u_1 -et az automorfizmus a helyén hagyja, akkor két szomszédját is, mert azok külön orbitokhoz tartoznak (u_2 össze van kötve a negyedfokú ponttal, y nincs). De akkor x és u_3 sem mozdulhat. Az egyik ötszög tehát fix. Ugyanez elmondható v_3 -ból indulva, tehát a másik ötszög pontjai sem mozdulhatnak. Így az identitást kapjuk. Ha viszont u_1 -et az automorfizmus átvizsgálja v_3 -ba, akkor ugyanezzel a gondolatmenettel kapjuk, hogy a két ötszög „tükröződik” egymásra.

5.15. A K.II.8.4. feladatban láttuk, hogy bárhogyan választjuk a szélességi faváz gyökerét, majd bárhogyan permutáljuk az első emelet pontjait, s végül bármilyen sorrendben választjuk az első emelet első pontjának további két szomszédját, mindig tudunk egy, az eredetivel izomorf gráfot rajzolni, mégpedig egyértelműen. Tehát a Petersen-gráfnak 120 automorfizmusa van.

5.19. Igen. Nyilvánvaló, hogy a „külső kerék” csúcsai átvihetők egymásba automorfizmussal, s ugyanígy a „belső kerék” csúcsai is. Végül az is nyilvánvaló, hogy a „külső” és a „belső” kerék csúcsai egymásba is átvihetők.

5.20. A $KG(n, k)$ gráf egy csúcsát az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy k elemű részhalmazával azonosítjuk. Bármely két k elemű részhalmazhoz meg tudjuk adni az n elemű alaphalmaznak olyan permutációját, amely az egyiket a másikba viszi. Az alaphalmaznak ez a permutációja minden k elemű részhalmazt is egy k elemű részhalmazba visz, metsző részhalmazokat metsző részhalmazokba, nem-metszőket nem-metszőkbe. Tehát az alaphalmaz minden permutációja megad egy automorfizmust a gráfon. Ezzel beláttuk, hogy minden Kneser-gráf csúcstranzitív.

5.21. Igen. Azt kell belátnunk, hogy akárhogyan választjuk ki a G gráf egy x és x' pontját, a $G - x$ pontjait $G - x'$ pontjaira képező izomorfia kiterjeszthető a G gráf automorfizmusává, úgy, hogy x -nek x' -t feleltetjük meg. Mivel a 4.25. feladat szerint a G gráf reguláris, ezért a 4.26. feladat megoldása szerint ezt megtehetjük.

5.22.

1. megoldás. Igen. nyilvánvalóak a következők:

A „külső kerék” bármely két éle egymásba vihető.

A „külső kerék” és a „belső kerék” bármely két éle egymásba vihető.

Nem sokkal körülményesebb annak a bizonyítása, hogy egy „küllő” és a „külső kerék” bármely éle is felcserélhető. Könnyen meggyőződhetünk ugyanis arról, hogy két szomszédos „küllő”, (a, b) és (a', b') (ahol a és a' van a külső keréken), b és b' közös szomszédjával együtt egy olyan kört alkot, amely maga is tekinthető „külső” keréknek. Ebből már következik, hogy a Petersen-gráf bármely két éle egymásba vihető automorfizmussal, és ezt akartuk bizonyítani.

2. megoldás. Az állításra a következő, elegánsabb megoldás adható.

A Petersen-gráf azonos a $KG(5, 2)$ Kneser-gráffal (lásd a 4.22. feladatot). Egy éle tehát az ötelemű halmaz két kételemű diszjunkt részhalmazának felel meg. Legyen a Petersen-gráf két éle $e_1 = (a, b)$ és $e_2 = (c, d)$. Az ötelemű halmazt számozhatjuk úgy, hogy az a csúcsnak az $\{1, 2\}$ részhalmaz, a b csúcsnak a $\{3, 4\}$ részhalmaz feleljen meg. Feleljen meg a c csúcsnak az $\{x, y\}$ kételemű részhalmaz, a d csúcsnak az ettől diszjunkt $\{u, v\}$ részhalmaz. Az ötelemű alaphalmaznak van olyan permutációja, amely az 1, 2, 3, 4 elemeket sorra az x, y, u, v elemekbe viszi. Ez a permutáció minden kételemű részhalmazt egy-egy kételemű részhalmazba visz, és pedig egy-egy értelműen, tehát a Petersen-gráf csúcsain is egy permutációt ad meg. Az ötelemű halmaz permutációja diszjunkt részhalmazokat diszjunkt részhalmazokba visz, tehát a Petersen-gráf éleit élbe viszi át. Ugyanígy bármely két nem-diszjunkt részhalmazt két nem-diszjunkt részhalmazba viszi át, tehát a Petersen-gráf csúcsain kapott permutáció valóban automorfizmus. És pedig olyan automorfizmus, amely az e_1 él két végpontját a megadott sorrendben az e_2 él két végpontjába viszi (szintén a megadott sorrendben).

Ezzel beláttuk, hogy a Petersen-gráf éltranzitív.

5.29. Igen. A bizonyítás ismét úgy történhet, mint az 5.22. feladatban: annak segítségével, hogy a Petersen-gráf azonos a $KG(5, 2)$ Kneser-gráffal. A különbség az, hogy most az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz két nem-diszjunkt, kételemű részhalmazát kell az alaphalmaz egy permutációjával két másik nem-diszjunkt, kételemű részhalmazba átvinni. Ilyen permutáció is van, s ez ugyanígy terjeszthető ki a Petersen-gráf csúcsainak egy automorfizmusává, mint az 5.22. feladatban. Tehát a Petersen-gráf bármely két „nem-éle” (a végpontok megadott sorrendjében) is automorfizmussal egymásba vihető. Tehát a Petersen-gráf komplementere is éltranzitív.

5.30. Jelölje a gráf komplementerét G . Ha G gráf teljes gráf, akkor kész vagyunk. Ellenkező esetben van két pontja, amelyeknek van közös szomszédja, de nincsenek összekötve éllel. (Lásd az K.II.5.7. feladatot.) Vagyis G komplementerében – tehát az eredeti gráfban – van olyan él, amelynek két végpontjához található olyan harmadik pont, amely egyikükkel sincs összekötve. De akkor ugyanez igaz bármely élére, hiszen az eredeti gráf éltranszitiv. Vagyis az eredeti gráfban bármely két, éllel össze nem kötött pontnak van közös szomszédja. Ez viszont azt jelenti, hogy a gráf átmérője 2.

5.32. Tegyük fel, hogy a $KG(n, k)$ gráf komplementere éltranszitiv. Az az 5.30. feladat szerint vagy nem összefüggő, vagy az átmérője 1 vagy 2 lehet. Nyilvánvaló, hogy 1 csak úgy lehet, ha $k = 1$.

Másrészt az K.II.5.9. feladat szerint csak akkor nem összefüggő, ha $n \leq 2k$. Ha $n < 2k$, akkor a gráf üres, ennek komplementere éltranszitiv. Ha $n = 2k$, akkor a gráf egy teljes párosítás, s ennek komplementere szintén éltranszitiv.

Marad az az eset, ha $k \geq 2$ és $n = 2k$. Ebben az esetben a gráf összefüggő, de nem a teljes gráf, tehát ha éltranszitiv, akkor átmérője 2. Ez viszont azt jelenti, hogy bármely két nem-diszjunkt k elemű részhalmazhoz kell lennie egy olyan k elemű részhalmaznak, ami mindkettőtől diszjunkt. Vagyis ennek igaznak kell lennie akkor is, ha a két nem-diszjunkt részhalmaznak csak egy közös pontja van. Ekkor uniójuk $2k - 1$ elemű, tehát ebben az esetben $n \geq 3k - 1$.

Másrészt az is világos, hogy ha a komplementer éltranszitiv, akkor bármely két nem-diszjunkt, k elemű részhalmazhoz pontosan ugyanannyi, mindkettőtől diszjunkt, k elemű részhalmaznak kell lennie. Világos, hogy az olyan k elemű részhalmazok diszjunktak mindkét részhalmaztól, amelyek az uniójuk komplementerében vannak. Ha azonban $k \geq 3$, akkor nyilván van két olyan nem-diszjunkt, k elemű részhalmaz, amelyek uniója $2k - 1$ elemű és olyan is, amelyek uniója $2k - 2$ elemű, s ezeknek a komplementerében nem lehet ugyanannyi k elemű részhalmaz.

Tehát az $n \geq 3k - 1$ esetben csak a $k = 2$ eset jön szóba. Az 5.31. feladatban láttuk, hogy ebben az esetben a Kneser-gráf komplementere valóban éltranszitiv.

Összesítve azt kaptuk, hogy a $KG(n, k)$ Kneser-gráf komplementere a $k = 1, k = 2$ esetekben éltranszitiv, valamint az $n \leq 2k$ esetben. A $k = 1$ esetben teljes gráfról van szó, az $n \leq 2k - 1$ esetben üres gráfról, az $n = 2k$ esetben független élekről (közelebbről teljes párosításról). Az egyetlen „igazán érdekes” eset a $k = 2$ eset, amikor a Kneser-gráf átmérője 2. A legkisebb ilyen „érdekes” eset épp a Petersen-gráf.

5.34. Az ötpontú teljes gráf automorfizmuscsoportja S_5 . Ebben csak első, másod-, harmad-, negyed-, ötöd- és hatodrendű elemek vannak. Nincs benne tizedrendű elem. Viszont az ikozaédernek van egy tizedrendű eleme: a két szemközti csúcsa által alkotott egyenes körüli 72° -os elforgatás és a középpontra való tükrözés szorzata.

5.35. Nem igaz. Az nyilvánvalóan igaz, hogy a $KG(n, k)$ Kneser-gráfnak van legalább $n!$ automorfizmusa, amelyet az alaphalmaz permutációiból nyerhetünk, de korántsem biztos, hogy csakis ezek az automorfizmusai vannak. Például a $KG(4, 2)$ gráf az oktaéder komplementere, tehát 48 automorfizmusa van (lásd a 4.21. és az 5.10. feladatokat), ami kétszerese a $4!$ -nak.

5.36. A 4.22. feladat szerint a Petersen-gráf azonos a $KG(5, 2)$ Kneser-gráffal. Másrészt az 5.15. feladat szerint 120 automorfizmusa van. Azt is láttuk az 5.17. feladat második megoldásában, hogy akárhogyan permutáljuk az ötelemű alaphalmazt, ez mindig meghatározza a belőle nyert $KG(5, 2)$ Kneser-gráf egy automorfizmusát. Az ötelemű halmaznak is pontosan 120 permutációja van, tehát az alaphalmaz permutációi adják a Kneser-gráf, azaz a Petersen-gráf permutációit. Márpedig az ötelemű alaphalmaz permutációcsoportja az S_5 csoport.

6. Szimmetria és aszimmetria, III.

6.1. Feltesszük, hogy a gráfban nincs háromszög és megnézzük, maximálisan hány éle lehet. A megoldást hasonlóan kezdjük, mint a K.II.12.2. feladat megoldásában (az egész megoldást érdemes összevetni az ottani megoldással!): kiválasztjuk a gráf egy maximális fokú x pontját. E maximális fokszámot most is d -vel jelöljük és most is S -sel jelöljük x szomszédait. A gráfban nincs háromszög, tehát S -ben nem fut él. Jelöljük T -vel a többi – tehát x -szel össze nem kötött – pont halmazát, és legyen ennek egy tetszőleges pontja y . Töröljük ki az y -ból induló éleket és húzzuk be helyette az y -t S pontjaival összekötő d darab éleket. A d maximalitása miatt legalább annyi élt húztunk be, ahányat elhagytunk, tehát a gráf élszáma nem csökkent. Másrészt könnyen látható, hogy nem keletkezett háromszög, hiszen új háromszög csak úgy keletkezhetne, hogy annak egyik pontja y , de az y -nal összekötött pontok között nem fut él.

Ezt az eljárást megismételhetjük S minden pontjára, s ekkor eljutunk egy olyan páros gráfhoz, amelynek két osztálya S és $T \cup \{x\}$, s köztük minden él be van húzva, azaz teljes páros gráfról van szó. Eközben nem csökkent a gráf élszáma.

Ismert, hogy egy n pontú teljes páros gráfnak akkor van a legtöbb éle, ha páros n esetén a két osztályban azonos számú pont van, páratlan n esetén akkor, ha a két osztály pontszáma eggyel tér el. Első esetben $n^2/4$ éle van a gráfnak, a második esetben $(n^2 - 1)/4$ éle van. Az eredeti gráfnak is legfeljebb ennyi éle van tehát.

A bizonyításból most is az adódik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha olyan teljes páros gráfról van szó, amelynek két osztályában vagy megegyezik a pontok száma (az $n = 2k$ páros eset), vagy eggyel különbözik (az $n = 2k + 1$ páratlan eset).

Megjegyzés. Érdekes végiggondolni, hogy ez az úgynevezett „szimmetrizálási eljárás” lényegében ugyanazt „csinálja”, mint a „Vegyük a legnagyobbat” fejezetben adott megoldás (l. a K.II.12.2. feladat megoldását). Ez kicsit „szemléletesebben” mutatja azt, ami ott is történik.

6.2. Legyen l a H halmaz negatív elemeinek száma. H egy négyelemű R részhalmazában az elemek szorzata pontosan akkor negatív, ha R -ben az l elem közül egy vagy három van. Olyan R , amelyben egy negatív szám van, $l \binom{2000-l}{3}$ van. Olyan R pedig, amelyben három negatív szám van, $(2000 - l) \binom{l}{3}$ van. E két szám összegének hatszorosa:

$$l(2000 - l)[(l - 2)(l - 1) + (1999 - l)(1998 - l)].$$

Ennek a kifejezésnek keressük a maximumát. A kifejezés egyszerűsödik, ha szimmetrizáljuk, azaz bevezetjük az $L = 1000 - l$ jelölést. Ekkor $l(2000 - l) = 1000^2 - L^2$, a nagy zárójelben pedig $(998 - L)(999 - L) + (998 + L)(999 + L) = 2(L^2 + 998 \times 999)$. Tehát végső soron az $(1000^2 - L^2)(L^2 + 998 \times 999)$ kifejezés maximumát keressük. A két tényező összege állandó, tehát akkor lesz a legnagyobb, ha a különbségük, $2998 - 2L^2$ abszolútértéke a lehető legkisebb, vagyis amikor $L = 45$ és $l = 955$.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszámítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.

Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.

Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

- [1] Hajnal András: *Gráfelmélet - a speciális matematikatagozatok számára írt tankönyv III. kötetének egy fejezete*. 2. kiad. Budapest, 1973, Tankönyvkiadó.
- [2] Elekes György: *Kombinatorika feladatok - egyetemi jegyzet*. 1. kiad. Budapest, 1992, ELTE.
- [3] Elekes György: *Véges matematika - egyetemi jegyzet*. 1. kiad. Budapest, 2002, ELTE.
- [4] Friedl Katalin Recski András Simonyi Gábor: *Gráfelméleti feladatok*. 1. kiad. Budapest, 2006, Typotex. ISBN 963 9664 01 4.
- [5] Bakos Tibor Lackovich Miklós Reiman István Surányi János Urbán János: *Középiskolai matematikai versenyek 1977-1979*. Budapest, 1981, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 5758 7.
- [6] Hajós György-Neukomm Gyula-Surányi János: *Matematika versenytételek, II. rész*. 1986-os, Surányi János által átdolgozott. kiad. Budapest, 1986, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 4736 0.
- [7] Erdős Pál és Surányi János: *Válogatott fejezetek a számelméletből*. 2. átdolgozott. kiad. Szeged, 2004, Polygon. ISSN 1218-4071.