Kombinatorika

9–10. évfolyam

Szerkesztette:
Surányi László
Ábrák: Hraskó András

2025. május 11.

A kötet létrehozását 2008-tól 2010-ig a
Fővárosi Közoktatásfejlesztési Közalapítvány
támogatta

Technikai munkák
(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2025

Tartalomjegyzék

Segítség, útmutatás **91**

Bevezetés

Annak ellenére, hogy számos kombinatorikai és gráfelméleti feladatgyűjtemény és tankönyv-jellegű jegyzet van már forgalomban magyar nyelven (ezek közül jónéhányat idézünk is az irodalomjegyzékben), mindmáig nincs ilyen témájú *tagozatos feladatgyűjtemény.* De nemcsak a feladatgyűjtemény hiányzik, hanem a tankönyv is. Az egyetlen gráfelméleti tankönyvrészlet, amelyet Hajnal András írt – l. [1] – utoljára 1973-ban jelent meg az úgynevezett „fehér elefánt” tankönyvsorozatban. Ennek pótlására jelen feladatgyűjtemény szerzője elkezdett kialakítani egy weben elérhető feladatgyűjteményt és tankönyvet, l. [17]. Eddig az alapfogalmakat tárgyaló két fejezet készült el. Az itt következő kötet első tíz fejezetében – de néhány további fejezetben is – ezt jócskán bővítjük és folytatjuk, a készülő GR.II. kötetben pedig a tagozaton tárgyalandó speciális gráfelméleti témákat veszünk sorra.

Az egész feladatgyűjtemény – valamint készülő folytatásai, a szorosabb értelemben vett gráfelméleti (GR.II) és az algoritmuselméleti (ALG.II) kötet – tehát kettős célt akar szolgálni. Egyrészt tankönyv-jellegű, amennyiben előkészítés után bevezeti illetve – többnyire feladatokra bontva – bizonyítja a tananyagba foglalt alapfogalmakat és tételeket, másrészt arra is törekszem, hogy a terjedelem szabta határokon belül átfogó feladatgyűjteményt adjak. A kettő a tagozatos didaktikai elveknek megfelelően természetesen kapcsolódik össze.

Mindemellett a legfontosabb célom az, hogy bemutassam az egyes kombinatorikai *alapgondolatokat*, például a skatulyaelvet, az állapotfüggvényes meggondolásokat, vagy a „vegyük a legnagyobbat, legszélsőt” alapötlet sokféle, sokirányú kiaknázási lehetőségét. Ebből szokatlan felépítés következik. Így például a kombinatorikus geometria fejezet számtalan más fejezetben szereplő feladat felsorolásával kezdődik. Másutt egész tételsorok kerültek egy-egy ilyen alapgondolatot körüljáró fejezetbe. A Turán- és Ramsey-típusú tételek és feladatok itt is, majd a gráfelmélet speciális témáit tárgyaló kötet GR.II. kötetben is a skatulyaelvről szóló fejezetsor részeként kerülnek tárgyalásra.

A célkitűzésekből következik az is, hogy nem tudok *minden*, a 9.-10. osztályos tananyaghoz tartozó témát *ebben a kötetben* tárgyalni, hiszen ez szétfeszítene minden terjedelmi keretet. Válogatni kellett a témákból, így a következő döntésre jutottam. Jelen kötetben a gráfelméleti alapfogalmak bevezetésére szánok nagy terjedelmet, lévén, hogy ilyen témájú gimnazista tankönyv nem létezik. A kombinatorikából kiválasztottam a „*vegyük a legnagyobbat, legkisebbet, legszélsőt*” elvét, a *skatulyaelvet*, s ezeket tárgyalom behatóbban. Emellett külön fejezet szolgál a „*tetszőlegesen sok - végtelen sok*” fogalompár alaposabb megvilágítására, aminek megkülönböztetése sok fejtörést okoz tapasztalatom szerint. Ez a téma a kompaktság fogalmáig mutat előre. (A felismerés tudtommal König könyvéből, az első gráfelméletkönyvből ered.) A teljes indukció általában nagyobb teret kap a tankönyvekben, feladatgyűjteményekben, ezért itt nem szántam rá külön fejezetet, bár jócskán szerepelnek vele megoldható feladatok. A kombinatorikai kötet folytatásában szándékozom rá kiemelten visszatérni, mint ahogy a szita-formulára is. A gráfelmélet témakörét a GR.II. kötet fogja folytatni. Az algoritmusokkal az ALG.II. kötet fog foglalkozni, ott fogjuk az itt is szereplő állapotfüggvény fogalmát behatóbban tanulmányozni, széleskörű felhasználhatóságát bemutatni. A leszámlálási feladatokat sem akartam teljesen kihagyni – sajnos ma is erős az a hiedelem, hogy ezek adják „a” kombinatorika lényegét. A kombinatorikus geometria fejezetet is folytatni szándékszom.

Témája a kötetnek – és folytatásainak – az is, hogy úgy a skatulyaelv, mint a „vegyük a legszélsőt” gondolat és a többi kombinatorikai fogalom is a matematika számos területén milyen jól használható. Sikernek könyvelném el, ha e feladatgyűjtemény közelebb segítene annak megértéséhez és megértetéséhez, hogy a kombinatorika valójában inkább egyfajta gondolkodás- és látásmód, ami egyaránt hatásos a matematika számos területén, a számelmélettől a csoportelméleten, a geometrián és a gráfelméleten keresztül egészen a topológiáig (ez utóbbi csak a 11-12. osztályos kötetben fog előkerülni, bár például a König-lemma már itt is szerepel). A valószínűség és a kombinatorika kapcsolata viszont túlzottan nagy hangsúlyt kap az oktatásban és ez zavaróan hat a specifikus valószínűségszámítási látásmód kialakítására. Ezért a kettő kapcsolatát inkább a valószínűségszámítási, remélhetőleg mihamarabb létrejövő kötetre hagytam. Remélem, sikerült alapos, ám szórakoztató, kedvcsináló feladatgyűjteményt összeállítani.

Surányi László

1. FEJEZET
A gráf fogalma

Az első 10 fejezetben a gráfelmélettel foglalkozunk.

Ebben és a következő három fejezetben a gráfelmélet legelemibb alapfogalmait definiáljuk. A gráf maga meglehetősen absztrakt fogalom, ennek tudható be, hogy aránylag sok elemi fogalmat kell bevezetnünk ahhoz, hogy beszélni tudjunk a gráfokról, s a velük kapcsolatos kérdésekről. Hangsúlyozzuk, hogy a bevezető fejezetekben csak az a cél, hogy alaposan megismerkedjünk az alapfogalmakkal. Sem az első fejezetben szereplő fogalmaknál (gráf, fokszám, szomszédság stb.), sem a később szereplőknél nem szabad tehát szem elől téveszteni, hogy a bevezető fejezetekben valóban csak a fogalmak *bevezetésére* alkalmas feladatok szerepelnek. A fogalmak mélyebb jelentése, „működése" csak a későbbi fejezetekben fog kibontakozni. Lásd még a készülő GR.II. kötetet is.

Természetesen legalaposabban magának a gráf fogalmának a bevezetését készítjük elő feladatokkal. Az első fejezetnek szinte ez az egyetlen témája.

A fejezet feladatai az előző kötet *Gráfok* című fejezetének feladataihoz kapcsolódnak. Ezekre többször is hivatkozni fogunk és jelezni fogjuk, hol melyiket érdemes átismételni.

1.1. A gráf fogalmának bevezetése

1.1. (M) Egy öttagú társaságban lejátszottak néhány sakkmérkőzést. Bármely két ember legfeljebb egy mérkőzést játszott egymás ellen. Bizonyítsuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel mérkőzött meg.

Igaz-e ugyanez az állítás hat-, tíztagú társaság esetén is?

1.2. (M) Egy társaságban lejátszottak néhány sakkmérkőzést. Bármely két ember legfeljebb egy mérkőzést játszott egymás ellen. Bizonyítsuk be, hogy mindenképpen volt két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel mérkőzött meg.

1.3. (M) Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van a társaságban.

1.4. (M) Egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek. Igaz-e, hogy a társaságban van két ember, aki ugyanannyi embert nem ismer a társaságból?

1.5. (M) Az 1.2. és az 1.3. feladat megoldása feltűnően hasonlít egymásra (és az 1.4. feladat első megoldására is), szinte „ugyanaz". Próbáljuk megfogalmazni, miben áll a hasonlóság, mit jelent itt az „ugyanaz".

1.6. Fogalmazzunk meg az előző feladatok (az 1.2. és az 1.3. feladat) állításához hasonló igaz állításokat.

1.7. (S) Igaz-e, hogy egy városban egy adott napon mindig van két mobiltelefon, amelyről ugyanannyi másikkal beszéltek?

1.8. Próbáljuk meg ábrázolni azt, ami közös az 1.2-1.7. feladatokban.

Kommentár.

Ha ábrázolni akarjuk azt, ami az eddigi feladatokban közös, célszerű először meggondolnunk, mi volt fontos és mi nem volt fontos a feladatok – és a közös „mondanivalójuk” – szempontjából. Fontos volt, hogy bizonyos objektumok – emberek, mobiltelefonok stb. – közötti kapcsolatokról van szó, viszont nem igazán volt fontos, hogy épp milyen objektumokról is van szó. Célszerű tehát egy-egy pontot megfeleltetni a társaság tagjainak, a városoknak, illetve a mobiltelefonoknak. Mindegyik feladatban egy-egy reláció szerepelt ezek között a „pontok” között, és egyedül az volt érdekes, hogy két „pont” között fennáll-e ez a reláció, vagy sem. Az 1.2. feladat esetében például azt néztük, hogy játszottak-e sakkmérkőzést egymással, a későbbi feladatokban pedig azt, hogy ismerik-e egymást, fogtak-e kezet egymással, van-e közvetlen járat közöttük, volt-e beszélgetés a két telefon között. Kössünk össze két pontot az ábránkon, ha a a nekik megfelelő objektumok között fennáll az adott reláció. Mellékes, hogy egyenes szakasszal, vagy valami bonyolultabb görbével kötjük össze a pontokat, csak az az érdekes, hogy össze vannak-e kötve, vagy sem. Ha össze vannak kötve, akkor ezt az összekötést *élnek* nevezzük. Az így kapott ábrát pedig definíció szerint *gráfnak* nevezzük.

Ideiglenes definíció. Egy *gráf* tehát egyrészt pontokból áll (ezeket a gráf csúcsainak, ritkábban szögpontjainak is szokás nevezni), valamint egyes pontok között futó élekből.

A definíció formálisan ugyan pontos, hogy miért mondjuk mégis *ideiglenesnek*, arra a következő feladatok fognak rávilágítani.

1.9. (S) Igaz-e, hogy egy társaságban mindig van két ember, aki ugyanannyiszor fogott kezet?

1.10. Milyen n-ekre igaz, hogy egy n tagú társaságban mindig van két ember, aki ugyanannyiszor fogott kezet?

1.2. Definíciók

Az 1.9. feladat megoldásában szerepelt egy olyan társaság, amelynek három tagja A, B, C, A és B egyszer, B és C kétszer fogott kezet egymással (A és C viszont nem fogott kezet). Ha ezt próbáljuk gráffal ábrázolni, akkor a B-nek és C-nek megfelelő csúcs között két élt is be kell húznunk. Az 1.10. feladatban pedig egyre több élt kellett egyes pontok között behúzunk. Az ilyen éleket *többszörös* éleknek hívjuk.

A gráfra adott korábbi definíciónkat tehát pontosítanunk kell. Általában a gráf fogalmánál megengedjük azt is, hogy a gráf pontjai között többszörös élek is futhassanak. Sőt, megengedünk úgynevezett *hurokéleket* is, ezek egy pontot önmagával kötnek össze.

Definíció. Egy *gráf* egyrészt *csúcsokból*, másrészt a csúcsokat összekötő *élekből* áll. Egy csúcsot kötheti össze önmagával is él, az ilyen élt *hurokélnek* nevezzük. Két csúcsot köthet össze több él is, ilyenkor *többszörös élről* beszélünk.

A G gráf pontjainak (csúcsainak) halmazát általában $V(G)$-vel jelöljük (az angol vertex szóból), éleinek halmazát $E(G)$-vel jelöljük.

Megjegyezzük még, hogy a gráf csúcsainak halmaza (és így éleinek halmaza is) lehet végtelen halmaz is.

Természetesen kitüntetett szerepe van a gráfok között azoknak, amelyekben sem többszörös él, sem hurokél nincsen. Ezeknek külön nevet is adunk:

Definíció. Ha egy gráfban nincsenek sem hurokélek, sem többszörös élek, akkor (és csak akkor) a gráfot *egyszerű gráfnak* nevezzük.

Az x ponttal összekötött pontokat x *szomszédainak*, az x-szel összekötött pontok halmazát pedig x *szomszédságának* is nevezzük. Általában S_x-szel vagy (az angol neighbourhood szóból) N_x-szel jelöljük.

Definíció. Egy gráf valamely csúcsából kiinduló élek számát a gráf *fokszámának* nevezzük. A G gráf x pontjának a fokát $d_G(x)$-szel vagy $v_G(x)$-szel jelöljük (előbbi az angol degree szó rövidítése, utóbbi a szintén angol valency szóé).

Ha a gráfban többszörös élek is vannak, akkor azokat a fokszámnál multiplicitással számoljuk. Ha például három xy él szerepel a gráfban, akkor ez mind x, mind y fokszámához hármat ad hozzá.

Ha a gráfban van hurokél, akkor meg kell állapodnunk, hogy ezt az illető pontnál egyszer vagy kétszer számoljuk.

A továbbiakban kényelmes lesz, ha bevezetjük a következő jelölést: ha S és T a G gráf pontjainak két diszjunkt részhalmaza, akkor a köztük futó éleket ST éleknek nevezhetjük. A T-n belül futó éleket pedig TT éleknek nevezhetjük.

1.1. Fogalmazzuk át a K.I.18.1., K.I.18.2. és K.I.18.3. feladatok szövegét a most definiált gráfelméleti fogalmak segítségével.

1.2. (M) Fogalmazzuk meg a gráfok nyelvén az 1.2-1.7. feladatban szereplő állítást!

1.3. Izolált pont, telített pont

Az 1.2. feladat állításának bizonyításában fontos szerepet játszott kétféle pont: az olyan pont, amely a gráf egyetlen más pontjával sincs összekötve, valamint az olyan pont, amely a gráf minden más pontjával össze van kötve. E kétféle pontnak külön neve is van, az előbbit *izolált pontnak* nevezzük (mert „el van szigetelve” a gráf többi pontjától), az utóbbit *telített pontnak* nevezzük. A pontos definíciók tehát a következők:

Definíció. Ha a G gráf egy x pontja a gráf egyetlen pontjával sincs összekötve, akkor azt mondjuk, hogy az x pont *izolált pont.*

Ha G egyszerű gráf és az x pont G összes pontjával össze van kötve, akkor az x pontot *telített pontnak* nevezzük.

Megjegyzés. A telített pont fogalmát csak *egyszerű* gráfra értelmeztük, az izolált pont tetszőleges gráfban értelmes.

Az 1.2. feladatban szereplő állítás szerint tehát *egyszerű véges gráfban van két azonos fokszámú pont.* Ennek bizonyítása azon múlt, hogy *egy egyszerű gráfban nem lehet egyszerre izolált pont és telített pont*, ezért egy n pontú gráfban csak $n-1$ féle fokszám fordulhat elő.

1.1. (S) Hány pontja van a legkisebb olyan egyszerű gráfnak, amelyben nincs sem telített pont, sem izolált pont?

1.2. (M) Hány olyan különböző négypontú egyszerű gráf van, amelyben nincs sem telített pont, sem izolált pont?

1.3. Definíció. Egy gráf éleinek egy részhalmazát akkor és csak akkor nevezzük *független élhalmaznak*, illetve egy gráf éleiről akkor és csak akkor mondjuk, hogy *függetlenek*, ha semelyik kettőnek nincsen közös végpontja.

Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfban nincs sem telített pont, sem izolált pont, akkor van benne legalább két független él.

1.4. (M) Milyen n-ekre van olyan n-pontú egyszerű gráf, amelyben nincsen három független él, nincs telített pont és nincs izolált pont?

1.5. Az 1.2. feladat állítása szerint minden véges egyszerű gráfban van két azonos fokú pont. Igaz-e, hogy mindig van két olyan azonos fokú pont is, amelyek nem izolált pontok és nem is telített pontok?

1.6. (M) * Mutassunk példát olyan n pontú egyszerű gráfra, amelyben csak egy pár azonos fokú pont van.

1.4. Az irányított gráf fogalma

1.1. Igaz-e, hogy egy városban egy adott napon mindig van két mobiltelefon, amelyről ugyanannyi hívást kezdeményeztek?

1.2. A K.I.18.9. feladat b) része így szólt:

„Egy 21 tagú társaságból mindenki két vagy négy másiknak írt levelet, kivéve egyet, aki hat társának írt levelet. Lehetséges-e, hogy mindenki három vagy öt levelet kapott?"

Próbáljuk megfogalmazni a kérdést a gráfok nyelvén!

Kommentár és definíciók. Amikor megpróbáltuk megfogalmazni „gráfelméleti nyelven" a K.I.18.9. feladat b) részének a szövegét, akkor kiderült, hogy eddigi fogalmaink csődöt mondanak, itt ugyanis külön jelölnünk kell azt is, hogy melyik pontból „indul" az él és melyik pontba „érkezik".

Ugyanezt tapasztaltuk az 1.1. feladatban is.

Ha ezeket a feladatokat is le akarjuk fordítani „gráfelméleti nyelvre", akkor be kell vezetnünk az *irányított* éleket és *irányított gráfokat*:

Definíció. Ha egy gráfban az x és y pontot összekötő élnél megjelöljük, hogy melyikből *indul* – például x-ből –, akkor az így kapott élt a gráf *irányított élének* nevezzük, amelynek másik pontja – jelen esetben y a végpontja. Ha egy gráfban minden él irányított, akkor a gráfot *irányított gráfnak* nevezzük.

Irányított gráfban minden pontnak van egy „befoka" és egy „kifoka". Utóbbi azoknak az éleknek a száma, amelyeknek a szóban forgó pont a kezdőpontja (tehát a „kifoka" a belőle induló élek száma) és „befoka" azoknak az éleknek a száma, amelyeknek a szóban forgó pont a végpontja.

Az 1.1. feladat eredményét most már így fogalmazhatjuk meg: nem minden irányított gráfban van két olyan pont, amelyek kifoka azonos. (És természetesen ugyanez igaz a befokokra is.)

A feladat folytatása az alábbi 1.3. és a GR.II.1.2. feladat.

1.3. (M) Egy kilenctagú társaságban mindenki pontosan öt másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a vagyona. (Arany Dániel-verseny 1990H)

1.4. (M) * Igaz-e minden végtelen egyszerű gráfra is, hogy biztosan van két azonos fokú pontja?

2. FEJEZET

Részgráfok és a komplementergráf – izomorfia

Ebben a fejezetben elkezdjük a gráfelméleti alapfogalmak bevezetését. Bevezetünk egy speciális gráfosztályt, és néhány szinte „állandóan” használt fogalmat.

Mint az előző (1.) fejezet bevezetőjében is hangsúlyoztuk, az itt szereplő fogalmaknál sem nem szabad szem elől téveszteni, hogy egyelőre valóban csak a fogalmak *bevezetésére* alkalmas feladatok szerepelnek. A fogalmak mélyebb jelentése, „működése” csak a későbbi fejezetekben fog kibontakozni. Így például az izomorfiával a speciális gráfelméleti problémákat tárgyaló kötet GR.II.4. fejezete foglalkozik behatóbban. A komplementergráf fogalma több fejezetben is visszatérő téma lesz; egyes speciális részgráfok kereséséről szól a Turán-tétel problémaköre, (l. a GR.II.2. fejezetet). A feszítő részgráfok egy speciális típusát pedig a favázaknál tárgyaljuk (l. a 7. és a ALG.II.3. fejezeteket) stb.

A fejezet némelyik feladata most is az előző kötet *Gráfok* című (K.I.18) fejezetének feladataihoz kapcsolódik. Ezekre többször is hivatkozni fogunk és jelezni fogjuk, hol melyiket érdemes átismételni.

2.1. Reguláris gráfok

2.1. a) Keressünk olyan hatcsúcsú poliédert, amelynek csúcsaiból és éleiből alkotott gráfban minden pont negyedfokú!

b) Hány hatpontú egyszerű gráf van, amelyben minden pont negyedfokú?

2.2. (S) Egy öttagú társaságban mindenki három másikat ismer. Lehetnek-e kölcsönösek az ismeretségek?

2.3. (M) Lehetséges-e, hogy egy hattagú társaságban mindenkinek három ismerőse van és az ismeretségek kölcsönösek?

2.4. (M) Milyen n-ekre lehetséges, hogy egy n tagú társaságban, ahol az ismeretségek kölcsönösek, mindenkinek pontosan három ismerőse van?

2.5. (M) Milyen n-ekre lehetséges, hogy egy n tagú társaságban, ahol az ismeretségek kölcsönösek, mindenkinek pontosan hat ismerőse van?

Definíció. A 2.1. feladat olyan gráfról szólt, amelyben minden pont foka azonos. A 2.2.-2.5. feladatokban is lényegében ilyen gráfokról volt szó (bár ott nem használtuk a gráfelméleti nyelvet). Az ilyen gráfok fontos szerepet játszanak, ezért külön nevük van, *reguláris gráfnak* nevezzük őket. Ha minden pont foka k, akkor azt mondjuk, hogy a gráf *k-reguláris.* A reguláris gráfnak lehetnek többszörös élei, ekkor a többszörös éleket természetesen multiplicitással számoljuk. Mint a fokszám definíciójánál említettük, például egy háromszoros xy él x-nél is, y-nál is hármat ad a fokszámhoz.

A 2.1. feladat szerint *pontosan egy hatpontú 4-reguláris egyszerű gráf van.* Ezt a gráfot a térgeometriából is ismerjük, az oktaéder csúcsai és élei által alkotott gráfról van szó. A 2.2.-2.5. feladatok arról szóltak, hogy milyen n és k számokra van n pontú, egyszerű k-reguláris gráf. Az általános kérdést a 2.7. feladat taglalja.

2.6. (M) a) Hogyan fogalmazható át gráfelméleti nyelvre a 2.5. feladat?
b) Hogyan általánosítható a 2.5. feladat?

2.7. (M) Milyen n és k számokra létezik n pontú k-reguláris egyszerű gráf?

2.8. A K.I.18.14. feladat első része a következőképpen szólt:
„Egy tíztagú társaságról tudjuk, hogy minden tagja hét másikat ismer. Igazoljuk, hogy a társaságból bármely három személynek van közös ismerőse.”
Fogalmazzuk át a feladatot a most definiált fogalmak segítségével! Keressünk általánosítását!

2.9. Igazoljuk, hogy egy $2k-1$ pontú k-reguláris egyszerű gráfban bármely két pontnak van közös szomszédja.
Igaz-e az állítás minden $2k$ pontú k-reguláris egyszerű gráfra is?

A 2.9. feladat folytatása a Turán-tételhez vezet. Lásd a GR.II.1.3. és a GR.II.1.4. feladatot is a *Dirac-gráfok és hasonlók* című alfejezetben.

2.10. (M) Igazoljuk, hogy egy $3k-1$ pontú, $2k$-reguláris egyszerű gráfban bármely három pontnak van közös szomszédja.
Igaz-e az állítás minden $3k$ pontú, $2k$-reguláris egyszerű gráfra is?

Definíció. A reguláris gráfoknak speciális esete, de önmagában is fontos az olyan egyszerű gráf, amelynek bármely két éle éllel van összekötve. Az ilyen gráfot *teljes gráfnak* nevezzük. Az n pontú teljes gráfot K_n-nel jelöljük.
Másik speciális eset az olyan gráf, amelyben semelyik két pont között nem fut él, az ilyen gráfot *üres gráfnak* nevezzük.

2.11. (S) Hány éle van az n pontú teljes gráfnak?

2.12. (M) Hány hétpontú, 4-reguláris gráf van? És hány kilencpontú, 6-reguláris gráf van?

2.13. (M) Maximálisan hány éle lehet egy olyan n pontú egyszerű gráfnak, amelyben nincs k pontú csillag ($n > k$)?

Reguláris gráfokra vonatkozó feladatok – e fejezeten kívül – az 5.1., 5.2., 5.8., 5.9., 8.1., 6.1-6.4., GR.II.1.21. feladatok, továbbá néhány feladat (például a 7.3. feladat) a fákról (közelebbről: favázakról) szóló fejezetben. Lásd még a 10.2., a 10.3., az GR.II.1.3. és az GR.II.1.4. feladatokat is.
Sok reguláris gráffal találkozhatunk majd a speciális gráfelméleti témákat tárgyaló kötetben, így a *Ramsey-típusú* tételekről (GR.II.3.) , a *Turán-tételről* (GR.II.2.), valamint a *Gráfok izomorfiájáról* (GR.II.4.) szóló fejezetben. Speciális reguláris gráfokkal, például a szabályos testek élgráfjaival, a Petersen-gráffal és a Kneser-gráfokkal és általában a csúcstranzitív gráfokkal foglalkozik a *Gráfok automorfizmusai* c. fejezet (GR.II.5.).

2.2. A komplementergráf

Már az 1.4. feladat megoldásánál is segített, hogy az ismeretségek helyett a „nem-ismeretségeket”, illetve a nem-ismeretségek helyett az ismeretségeket vizsgáltuk. Ugyanez az ötlet segített például a K.I.18.10. feladat b) részének a megoldásánál is, amikor azt a gráfot néztük, amely az eredeti gráfban *be nem húzott* élekből áll. Az 1.5., a 2.1. és a 2.12. feladat megoldásának is az volt a kulcsa, hogy áttértünk arra a gráfra, amely a „nem-élekből” áll. Az így kapott gráfok ugyanis sokkal könnyebben áttekinthetők voltak.

Ezek a példák is mutatják, hogy sokszor könnyít a helyzetünkön, ha egy adott relációnál nem azt vizsgáljuk, hogy melyik objektumok között *áll fenn*, hanem azt, hogy melyikek között *nem áll fenn*. Megjegyezzük, hogy az ötlet nagyon hasonló ahhoz, mint amikor a valószínűségszámításban egy esemény valószínűsége helyett a komplementer esemény valószínűségét számoljuk ki, mert az egyszerűbben kiszámolható.

Érdemes tehát definiálnunk a gráf komplementerét:

Definíció. A G egyszerű gráf *komplementerének* azt a $\overline{G}$ gráfot nevezzük, amelynek pontjai azonosak G pontjaival, és két pontja között pontosan akkor fut él, ha a G gráfban nem fut közöttük él.

Figyeljünk rá, hogy csakis *egyszerű* gráf komplementerét definiáltuk. Nem ilyen egyszerű az olyan gráfok komplementerét definiálni, amelyek nem egyszerűek (hogy a szóviccel éljünk).

Nyilvánvaló a definícióból, hogy egy gráf komplementerének komplementere önmaga.

2.1. Rajzoljuk fel a következő gráfok komplementerét:

a) G_1 az a gráf, amelynek csúcsai egy kocka csúcsai, élei a kocka élei.

b) G_2 az a gráf, amelynek csúcsai egy oktaéder csúcsai, élei az oktaéder élei.

c) H_n az a gráf, amelynek csúcsai egy n-szög csúcsai, élei a sokszög oldalai; $n = 3, 4, 5, 6$.

d) G_3 az a gráf, amelynek négy csúcsa van, x, y, u és v, és három éle: xy, yu, uv.

e) G_4 az a hétpontú gráf, amelynek csúcsai egy szabályos hétszög csúcsai és élei a hétszög oldalai valamint a legrövidebb átlói.

2.2. (M) Igaz-e a következő állítás:

Legyen G egyszerű véges gráf. G minden pontjának a fokszáma ugyanolyan paritású, mint $\overline{G}$-beli foka. Jelölve: minden $x \in V(G)$-re $d_G(x) = d_{\overline{G}}(x)$.

2.3. (M) Hány olyan egyszerű hatpontú gráf van, amelyben a fokszámok rendre 4,4,4,2,2,2?

2.4. (S) Egy tízpontú egyszerű gráfnak húsz éle van. Hány éle van a komplementerének?

2.5. (S) Milyen n-ekre igaz, hogy ha G egy n pontú egyszerű gráf, akkor vagy G-ben vagy a komplementerében páratlan sok él van?

Komplementergráfok számtalan helyen előfordulnak, legfontosabb talán az GR.II.1.15., a 8.9., a 8.12. feladat. A speciális gráfelméleti témákkal foglalkozó GR.II. kötet külön alfejezetében szerepelnek a komplementerükkel izomorf gráfok. A Ramsey-típusú tételek pedig eleve vagy a gráfról, vagy a komplementeréről állítanak valamit.

2.3. Részgráfok

Ha megnézzük az 1.5. és 1.6. feladatokat, a megoldásnak lényeges pontja volt, hogy a gráf bizonyos pontjait és a belőle induló éleket elhagytuk és csak az így maradó gráfot vizsgáltuk. Az így kapott gráfot az eredeti gráf *részgráfjának* nevezzük. De vigyáznunk kell, az így kapott gráfok a részgráfoknak csak *egyik fajtáját* alkotják, az úgynevezett *feszített* részgráfokat. A pontos definíció a következő:

Ha a G gráfból elhagyunk néhány (esetleg minden) pontot a belőle induló élekkel, akkor az így kapott gráfot a G gráf *feszített részgráfjának* nevezzük. Egy másik megfogalmazási lehetőség: ha Y a G gráf pontjainak részhalmaza (lehet az üres halmaz és az egész $V(G)$ halmaz is!), akkor tekinthetjük azt a gráfot, amelynek ponthalmaza Y, élhalmaza pedig azok az élek, amelyek Y pontjai között futnak az eredeti G gráfban. Az így kapott gráfot *a G gráf Y által feszített részgráfjának nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy ha az egyszerű gráf egy feszített részgráfja teljes gráf, akkor ezt a részgráfot a gráf *klikkjének* is szokás nevezni.

2.1. Rajzoljuk fel annak a gráfnak négypontú feszített részgráfjait, amelynek csúcsai egy kocka csúcsai, élei pedig a kocka élei.

2.2. (MS) Hány olyan gráf van, amelynek minden hárompontú feszített részgráfjában két él van?

2.3. (M) Melyik az a legkisebb gráf, amelynek egyaránt van nulla, egy, két- és háromélű hárompontú feszített részgráfja?

2.4. (S) Egy n pontú gráf minden n pontú részgráfja feszített részgráf. Mit mondhatunk a gráfról?

2.5. (M) * Tavaly a világranglistán nyilvántartott teniszezők átlagosan tizennyolc különböző ellenféllel játszottak. Kiválaszható-e néhány versenyző úgy, hogy ha csak ezek egymás elleni mérkőzéseit tekintjük, akkor mindenki legalább tíz másikkal játszott?

2.6. (M) Fogalmazzuk át a 2.5. feladat állítását gráfelméleti nyelvre.

A feladat általánosításáról szól a 3.4. feladat.

A feszített részgráfok tehát fontos „szereplői” a gráfelméletnek. De nemcsak az ilyen részgráfok érdekesek. Ha például azt kérdezzük – l. például *A „Turán-tétel” két egyszerű esete* c. alfejezetet –, hogy bizonyos egyszerű gráfokban van-e „háromszög” (azaz három olyan pont, amelyek közül mindegyik össze van kötve a másikkal), akkor feszített részgráfot keresünk. Akkor is feszített gráfra gondolunk, ha azt kérdezzük, van-e három pont, amelyek közül egyik sincs összekötve a másikkal. Ha azonban azt kérdezzük, hogy van-e négy olyan pont, amelyek közül az első össze van kötve a másodikkal, a második a harmadikkal, a harmadik a negyedikkel és a negyedik az elsővel (azaz van-e benne „négyszög”), akkor már nem feltétlenül *feszített* részgráfra gondolunk, hiszen az is jó lehet nekünk, ha négy olyan pontot találunk, amelyek közül bármely kettő között fut él. Az 1.3. feladatban azt kellett bizonyítani, hogy egy telített és izolált pont nélküli egyszerű gráfban mindig van két független él. Itt sem érdekelt minket, hogy a talált négy pont között fut-e még más él is a két független élen kívül. Általában is gyakran keresünk lehetőleg minél nagyobb független élrendszert egy gráfban, és ilyenkor általában nem „zavar” minket, ha az élek végpontjai között más élek is futnak. A részgráfot tehát általánosan is definiáljuk. Az analógia a halmaz és részhalmaz fogalma lehet. De rögtön látni fogjuk, hogy van különbség is.

Definíció. Adott egy G gráf. A G' gráfot pontosan akkor nevezzük a G gráf *részgráfjának*, ha pontjai a G pontjai közül kerülnek ki, élei pedig a G gráf élei közül.

Az említett különbség abból adódik, hogy a részgráf élhalmaza nem lehet az eredeti élhalmaz bármelyik részhalmaza, mert egy él csak akkor szerepelhet egy gráfban, ha a végpontjai a ponthalmazhoz tartoznak. Tehát a részgráf élhalmaza az eredeti élhalmaz olyan részhalmaza, amely a részgráf pontjai között futó élhalmaznak is része.

Egy halmaz részhalmazaihoz hozzáértjük az üres halmazt is, ugyanígy itt a részgráfokhoz hozzávesszük az üres részgráfot is, tehát azt, amelynek sem pontja, sem éle nincsen. Ez a legegyszerűbb részgráf.

Egy halmaz részhalmazaihoz hozzáértjük magát a halmazt is. Mi felel meg ennek a gráfoknál? Első lépésben nyilván maga a gráf. Csakhogy a gráfot két halmaz – a pontok és az élek halmaza – együtt jellemez. Ennek megfelelően itt kétféle kitüntetett részgráf van. Az egyik a már definiált feszített részgráf. A másik az, ahol a részgráf *ponthalmaza* azonos a gráféval. Az ilyen részgráfokat – kissé suta magyar szóval – *feszítő részgráfnak* nevezzük.

A feszítő részgráfok közül különösen az úgynevezett *feszítő fák*, vagy *favázak* lesznek fontosak, ezekkel ALG.II. kötet külön fejezetében, a *Fák, favázak* című (ALG.II.3.) fejezetben foglalkozunk.

2.7. Rajzoljuk fel a négypontú teljes gráfnak minden feszítő és feszített részgráfját.

2.8. (S) Lehet-e egy részgráf egyszerre feszítő és feszített részgráfja is ugyanannak a gráfnak?

2.9. (S) Egy L gráfról tudjuk, hogy ha részgráfja egy G egyszerű gráfnak, akkor biztosan feszített részgráfja. Milyen gráf lehet L?

2.10. (M) Fogalmazzuk újra a K.I.18.13. feladatot a most bevezetett fogalmak segítségével!

2.4. Izomorfia

2.1. (M) Hány olyan ötpontú gráf van, amelynek fokszámai:
a) $1, 2, 2, 3, 3$; **b)** $1, 2, 2, 2, 3$?

2.2. (M) Soroljuk fel az összes 4 csúcspontból álló egyszerű gráfot!

2.3. (M) Rajzoljuk le az összes ötpontú négyélű egyszerű gráfot.

Kommentár.

A 2.12. feladatban magától értetődően beszéltünk arról, hogy hány hét-, vagy kilencpontú 2-reguláris gráf van. A K.I.18.19., az 1.2. és a 2.2. feladatban magától értetődően beszéltünk arról, hogy például hány négypontú, kételű gráf van vagy hány ötpontú négyélű gráf van. Valójában persze végtelen sok van, hiszen a pontok halmazát végtelen sokféleképp választhatjuk. Mi mégis arra jutottunk, hogy például négypontú, kételű gráfból csak kettő van. Eközben tehát magától értetődően azonosnak tekintettünk bizonyos gráfokat. A 2.3. feladatban kétféleképp rajzoltuk fel ugyanazt az „ültetési rendet”, azaz gráfot.

Próbáljuk megfogalmazni, mikor tekintünk két gráfot azonosnak. Nyilván akkor, ha a két gráf pontjai megfeleltethetőek egymásnak úgy, hogy az élek „ugyanazok” legyenek a két gráfban. Az ilyen gráfokat *izomorf* gráfoknak nevezzük. A pontos definíció a következő:

Definíció. A G és a G' gráfot akkor és csak akkor tekintjük *egymással izomorfnak*, vagy egyszerűen *izomorfnak*, ha létezik a pontjaik között olyan egy-egy értelmű megfeleltetés, amely mellett igaz, hogy G-ben két pont között pontosan akkor fut él, ha G'-ben a megfelelőik között is fut él.

Természetesen ugyanez igaz fordítva is: G'-ben két pont között pontosan akkor fut él, ha G-ben is fut él az „őságképeik” között.

Magát az „izomorfiát létrehozó” egy-egyértelmű leképezést szokás *izomorfiának* nevezni.

Megjegyzés. A gráfok izomorfiájával kapcsolatos feladatok a GR.II. kötet *Szimmetria és aszimmetria* című fejezetében találhatók.

3. FEJEZET
Összefüggések a fokszám és az élszám között

Átismételjük – immár „gráfelméleti nyelven” – a fokszám és élszám közötti nevezetes Euler-összefüggést és pár következményét. Egy kevésbé ismert, de fontos élesítését is tárgyaljuk és megvizsgáljuk, hogyan szól irányított gráfokra. Ebben a fejezetben aránylag kevés feladat szerepel, viszont a következő 4. fejezet első feladatai e fejezet témáját folytatják.

3.1. Az Euler-összefüggés

Ide tartozó korábbi feladatok: 2.2., 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7.

3.1. (M) Egy nyolctagú társaság minden tagjától megkérdeztük, hogy hány ismerőse van a társaságban. Sorra a következő válaszokat kaptuk: 3, 5, 4, 2, 5, 2, 4, 4. Lehetséges-e, hogy a társaságban kölcsönösek az ismeretségek?

3.2. (M) Egy tíztagú társaságban mindenki összeszámolta ismerőseit. Kiderült, hogy hármuknak van öt-öt ismerőse, kettőnek csak kettő-kettő, a többi ötnek négy-négy ismerőse van. Tudjuk, hogy az ismeretségek kölcsönösek. Igazoljuk, hogy valaki rosszul számolt.

3.3. (M) Hogyan általánosítható a 3.2. feladat? Fogalmazzuk meg állításunkat a gráfelmélet nyelvén is!

3.4. (M) Igaz-e nem egyszerű véges gráfokra is az az Euler-tétel, mely szerint a fokszámok összege mindig páros?

3.5. (M) Mit mondhatunk egy hurokél nélküli gráfban a páratlan fokú pontok számáról?

3.2. Élesítések

3.1. Kutató munka:
Egy társaságban, ahol az ismeretségek kölcsönösek, bármely két embernek együtt legalább tíz ismerőse van. Mit mondhatunk a társaságban levő ismeretségek számáról?
És mit mondhatunk, ha bármely két embernek együtt legfeljebb tíz ismerőse van?

3.2. Kutató munka: Hogyan általánosítható a 3.1. feladatban megfogalmazott állítás?

3.3. Kutató munka:
Egy egyszerű gráfban bármely három pont fokszámának az összege legalább $3k$. Mit mondhatunk a gráf élszámáról?
És mit mondhatunk, ha bármely három pont fokszámának az összege legfeljebb $3k$?
* Hogyan általánosítható a feladat?

3.4. (M) Hogyan általánosítható a 2.6. feladat állítása?

3.5. (M) Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást, de bármely hét lakója között van kettő, aki ismeri egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándékkal. Bizonyítsuk be, hogy n lakó esetén legfeljebb $6n$ ajándéktárgyat adtak át! (OKTV 1986, I. kategória, döntő)

Hogyan fogalmazható át a feladat gráfelméleti nyelvre?

3.6. (M) [8], 148. oldal.

Egy n megfigyelőállomással rendelkező sarkkutató expedíció állomásai között legfeljebb k olyan van, amelyek között semelyik kettő nincs egymással közvetlen telefon-összeköttetésben. Nincs köztük továbbá három olyan, amelyek mindegyike mindegyikkel közvetlen összeköttetésben van.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a közvetlen telefon-összeköttetések száma nem lehet több, mint $nk/2$. (Ki miben tudós? 1966/döntő)

3.3. Az irányított gráfok esete

3.1. (M) a) Egy tízpontú irányított gráfban a kifokok rendre 1,1,2,3,3,3,4,4,4,4. Hány éle van a gráfnak?

b) Egy kilencpontú irányított gráfban a befokok rendre 1,1,2,3,3,3,4,4,4. Hány éle van a gráfnak? Rajzoljunk ilyen gráfot!

3.2. (M) Hogyan szól a fokszámösszegre vonatkozó összefüggés irányított gráfoknál?

4. FEJEZET
Páros gráfok

A gráfelméleti alapfogalmak bevezetését egy fontos gráfosztály, a páros gráfok bevezetésével folytatjuk. Bebizonyítunk pár velük kapcsolatos elemi tételt. A páros gráfokra vonatkozó további tételek, így a König-tételek a K.III.3. fejezetben kerülnek majd sorra.

A fejezet néhány feladata most is az előző kötet *Gráfok* című fejezetének feladataihoz kapcsolódik. Ezekre az adott helyen fogunk hivatkozni és jelezni fogjuk, hol melyiket érdemes átismételni.

4.1. A páros gráf fogalma

A) Kutató munka

4.1. Egy táncestély végén megkérdeztük a lányokat, hány fiúval táncoltak és megkérdeztük a fiúkat, hány lánnyal táncoltak.

Ábrázoljuk gráfokkal az estély táncospárjait és keressünk összefüggést a fiúk által mondott számok és a lányok által mondott számok között. Próbáljuk bizonyítani a megsejtett összefüggést!

4.2. Egy másik táncestély végén csak a lányokat kérdeztük meg, hány fiúval táncoltak. Erre egyesével nem akartak válaszolni, de ha kettesével kérdeztük őket, annyi azért kiderült, hogy bármelyik két lány együtt legfeljebb hat fiúval táncolt (ha két lány táncolt ugyanazzal a fiúval, mindkettőjük számolja a táncpartnerei között). Vajon legalább hány különböző táncospárt számolhattunk volna össze, ha végignézzük az estélyt?

4.3. Mit mondhatunk, ha a 4.2. feladatban szereplő táncestélyen azt tudjuk meg, hogy

a) ha bármely két lány összeszámolja táncpartnereit (a közös táncpartnereket mindketten számolják), akkor legalább hét jön ki?

b) ha bármely három lány összeszámolja táncpartnereit (a közös táncpartnereket annyian számolják, ahányan táncoltak vele), és összeadja a kapott számokat, akkor legalább tíz jön ki?

B) Kommentár és definíciók

A 4.1. és 4.2. feladatban – és a korábbi feladatok közül például a K.I.18.8. feladatban, valamint a K.I.18.9. feladat a) részében – egy speciális gráffajta szerepel, aminek kitüntetett szerepe volt és van a gráfelméleti vizsgálódásokban:

Definíció. Az olyan gráfokat, amelyeknek pontjai két osztályba sorolhatók úgy, hogy a gráf minden éle a két osztály pontjait köti össze – tehát az olyan gráfokat, amelyekben azonos osztálybeli pontok között nem fut él –, *páros gráfoknak* nevezzük.

Ez szemléletesen úgy is megfogalmazható, hogy egy gráf pontosan akkor páros, ha a pontjai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy (minden pontot a két szín valamelyikére színezzük és) azonos színű pontok között nem fut él.

Ha a páros gráf olyan egyszerű gráf, amelyben a két osztály között futó összes él be van húzva, akkor a gráfot *teljes páros gráfnak* nevezzük. Azt a teljes páros gráfot, amelynek két osztályában a pontok száma n és k, így jelöljük: $K_{n,k}$.

A $K_{1,k}$ gráfokat, ahol tehát egy pont az összes többivel össze van kötve és több él nincsen, *csillagnak* nevezzük.

A páros gráfok egy fontos alternatív jellemzését a 4.4. feladat tartalmazza.

C) Feladatok

4.4. Írjuk le másképp a $K_{2,2}$ és a $K_{3,3}$ teljes páros gráfot.

4.5. (S) Döntsük el a következő gráfokról, hogy páros gráfok-e:

a) Az a gráf, amelynek csúcsai egy kocka csúcsai, élei a kocka élei. (Lásd az 5.3a. feladat ábráját.)

b) Az a gráf, amelynek csúcsai egy ötszög csúcsai, élei az ötszög oldalai.

c) Az a gráf, amelynek csúcsai egy oktaéder csúcsai, élei az oktaéder élei.

d) Az a gráf, amelynek csúcsai egy szabályos hatszög csúcsai, élei a hatszög oldalai valamint leghosszabb átlói.

4.6. (S) Igaz-e, hogy páros gráf minden részgráfja is páros?

4.7. Hogyan szól „gráfelméleti nyelven” a K.I.18.8. feladat szövege? És a K.I.18.9. feladat a) részének a szövege?

4.8. (M) Hogyan szól gráfelméleti nyelven a 4.1. feladatban kapott eredmény?

4.9. (M) Maximálisan hány éle lehet egy tízpontú páros gráfnak? És egy 11 pontúnak?

4.10. (M) Maximálisan hány éle lehet egy n pontú páros gráfnak?

4.11. Milyen n-ekre van olyan n pontú páros gráf, amelynek a komplementere is páros? Keressük meg az összes ilyen gráfot!

4.12. (M) Van-e olyan egyszerű páros gráf, amelyben a csúcsok fokszáma rendre 3,3,3,3,4,4,4,4?

Vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, vagy adjuk meg az összeset!

4.13. (MS) Van-e olyan egyszerű páros gráf, amelyben a csúcsok fokszáma rendre 3,3,3,3,3,4,4,5,6?

4.14. Kutató munka:

Fogalmazzuk meg a 4.2. feladat eredményét páros gráfokkal!

* Fogalmazzunk meg áltánosabb állítást és próbáljuk bizonyítani! Melyik korábbi feladat gondolatmenetét alkalmazhatnánk?

4.15. (M) * Egy egyszerű gráfról azt tudjuk, hogy bármely három pontja között páros sok él fut. Mit mondhatunk még erről a gráfról? Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy gráfnak meglegyen ez a tulajdonsága!

4.2. Reguláris páros gráfok

4.1. (M) [10]
Legyen a sakktábla 64 mezejéből 16 mező oly módon kijelölve, hogy mind a 8 sor és mind a 8 oszlop éppen 2-2 kijelölt mezőt tartalmaz. Bebizonyítandó, hogy a kijelölt mezőkre mindenkor úgy lehet egy-egy bábut – éspedig 8 fehér és 8 fekete bábut – elhelyezni, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 1 fehér és 1 fekete bábu álljon. (Kürschák-verseny, 1933.)

4.2. Kutató munka:
A $K_{n,n}$ teljes páros gráfok nyilván regulárisak. 2-reguláris páros gráfok a $2n$-szögek csúcsai, illetve élei által alkotott gráfok. Rajzoljunk fel másfajta reguláris páros gráfokat, például 3-reguláris, 4-reguláris páros gráfokat! Mi mondható egy reguláris páros gráf osztályainak pontszámáról?

4.3. (S) **Kutató munka:**
a) Rajzoljunk olyan páros gráfot, amelynek tíz pontja van és 3-reguláris.
b) Milyen n és k számokra van k-reguláris, n-pontú páros gráf?

A reguláris páros gráfokra vonatkozó tételek később fognak sorra kerülni. A reguláris páros gráfok teljes párosításairól szóló általános tételt majd a K.III.3. fejezetben tárgyaljuk. De egy speciális esete már ebben a kötetben a 10.3. feladatban sorra kerül.

4.3. Páros gráfok és páros körök

4.1. Kutató munka:
Állapítsuk meg, milyen n-ekre páros gráf az a gráf,
a) amelynek csúcsai egy n-szög csúcsai, élei a sokszög oldalai,
b) amelynek csúcsai egy n-szög alapú hasáb, élei a hasáb élei?

4.2. Definíció. Ha egy gráf egy részgráfja izomorf a 4.1. feladatban szereplő gráffal, azaz azzal a gráffal, amelynek csúcsai egy n-szög csúcsai, élei a sokszög szomszédos csúcsait kötik össze, akkor ezt a részgráfot a gráf egy n hosszúságú *körének* nevezzük. Az n hosszú kör jele: C_n.

Megjegyzés. A körre az 5. fejezet elején adni fogunk egy alternatív, tisztán gráfelméleti definíciót. Jelen céljainkra azonban ez a definíció is megfelel és jól mutatja a fogalom szemléletes jelentését.

Fogalmazzuk meg e definíció segítségével a 4.1. feladatban kapott állítást.

4.3. Bizonyítsuk be, hogy páros gráfban nem lehet páratlan kör.

4.4. Kutató munka:
A 4.3. feladat szerint páros gráfban nincs páratlan kör.
Vajon igaz-e az állítás megfordítása? Igaz-e, hogy ha egy gráfban minden kör páros, akkor a gráf páros gráf?

4.4. Páros gráfok és irányított gráfok

4.1. (M) Milyen összefüggéshez hasonlít a 4.8. feladatban kapott eredmény?

Megjegyzés. A 4.1. feladatban talált analógia a páros gráfok és az irányított gráfok között nem véletlen, vagy felszíni analógia. Erre utalt már a K.I.18.9. feladat is. Egy n pontú irányított gráfot ugyanis mindig könnyen kódolhatunk egy olyan páros gráffal, amelynek mindkét osztályban n pont van. Gondolatban megszámozzuk egytől n-ig az irányított gráf pontjait is, a páros gráf A osztályának a pontjait is, B osztályának a pontjait is. Az A osztály i-edik pontját akkor és csak akkor kötjük össze a B osztály j-edik pontjával, ha az irányított gráfban van i-ből j-be mutató él.

Hasonlóan egy irányított gráffal kódolható minden olyan páros gráf is, amelynek két osztályában azonos számú pont van. Ha az irányított gráfban többszörös élek vannak, akkor a páros gráfban is lesznek és viszont. Némileg „ront” a helyzeten, hogy ebben az esetben az irányított gráfban keletkezhetnek hurokélek (ha a páros gráf két osztályának két azonos számú pontja között fut él).

Ennek a megfeleltetésnek a jelentősége majd később fog kidomborodni.

4.2. (M) Számozzuk meg egy négypontú tournament pontjait és legyenek pontosan azok az élek behúzva, amelyek kisebb számú pontból nagyobb számúba mutatnak. Rajzoljuk meg ennek az irányított gráfnak a páros gráf megfelelőjét!

Mit jelent az az irányított gráfban, ha a neki megfelelő páros gráfban van izolált pont?

4.3. (M) Rajzoljuk fel a következő páros gráfoknak megfelelő irányított gráfot:

a) $K_{2,2}$,

b) $K_{3,3}$,

c) a hatszög csúcsai a gráf csúcsai, a hatszög oldalai a gráf élei,

d) a kocka gráfja, lásd az 5.3a. feladatot.

Mit vehetünk észre a c) és d) feladatnál?

További, páros gráfokról szóló feladat például a 8.4., a 8.5., a 8.7., a 8.11. feladat.

Az egész ALG.II.3. fejezet páros gráfokkal (illetve feszítő páros részgráfokkal) foglalkozik. A páros gráfokra vonatkozó König-tételeket pedig a 11-12. osztályos kötetben tárgyaljuk majd.

5. FEJEZET

Utak, összefüggő gráfok

5.1. Összefüggő komponensek

Egy gráfban nyilván sokkal „szorosabban” összetartoznak azok a pontok, amelyek egyikéből a másikába el lehet jutni „csatlakozó élek” mentén. Az ilyen „csatlakozó élekből” álló alakzatok több korábbi feladat megoldásában fontos szerepet játszottak, így például a 4.3. feladatban.

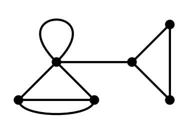
Az ilyen alakzatok olyan gyakran szerepelnek, hogy érdemes külön nevet adni a fogalomnak. Rögtön az is ki fog derülni, hogy nem is egy fogalom „bújik meg” emögött a kifejezés mögött. Az élek olyan egymásutánját, ahol mindegyik él csatlakozik az előzőhöz, *sétának* fogjuk nevezni. De a pontos definíció – a továbbiak egyszerűsítése érdekében – egy kicsit másképp szól.

Definíció. Legyen adva egy tetszőleges gráf. Ha a $P = \{x_1, x_2, \cdots x_m\}$ pontsorozatra igaz, hogy $x_i x_{i+1}$ minden $1 \leq i \leq m-1$-re éle a gráfnak, akkor ezt a pontsorozatot definíció szerint *sétának*, a gráf egy sétájának, éspedig az x_1 és x_m pontok közötti sétának nevezzük.

Vegyük észre, hogy *nem kötöttük ki, hogy a séta pontjai különbözőek legyenek.* A sétában tehát lehetnek „felesleges” pontok és élek, egy séta metszheti is önmagát. Egy élen többször is, akár mindkét irányban is végigmehetünk. Az egyetlen, ami fontos, hogy minden soron következő él csatlakozzon az előző „végpontjához”. De éppen, mert a sétát ilyen „lazán” definiáltuk, szükségünk van a „szigorúbb” fogalomra is:

Definíció. Ha a $P = \{x_1, x_2, \cdots x_m\}$ sétában minden pont különböző, akkor P-t definíció szerint *útnak*, közelebbről az x_1 és x_m pont közötti útnak nevezzük.
Megjegyzés. Az út *hosszát* mérhetjük a pontok számával is, az élek számával is, ezért ha az összefüggésből nem egyértelmű, akkor külön meg kell mondanunk, hogyan mérjük.

5.1. Rajzoljunk az 1. ábrán látható gráfban sétákat, amelyek nem utak. Van-e a gráfnak két különböző pontja, amelyek között vezet séta, de nem vezet út?



5.1.1. ábra.

5.2. Igaz-e, hogy ha egy gráf két pontja között vezet a gráfban séta, akkor vezet út is?

Most megadjuk a „kör” 4.2. feladatban ígért tisztán gráfelméleti definícióját.

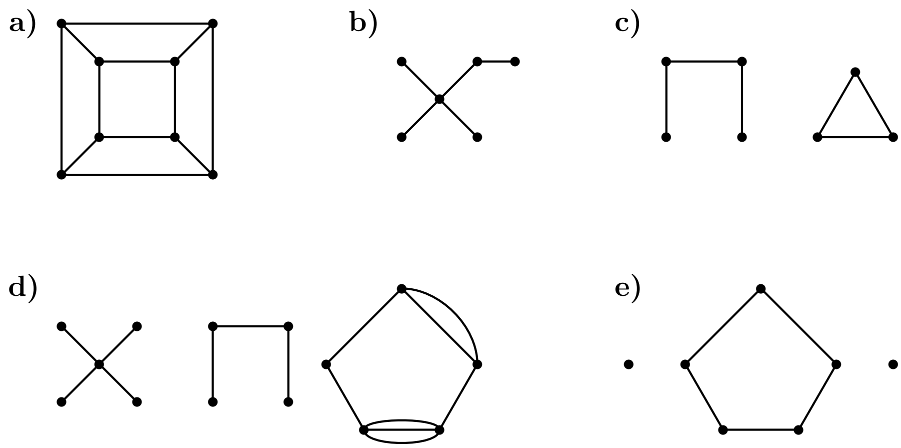
Definíció. Ha a $P = \{x_1, x_2, \cdots x_m\}$ sétában minden pont különböző, kivéve a két szélsőt, tehát $x_1 = x_m$, és különben minden más pont különböző, és m legalább három, akkor P-t definíció szerint *körnek*, (a gráf *körének*) nevezzük.

Megjegyzés. Az úttal ellentétben a kör hossza egyértelmű, ugyanazt kapjuk, akár a pontok, akár az élek számával mérjük. Az n pontból álló, tehát n hosszú kört C_n-nel jelöljük. Ha azt mondjuk, hogy „a gráfban van C_n”, ezen azt értjük, hogy a gráfban van n hosszú (n pontból/élből álló) kör.

Definíció. A továbbiakban külön szerepe lesz az olyan köröknek, amelyek a gráf minden pontját tartalmazzák. Az ilyen köröket definíció szerint a gráf *Hamilton-körének* nevezzük. Ha egy út tartalmazza a gráf minden pontját, azt definíció szerint *Hamilton-útnak* nevezzük.

5.3. Adott egy G gáf. Ebből a következőképpen képezzük a G' gráfot. A G' gráf pontjai azonosak G pontjaival, és G'-ben azok a pontpárok vannak *éllel* összekötve, amelyek G-ben *úttal* vannak összekötve.

Rajzoljuk fel a G' gráfot az 1. ábrán látható öt G gráf esetén.



5.3.1. ábra.

5.4. Egy kis kutató munka:

Mit állíthatunk az 5.3. feladatban definiált G' gráfról általában?

Megjegyzés. Szorosan idetartozik a 11.5. feladat is.

5.5. Még egy kis kutató munka:

Adott egy G gráf. E gráf két pontjáról akkor mondjuk, hogy „összefüggnek”, ha vezet közöttük út a gráfban. Úgy tekintjük, hogy egy pont önmagával „összefügg”. Mit mond ki az 5.4. feladat megoldása erről a relációról?

Definíció. Az 5.5. feladatban definiált reláció tehát ekvivalenciaosztályokat hoz létre a gráf pontjai között. Egy ekvivalenciaosztály pontjai által feszített részgráfot a gráf egy *összefüggő komponensének*, vagy röviden *komponensének* nevezzük.

5.6. (S) Döntsük el, melyik állítások igazak az alábbiak közül:

a) Két pont pontosan akkor van egy komponensben, ha fut közöttük út a gráfban.

b) Ha két pont a gráf két különböző komponensében van, akkor nem fut közöttük út a gráfban.

c) Két pont pontosan akkor van egy komponensben, ha van olyan pont, amelyből mindkettőbe vezet út.

d) Két pont pontosan akkor van egy komponensben, ha van olyan pont, amellyel mindkettő össze van kötve.

e) Két pont pontosan akkor nincs egy komponensben, ha van olyan pont, amelyből az egyikhez vezet út, a másikhoz nem.

5.7. (M) Milyen G egyszerű gráfokra igaz a következő: Ha G minden csúcsának szomszédai teljes részgráfot feszítenek, akkor G teljes gráf.

Adjunk szükséges és elégséges feltételt!

Definíció. Ha egy gráf egyetlen összefüggő komponensből áll, akkor a gráfot definíció szerint *összefüggő* gráfnak nevezzük.

Vagy másképp fogalmazva ugyanezt: egy gráfot pontosan akkor nevezünk *összefüggőnek*, ha bármely két pontja között fut út a gráfban.

5.8. (S) Igaz-e a következő: egy G gráf pontosan akkor összefüggő, ha van olyan pontja, amelyből bármelyik másik pontba vezet út?

5.9. Kutató munka:

Igaz-e, hogy ha a G gráfnak van összefüggő feszítő részgráfja, akkor maga is összefüggő?

Igaz-e az állítás megfordítása?

5.10. (S) Rajzoljunk nem összefüggő 6 pontú gráfot, amelynek

a) hat,

b) hét,

c) kilenc

éle van. Van-e 10 és 11 élű, nem összefüggő 6 pontú gráf?

5.11. (S) Igaz-e a következő: ha egy összefüggő gráf csúcsait két nemüres részhalmazra bontjuk, mindig lesz a két halmaz egy-egy csúcsát összekötő él?

Hogyan szól az állítás megfordítása? Igaz-e?

5.12. (S) Igaz-e a következő állítás:

Ha G hurokél nélküli gráf, akkor minden komponensében páros számú páratlan pont van.

5.2. Kutató munka

5.1. Van-e tízpontú, 5-reguláris nem-összefüggő gráf?

És 4-reguláris?

5.2. Melyik az a legkisebb k szám, amelyre igaz, hogy minden $2n$ pontú k-reguláris egyszerű gráf összefüggő?

5.3. Hány tízpontú, 4-reguláris, egyszerű nem-összefüggő gráf van?

Hány $2k$ pontú, $k-1$-reguláris, egyszerű nem-összefüggő gráf van?

5.4. Maximálisan hány éle lehet egy n pontú, két komponensből álló gráfnak?

5.5. a) Minimálisan hány él kell ahhoz, hogy biztosan összefüggő legyen az n pontú egyszerű gráf? Vagy másképp fogalmazva: melyik az a legkisebb $f(n)$ szám, amelyre igaz, hogy minden n pontú, $f(n)$ élű egyszerű gráf összefüggő?

b) Maximálisan hány éle van egy n pontú egyszerű gráfnak, amely nem összefüggő? Keressük meg a nem-összefüggő „extrém” (azaz legtöbb élű) gráfot, és próbáljuk bebizonyítani róla, hogy minden nála több élű egyszerű gráf már összefüggő!

5.6. Kutató munka:

Létezik-e olyan poliéder, amelynek gráfja nem összefüggő? (A poliéder gráfján azt a gráfot értjük, amelynek csúcsai a poliéder csúcsai, élei a poliéder élei.)

5.7. Kutató munka:
Van-e olyan konvex poliéder, amelynek gráfja nem összefüggő?

5.8. (M) **Ismerkedés a Kneser-gráfokkal:**
Definíció. A $KG(n,k)$ Kneser-gráfot a következőképpen definiáljuk. A $KG(n,k)$ gráf *pontjai* egy n elemű halmaz k elemű *részhalmazai*. Két ilyen pont akkor van összekötve, ha a részhalmazok diszjunktak.
Nem érdekesek az $n < 2k$ esetek. Ugyanis a $KG(n,k)$ gráf üres gráf, ha $n < 2k$.
Összefüggő-e a $KG(7{,}3)$ Kneser-gráf?

5.9. (M) * Milyen n és k értékekre összefüggő a $KG(n,k)$ Kneser-gráf?

5.10. A végtelen gráfok esete.
Vajon működik-e végtelen gráfokra is az összefüggőség definíciója? Pontosabban feltéve a kérdést: ekvivalenciareláció-e végtelen gráfokban is az 5.5. feladatban definiált „x és y között vezet út” reláció?

6. FEJEZET

Elvágó pontok, hídélek

A fejezet témájához lásd még a 7.1. feladatot.

6.1. Bevezető feladatok

6.1. (M)
Igazoljuk, hogy akárhogyan hagyunk el egy élt egy véges, összefüggő 4-reguláris gráfból, mindenképp összefüggő marad.

6.2. Kutató munka:
Van-e olyan 4-reguláris, egyszerű, összefüggő gráf, amelyből egyetlen él elhagyásával nem összefüggő gráf kapható? (Tehát van-e olyan 4-reguláris, egyszerű, összefüggő G gráf, amelynek van olyan e éle, amelyre $G - e$ nem összefüggő?)

Definíció. A 6.1. és 6.2. feladatokban olyan élt kerestünk összefüggő gráfokban, amelyet elhagyva a gráf megszűnik összefüggő lenni. Az összefüggő gráf ilyen élét definíció szerint *hídélnek* nevezzük.

Fontos szerepet játszanak az olyan összefüggő egyszerű gráfok, amelyeknek minden éle hídél, vagyis bármely élét elhagyva megszűnik összefüggő lenni. Az ilyen, bizonyos értelemben „minimális" összefüggő gráfokat definíció szerint *fának* nevezzük. Ezekkel részletesebben a 7. fejezetben foglalkozunk majd.

6.3. Kutató munka:
Milyen k pozitív egész értékre van olyan k-reguláris, véges, egyszerű gráf, amelynek van hídéle?

6.4. Kutató munka:
Döntsük el minden k-ra, hogy hány hídéle lehet egy k-reguláris, véges egyszerű gráfnak?

6.2. Hídélek és elvágó pontok

6.1. (M)
a) Lehet-e hídél egy többszörös él?
b) Lehet-e többszörös élt tartalmazó gráfban hídél?

6.2. Kis kutató munka:
Próbáljuk a hídélt másképp definiálni!

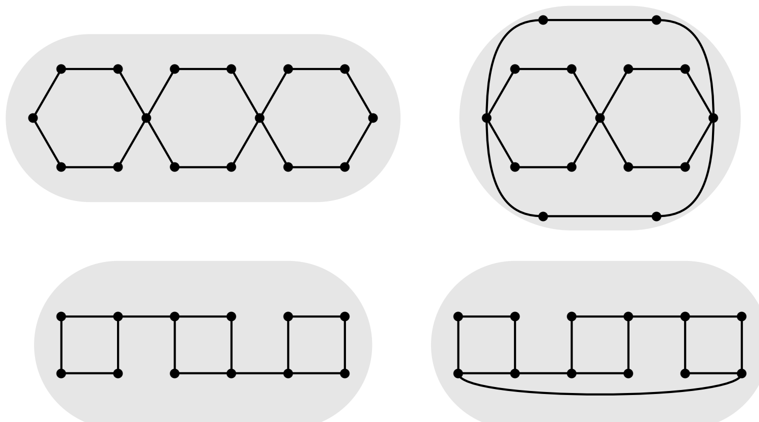
6.3. A hídél az összefüggő gráf olyan éle, amelyet elhagyva a gráf megszűnik összefüggő lenni. Rajzoljunk olyan összefüggő gráfot, amelyben van olyan pont, amelyet – a belőle induló élekkel együtt – elhagyva a gráf megszűnik összefüggő lenni! Az ilyen pontot nevezzük *elvágó pontnak.*

Rajzoljunk olyan gráfot, amelynek három elvágó pontja van!

Megismételjük a definíciót:

Definíció. Az összefüggő G gráf x pontját akkor és csak akkor nevezzük *elvágó pontnak*, ha az elhagyásával – és a belőle induló élek elhagyásával – keletkező $G - x$ részgráf nem összefüggő.

6.4. (S) Van-e elvágó pontja az 1. ábrán látható gráfoknak? Amelyiknek van elvágó pontja, annál állapítsuk meg azt is, hogy hány van.



6.4.1. ábra.

6.5. (S) Van-e hídéle a 6.4. feladatban szereplő gráfoknak?

6.6. (M) Van-e hídéle a kocka gráfjának?

6.7. Kutató munka:
Állapítsuk meg, hogy melyik konvex poliédernek van hídéle vagy elvágó pontja.

6.8. (S) Hány komponensre bomlik egy összefüggő gráf, ha elhagyjuk egy hídélét?
Hány komponensre bomlik egy összefüggő gráf, ha elhagyjuk egy elvágó pontját?

6.9. (S) Igaz-e, hogy egy hídél végpontjai elvágó pontok?

6.10. (S) Igaz-e, hogy egy hídél legalább másodfokú végpontja elvágó pont?

6.11. (S) Igaz-e, hogy ha egy összefüggő egyszerű gráfban van elvágó pont, akkor van benne hídél is?

6.12. (M) Igaz-e, hogy ha egy összefüggő gráfban van kör, akkor annak élei nem hídélek?

6.13. (M) Igaz-e, hogy a G összefüggő gráf egy e éle pontosan akkor hídél, ha nincs benne körben?

6.14. (M) Melyek egy fa elvágó pontjai?

6.3. Kutató munka

6.1. (M)
Döntsük el, hogy igaz-e a következő állítás:
Egy összefüggő gráf pontosan akkor fa, ha minden legalább másodfokú pontja elvágó pont.
A fa definícióját lásd a 7.7. feladat után.

6.2. (M) Igaz-e, hogy minden összefüggő gráfban van olyan pont, amely nem elvágó pont?

6.3. Döntsük el, helyes válasz-e a 6.2. feladat kérdésére a következő válasz:
Ha van elsőfokú pont, az nem elvágó pont. Ha nincs elsőfokú pont, akkor van kör, és ennek pontjai nem elvágó pontok.

6.4. (S) Igaz-e, hogy ha egy összefüggő gráfban van kör, akkor van benne olyan kör is, amelynek legalább egy pontja elvágó pont?

6.4. További feladatok

6.1. (M) [5], 18. old. Igazoljuk, hogy ha egy G gráf összefüggő, akkor a pontjai sorrendbe állíthatók úgy, hogy minden k-ra az első k pontot elhagyva a maradó gráf is összefüggő ($k = 1,2,\ldots,n$, ahol n a gráf csúcsainak száma).

6.2. (M) [5], 18. old. Létezik-e olyan, legalább három pontú összefüggő gráf, amelyből bármely pontpárt törölve a gráf megszűnik összefüggő lenni?

6.3. (S) Igaz-e, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor összefüggő és nincs elvágó pontja (vagyis kétszeresen összefüggő)?

6.4. (M) Mutassunk példát olyan gráfra, amelynek nincs elvágó pontja (kétszeresen összefüggő), mégsincs Hamilton-köre.

7. FEJEZET

Fák, erdők, favázak

Ebben a fejezetben fákkal és erdőkkel foglalkozunk, és kicsit ismerkedünk a favázakkal is. Bemutatunk egy favázkereső algoritmust is, amely jól megvilágítja a fa fogalmát. De a favázkereső algoritmusokat bővebben majd a ALG.II.3. fejezetben tárgyaljuk.

7.1. Kutató munka

A következő feladatok segítségével arra a kérdésre keressük a választ, hogy vajon egy n pontú egyszerű gráfban hány él esetén tudjuk garantálni, hogy van benne kör? (Ha a többszörös élt is körnek tekintjük, akkor csak a hurokéleket kell megtiltanunk.)

7.1. Egy kilencpontú gráf három komponensből áll. Legalább hány éle van?

7.2. [13] Anna és Béla a következő gráfjátékot játssza 10 ponton: felváltva húznak be éleket, és az veszít, aki kört zár be. Kinek van nyerő stratégiája?

7.3. [13] Anna és Béla a következő gráfjátékot játssza n ponton: felváltva húznak be éleket, és az veszít, aki kört zár be. Kinek van nyerő stratégiája?

7.4. A 7.2. és 7.3. feladat alapján mit tudunk mondani a következő kérdésre:

Hány él esetén tudjuk garantálni, hogy egy n pontú egyszerű gráfban van kör? Pontosabban: Milyen k számra tudjuk garantálni, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban legalább k él van, akkor van benne kör?

7.5. Egy n csúcsú egyszerű gráfban a fokszámok összege legalább $2n$. Következik-e ebből, hogy a gráfban van kör?

A 7.2. és 7.3. feladat alapján azonban nem csak arra a kérdésre tudunk felelni, hogy hány él esetén garantálható kör a gráfban. Választ adhatunk a következő, 7.6. feladat kérdésére is:

7.6. Legalább hány éle van egy $n > 1$ pontú összefüggő gráfnak?

7.7. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú összefüggő körmentes gráf élszáma $n - 1$.

Definíció. A körmentes összefüggő gráfokat – és csak azokat – *fának* nevezzük.

Mivel egy körmentes gráf minden összefüggő komponense fa, érthető, hogy a körmentes gráfokat *erdőnek* vagy *ligetnek* szokás nevezni.

A 7.7. feladat szerint minden n pontú fa élszáma $n - 1$.

Megjegyzés. A „fa” fogalma „minimax” fogalom, mondhatjuk úgy is, hogy igazi határfogalom. Két „terület” közös határa: a körmentes és az összefüggő gráfoké. A körmentes gráfok közül a legnagyobb élszámú, sőt, nem bővíthető úgy, hogy körmentes maradjon. Másrészt a legkisebb élszámú összefüggő gráf, sőt, bármely élét elhagyva megszűnik összefüggő lenni. Különösen érdekesek az ilyen matematikai objektumok, amelyekben két fogalom így „összeér”. Ez egyben magyarázza fontosságukat is.

Felhívjuk azonban a figyelmet a következő feladatra:

7.8. (S)
Van-e olyan n pontú, nem-összefüggő egyszerű gráf, amelynek több éle van, mint egy n pontú fának?

7.2. Körmentes feszítő részgráf keresése

A 7.2. játék során lényegében egy maximális körmentes részgráfot választottunk ki az n pontú teljes gráfból. Az ott kidolgozott eljárás azonban alkalmas arra is, hogy *tetszőleges* gráfnak kiválasszuk egy maximális körmentes részgráfját.

Kitűzött célunk tehát az, hogy olyan eljárást adjunk, amely minden gráfnak megtalálja egy maximális élszámú körmentes részgráfját.

Először nézzük az eljárást. Az eljárás röviden elmondva a következő: Legyenek a G gráf élei $e_1, e_2, \dots, e_k$. Sorra vesszük az éleket, és ha egy él kört zárna be, akkor a felesleges élek F halmazába tesszük, ha nem zár be kört, akkor a T „tárolóba" tesszük. Az eljárás eredménye a T_{end} élhalmaz.

Az eljárás pontosan leírva a kövekező:

1. Eljárás.

Kezdetben F is, T is üres, és sorra vesszük az e_1 élt.

Egy lépés a következőből áll: megvizsgáljuk, hogy a soron levő e_i él a T-ben levő élekkel együtt kört zár-e be (vagyis ha $e = (x, y)$, akkor megvizsáljuk, hogy T éleiből összeállítható-e x-ből y-ba vezető út). Két eset van:

1) **Ha igen**, akkor e_i-t F-be tesszük, azaz $F_u = F_r \cup \{e_i\}$, és $T_r = T_u$ (u=új, r=régi).

2) **Ha nem**, akkor e_i-t T-be tesszük, azaz $T_u = T_r \cup \{e_i\}$, és $F_r = F_u$.

Ha $i = k$, azaz már minden él sorra került, akkor az eljárást befejeztük.

Ha $i < k$, azaz van még sorra nem vett él, akkor i-t megnöveljük eggyel és sorra vesszük a következő (e_i) élt.

Az eljárás eredménye az a G_0 gráf, amelynek ponthalmaza azonos G ponthalmazával, élhalmaza az eljárás végén a tárolóban levő T_{end} élhalmaz.

7.1. (M) Bizonyítsuk be a következőket:

a) Az eljárás végén kapott G_0 részgráf körmentes.

b) Az eljárás végén kapott G_0 részgráfnak ugyanannyi komponense van, mint magának a G gráfnak.

c) Mi mondható az eljárás során a T-ben levő élek számának és a komponensek számának az összegéről?

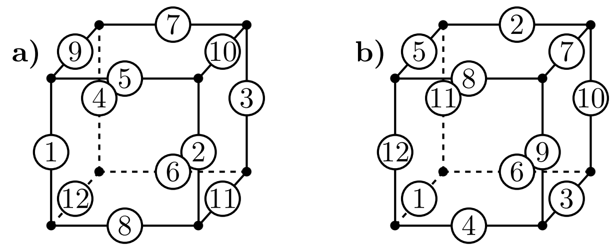
d) Ha G pontszáma n, komponenseinek száma k, akkkor az eljárás végén T-ben levő élek száma $n - k$.

7.2. Rajzoljuk fel a kocka gráfját és számozzuk meg az éleit a következőképpen:

a) az első négy él az egyik iránnyal párhuzamos négy él, a következő négy él egy másik iránnyal párhuzamos négy él, a maradó (a harmadik iránnyal párhuzamos) négy él kapja a 9,10,11,12 sorszámot;

b) az 1. ábra jobb oldalán látható módon,

és keressük meg mindkét esetben, hogy milyen G_0 gráfot ad az 1. eljárás.



7.2.1. ábra.

7.3. Kis kutató munka:
Meg lehet-e számozni a kocka éleit két különböző módon úgy, hogy az eljárásunk által kapott két faváznak ne legyen közös éle?

7.4. (S) Kaphatunk-e a 8.10. feladatban szereplő gráfoknál olyan G_0-t, amely egyetlen útból áll?

7.5. Számozzuk meg a négypontú teljes gráf éleit úgy, hogy az 1. eljárással kapott G_0 gráf
a) egy csillag,
b) egy út legyen!

7.6. (M) Számozzuk meg
a) a kocka,
b) az n-pontú teljes gráf
éleit úgy, hogy az 1. eljárással kapott G_0 gráf
x) egy csillag,
y) egy út legyen!

A kitűzött célunk az volt, hogy minden gráfnak megkeressük egy maximális élszámú körmentes részgráfját. De tényleg azt találtuk-e meg az 1. eljárás segítségével? Hogy jobban megértsük a kérdést, nézzük a következő egyszerű feladatot:

7.7. (M) Melyek az $\{1, 2, \cdots, 6\}$ halmaz olyan részhalmazai, amelyekben bármely két szám relatív prím egymáshoz, és amelyekhez már nem lehet további számot úgy hozzávenni, hogy ez a tulajdonságuk megmaradjon. Ilyen például a $\{1, 2, 3, 5\}$ halmaz.
Vannak-e az ilyen, azaz tovább nem bővíthető halmazok között különböző elemszámúak?

7.8. Próbáljuk megfogalmazni, miért kétértelmű a „maximális” szó a 7.7. feladatban!

Amikor egy G gráf maximális körmentes részgráfját keressük, akkor ez jelentheti azt, hogy *maximális élszámú* körmentes részgráfot keresünk, de jelentheti azt is, hogy olyan körmentes részgráfot keresünk, amelyhez bármelyik további élt hozzávéve már keletkezik kör.

Mármost az nyilvánvaló, hogy az eljárásunk olyan G_0 részgráfot ad, amely körmentes és amelyhez a gráf bármely élét hozzávéve a $G_0 + e$ gráf megszűnik körmentes lenni. Vagyis olyan körmentes részgráf, amely nem bővíthető e tulajdonság elvesztése nélkül. De vajon következik-e ebből, hogy G_0 *maximális élszámú* körmentes részgráf is?

7.9. (M) Döntsük el, hogy az 1. eljárásban kapott G_0 gráf minden esetben maximális élszámú körmentes részgráfja-e G-nek?

Ha G összefüggő gráf, akkor a kapott G_0 gráf G minden pontját tartalmazó fa, vagyis feszítő fa. **Elnevezés.** Az összefüggő gráf feszítő fáját *favváznak* is szokás nevezni. (Rényi Alfréd tréfából *kaptafának* is nevezte.)

Az 1. eljárás tehát az összefüggő gráfok osztályán egy általános faváz kereső algoritmust ad. A faváz kereső algoritmusokkal – így a szélességi és mélységi kereséssel – részletesebben a ALG.II.3. fejezetben foglalkozunk.

7.10. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy körmentes gráfban az élek száma = a csúcsok száma - a komponensek száma.

7.11. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy körmentes gráfban az élek száma legfeljebb a csúcsok száma - 1. (A többszörös élt tartalmazó gráfokat nem tekintjük körmentesnek.)

7.12. (M) Adjunk új bizonyítást a 7.6. feladat állítására, azaz bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő gráfban az élek száma legalább a csúcsok száma - 1.

7.3. A fa tulajdonságai

7.1. (M) Legyen G véges, egyszerű gráf és tekintsük a következő három állítást:
a) G összefüggő;
b) G körmentes;
c) G élszáma eggyel kevesebb a csúcsok számánál.
A 7.7. feladat pontosan azt állítja, hogy a)-ből és b)-ből következik c). Döntsük el, hogy a három állítás közül melyik kettőből következik még a harmadik.

7.2. (M) Melyik gráfokra igaz, hogy bármely két pontja között pontosan egy út van?

7.3. (M) Melyik fák páros gráfok?

7.4. (S) Igaz-e, hogy ha egy fa két útjának van közös pontja, akkor a közös részük egy – esetleg csak egy pontból álló – út?

7.5. (S) Egy gráfban bármely két, közös ponttal rendelkező út metszete út. Mit mondhatunk a gráfról?

7.4. További feladatok

7.1. (S) Igaz-e, hogy egy összefüggő G gráf e éle pontosan akkor hídél, ha G minden faváza tartalmazza?

7.2. (M) Hány negyedfokú pontja lehet egy hétpontú fának?

7.3. (M) Egy 4-reguláris gráfból elhagyjuk egy faváz éleit. Igaz-e, hogy a maradó gráfban van legalább két kör?

7.4. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha G' a G gráf egy tovább nem bővíthető körmentes részgráfja, azaz a G gráf bármely e élét G'-höz véve keletkezik kör, akkor G' maximális élszámú körmentes részgráfja G-nek.

7.5. (M) Igazoljuk, hogy egy legalább kétpontú fában van legalább két elsőfokú pont. Melyik fákban van pontosan két elsőfokú pont?

7.6. (M) Mit állíthatunk egy olyan fa elsőfokú pontjainak a számáról, amelyben van egy k-adfokú pont, $k > 2$?

7.7. (M) * Adottak a $d_1, d_2, \cdots, d_n$ pozitív számok, $n \geq 2$. Tudjuk, hogy a d_i-k összege $2n-2$. Igazoljuk, hogy van olyan n pontú fa, amelyben az egyes pontok fokszáma rendre d_1, d_2, $\cdots$, d_n. (OKTV)

8. FEJEZET

Utak, távolság, átmérő.

8.1. Úthossz, leghosszabb utak

8.1. (M) Igaz-e, hogy egy k-reguláris gráfban mindig van legalább k élű út?

8.2. (M) Hány 2 hosszú út lehet egy
a) ötpontú fában?
b) hatpontú fában?

8.3. (M) a) Maximálisan hány 2 hosszú út lehet egy n pontú egyszerű gráfban?
b) És egy n pontú fában?
c) *Milyen n-re lehet egy n pontú fában a maximálisnál eggyel kevesebb 2 hosszú út?

8.4. (S) Hány 2 hosszú út van a $K_{5,6}$ teljes páros gráfban?

8.5. (S) [5], 19. old. Hány 2 hosszú út van a $K_{n,m}$ teljes páros gráfban?

8.6. (S) Egy társaságban tíz fiú és húsz lány van. Le szeretnénk ültetni minél több fiút és lányt egy asztal köré úgy, hogy fiúk és lányok felváltva üljenek, és mindenki ismerje a két szomszédját. Hány ember ültethető így egy asztal köré a legjobb esetben?

8.7. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha egy páros gráfban a kisebbik osztályban k pont van, akkor a leghosszabb kör nem lehet $2k$-nál hosszabb. Mit állíthatunk a leghosszabb útról?

8.8. (MS) Bizonyítandó, hogy egy összefüggő gráf bármely két leghosszabb útjának van közös pontja.

8.9. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy gráf és a komplementere közül legalább az egyik összefüggő.

Ehhez a témához lásd még a 12.1.-12.4. feladatokat. Ezek a feladatok foglalkoznak azzal a kérdéssel, hogy milyen fokszám feltétel mellett milyen körök garantálhatók egy gráfban.

8.2. Távolság, átmérő

Általában egy felületen két pont távolságának a közöttük futó legrövidebb utat szoktuk tekinteni. Mivel gráfok esetében is van út, és értelmes az út hossza is, ezért itt is definiálható két pont távolsága: a közöttük futó legrövidebb út. Persze előfordulhat, hogy két pont között nem vezet út. Ebben az esetben sem jövünk zavarba, azt mondjuk, hogy a távolságuk végtelen. De a definíciónk még így sem egyértelmű. Hiszen az utak hosszát mérhetjük az élek számával is, a pontok számával is. Ha a pontok számával mérnénk, akkor egyrészt két különböző pont távolsága legalább kettő volna, másrészt például ha a gráf két csatlakozó élből áll és ezek xy és yz, akkor x és y távolsága kettő, y és z távolsága is kettő, míg x és z távolsága három. Pedig nem „rövidült” az út, amíg x-ből elmentünk y-ba, majd onnan z-be. Ezért célszerű az utak hosszát most az élek számával mérnünk. Így a következő definíciót kapjuk:

Definíció. Adott egy G gráf, két pontja x és y. Az x és y pont *G-beli távolságán* definíció szerint a közöttük a gráfban futó legrövidebb út hosszát értjük, a hosszat élekben számolva. Ha két pont között nincs út a gráfban, akkor e két pont távolságát végtelennek tekintjük.

8.1. (M) A távolság-fogalomtól meg szoktuk követelni, hogy teljesítse a háromszögegyenlőtlenséget. Azt tehát, hogy ha x, y, z tetszőleges három pont, akkor a x és a z pont távolsága legfeljebb akkora legyen, mint az x és y pontok távolságának és az y és z pontok távolságának az összege.

Ha x és z nincs egy komponensben, akkor távolságukat végtelennek vettük, de akkor x és z közül valamelyik y-nal sincs egy komponensben, tehát ezek távolsága is végtelen. Így „mindkét oldalon" végtelen áll. Ha x és z egy komponensben van, akkor távolságuk véges, és ha y valamelyikükkel nincs egy komponensben, akkor attól vett távolsága végtelen. Ekkor „azt kapjuk", hogy „végtelen nagyobb a végesnél", amit igaznak szoktunk tekinteni. Ebben az értelemben tehát a háromszög egyenlőtlenség igaz, ha nem mind a három pont van egy komponensben.

De mi a helyzet, ha mind a három pont azonos komponensben van?

8.2. (S) a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban P a legrövidebb út P két végpontja között, akkor legrövidebb út P bármely két pontja között is.

Definíció. Legyen G egy tetszőleges (véges vagy végtelen) gráf. A P (véges vagy végtelen) utat akkor és csak akkor nevezünk *geodetikus útvonalnak*, ha semely két pontja között nincs rövidebb út a gráfban.

A feladat tehát így is fogalmazható: Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban P a legrövidebb út P két végpontja között, akkor P geodetikus útvonal.

8.3. Kutató munka:

Nevezzünk alkalmilag „jó pontpárnak" egy gráf két pontját, ha nincsenek éllel összekötve, de van közös szomszédjuk. Melyik n pontú egyszerű gráfban van a legtöbb „jó pontpár"?

8.4. (M) **Kutató munka:**

Bergengócia bizonyos városait oda-vissza repülőjárat köt össze. Minden városból legfeljebb három repülőjárat indul és bármely városból bármely másik városba el lehet jutni legfeljebb egy átszállással. Legfeljebb hány városa van Bergengóciának?

8.5. Kutató munka:

Fogalmazzuk meg, milyen tulajdonság közös a 8.3. és a 8.4. feladat maximális gráfját adó gráfban!

Egy alakzat átmérőjén a geometriában az alakzat két legtávolabbi pontja közötti távolságot szoktuk érteni. (A fogalom persze nem mindig ilyen egyszerű – csak zárt ponthalmazok esetén az –, de véges ponthalmazok esetén megfelelő.)

Minthogy definiáltuk a gráf pontjai közötti távolságot, ezért az átmérőt is definiálni tudjuk. Itt már zavart okozhatna a végtelen távolság, ezért az átmérőt csak véges gráfokra definiáljuk:

Definíció. Egy összefüggő véges gráf *átmérőjét* a pontjai között fellépő maximális távolságként definiáljuk. Így például a teljes gráf átmérője 1, a csillagé 2.

8.6. (M) Fogalmazzuk meg az átmérő fogalma segítségével gráfelméleti nyelven a 8.4. feladat állítását!

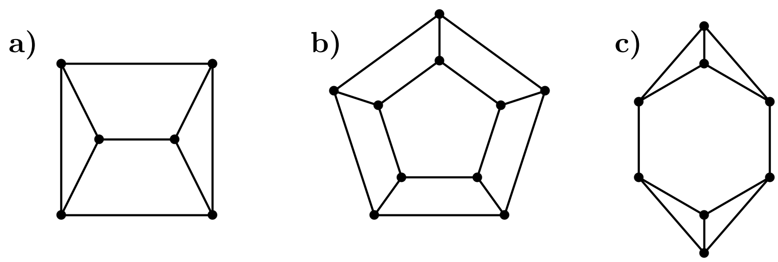
Megjegyzés. A feladat folytatása a 10.6. feladat.

8.7. (S) Mekkora egy négy, illetve egy ötpontú kör átmérője?

8.8. (S) Mekkora egy k pontú kör átmérője?

8.9. (S) Határozzuk meg az öt szabályos test gráfjának átmérőjét!

8.10. (S) Mekkora a 8.10. ábrán látható három gráf átmérője?



8.10.1. ábra.

8.11. (S) A páros gráfok közül melyek átmérője 2?

8.12. (MS) Mit tudunk mondani egy nem összefüggő gráf komplementerének átmérőjéről?

8.3. 2-átmérőjű gráfok élszáma

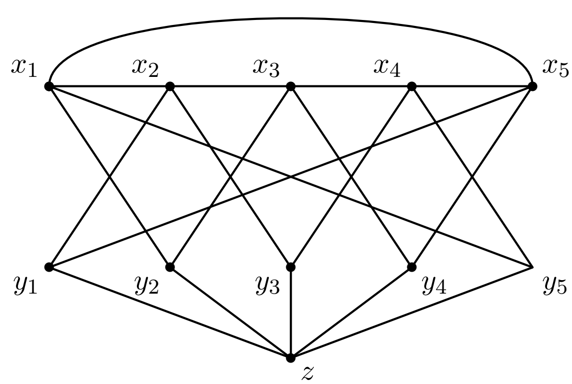
8.1. (S) Egy 2-átmérőjű gráfban van egy elsőfokú pont. Mit mondhatunk a szomszédjáról?

8.2. (S) Legalább hány éle van egy n pontú 2-átmérőjű gráfnak?

8.3. (S) Tekintsük a következő 11 pontú gráfot.

A gráf pontjai $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, z$.

Az x_i pontok a megadott sorrendben egy C_5-öt alkotnak. Az y_i pont x_{i-1}-gyel és x_{i+1}-gyel van összekötve (az indexelés mod 5 periodikus), továbbá z-vel. (Az x_i pontok tehát negyedfokúak, az y_i pontok harmadfokúak, z pedig ötödfokú.) Lásd az 1. ábrát is!



8.3.1. ábra.

Mekkora ennek a gráfnak az átmérője?

8.4. (M) * a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú 2-átmérőjű gráfban nincs telített pont, akkor élszáma legalább $(3n-5)/2$,

b) Legyen $n \geq 5$. Mutassunk példát olyan n pontú, telített pont nélküli, 2-átmérőjű gráfra, amelynek $2n-5$ éle van.

Megjegyzés. Bebizonyítható, hogy $2n-5$-nél kevesebb éle nem lehet egy ilyen gráfnak. L. a 8.5. feladatot.

8.5. (M) ** Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú 2-átmérőjű gráfban nincs telített pont, akkor élszáma legalább $2n-5$.

8.6. (M) ** Van-e olyan n, amelyre van olyan pontú, 2-átmérőjű gráf, amelyben minden pont foka legalább három és élszáma $2n-5$?

9. FEJEZET

Független pontok és élek

Folytatjuk a gráfelméleti alapfogalmak bevezetését és bebizonyítunk néhány egyszerű, a független pontokkal illetve élekkel kapcsolatos tételt.

9.1. Független élek és pontok

A következő feladatokhoz célszerű átismételni a független élek korábban bevezetett fogalmát (lásd az 1.3. feladatot): a G gráf éleinek egy halmazát akkor nevezzük függetlennek, ha közülük semelyik kettőnek nincs közös végpontja. Ilyenkor gyakran egyszerűen *független élekről* beszélünk.

Jelölés. A G gráfban található független élek maximális számát $\nu(G)$-vel jelöljük.

9.1. (M) Határozzuk meg $\nu(G)$-t (vagyis határozzuk meg a független élek maximumát) az n pontú teljes gráfban!

9.2. (M) Határozzuk meg $\nu(G)$-t (vagyis határozzuk meg a független élek maximumát a következő gráfokban),

a) ha G csúcsai egy kocka csúcsai, élei a kocka élei;
b) ha G csúcsai egy oktaéder csúcsai, élei az oktaéder élei;
c) ha G csúcsai egy ikozaéder csúcsai, élei az ikozaéder élei.

9.3. (M) Határozzuk meg $\nu(G)$-t (vagyis határozzuk meg a független élek maximumát a következő gráfokban),

a) ha G egy ötélű kör ($G = C_5$);
b) ha G egy n pontú kör ($G = C_n$);

9.4. (M) Igaz-e, hogy ha egy $2n$ pontú gráfban van Hamilton-kör, akkor van n független éle?

9.5. (MS) a) Mekkora lehet a legnagyobb kör egy olyan gráfban, amelyben nincs $k+1$ darab független él?

b) A G gráfról tudjuk a következőket: nincs benne $k+1$ független él, és van benne C_{2k+1}. Mit mondhatunk ennek a gráfnak a komponenseiről? Hány éle lehet maximálisan ennek a gráfnak?

9.6. (MS) a) Egy n pontú egyszerű gráfban nincs két független él. Legfeljebb hány éle lehet?

b) Adjuk meg az összes olyan n pontú gráfot, amelyben nincs két független él, de erre a tulajdonságra „kritikus”, azaz bármely él behúzásával már keletkezik két független él.

9.7. (MS) * Egy n pontú egyszerű gráfban a független élek maximális száma k. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 2k+2$, akkor a gráfnak legfeljebb $kn-k$ éle van.

Mi a helyzet $n = 2k+1$ pont esetén?

Megjegyzés. Ez a becslés $k = 1$-re pontos, de $k > 1$-re nem az. A maximális élszám kicsit kevesebb, mint $kn-k$. A különbség azonban már nem függ n-től, csak k-tól. Az élszám pontos felső korlátjának bizonyítása azonban általában körülményes, ezért csak a legegyszerűbb $k = 2$ esetben adjuk majd fel a 9.9. feladatban.

9.8. * Legyen egy n pontú egyszerű gráfban a független élek maximális száma k és $E = \{x_1y_1, x_2y_2 \cdots, x_ky_k\}$ egy független élrendszer, továbbá jelölje T a gráf többi pontját. Bizonyítsuk be, hogy ekkor
– T pontjai között nem fut él,
– T bármely két pontjából együttesen legfeljebb $2k$ él indul E pontjaiba, tehát
– T bármely két pontjának fokszáma együtt legfeljebb $2k$.

9.9. (MS) A 9.7. feladat $k = 2$-re azt mondja ki, hogy ha n legalább hat, és egy n pontú egyszerű gráfban nincs három független él, akkor élszáma legfeljebb $2n - 2$. Vagyis ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $2n - 1$ éle van, akkor van benne három független él. Ez az állítás egy kicsit javítható:

* Bizonyítuk be, hogy ha egy $n > 6$ pontú egyszerű gráfban legalább $2n - 2$ él van, akkor van benne három független él. Ha egy n pontú egyszerű gráfban $2n - 3$ él van és nincs benne három független él, akkor van két pontja, amely az összes élt lefogja, a gráf $n - 2$ darab olyan háromszögből áll, amelyek egy élben illeszkednek.

9.2. Teljes párosítások

9.1. (M)

Egy hattagú társaságban, ahol kölcsönösek az ismeretségek, mindenkinek három ismerőse van. Bizonyítsuk be, hogy a hat ember leültethető egy asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a vele szemben ülőt.

Fogalmazzuk meg az állítást gráfelméleti nyelven is!

9.2. Kutató munka:

Próbáljuk általánosítani a 9.1. feladat állítását!

A 9.2. feladatban – de már a 9.2. feladatban is – fontos szerepe volt az olyan független élrendszernek, amely a gráf minden pontját lefedi. Ha ugyanis találunk független éleket, amelyek a gráf összes pontját lefedik, biztosak lehetünk, hogy ez a független élrendszer maximális. (Maximális a korábban definiált mindkét értelemben: *nem bővíthető* további független éllel és *nincsen több élből álló* független élrendszer.) Ez is indokolja, hogy az ilyen élrendszereknek kitüntetett szerepe van a gráfelméletben. Külön nevük is van:

Definíció. Ha a gráfban van olyan független élrendszer, amely a gráf összes pontját lefedi, akkor az ilyen élrendszert a gráf pontjai közötti *teljes párosításnak*, vagy a gráf 1-*faktorának* nevezzük.

Kifejezhetjük ezt úgy is, hogy teljes párosításnak a gráf 1-reguláris feszítő részgráfjait nevezzük (ha van ilyen részgráfja), ám ez sokkal kevésbé szemléletes kifejezésmód.

Nyilvánvaló, hogy teljes párosítás csak páros pontszámú gráfban lehet.

Mint látjuk, fontos szerepe van a gráf pontjait lefedő élrendszereknek is, ezeket egyszerűen lefedő élrendszernek hívjuk:

Definíció. Egy gráf élhalmazának egy részhalmazát akkor és csak akkor nevezzük *lefedő élrendszernek* – vagy egyszerűen *lefedő éleknek* –, ha végpontjaik kiadják a gráf összes pontját. Nyilván nincs ilyen élhalmaz, ha a gráfban van izolált pont. Minden más esetben van.

A G gráf pontjait lefedő minimális elemszámú élrendszer jele $\varrho(G)$.

Érdemes megfontolni még a következőt. Ugyanúgy, ahogy egy összefüggő gráf faváza egyszerre minimális összefüggő és maximális körmentes feszítő részgráf, ugyanúgy a teljes párosítás egyszerre maximális független élrendszer és minimális lefedő élrendszer. Arra a kérdésre, hogy milyen gráfoknak van faváza egyszerű a válasz: az összefüggő gráfoknak. Nem ilyen egyszerű a válasz viszont arra a kérdésre, hogy milyen gráfokban van teljes párosítás. Az erre vonatkozó Tutte-tételt a GR.III. kötetben fogjuk kimondani.

9.3. Kutató munka

A favázak esetében igaz volt, hogy ha egy összefüggő gráf körmentes feszítő részgráfja nem bővíthető további éllel úgy, hogy körmentes maradjon, akkor a részgráf biztosan faváz. Igaz-e hasonló állítás a maximális független élrendszerekre? Azaz: mi a válasz a következő kérdésre:

A G gráfnak találtunk egy tovább nem bővíthető független E élrendszerét, azaz bárhogyan hozzávéve E-hez a gráf egy további e élét az $E \cup \{e\}$ élhalmaz már nem független. Következik-e ebből, hogy E maximális független élrendszer?

9.4. (M) Hány teljes párosítás található a kocka gráfjában?

9.5. (M) Hány teljes párosítása van a 2.3. feladat megoldásánál szereplő G gráfnak?

9.6. (M) Hány teljes párosítása van a 8.10. feladat ábráján szereplő gráfoknak?

9.7. (M) * Hány teljes párosítása van a 8.4. feladat megoldásában szereplő gráfnak?

9.8. Egy hatpontú körbe behúztuk a szemközti pontokat összekötő éleket. Hány teljes párosítása van az így kapott gráfnak?

9.9. (S) Igazoljuk, hogy egy 2-reguláris páros gráfban van teljes párosítás.

Igaz-e, hogy egy 2-reguláris gráfban csak akkor van teljes párosítás, ha páros gráf?

A 9.9. feladat az egyik legegyszerűbb esete a reguláris páros gráfok teljes párosításaira vonatkozó általános König-tételnek. Ezt és az általános König-tételt a K.III.3. fejezetben fogjuk tárgyalni. Még egy speciális esetét tárgyalja a 10.3. feladat.

9.10. (M) Hány teljes párosítása van a $K_{k,n}$ teljes páros gráfnak?

9.11. (M) Hány teljes párosítása van a K_n teljes gráfnak?

9.3. Független pontrendszerek és lefogó pontrendszerek

Természetesen nemcsak független élekről, hanem *független pontokról* is van értelme beszélni:

Definíció. Egy gráf pontjainak valamely halmazát akkor és csak akkor nevezzük *függetlennek*, ha közülük semelyik kettő között nem fut él a gráfban.

Például a teljes gráfok pontosan azok az egyszerű gráfok, amelyekben semelyik két pont nem független, az üres gráfok pedig pontosan azok, amelyekben a gráf egész ponthalmaza független.

A G gráf független pontjainak maximális számát $\alpha(G)$-vel jelöljük.

9.1. (M) Adjunk új definíciót a páros gráfokra a független pontok segítségével!

9.2. (S) Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú páros gráfban van legalább $\lceil (n+1)/2 \rceil$ független pont.

9.3. Egy 25 tagú társaságban minden ember legfeljebb öt másikkal fogott kezet. Igazoljuk, hogy kiválasztható a társaság öt tagja úgy, hogy közülük semelyik kettő nem fogott kezet.

Igaz-e ugyanez az állítás minden 24 tagú társaságra is?

Fogalmazzuk meg a feladatot gráfelméleti nyelven és próbáljuk általánosítani.

9.4. (M) Legalább hány pontot kell elhagyni (a belőle induló élekkel együtt) a kocka gráfjából, hogy a maradó pontok között már ne fusson él?

A 9.4. feladatban olyan ponthalmazt kerestünk, amelynek elhagyása után a maradó pontok között nem fut él a gráfban. Az ilyen ponthalmazokat úgy is jellemezhetjük, hogy a gráf minden élének legalább egy végpontját tartalmazzák. Ez ismét egy fontos fogalom:

Definíció. Ha a G gráf pontjainak egy H részhalmaza olyan, hogy minden élnek legalább az egyik végpontja H-ban van – tehát ha G-ből elhagyjuk H-t és a belőle induló éleket, akkor üres részgráfot kapunk –, akkor azt mondjuk, hogy H *lefogja* a gráf éleit.

A G gráf lefogó pontjainak minimális számát $\tau(G)$-vel jelöljük.

9.5. (S) Minimálisan hány ponttal lehet lefogni

a) egy n pontú teljes gráf éleit;

b) azt a gráfot, amelynek pontjai egy kocka csúcsai, élei pedig a kocka élei;

c) az ötpontú kör (C_5) éleit;

d) a $2n+1$-pontú kör (C_{2n+1}) éleit?

9.6. Kutató munka:

Keressünk összefüggést egy gráf független éleinek maximuma és a lefogó pontjainak minimuma között és próbáljuk igazolni sejtésünket! Próbáljuk felhasználni a 9.4. feladat gondolatmenetét.

9.7. (M) Mutassunk példát olyan gráfra, ahol a független élek maximális száma kisebb a lefogó pontok minimumánál.

Lehet-e akármilyen nagy a különbség a lefogó pontok minimuma és a független élek maximuma között?

Mit mondhatunk a lefogó pontok minimumának és a független élek maximumának különbségéről összefüggő gráfok esetén?

Megjegyzés. Több ilyen fogalompár is van a gráfelméletben, amelyek közül az egyik maximuma alsó becslést ad a másik minimumára. A gráfelmélet egyik érdekes területe azzal foglalkozik, hogy milyen gráfokban áll fenn az ilyen fogalompároknál az egyenlőség.

9.8. (MS) Melyik állítás igaz az alábbiak közül:

Ha egy gráfban nincs $k+1$ független pont, akkor az élei lefoghatók

a) k ponttal;

b) $2k-1$ ponttal,

c) $2k$ ponttal.

9.9. Kutató munka:

a) Keressünk összefüggést egy (hurokél nélküli) gráf lefogó pontjai és független ponthalmazai között. Fogalmazzunk meg sejtést és próbáljuk bizonyítani!

b) Milyen kapcsolat lehet egy (hurokél nélküli) gráf független pontjainak maximális száma és lefogó pontjainak minimális száma között?

9.4. Gallai tétele

9.1. Kutató munka:
Keressünk olyan fogalmat, amely ugyanolyan viszonyban van a független pontokkal, amilyen viszonyban van a független él fogalma a lefogó pontok fogalmával!

9.2. (M)
Állapítsuk meg, hány legalább hány él kell ahhoz, hogy lefedjük
a) a kocka gráfját,
b) egy n pontú kört,
c) egy n pontú teljes gráfot,
d) az oktaéder gráfját,
e) a $K_{k,l}$ teljes páros gráfot,
f) a 8.4. feladat megoldásában szereplő gráfot (l. az ottani ábrát),
g) az izokaéder gráfját,
h) az n pontú csillagot,
i) a k darab pontdiszjunkt háromszögből álló gráfot?

9.3. Kutató munka:
Milyen egyszerű összefüggést állapíthatunk meg a független élek és a lefedő élek között a 9.2. feladat alapján?

9.4. Kutató munka:
Keressünk összefüggést a független élek maximális száma, a lefedő élek minimális száma és a gráf pontszáma között izolált pont nélküli gráfban és próbáljuk bizonyítani sejtésünket.

10. FEJEZET

Vegyes gráfelméleti feladatok

A gráfelméleti alapfogalmak lezárásaként csokorba gyűjtöttünk néhány – olykor komolyabb ötletet is igénylő, olykor inkább gyakorló jellegű – feladatot, amelyek csak elemi gráfelméleti fogalmakat használnak.

10.1. Vegyes feladatok

10.1. (M) Egy egyszerű véges gráfról a következőket tudjuk: bármely két össze nem kötött pontjának van közös szomszédja, semely két összekötött pontjának nincs közös szomszédja. Következik-e ebből, hogy a gráf reguláris?

10.2. (M) (10.1. feladat folytatása.)
Egy egyszerű véges gráfról a következőket tudjuk: bármely két össze nem kötött pontjának van közös szomszédja, semely két összekötött pontjának nincs közös szomszédja. Tudjuk továbbá, hogy nincs benne telített pont. Következik-e ebből, hogy a gráf reguláris?

10.3. (S) * Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú, e élű gráfban összeadjuk a fokszámok négyzetösszegét, a kapott eredmény legalább $4e^2/n$. Egyenlőség csak reguláris gráfra van.

10.4. (M) Egy $3n$ tagú társaságban bármely két embernek van közös ismerőse. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük $n+1$ ember, akik együtt a társaság minden tagját ismerik.

10.5. (M) Egy egyszerű poliéder minden csúcsára egy-egy egész számot akarunk írni úgy, hogy ha két csúcs élszomszédos, akkor a rájuk írt számoknak legyen egynél nagyobb közös osztójuk, ha két csúcs nem élszomszédos, akkor ne legyen. (Vagyis két csúcson álló szám pontosan akkor legyen relatív prím, ha a két csúcs nem élszomszéd.) Megtehető-e ez mindig?
Mi a helyzet, ha fordított eredményt akarok, tehát ha azt akarom, hogy két csúcson álló szám pontosan akkor legyen relatív prím, ha a két csúcs élszomszédos?

10.6. Kutató munka:
Hogyan általánosítható a 8.6. feladatban megfogalmazott állítás?

10.7. Kutató munka:
Felbontható-e három teljes párosítás uniójára a 8.10. feladat ábrájának három gráfja? És a 8.4. feladat megoldásában szereplő ábra gráfja?

10.8. (M) ** Mutassuk meg, hogy minden gráf csúcsai két részre vághatók úgy, hogy a pontoknak a saját osztályukban páros sok szomszédjuk van. (Vagyis a két osztály által feszített két részgráfban minden pont foka páros.)

10.2. Néhány egyszerűen bizonyítható tétel

10.1. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha egy hurokél nélküli, véges, összefüggő gráfban pontosan akkor van zárt Euler-séta, ha minden pont foka páros.

10.2. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris gráf élei két csoportba oszthatók úgy, hogy mindkét csoport egy 2-reguláris feszítő részgráfot határozzon meg.

10.3. (M) * Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf élei négy színnel színezhetők úgy, hogy minden szín egy 1-faktort (a gráf pontjainak egy teljes párosítását) adja.
Megjegyzés. Az általános tételt majd a K.III.3. fejezetben tárgyaljuk.

10.4. Van-e hiba a következő bizonyításban:
Ha egy egyszerű páros gráfban minden pont foka legalább négy, akkor van benne teljes párosítás. Hagyjunk el ugyanis a gráfból éleket addig, amíg van négynél magasabb fokú pont. Így kapunk egy 4-reguláris gráfot, s erre a 10.3. feladatban már bebizonyítottuk az állítást.

10.5. (M) * Egy n pontú egyszerű gráf csúcsainak fokszáma nagyság szerint csökkenő sorrendben $d_1 \geq d_2 \geq \ldots d_n$. Bizonyítsuk be, hogy minden 1 és n közötti i-re igaz, hogy

$$d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots d_n \geq d_1 + d_2 + \ldots + d_i - i(i-1)/2.$$

Megjegyzés. Ez tehát egy szükséges feltétel ahhoz, hogy legyen olyan n pontú gráf, amelynek i-edik pontja pontosan d_i fokú. Erdős és Gallai bebizonyították, hogy ugyanez a feltétel elégséges is ahhoz, hogy legyen ilyen egyszerű gráf, ennek bizonyítása azonban lényegesen nehezebb.

A tétel az itt szereplő bizonyítással az első gráfelméleti könyvből, König *Die Theorie der Graphen* c. könyvéből való.

10.6. * A 10.4. feladatban beláttuk, hogy ha egy $3n$ tagú társaságban bármely két embernek van közös ismerőse, akkor van közöttük $n+1$ ember, aki együtt mindenkit ismer. Mi a helyzet akkor, ha a feltételt némileg gyengítjük és csak annyit feltételezünk, hogy a társaság ismeretség-gráfja 2-átmérőjű, azaz csak annyit feltételezünk, hogy bármely két egymást nem ismerő embernek van közös ismerőse?

10.7. (M) * Bizonyítsuk be, hogy páros sok olyan egyszerű gráf van, amelynek pontjai 1-től n-ig vannak számozva, s amelyben nincs sem telített pont, sem izolált pont. Itt tehát nem egyszerűen pontokról, hanem *számozott* pontokról van szó. Így *nem tekintjük azonosnak* például $n=3$-ra azt a két gráfot, amelyek közül az egyikben csak a kettes és a hármas nins összekötve, a másikban csak az egyes és a kettes nincs összekötve – bár ezek a gráfok a számozástól eltekintve izomorfak.

10.3. Néhány Hamilton-körrel kapcsolatos feladat

10.1. (M) Van-e olyan összefüggő 4-reguláris gráf, amelynek nincs Hamilton-köre?
Milyen k-ra van összefüggő k-reguláris gráf, amelynek nincs Hamilton-köre?

10.2. (MS) a) Egy ötpontú gráfban legfeljebb hány él lehet, ha nincs benne ötpontú kör?
b) Egy hatpontú gráfban legfeljebb hány él lehet, ha nincs benne hatpontú kör?

Megjegyzés. Az általános kérdést tárgyalja a következő 10.3. feladat.

10.3. (M) a) Egy n pontú egyszerű gráfban legfeljebb hány él lehet, ha nincs benne Hamilton-út?
b) Egy n pontú egyszerű gráfban legfeljebb hány él lehet, ha nincs benne Hamilton-kör?

10.4. Néhány versenyfeladat

Megjegyezzük, hogy az itt szereplő feladatok korántsem egyforma nehézségűek. A nehezebbeket itt is *-gal jelöltük.

10.1. (M) Egy sakkversenyen n nő és $2n$ férfi vett részt. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Nem volt döntetlen és a nők által megnyert játszmák aránya úgy viszonyult a férfiak által megnyert játszmák számához, mint 7:5. Hány nő vett részt a játékban? (Arany Dániel-verseny 1984K)

10.2. Három házaspár vacsorán vesz részt. Mindenki más-más időpontban érkezik a vacsora helyszínére. Minden újonnan érkező ember kezet fog a már ott tartózkodókkal, kivéve saját házastársával. Miután mindenki leült vacsorázni, az egyik ember megkérdezte az összes többitől, hogy hány emberrel fogott kezet érkezésekor. Hányadikként érkezhetett az illető, ha kérdésére öt különböző választ kapott? (Arany Dániel-verseny, 1995H)

10.3. (M) * Egy előadáson ötven személy vett részt. Tudjuk, hogy bármely négy résztvevő között van olyan, aki a másik három személy mindegyikével találkozott már korábban. Bizonyítandó, hogy bármely négy résztvevő között van olyan személy, aki korábban már mindegyik résztvevővel találkozott. (Arany Dániel-verseny, 2004H)

10.4. (M) * Egy elektronikus levelezőtársaságnak 2004 tagja van. Közülük néhányan személyesen is ismerik egymást (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsa be, hogy a 2004 tag két csoportba osztható úgy, hogy a csoportokon belül személyes ismeretségek számának összege nem több, mint a két csoport tagjai közötti ismeretségek száma! (OKTV, 2005)

11. FEJEZET

Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt! Bevezető feladatok

A fejezet témájához kapcsolódó korábbi feladatok: 4.3., 6.2., 9.2., 10.1.

11.1. Egy klasszikus Kürschák-feladat

11.1. (MS) Egy kocka csúcsaira egy-egy valós számot írtunk úgy, hogy minden csúcsra a szomszédos csúcsokon álló számok számtani közepe került. A nyolc csúcs közül hányon állhat különböző szám?

11.2. (S) Hogyan változik az előző (11.1.) feladat, ha azt tudjuk, hogy minden csúcsra egy szomszédos csúcson álló szám felének és a többi szomszédján álló számok hatodának az összege került?

11.3. (MS) Hogyan változik a 11.1. feladat, ha azt tudjuk, hogy minden csúcsra a szomszédos csúcsokon álló számok közül a legnagyobb kerül?

11.4. (MS) Hogyan változik a 11.1. feladat, ha kocka helyett egy három oldalú hasábról van szó? (L. Kürschák-verseny, 1935. [10])

És ha valamely más egyszerű poliéderről van szó?

11.5. (MS) Egy véges gráf minden csúcsára egy-egy valós számot írtunk úgy, hogy minden csúcsra a szomszédos csúcsokon álló számok számtani közepe került. Legfeljebb hány különböző számot használhattunk?

11.6. (S) Hogyan változik a helyzet, ha a gráf minden csúcsára a szomszédos csúcsokon álló számok közül a(z egyik) legkisebbet írjuk?

11.7. Fogalmazzuk meg, min múlt a fejezet eddigi feladatainak a megoldása!

11.8. (MS) Igaz-e a 11.5. feladat megoldásában (11.5M) kapott állítás végtelen gráfokra is?

11.9. (MS) Hol használtuk a 11.5. feladat megoldásában, hogy véges gráfról van szó?

11.2. További feladatok

11.1. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű poliédernek van két azonos élszámú lapja.

11.2. (MS) a) Adott tíz (páronként különböző) valós szám. Képezzük az összes kéttagú összeget e tíz számból. Legalább hány különböző érték lesz közöttük?

b) Adott n darab (páronként különböző) valós szám. Képezzük az összes kéttagú összeget ebből az n számból. Legalább hány különböző érték lesz közöttük?

11.3. (M) a) Adott n darab (páronként különböző) valós szám. Képezzük az összes háromtagú összeget ebből az n számból. Legalább hány különböző érték lesz közöttük?

b) Legalább hány különböző érték lesz n (páronként különböző) szám k tagú összegei között?

11.4. (M) Egy 105 tagú társaságban 100 fiú és öt lány van. A 100 fiú mindegyike ismer legalább kettőt a lányok közül. Az ismeretségek kölcsönösek. Bizonyítsuk be, hogy
a) van egy lány, aki legalább 40 fiút ismer;
b) van három lány, akik ha összeadják, hogy hány fiút ismernek, az eredmény legalább 120.

11.5. (M) Egy n gyöngyből álló nyaklánc mindegyik gyöngyszemére egy egész szám van írva. A számok összege $n-1$. Bizonyítsuk be, hogy szétvágható a nyaklánc úgy, hogy a kapott gyöngyfűzér balról számított első k gyöngyén álló számok összege minden szóba jövő k-ra kisebb legyen $k-1$-nél.

11.6. (MS) Adott véges sok pont a síkon úgy, hogy semelyik három nincs egy egyenesen és bármely három által alkotott háromszög területe legfeljebb egységnyi. Bizonyítandó, hogy az összes pont lefedhető egy legfeljebb négy területű háromszöggel. (Vö. Arany Dániel-verseny, 2005H)

Helyettesíthető-e kisebb számmal a négyes szorzó ebben az állításban?

11.7. (MS) Adott véges sok pont a síkon úgy, hogy semelyik három nincs egy egyenesen és bármely három által alkotott háromszög területe legfeljebb egységnyi. Bizonyítandó, hogy az összes pont lefedhető egy legfeljebb négy területű téglalappal.

Helyettesíthető-e kisebb számmal a négyes szorzó ebben az állításban?

11.8. (M) Hol használtuk a 11.6. feladatban, hogy véges sok pont van adva?

11.3. Egy másik Kürschák-feladat és az egydimenziós Helly-tétel

11.1. (MS) Egy könyvtárban egy napon mindenki egyszer járt. Bármely két könyvtárlátogató találkozott aznap. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan időpont, amikor minden látogató egyszerre volt ott a könyvtárban.
Megjegyzés. Ezt lehet az egydimenziós Helly-tételnek is tekinteni. A kétdimenziós Helly-tételt lásd a *Kombinatorikus geometria* című fejezet 15.4. feladatában.

11.2. (MS) [10]. Egy könyvtárban egy napon mindenki egyszer járt. Bármely három könyvtárlátogató közül volt kettő, aki találkozott aznap. Bizonyítsuk be, hogy volt két olyan időpont, amelyeken együttvéve az összes látogató ott volt a könyvtárban. (Kürschák verseny, 1950.)

11.3. (M) Hogyan általánosítható a 11.2. feladat?

11.4. (S) a) Adott egy egyenesen véges sok zárt intervallum úgy, hogy bármelyik kettőnek van közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az összes intervallumnak is van közös pontja.

b) Adott egy egyenesen véges sok zárt intervallum úgy, hogy bármelyik $k+1$ között van kettő, amelyik metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy az összes intervallum lefogható k ponttal. (Azaz van k pont, amelyekre igaz, hogy minden intervallum tartalmaz közülük legalább egyet.)

11.4. Két versenyfeladat

11.1. (MS) [11] *Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden iskola minden tanulója a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsuk be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel. (Kürschák-verseny, 1977.)

11.2. (MS) * Egy számot 3-univerzális számnak nevezünk, ha belőle jegyeket letörölve megkapható minden különböző számjegyekből álló *abc* háromjegyű szám. Például az 134356 számból letörléssel megkapható a 456 szám, de nem kapható meg a 465 szám.

Hány számjegyű a legrövidebb 3-univerzális szám? (Arany Dániel-verseny, 1986H.)

12. FEJEZET

Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt! Gráfelmélet

Ebben a fejezetben folytatjuk a „vegyük a legszélsőt” gondolatra épülő vizsgálódásokat. Közelebbről azt vizsgáljuk, hogyan van jelen a gondolat a gráfelméletben.

12.1. Körmérkőzések

12.1. (MS) [10]
Egy körmérkőzés során mindenki mindenkivel egyszer játszott, és egyetlen mérkőzésnek sem volt döntetlen az eredménye. Bizonyítandó, hogy van olyan résztvevő, aki minden versenytársát megemlíti, ha felsorolja az általa legyőzötteket, valamint azokat, akiket az általa legyőzöttek legyőztek. (Kürschák-verseny, 1954.)

Az állítást gráfelméleti formában így fogalmazhatjuk:

Definíció. Egy irányított gráfban egy pontot akkor nevezünk *„pszeudogyőztesnek”*, ha belőle minden más pont egy, vagy két élű irányított úttal elérhető.

Tétel. *Minden véges tournamentben van pszeudogyőztes.*

12.2. (M) Igaz-e a 12.1. feladat állítása végtelen tournamentben is?

12.3. (M)
a) Egy 10 versenyzős körmérkőzésen nem volt döntetlen. Bizonyítsuk be, hogy a versenyzők sorbaállíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a követlenül utána állót.
b) Bizonyítsuk be, hogy véges tournamentben van irányított Hamilton-út. Azaz a pontok sorba rakhatók úgy, hogy minden pontból az utána következőbe indul él.

Megjegyzés. Rédei László bebizonyította, hogy tournamentben a Hamilton-utak száma mindig páratlan. Ebből is következik a feladat állítása, ám ennek bizonyítása sokkal nehezebb.

12.4. Kutató munka:
* Hogyan jellemezhetők másképp az olyan tournamentek, amelyekben egyetlen irányított Hamilton-út van?

12.2. Utak, körök és a fokszám

Lásd az 5.2., 5.7., 8.8. és 8.1. feladatokat is.

12.1. (MS) Egy véges egyszerű gráf minden pontjának foka legalább kettő. Bizonyítandó, hogy ekkor van benne kör.

Megjegyzés: A feladathoz l. a 14.5. feladatot, valamint az alábbi 12.2-12.4. feladatokat.

12.2. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges egyszerű gráfban minden pont foka legalább három, akkor van benne kör átlóval.

12.3. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges egyszerű gráfban minden pont foka legalább három, akkor van benne páros hosszúságú kör.

12.4. (MS) [1] Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges egyszerű gráfban minden pont foka legalább három, akkor nincs olyan $k \geq 3$ egész szám, amelyre a gráf minden körének hossza osztható volna k-val.

12.5. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű véges gráf minden pontja legalább harmadfokú, akkor a benne található körök hosszainak legnagyobb közös osztója kettő vagy egy. Mindkét eset elő is fordul.

12.6. (S) Egy egyszerű véges gráfban minden pont foka legalább k, ahol $k \geq 2$. Bizonyítandó, hogy van olyan kör a gráfban, amelynek legalább $k+1$ pontja van.

Garantálható-e egy pontosan $k+1$ pontú kör is e feltétel mellett?

12.7. (M) Egy gráfban minden pont foka legalább kettő. Bizonyítsuk be, hogy van olyan kör, amely egy pontot és annak összes szomszédját tartalmazza.

12.3. Hamilton-körök

12.1. (M) Igazoljuk, hogy ha egy nyolcpontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább négy, akkor van benne Hamilton-kör.

12.2. (MS) * Láttuk már, hogy egy $2n$ pontú gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf összefüggő, sőt kétszeresen összefüggő. (Lásd az GR.II.1.2. feladatot.) Most bizonyítsuk be az alábbi tételt, amelyből mind a 9.2. feladat állítása, mind ezek az állítások következnek.

Dirac tétele. Ha egy $2n$ pontú gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráfnak van Hamilton-köre.

12.3. Egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $n+1$. Bizonyítsuk be, hogy van benne olyan Hamilton-kör, amelynek be van húzva n darab, páronként pontdiszjunkt átlója.

12.4. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú gráf bármely két össze nem kötött pontjára igaz, hogy e két pont fokszámának összege legalább n, akkor a gráfnak van Hamilton-köre.

12.4. A „Turán-tétel" két egyszerű esete

12.1. (MS) Egy kilenc csapatból álló bajnokságban egy adott időpillanatig összesen 21 mérkőzést játszottak le (semelyik két csapat nem játszott egymással kétszer). Bizonyítsuk be, hogy van három csapat, amelyek közül mindegyik játszott a másik kettővel.

12.2. (MS) Bizonyítsuk be a háromszögre vonatkozó

Turán-tételt: Ha egy n pontú egyszerű gráfnak több mint $\lfloor n^2/4 \rfloor$ éle van, akkor van benne háromszög. Másrészt van olyan n pontú és $\lfloor n^2/4 \rfloor$ élű gráf, amelyben nincs háromszög.

Megjegyzés. Erre a tételre több bizonyítást is adunk, lásd még a GR.II.2.10. feladat megoldását és a GR.II.6.1. feladat megoldását.

12.3. (MS) A Turán-tétel azonban általánosabb, mint a 12.2. feladatban szereplő tétel, amely csak háromszögekről szól. Az általános Turán-tétel minden k-ra megadja, hogy egy n pontú gráfban hány él kell ahhoz, hogy biztosan legyen benne teljes k-as gráf. Bizonyítsuk be az alábbi $k = 4$ esetet:

Turán-tétel. Ha egy n pontú gráfban van legalább $n^2/3$ él, akkor van benne négypontú teljes gráf.

A Turán-tétel általános esetével és további analóg kérdésekkel a speciális gráfelméleti témákat tárgyaló GR.II. kötetben fogunk foglalkozni.

12.5. Néhány további feladat

12.1. (MS) Egy n pontú teljes gráf éleit megszíneztük, minden él pontosan egy színt kapott. A színezéshez legalább n színt használtunk. Mutassuk meg, hogy van olyan háromszög a gráfban, amelynek minden éle különböző színű.

12.2. (MS) Bizonyítsuk be, hogy egy fa összes leghosszabb útja lefogható egy ponttal (vagyis van olyan pont, amelyen a fa összes útja keresztül megy).

13. FEJEZET
Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt!

Ebben a fejezetben folytatjuk a „vegyük a legszélsőt” gondolatra épülő vizsgálódásokat. Közelebbről azt vizsgáljuk, hogyan van jelen a gondolat a számelméletben és a geometriában.

13.1. Számelmélet

13.1. Kutató munka:
A „vegyük a legnagyobbat–legkisebbet” gondolat egyik legelemibb számelméleti alkalmazása az egyik mód arra, ahogyan belátjuk, hogy végtelen sok prímszám van. Ha véges sok lenne, vehetnénk ezek közül a legnagyobbat, ha ez P, akkor a $P!+1$ számnak nem volna prímosztója. Ugyanis ez a szám relatív prím minden P-nél nem nagyobb számhoz, tehát ha nem volna P-nél nagyobb prím, akkor az összes prímhez is relatív prím volna. Ilyen szám csak az 1, s ez ellentmondás.
Hogyan alkalmazható ugyanez a gondolat annak bizonyítására, hogy
a) végtelen sok $4k-1$ alakú, b) $6k-1$ alakú prímszám van?

13.2. * Kutató munka:
Hogyan alkalmazható a 13.1. feladatban említett gondolatmenet annak bizonyítására, hogy a $4k+1$ alakú prímek száma is végtelen?

További egyszerű példa a „vegyük a legnagyobbat–legkisebbet” gondolat alkalmazására az, ahogyan Dedekind bizonyította, hogy ha c olyan pozitív egész szám, amely nem négyzetszám, akkor $\sqrt{c}$ irracionális. A 13.3. feladatban ezt a bizonyítást vesszük át először a $c=2$ esetben.

13.3. Kutató munka:
a) Igazoljuk, hogy
$\sqrt{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.
b) Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}=u/v$ racionális szám, ahol u és v pozitív egészek. Mit kell feltételeznünk róluk, hogy az a)-ban bizonyított egyenlőség alapján ellentmondásra jussunk?

Az általános esetben az itt használt alapötleten kívül még egy ötletre szükség van.

13.4. Kutató munka:
Milyen általános egyenlőség segít ahhoz, hogy a 13.3. feladat megoldásában használt ötletet az általános esetben is alkalmazni tudjuk?

Megjegyzés. Aki nem akarja önállóan végiggondolni, a bizonyítást megtalálja [20] 111. oldalán.

Azt az egyszerű tényt, hogy a pozitív (vagy a nem-negatív) egészek bármely részhalmazában van legkisebb elem, megfogalmazhatjuk úgy is, hogy „lefelé” nem végtelen a természetes (vagy a nem-negatív) számok sorozata. – Ez a megfogalmazás egyébként szoros kapcsolatban áll a „finitizmus elvével”. – A gondolatot ebben a formában használtuk a 13.4 feladat megoldásában is. Az általános alakja a következő. Be akarjuk bizonyítani, hogy bizonyos tulajdonságú természetes számok nem léteznek. Ehhez indirekte feltesszük, hogy léteznek az adott tulajdonságú természetes számok. De akkor van közöttük egy legkisebb, mondjuk m. A „csavar” az, hogy úgy jutunk ellentmondásra, hogy m segítségével mutatunk egy m-nél kisebbet, amely szintén rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Ezt a módszert Pierre de Fermat francia matematikus vezette be és alkalmazta. Ő *descente infinie*-nek, végtelen leszállásnak nevezte el. A számelméletben igen gyakran alkalmazható, mint azt látni fogjuk. Egy nagyon elemi ismereteket követelő „descente infinie”-s bizonyítás adható arra, hogy ha két négyzetszám összege osztható egy $4k-1$ alakú prímszámmal, akkor mindkét négyzetszám is osztható vele. Lásd [20] 35sk. oldal.

13.5. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha az x, y, z racionális számokra

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$$

teljesül, akkor $x = y = z = 0$. (Kürschák-verseny, 1983. [10]).

13.6. (S) A 13.5. feladat folytatásaként döntsük el, igaz-e ugyanez minden

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3kxyz = 0$$

alakú egyenletre is, ahol k tetszőleges egész szám.

13.7. (M) A 13.5. feladat folytatásaként döntsük el, hogy igaz-e ugyanaz az

$$x^3 + 9y^3 + 81z^3 - 81xyz = 0$$

egyenletre is?

13.8. (M) Léteznek-e olyan x, y, z nullától különböző racionális számok, amelyek négyzetösszege 7?

13.9. (M) Igazoljuk, hogy a $4^k \cdot (8n+7)$ alakú számok nem állíthatók elő három négyzetszám összegeként!

Lényegesen nehezebb annak a bizonyítása, hogy csak ezek a számok nem állnak elő három négyzetszám összegeként, s ezek előállnak négy négyzetszám összegeként.

13.10. (M) *Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^4 + y^4 = z^2$$

egyenletnek nincs megoldása pozitív egész számokban. (Euler)

13.2. Geometria

13.1. (MS) Bizonyítsuk be a szögösszeg felhasználása nélkül, hogy síkbeli sokszögnek mindig van legalább három konvex szöge.

Megjegyzés. A szögösszeget már csak azért sem jó használni, mert nem konvex sokszögekre nem olyan egyszerű bizonyítani, a bizonyításhoz nekünk például szükségünk lesz erre az állításra! L. a 13.2. feladatot.

13.2. (S) Ismeretes, hogy a síkbeli konvex n-szögek szögösszege $(n-2)180°$. A bizonyításhoz az n-szöget egymást nem metsző átlóival $n-2$ darab háromszögre bontottuk.

Bizonyítsuk be, hogy *tetszőleges* síkbeli poligon felbontható háromszögekre egymást nem metsző átlóival (tehát tetszőleges síkbeli n-szög szögösszege $(n-2)180°$).

13.3. Kutató munka:

Van-e olyan sokszög, amelynek belsejében van olyan pont, amelynek minden oldalegyenesen vett merőleges vetülete az oldalon kívülre esik?

13.4. (MS) [7]. 53. feladat. Egy konvex sokszög belsejében fekvő P pontot merőlegesen levetítünk a sokszög minden oldalegyenesére. Előfordulhat-e, hogy egyetlen vetületpont sem esik magára az oldalra, hanem mindegyik vetület az oldal valamelyik meghosszabbítására esik?

13.5. [7] 53. feladat. Egy konvex poliéder belsejében fekvő P pontot merőlegesen levetítünk a poliéder minden lapsíkjára. Előfordulhat-e, hogy egyetlen vetületpont sem esik magára a lapra, hanem mindegyik vetület a lapon kívül van?

13.6. (M) Adott két konvex sokszög a síkon, amelyeknek nincs közös pontjuk. Bizonyítandó, hogy elválaszthatók egy egyenessel, azaz van olyan egyenes, amelynek az egyik sokszög az egyik partján, a másik sokszög a másik partján van.

13.7. Kutató munka:

A 13.6. feladat megoldásában használtuk, éspedig végtelen halmazokra, két sokszög pontjaira, hogy ha két korlátos zárt alakzat pontjainak távolságát vizsgáljuk, ezek között van minimális. „Végesíthető-e” a bizonyításnak ez a pontja?

Mutassunk példát arra, hogy két közös pont nélküli sokszög közötti minimális távolság nem a csúcsok közötti minimális távolság!

13.8. (MS) Adott n pont a síkon, nincs mind egy egyenesen. Nevezzük *jó* egyenesnek a sík olyan egyeneseit, amelyekre a megadott pontok közül legalább kettő illeszkedik. Előfordulhat-e, hogy minden jó egyenesre legalább három megadott pont illeszkedik?

13.9. (M) Adott n egyenes a síkon, nem illeszkedik mind egy pontra. Tekintsük ezeknek az egyeneseknek a metszéspontjait. Előfordulhat-e, hogy minden ilyen metszésponton legalább három megadott egyenes halad át?

13.10. (MS) [10] Egy zárt térbeli ponthalmaz minden metszete körlap. Bizonyítsuk be, hogy a ponthalmaz gömb. (Kürschák-verseny, 1954.)

13.11. (S) * A síkon véges sok egységoldalú négyzetlapot helyeztünk el úgy, hogy oldalaik párhuzamosak. A sík bármely pontját legfeljebb két négyzetlap fedi. Mutassuk meg, hogy a négyzetlapok beoszthatók legfeljebb három csoportba úgy, hogy minden csoportban páronként közös pont nélküli négyzetlapok legyenek! (Arany Dániel verseny, Haladók, 1986.)

13.12. (M) A sík egy H véges ponthalmazáról tudjuk, hogy bármely két, különböző P és Q pontjához található H-nak egy olyan pontja, amelyre a $PRQ\measuredangle$ hegyesszög. Bizonyítandó, hogy H-nak van három olyan pontja, amelyek hegyesszögű háromszöget alkotnak. (Arany Dániel-verseny, 1984/Haladó)

13.13. (MS) Adott a síkon véges sok kör. Ezek együttesen T területű részt fednek le a síkból. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük néhány, páronként diszjunkt kör úgy, hogy azok együtt legalább $T/9$ területű részt lefednek.

13.14. (MS) Milyen n-ekre van szabályos rács-n-szög a síkban?

Megjegyzés. Rácssokszögön olyan sokszöget értünk, amelynek minden csúcsának minden koordinátája egész szám.

A következő két feladat egyszerűbb az előzőeknél, mégis a fejezet végére hagytuk, mert már átvezet az algoritmusok és az állapotfüggvények körébe.

13.15. (MS) Adott n pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy van olyan törött vonal, amelynek pontosan ezek a pontok a csúcsai és nem metszi önmagát.

Megjegyzés. A feladatot l. még az állapotfüggvényekről szóló fejezetben. A feladat egy élesebb változatát lásd a *Kombinatorikus geometria* 15.5. feladatnál.

13.16. (M) [13] Adott a síkon n fehér és n kék pont. Behúzható-e n olyan szakasz, amelyek mindegyikének egy-egy fehér és kék végpontja van és a szakaszok nem metszik egymást (végpontban sem)?

14. FEJEZET

Tetszőlegesen sok és végtelen sok

Ebben a fejezetben – ha mást nem mondunk – végtelenen mindig megszámlálható végtelent értünk. De a legtöbb feladat megoldásához nem szükséges tudni, hogy mit jelent a megszámlálható végtelen fogalma.

14.1. Véges és végtelen

14.1. A természetes számok egy sorozatáról tudjuk, hogy van benne akármilyen hosszú számtani sorozat. Következik-e ebből, hogy maga a sorozat is számtani sorozat?

14.2. Van-e olyan végtelen nagy halmaz, amelynek minden eleme véges szám?

14.3. Van-e olyan véges halmaz, amelynek minden eleme végtelen?

14.4. Az S halmazról tudjuk, hogy olyan részhalmaza a valós számoknak, amely minden egész számnál tartalmaz nagyobbat. Következik-e ebből, hogy az S halmaz végtelen?

Nem árt összefoglalni azokat a meghatározásokat, amelyekre eddig kimondatlanul építettünk:

Definíció: Egy halmazt akkor és csak akkor nevezünk *véges*nek, ha van olyan n természetes szám, amelyre n eleme van.

Definíció: Egy halmazt akkor és csak akkor nevezünk *végtelen*nek, ha nincs olyan n természetes szám, amelyre n eleme volna.

Minthogy ezek a véges (és végtelen) halmaz definíciói, itt nem használtuk, hogy a feladat *számhalmazról* szól. A véges *szám*halmazoknak azonban van egy fontos tulajdonságuk, amely segítségével a bizonyítás ugyancsak egyszerűsíthető. Az alábbi megoldás ezt mutatja.

Tegyük fel, hogy az S számhalmaz véges. Ekkor *van egy legnagyobb eleme*, legyen ez az a szám. Nem nehéz ennél az a számnál nagyobb egész számot találni: ilyen például az $[a] + 1$ szám. A feladat feltétele szerint S-ben van egy ennél nagyobb szám, márpedig az a-nál is nagyobb. Ez ellentmond annak, hogy a az S halmaz legnagyobb eleme. Az S halmaz tehát nem lehet véges.

Megjegyzés: Ebben a megoldásban tehát a következő fontos gondolatot használtunk:

Minden véges számhalmaznak van legnagyobb eleme.

A 11., 12. és 13 fejezetekben bemutatjuk, hogy ez a látszólag „ártalmatlan” gondolat milyen erős bizonyítási eszközt (sőt eszközöket) ad a kezünkbe. Sőt, erre az egyszerű tulajdonságra támaszkodva olyan fogalmakat is bevezethetünk, amelyek gráfelméleti és más kombinatorikai struktúrákba engednek mélyebb betekintést. Ilyen volt például a *fa, faváz, maximális független élhalmaz* stb. fogalma.

14.5. Ha egy számhalmaz véges, akkor van legnagyobb és legkisebb eleme. Igaz-e az állítás megfordítása is? Azaz igaz-e, hogy ha egy számhalmaznak van legnagyobb és van legkisebb eleme, akkor véges?

14.2. Tetszőlegesen sok és végtelen sok a számelméletben

14.1. A természetes számok egy sorozatáról tudjuk, hogy van benne akármilyen hosszú számtani sorozat. Következik-e ebből, hogy van benne végtelen hosszú számtani sorozat is?

14.2. Felbonthatók-e a természetes számok két olyan diszjunkt (közös tag nélküli) sorozatra, amelyek mindegyikében van akármilyen hosszú számtani sorozat?

14.3. Felbonthatók-e a természetes számok két olyan diszjunkt (közös tag nélküli) sorozatra, amelyek mindegyikében van akármilyen hosszú számtani sorozat, de egyikben sincs végtelen hosszú számtani sorozat?

14.4. (MS) Van-e a prímszámok sorozatában végtelen hosszú (nem nulla differenciájú) számtani sorozat?

Megjegyzés: Sokkal nehezebb kérdés, hogy van-e akármilyen hosszú számtani sorozat prímekből? Csak nemrég (2004-ben) mutatta meg Ben Green és Terence Tao, hogy a válasz igenlő.

14.5. (MS) Tekintsük a prímszámok sorozatát, s benne a szomszédos tagok különbségét. Ez nyilván nem lehet végtelen nagy, hiszen mindig egész szám. De lehet-e akármilyen nagy?

14.6. (MS) a)* Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos négyzetmentes számok között akármilyen nagy különbségnél előfordul nagyobb. ([21], 89. oldal.) Vagy másképp fogalmazva: van tetszőlegesen sok egymás melletti nem-négyzetmentes szám.

b) Lehet-e tetszőlegesen sok egymás melletti négyzetmentes számot találni az egészek között?

14.7. (MS) * Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos teljes hatványok között akármilyen nagy különbségnél előfordul nagyobb. ([21], 50. oldal.)

Teljes hatványnak az olyan számokat nevezzük, amelyek egy egész számnak egynél magasabb hatványai.

14.8. (MS) * Tekintsük a $d(1), d(2), \dots, d(n), \dots$ sorozatot, ahol $d(n)$ az n szám pozitív osztóinak a számát jelenti. Bizonyítsuk be, hogy ebben a sorozatban a szomszédos elemek közötti különbség tetszőleges nagy lehet. (Ez pontosan fogalmazva azt jelenti, hogy bárhogyan adunk meg egy K számot, van olyan n, hogy $d(n)$ és $d(n+1)$ különbsége nagyobb, mint K.)

14.9. (MS) * Az előző 14.8. feladat élesítéseként bizonyítsuk be a következő tételt:

Hegy-tétel. *Tetszőlegesen megadott K számhoz található olyan n pozitív egész szám, hogy $d(n)$ legalább K-val nagyobb mind $d(n-1)$-nél, mind $d(n+1)$-nél.*

A tétel onnan kapta a nevét, hogy ha $d(n)$-et ábrázoljuk, akkor a tétel állítása szerint $d(n-1)$-ről nagyot kell lépni felfelé, hogy $d(n)$-be jussunk, majd onnan nagyot kell lépni lefelé, hogy $d(n+1)$-be jussunk. Azaz $d(n)$ grafikonján tetszőlegesen nagy (meredekségű és magasságú) „hegy” van.

14.3. Tetszőlegesen sok, végtelen sok a gráfoknál

14.1. (MS) Van-e olyan (egyszerű, végtelen) gráf, amelyben van tetszőlegesen nagy véges teljes részgráf, de nincs végtelen teljes részgráf?

14.2. (M) Van-e végtelen sok olyan halmaz, amelyek közül bármely véges sok metszete végtelen, de bármely végtelen sok metszete véges?

14.3. (MS) Van-e olyan (egyszerű, végtelen) gráf, amelyben van tetszőlegesen nagy véges teljes részgráf, de nincs végtelen teljes részgráfja, s ugyanez a komplementer gráfra is igaz?

14.4. (MS) Mint ismeretes, Tigris (a Micimackóból) a fán csak felfelé tud mászni, lefelé sajnos nem. Rajzoljunk olyan végtelen fát, amelyre igaz a következő:

Ha megmondjuk, milyen magasra kell másznia Tigrisnek, akkor fel tud mászni olyan magasra, de bármerre is mászik felfelé, egy idő után (véges sok lépés után) meg kell állnia.

Más szavakkal:

Rajzoljunk olyan végtelen fát, amelyben van akármilyen hosszú út, de nincs végtelen hosszú út.

A fenti feladatok egyrészt arról szóltak, hogy ha valamiből van *akármilyen sok*, akkor van *végtelen sok* is, illetve arról, hogy valamiből van *akármilyen nagy*, de nincs *végtelen nagy*, például számsorozatokban „luk”, függvényekben „kilengés”, gráfokban például teljes részgráf.

A következő feladatok nagyon hasonló kérdéseket vetnek fel: azt kérdezik, hogy ha egy *tulajdonságról* tudjuk, hogy igaz *akármilyen nagy* véges gráfokra, következik-e ebből, hogy igaz *végtelen gráfokra* is?

14.5. (MS) Ismeretes (l. a 12.1. feladatot), hogy ha egy egyszerű véges gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor a gráfban van kör. Igaz-e ez egyszerű végtelen gráfra is?

14.6. (S) Ismeretes, hogy minden egyszerű véges gráfban van két azonos fokú pont. Igaz-e ez egyszerű végtelen gráfokra is?

14.7. (MS) Ismeretes, hogy ha egy véges egyszerű gráfban minden kör hossza páros, akkor a gráf páros gráf, pontjai két színnel jól színezhetők. Igaz-e ez végtelen gráfokra is?

14.8. (M) * Egy egyszerű végtelen gráf minden véges része három színnel jól színezhető. Következik-e ebből, hogy az egész gráf is három színnel jól színezhető?

14.9. (MS) Előbb igazoljuk az alábbi (i) állítást, majd ennek segítségével adjunk bizonyítást a 14.8. feladatra!

(i) Ha egy végtelen gráf minden véges részgráfja három színnel színezhető, de erre a tulajdonságra „kritikus”, azaz bármely még nem szereplő él behúzásával ez a tulajdonsága megszűnik, akkor a gráf csúcsai három osztályba sorolhatók úgy, hogy az azonos osztályba tartozó pontok között nem fut él, a különböző osztályba tartozók között fut él.

14.10. (MS) Egy egyszerű végtelen gráf minden véges része három színnel jól színezhető. Rögzítsük minden véges részgráf egy három színnel való jószínezését, a továbbiakban csak ezt a kiválasztott színezést tekintjük jólszínezésnek.

A) Bizonyítsuk be, hogy bárhogy választunk ki egy x pontot, ahhoz hozzárendelhetjük a három szín egyikét úgy, hogy van *tetszőlegesen* nagy, x-et tartalmazó részgráf, amelynek jólszínezésében x ezzel a színnel van színezve.

B) Rendeljünk ilymódon hozzá minden ponthoz egy-egy színt. Mutassunk példát arra, hogy a végtelen gráf ilymódon kapott színezése nem jólszínezése a gráfnak!

C) Megadható-e végtelen sok páronként különböző halmaz úgy, bárhogyan választunk ki közülük végtelen sokat, azok uniója megegyezik az eredeti végtelen sok halmaz uniójával?

D) Próbáljuk most eldönteni a 14.8. feladatban feltett kérdést!

14.4. Folytatás: a König-lemma

14.1. (MS) Most visszatérünk a 14.4. feladatban már szerepelt Tigrishez. Most egy olyan fán kell útnak indulnia, amelynek minden szintjén csak véges sok elágazás van. Mutassuk meg, hogy most sikerülhet neki végtelen magasra felmásznia (természetesen anélkül, hogy közben lefele is kellene másznia).

14.2. (MS) A 14.1. feladat megoldásához Tigris beszerzett egy olyan látcsövet is, amit jól beállítva akármilyen magasra ellát, de végtelen magasra nem. Tudunk-e neki tanácsot adni, milyen eljárás szerint válassza meg az utat a következő szintre, hogy soha ne kelljen megállnia? (Az eljárásnak minden lépésben véges sok ideig szabad tartania. Ahhoz, hogy Tigris a látcsővével n emelet magasba ellásson, n másodpercre van szüksége.)

14.3. (MS) Bizonyítsuk be a

König-lemmát. *Ha egy végtelen fa minden csúcsának foka véges, akkor van benne végtelen hosszú út.*

Vagy másképp fogalmazva: ha egy gyökerezett végtelen fa minden emeletén véges sok pont van, akkor van benne végtelen hosszú út.

14.4. (MS) Próbáljunk a König-lemma (14.3. feladat) segítségével megoldást találni a 14.8. feladatra!

14.5. (MS) Milyen k természetes számokra igaz az alábbi állítás?

Ha egy egyszerű végtelen gráf minden véges részgráfja k színnel színezhető, akkor az egész gráf is k színnel színezhető.

Az olyan tulajdonságot, amely „öröklődik” a végtelenre, ha minden véges részhalmazon igaz, *kompaktsági* tulajdonságnak is szokás nevezni. A König-lemma segítségével a legtöbb ilyen kompaktsági tétel bizonyítható. Egy analízisbeli kompaktsági tétel König-lemmával történő bizonyítását l. az ANAL.III.1.1. feladatnál.

14.6. Kutató munka:

Tekintsük a gráf alábbi jellemzőit:

a) A független pontok maximális száma,

b) a független élek maximális száma,

c) a gráf kromatikus száma,

d) a lefedő élek minimális száma.

Fogalmazzuk meg mindegyik esetében, hogy mit jelent az, ha öröklődik a végtelen gráfra a véges részgráfjairól és állapítsuk meg, hogy melyik igaz közülük.

14.7. Kutató munka: Döntsük el, hogy igaz-e a következő: ha egy végtelen gráf minden részgráfjának élei lefoghatók k ponttal, akkor a gráf összes éle is lefogható k ponttal.

Megjegyzés. A fejezet témájába tartozó feladat még az GR.II.1.3. feladat.

15. FEJEZET
Kombinatorikus geometria

Ez a fejezet még fejlesztés alatt áll.

Ide tartozó feladatok más fejezetekből:
a 11.1., 11.4., 11.1., 11.6., 13.1., 13.2., 13.3., 13.4., 13.6., 13.8., 13.10., 13.13., 13.14., 13.15., 13.16., feladatok; továbbá a 17.1., 17.2., 18.18., feladatok.

15.1. Általános feladatok

15.1. (M) Adott a síkon két véges ponthalmaz, S és T. Megadhatók-e olyan párhuzamos egyenesek, amelyek S minden pontját lefedik, de T egyetlen pontját sem fedik le?

15.2. Kutató munka:
Milyen véges síkbeli ponthalmazokra igaz, hogy feloszthatók két részre úgy, hogy a két rész pontjait nem lehet egyenessel szétválasztani? (Vö. [7]. 8. feladat.)
Egy egyenesről akkor mondjuk, hogy elválasztja a két részt, ha az egyik rész pontjai az egyenes egyik oldalán vannak, a másik rész pontjai az egyenes másik oldalán vannak.

15.3. [10]
Négy félsík úgy helyezkedik el egy síkban, hogy együttesen az egész síkot lefedik, azaz a síknak mindegyik pontja legalább az egyik félsíknak belső pontja. Bizonyítandó, hogy a négy félsík közül kiválasztható három úgy, hogy e három félsík is lefedi együttesen az egész síkot. (Kürschák-verseny, 1951.)

15.4. (M) Adott véges sok fehérre és véges sok feketére színezett pont a síkon. Mindkét színűből legalább három van. A pontok közül semelyik három nincs egy egyenesen. Tudjuk továbbá, hogy bármely négy pont közül a fehérek és a feketék egy egyenessel szétválaszthatók. Bizonyítandó, hogy az összes fekete pont elválasztható egy egyenessel az összes fehér ponttól. (Ki miben tudós? 1984)
Egy egyenesről akkor mondjuk, hogy elválaszt két ponthalmazt, ha az egyik ponthalmaz az egyenes egyik oldalán van, a másik ponthalmaz az egyenes másik oldalán van.

15.5. (MS) * Adott a síkon n darab általános helyzetű pont. Bizonyítsuk be, hogy összeköthetők egy önmagát nem metsző zárt törött vonallal! (Arany Dániel-verseny 2001H)

15.6. (M) a) Mutassuk meg, hogy minden $n > 2$ egész számra megadható n elemű ponthalmaz a síkon, amelynek pontosan n átmérője van.
b) * Bizonyítsuk be, hogy egy n pontból álló síkbeli ponthalmaznak legfeljebb n darab átmérője lehet. (IMO 1965/6, [6])

15.7. [15]. Book 2. **Kutató munka:**
Kiszínezhetők-e a sík rácspontjai három színnel úgy, hogy
a) minden színhez végtelen sok olyan, az x-tengellyel párhuzamos egyenes legyen, amelyen e szín végtelen sokszor fordul elő,
b) ha három pont egy egyenesen van, akkor legyen köztük két azonos színű?

15.8. Kutató munka:
Adott véges sok általános helyzetű egyenes a síkon. Az általuk meghatározott tartományokat akarjuk két színnel kiszínezni úgy, hogy azonos színű tartományoknak ne legyen közös határvonala (vagyis közös egyenes szakasza, csúcsban érintkezhetnek). Van-e olyan helyzete az egyeneseknek, amikor ez nem lehetséges?

15.9. Kutató munka:
Adott n pont a síkon, semelyik kettő távolsága nem egyenlő. Mindegyiket összekötjük a hozzá legközelebbivel. Minimálisan hány szakaszt kell így behúznunk?
És maximálisan?
Mit mondhatunk az így kapott alakzatról, ha olyan gráfnak tekintjük, amelynek az adott pontok a csúcsai és a behúzott összekötő szakaszok az élei?

15.10. Kutató munka:
Mi a helyzet, ha 15.9. feladatban minden pontot a tőle *legtávolabbival* kötünk össze?

15.2. Konvex halmazok

15.1. [7]. 9. feladat, kissé módosítva. **Kutató munka:**
Adott n általános helyzetű pont a síkon. (Tehát semelyik három nem esik egy egyenesbe.) Melyik állítások ekvivalensek?
a) A pontok konvex burka n-szög.
b) A pontok konvex n-szöget alkotnak.
c) A pontok megszámozhatók úgy, hogy a megadott sorrendben egy konvex n-szög csúcsai.
d) Semelyik három pont által alkotott háromszög nem tartalmaz további pontot a belsejében.

15.2. Kutató munka:
Igaz-e a következő:
a) Ha adott öt általános helyzetű pont a síkon úgy, hogy közülük bármely négy konvex négyszöget alkot, akkor az öt pont is konvex ötszöget alkot?
b) Ha adott n általános helyzetű pont a síkon úgy, hogy közülük bármely négy konvex négyszöget alkot, akkor az n pont is konvex n-szöget alkot? ([7]. 10. feladat.)

15.3. [7]. 11. feladat.
Adott a síkon öt pont, közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy közülük valamelyik négy konvex négyszöget alkot.

15.4. Kutató munka:
Adott a síkon n pont ($n > 4$), közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. A 15.3. állítása segítségével próbáljunk alsó becslést adni arra, hogy hány olyan négyes van e pontok között, amelyek konvex négyszöget határoznak meg.

15.5. (M) [6] Adott a síkon n pont ($n > 4$), közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\binom{n-3}{2}$ olyan konvex négyszög van, amelyeknek csúcspontjai az adott pontok közül valók! (IMO 1969.)

15.3. Helly tétele

15.1. (S) **Kutató munka:**
Milyen k-ra igaz a következő állítás:

Ha adott a síkon véges sok téglalap úgy, hogy mindegyik oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel és bármelyik k téglalapnak van közös pontja, akkor van olyan pont a síkon, amelyet mindegyik téglalap tartalmaz.

15.2. Kutató munka:
Milyen k-ra igaz a következő állítás:
Ha adott véges sok téglatest úgy, hogy mindegyik oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel és bármelyik k téglatestnek van közös pontja, akkor van olyan pont, amelyet mindegyik téglatest tartalmaz.

15.3. (MS) Adott a síkon négy konvex alakzat, amelyek közül bármely háromnak van közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy akkor mind a négynek is van közös pontja.

15.4. (MS) Bizonyítsuk be a

Kétdimenziós Helly-tételt: Adott véges sok síkbeli konvex alakzat, közülük bármely háromnak van közös pontja. Ekkor az összesnek is van közös pontja.

15.5. Kutató munka:
Milyen a valós számra igaz a következő állítás:
Ha adott a síkon véges sok pont úgy, hogy semelyik három nincs egy egyenesen és bármelyik három körül írt körének a sugara legfeljebb egységnyi, akkor az összes pont lefedhető egy a sugarú körrel.

15.6. Kutató munka:
Hogyan gyengíthető a 15.5. feladat állításának feltétele?

15.7. Kutató munka:
Milyen t számokra igaz a következő állítás:
Ha adott a síkon véges sok pont úgy, hogy bármely kettő távolsága legfeljebb egységnyi, akkor az összes pont lefedhető egy legfeljebb t sugarú körrel. (Jung tétele, l. [2].)

15.8. Egy köralakú biliárdasztalon 2400 darab 1 cm sugarú golyó helyezkedik el. Bizonyítsuk be, hogy legalább még egy ugyanekkora golyó lerakható az asztalra a többi elmozdítása nélkül, ha az asztal sugara legalább 1 méter.

15.9. (S) Elhelyezhető-e egy egységkörben három 1/2 oldalú négyzet úgy, hogy közülük semelyik kettőnek ne legyen közös belső pontja?

16. FEJEZET

Az egyszerű skatulyaelv

A 18.24. feladatban (l. a *Skatulyaelv a kombinatorikus számelméletben* c. fejezetet) szerepel Dirichlet úgynevezett approximációs tétele. Ez a tétel arról is nevezetes, hogy egy komoly tétel bizonyításához itt használták először – legalábbis kimondva és hangsúlyosan – a skatulyaelvet.

A történethez tartozik, hogy amikor Dirichlet szemére vetették, hogy ilyen primitív gondolatot használva tett szert hírnévre, azt válaszolta: „ez igaz, de erre is rá kellett jönni”. Andreas Speiser, aki csoportelméleti kutató és filozófus volt egy személyben, *Die geistige Arbeit* című könyvében ([16] 141. oldal) e történethez hozzáteszi: a skatulyaelv ugyan látszólag triviális, valójában a véges halmazok alaptulajdonságát „mozgósítja”. A következő fejezetek feladatai is illusztrálják, mennyire igaz Speiser állítása: látni fogjuk, hogy ez a látszólag „ártalmatlan” elv milyen erős eszköz.

A K.I.8. fejezetben már bőségesen megismerkedtünk az egyszerű skatulyaelvvel. Itt csak pár ismétlő feladattal felelevenítjük, majd pár nehezebb versenyfeladattal vagy hasonlóval foglalkozunk.

16.1. Bevezető és ismétlő feladatok

16.1. (M) Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék és tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincsen öt különböző korú, azonos színű tehén a gulyában, akkor található három azonos színű és egyidős tehén ugyanabból a faluból. (Arany Dániel-verseny, 1988H)

16.2. (MS) [19] Egy számsorozatot „bumfordinak” nevezünk, ha csak kétféle szám szerepel benne. (Ilyen például az $(1, 2, 2, 1, 2, 1)$. Két egyforma hosszú sorozat „összegét” kapjuk, hogy a megfelelő tagokat összeadjuk. Így például

$$(1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1) + (1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1) = (2, 3, 1, 0, 2, 1, 1, 2, 0)$$

.

a) Állítsuk elő a kilenctagú $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ számsorozatot elő minél kevesebb bumfordi sorozat összegeként!

b) Legkevesebb hány 1994 tagú bumfordi sorozat összegeként lehet előállítani az (1,2,3,4,5, . . . ,1994) sorozatot? (OKTV 1994)

16.3. (M) [9]

Legyen n páratlan szám, legyen továbbá $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ az $\{1, 2 \cdots, n\}$ számok egy permutációja. Bizonyítsuk be, hogy az $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ szorzat páros. (Kürschák-verseny, 1906.)

16.4. (MS) [10] Ha a 8×8-as sakktáblán tetszésünk szerint egy egyenes vonalat rajzolunk, ez legfeljebb hány mezőnek belsején fog keresztülmenni? (Kürschák-verseny, 1930.)

16.5. (MS) (Lukács Ottó, vö. [20], 240. oldal.)

Egy pozitív egész számokból álló sorozat első két eleme 1 és 2. A sorozat semelyik két különböző tagjának az összegét nem tartalmazza. Maximálisan hány olyan tagja van a sorozatnak, amely nem nagyobb n-nél?

16.6. (M) a) Egy 4×4-es sakktábla mezőire pozitív egész számokat írtunk. Bármely két szomszédos mezőn álló szám különbségének abszolútértéke 0,1 vagy 2. Bizonyítsuk be, hogy van két egyforma a felírt számok között.

Van-e mindig három egyforma is?

b) Egy 12×12-es sakktábla mezőire pozitív egész számokat írtunk. Bármely két szomszédos mezőn álló szám különbségének abszolútértéke 0,1, 2 vagy 3. Bizonyítsuk be, hogy van három egyforma a felírt számok között.

Két mezőt akkor nevezünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk.

16.7. (M) Egy $n^2 \times n^2$-es sakktábla mezőire pozitív egész számokat írtunk. Bármely két szomszédos mezőn álló szám különbségének abszolútértéke legfeljebb n. Bizonyítsuk be, hogy van $\lceil n/2 \rceil$ darab egyforma a felírt számok között. (Vö. OKTV 1999.)

Két mezőt akkor nevezünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk.

16.8. (M) [18] Adott $n-1$ valós szám. Bizonyítandó, hogy kiválasztható közülük néhány (esetleg csak egy, esetleg mind) úgy, hogy a kiválasztott számok összege alkalmas c egész számra a $[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}]$ intervallumba essen.

16.9. (M) * Bizonyítsuk be, hogy a $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, és $n > 1$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ képlettel definiált Fibonacci-sorozatnak van olyan tagja, amelyik a tízes számrendszerben ezer darab kilencesre végződik.

16.10. Egy tízpontú összefüggő egyszerű gráfnak 15 éle van. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik két favázának van közös éle. Legalább hány közös éle van két faváznak?

16.11. a) Egy n pontú összefüggő gráfnak van két olyan faváza, amelyek élhalmaza diszjunkt. Mit mondhatunk a gráf élszámáról?

b) Egy n pontú gráfnak $n + k$ éle van. Mit mondhatunk két favázának közös éleiről?

16.2. Néhány versenyfeladat

16.1. (M) Hét ember néhány napos kirándulásra készül. Mindennap egy kör alakú asztal köré ülve ebédelnek. Elhatározzák, hogy úgy ülnek le az ebédekhez, hogy ugyanaz a két ember ne kerüljön kétszer egymás mellé. Maximum hány naposra tervezhetik a kirándulást? (Arany Dániel-verseny, 2000H)

16.2. (M) [3].

Egy 6x6 mezőből álló „sakktáblát" hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedünk le. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar le. Bizonyítandó, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté. (OKTV 1963D)

16.3. (M) Végtelen sok cédula mindegyikére egy-egy egész szám van írva. Tudjuk, hogy bármely két cédulán álló szám között legfeljebb egymillió a különbség. Igazoljuk, hogy valamelyik szám végtelen sok cédulán szerepel. (OKTV)

16.4. (M) [10].

Legyen a síkban végtelen sok oly derékszögű négyszög kijelölve, amelyeknek szögpontjai valamely derékszögű koordináta-rendszerben így adhatók meg:

$$(0{,}0), \quad (0, m), \quad (n, 0), \quad (n, m)$$

,
hol m és n pozitív egész számok. Bebizonyítandó, hogy mindig van a kijelölt négyszögek közt két olyan, hogy egyik a másikban bennfoglaltatik. (Kürschák-verseny, 1934., eredeti szöveggel.)

16.5. (M) * [6] 239sk. oldal
Bizonyítsuk be, hogy bármely tíz – páronként különböző – kétjegyű természetes számból álló halmaznak mindig van két, közös elem nélküli részhalmaza, amelyben az elemek összege egyenlő egymással. (IMO, 1973.)

16.6. (M) * [10].
Bizonyítsuk be, hogy egy konvex n-szög átlói közül nem lehet n-nél többet úgy kiválasztani, hogy bármely kettőnek legyen közös pontja. (Kürschák-verseny, 1962.)

16.7. (MS) * Legyenek k és n pozitív egészek, $n/2 \leq k \leq n$ és legyen adva k darab pozitív, n-nél nem nagyobb különböző egész. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük kettő (nem feltétlenül különböző), amelyek összege kettőhatvány. (OKTV 1996.)

16.8. (MS) * [11]. Valaki 5^5 szelvénnyel lottózik az ötös lottón. Bármely két szelvényét nézzük, van olyan szám, amely mindkét szelvényen meg van ikszelve.
Bizonyítsuk be, hogy az 1-től 90-ig terjedő számok között található négy olyan, hogy az illető mindegyik szelvényén a négy szám közül legalább az egyik meg van ikszelve. Feltesszük, hogy a különböző szelvények különböző módon vannak ikszelve. (Kürschák-verseny, 1976.)

16.9. (M) Egy értekezletre két delegáció érkezik, A és B, mindkettőnek ugyanannyi tagja van. A két delegáció tagjai közül némelyek már ismerik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az A delegációból kiválasztható néhány ember (legalább egy) úgy, hogy a B delegáció minden tagja páros sokat ismer a kiválasztottak közül, vagy úgy, hogy minden tagja páratlan sokat ismer a kiválasztottak közül.

16.3. Egy nevezetes Erdős-Szekeres feladat

16.1. (MS) ** Bizonyítsuk be, hogy egy $nk+1$ tagú sorozatban vagy van $n+1$ szám, amelyek a sorozatbeli sorrendjükben szigorúan monotonan növekednek, vagy van $k+1$ szám, amelyek a sorozatbeli sorrendjükben monotonan csökkennnek. (Erdős Pál, Szekeres György, vö. [20], 240. oldal.)

16.2. (S) Bizonyítsuk be, hogy ha egy valós számokból álló sorozatnak nincs $n+1$ olyan tagja, amelyek szigorúan monotonan növekvő sorozatot alkotnának, akkor a sorozat felbontható n darab monoton csökkenő sorozatra.

17. FEJEZET
A skatulyaelv a kombinatorikus geometriában

17.1. Bemelegítő feladatok

Pár, mára már klasszikusnak számító feladattal kezdjük a skatulyelv kombinatorikai geometriai alkalmazásainak feltérképezését.

17.1. (MS) Adott öt pont egy egységnégyzetben. Bizonyítandó, hogy van közöttük kettő, amelyek távolsága legfeljebb $1/\sqrt{2}$.

17.2. (MS) [11].
Egy körlemezen nyolc pontot veszünk fel (a határoló körlemezt is a körlemezhez számítjuk). Bizonyítsuk be, hogy a nyolc pont között van két olyan, amelyek távolsága a kör sugaránál kisebb. (Kürschák-verseny, 1965.)

17.3. (MS) Egy 7 egység oldalú négyzetben elhelyezünk 51 pontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek között a pontok között van három olyan, amely lefedhető egy egységsugarú körrel. (OKTV, 1997.)

17.4. (MS) * Egy derékszögű háromszög két befogója 1 és $\sqrt{3}$. A háromszögben adott 25 pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható a pontok közül három, amelyek lefedhetők egy $1/\sqrt{3}$ átmérőjű körlappal. (Arany Dániel-verseny, 1989H)

17.2. Lefedések

17.1. (M) Hány kisebb szabályos háromszöggel fedhető le egy egységoldalú szabályos háromszög?

17.2. (S) Hány egynél kisebb átmérőjű alakzattal fedhető le egy egységoldalú szabályos háromszög?

17.3. (M) Adott egy nem szabályos háromszög, a legnagyobb oldala egységnyi. Hány kisebb átmérőjű alakzatra van szükség a lefedéséhez?

17.4. (MS) a) Hány kisebb zárt körlemezzel fedhető le egy zárt körlemez?
b) Egy egységnyi sugarú zárt körlemezt kisebb sugarú egybevágó zárt körlemezekkel fedünk le. Legkevesebb hány körre van ehhez szükség? A legkevesebb körrel való lefedés esetén mennyi a lefedő körök sugarának a lehetséges minimuma? (OKTV 1996.)

17.5. (MS) [10] Egy (zárt) körlapot feleakkora átmérőjű (zárt) körlapokkal akarunk befedni. Hogyan tehetjük ezt meg a legkevesebb számú körlappal? (Kürschák verseny, 1947.)

17.3. Pontrendszerek

17.1. (MS) Adott a síkon négy általános helyzetű pont. Bizonyítandó, hogy van közöttük három, amelyek egy nem hegyesszögű háromszöget határoznak meg. (Van közöttük három, A, B, C, amelyekre $BAC\angle \geq 90°$.)

17.2. (MS) Adott a síkon öt általános helyzetű pont. Bizonyítandó, hogy van közöttük három, amelyek egy legalább 108°-os háromszöget határoznak meg. (Van közöttük három, A, B, C, amelyekre $BAC\angle \geq 108°$.)

17.3. (MS) [10] Adott a síkon hat általános helyzetű pont. Bizonyítandó, hogy van közöttük három, amelyek egy legalább 120°-os háromszöget határoznak meg. (Van közöttük három, A, B, C, amelyekre $BAC\angle \geq 120°$.) (Kürschák verseny, 1958.)

17.4. (M) a) Adott a síkon hét általános helyzetű pont. Bizonyítandó, hogy van közöttük három, amelyek egy 120°-osnál nagyobb szögű háromszöget határoznak meg. (Van közöttük három, A, B, C, amelyekre $BAC\angle > 120°$.

b) * Mutassuk meg, hogy bármely pozitív c számhoz megadható hét általános helyzetű pont a síkon úgy, hogy közülük bármely három által meghatározott bármelyik szög kisebb $120° + c$-nél. (L. [10], 187. oldal; az eredmények Blumenthal amerikai matematikustól származnak.)

17.5. (MS) [10]

Adott a sík négy pontja. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott hat távolság közül a legnagyobb és a legkisebb hányadosa legalább $\sqrt{2}$. (Kürschák verseny, 1961.)

17.6. (MS) Adott a sík öt pontja. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott tíz távolság közül a legnagyobb és a legkisebb hányadosa legalább $2\sin 54°$. (Arany Dániel-verseny, 1984H)

17.7. (MS) Adott öt általános helyzetű pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy legalább három nem-hegyesszögű háromszöget határoznak meg.

17.8. (MS) Adott hat általános helyzetű pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy legalább hat nem-hegyesszögű háromszöget határoznak meg.

17.9. (MS) Adott hét általános helyzetű pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy legalább tizenegy nem-hegyesszögű háromszöget határoznak meg.

17.10. (MS) Adott $n > 4$ általános helyzetű pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott háromszögeknek legalább a 30 százaléka nem-hegyesszögű. (Vö. IMO 1970/6. feladat, [6])

17.11. (MS) a) Adott négy pont a síkon, bármely kettő távolsága legfeljebb egy. Mennyi az általuk alkotott hat távolság négyzetösszegének maximuma?

b) Mennyi a távolságok négyzetösszegének maximuma öt, illetve hat pont esetén?

17.12. (M) * Adott négy általános helyzetű pont a síkon, bármely kettő távolsága legfeljebb egy. Bizonyítsuk be, hogy a négy csúcs között van három, amely által meghatározott háromszög beírt körének sugara legfeljebb $(\sqrt{2} - 1)/2$.

17.13. (S) * Adott öt általános helyzetű pont a síkon, bármely kettő távolsága legfeljebb egy. Bizonyítsuk be, hogy van az öt csúcs között van három, amely által meghatározott háromszög beírt körének sugara legfeljebb 1/2 tg18°.

17.4. Ahol már kis gráfelmélet is kell

17.1. (M) Hat pont a síkon legalább hány különböző távolságot határoz meg?

17.2. (M) Bizonyítsuk be, hogy öt pont a síkon legalább három különböző távolságot határoz meg, kivéve ha az öt pont egy szabályos ötszög öt csúcsa.

17.3. (MS) Hány olyan elrendezése lehetséges a síkon négy pontnak, ahol a négy pont csak két különböző távolságot határoz meg? A hasonló elrendezéseket azonosnak tekintjük.

17.5. Elhelyezések

17.1. (M) Adott egy 2 egység oldalú négyzet. Elhelyezhető-e a belsejében öt egységnégyzet úgy, hogy azok közül semelyik kettőnek ne legyen közös belső pontja?

17.2. (M) Adott egy 3 egység oldalú kocka. Elhelyezhető-e a belsejében 28 egységoldalú kocka úgy, hogy azok közül semelyik kettőnek ne legyen közös belső pontja?

17.3. (M) Bizonyítsuk be, hogy az egységkörben nem helyezhető el négy 1/2 oldalú négyzet úgy, hogy semely kettőnek ne legyen közös belső pontja.
Megjegyzés. A feladat folytatását l. a 15.9. feladatban.

17.4. (S) Bizonyítsuk be, hogy az egységkörben nem helyezhető el négy 1/2 sugarú kör úgy, hogy semely kettőnek ne legyen közös belső pontja.

17.5. (M) Adott egy 2 egység oldalú konvex szabályos hatszög. Elhelyezhető-e a belsejében 11 egységnégyzet úgy, hogy azok közül semelyik kettőnek ne legyen közös belső pontja?

17.6. (M) Adott a síkon egy konvex ötszög, P_1, csúcsai A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. A P_1 ötszögből a P_i ötszöget az $\overline{A_1A_i}$ eltolással kapjuk.

Bizonyítandó, hogy a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ötszögek között van kettő, amelyeknek van közös belső pontja.

A feladat folytatása a 17.7. feladat.

17.7. (M) Adott a térben egy 9-csúcsú konvex poliéder, P_1, csúcsai $A_1, A_2, \ldots, A_9$. A P_1 ötszögből a P_i ötszöget az $\overline{A_1A_i}$ eltolással kapjuk. Bizonyítandó, hogy a $P_1, P_2, \ldots, P_9$ poliéderek között van kettő, amelyeknek van közös belső pontja. (IMO 1971/2. feladat, [6])

Igaz-e az állítás 8-csúcsú konvex poliéderekre is?

18. FEJEZET

Skatulyaelv a kombinatorikus számelméletben

A skatulyaelv számelméleti alkalmazásához érdemes végiggondolni, hogy hogyan bizonyítjuk azt a nevezetes állítást, hogy ha egy n teljes maradékrendszert megszorzunk egy n-hez relatív prím d számmal, akkor ismét teljes maradékrendszert kapunk. A bizonyítás két lépésen múlik, az egyik az, hogy ha da és db ugyanazt a maradékot adják n-nel osztva és d relatív prím n-hez, akkor a és b is ugyanazt a maradékot adja n-nel osztva. Minket itt most a bizonyítás másik lényeges eleme érdekel. Az, hogy

n egész szám között vagy van egy n-nel osztható, vagy mind különböző maradékot ad n-nel osztva.

Ezt a gondolatot – amelyet nevezhetünk a „számelméleti skatulyaelvnek” is – a fejezet számelméleti feladataiban többször fogjuk használni.

18.1. (M) [8], 111. oldal.
Egy síkbeli négyzetrácsot egységoldalú négyzetek alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is választunk ki 101 rácspontot, lesz köztük legalább 2 olyan, amelyeknél mindkét megfelelő koordináta különbsége 0-ra végződő egész szám, bármely olyan koordinátarendszerben, amelynek tengelyei rácsegyenesek. (Ki miben tudós? 1966/elődöntő)

18.2. (S) Hogyan szól a 18.1. feladat térbeli megfelelője?

18.3. (M) Hány rácspontot lehet megadni a síkon úgy, hogy semelyik kettő által alkotott szakasz felezőpontja ne legyen rácspont? (OKTV, 2002)

18.4. (M) Egy futóversenyen $1, 2, \dots, n$ rajtszámú versenyzők indultak, holtverseny nem volt. Minden versenyző rajtszámához helyezése sorszámát hozzáadva a kapott számok csupa különböző maradékot adnak n-nel osztva. Milyen n-ekre lehetséges ez? (Arany Dániel-verseny, 1990H)

18.5. (M) Igazoljuk, hogy 102 darab pozitív egész szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége vagy összege osztható legyen 200-zal! (OKTV, 2005 1. ford.)
Igaz-e az állítás, ha csak annyit kötünk ki, hogy a 102 szám egész szám legyen?
Igaz-e az állítás 101 darab egész szám esetén is?
Hogyan általánosítható a feladat?

18.6. (S) Az első $2n$ pozitív egész szám közül hányat tudunk úgy kiválasztani, hogy semely kettő ne legyen egymáshoz relatív prím?

18.7. (MS) Adjunk meg az első 60 pozitív egész szám közül negyvenet úgy, hogy azok közül bárhogyan választunk ki hármat, van közöttük kettő, amelynek legnagyobb közös osztója egynél nagyobb.

18.8. (MS) Bizonyítsuk be, hogy
a) megadható 1324 olyan 1987-nél kisebb különböző pozitív egész, amelyek között nincs három egymáshoz páronként relatív prím;
b) akárhogyan is adunk meg 1325 különböző 1987-nél kisebb pozitív egész számot, szükségképpen lesz közöttük három egymáshoz relatív prím!
(OKTV, 1987)

18.9. Adott öt rácspont a síkon. Bizonyítandó, hogy van közöttük néhány (legalább egy, esetleg mind), amelyek összegének mindkét koordinátája osztható hárommal.

18.10. (M) Az első 20 pozitív egész szám közül hányat lehet úgy kiválasztani, hogy közülük egyik se legyen osztója a másiknak?

18.11. (MS) Az első $2n$ pozitív egész szám közül hányat lehet úgy kiválasztani, hogy közülük egyik se legyen osztója a másiknak?

Mi a helyzet, ha az első $2n+1$ számból választhatunk?

18.12. (MS) ([20], 240. old.) Bizonyítsuk be, hogy $2n$-ig megadható n darab különböző természetes szám úgy, hogy bármely kettő legkisebb közös többszöröse nagyobb legyen $2n$-nél, de $n+1$ szám már nem adható meg e tulajdonsággal.

18.13. (MS) * Legyen a tetszőleges valós szám. Igazoljuk, hogy az $(a, a+1/n)$ nyílt intervallumban legfeljebb $\lceil n/2 \rceil$ olyan tört lehet, amelynek nevezője nem nagyobb n-nél.

18.14. (MS) Adott 20 egész szám. Egyiknek sincs 10-nél nagyobb prímosztója. Bizonyítandó, hogy van közöttük kettő, amelyek szorzata négyzetszám. (Vö. Arany Dániel-verseny, 2005H)

18.15. (M) Adott 300 egész szám. Egyiknek sincs 20-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítandó, hogy van közöttük kettő, amelyek szorzata négyzetszám.

18.16. (MS) Az 1-től $3n$-ig terjedő egész számok közül kiválasztunk $n+2$ darabot. Bizonyítandó, hogy ha $n>1$, akkor mindig van a kiválasztott számok között kettő, melyek különbsége n-nél nagyobb, de $2n$-nél kisebb. (Kürschák verseny, 1952. [10])

18.17. (MS) Bizonyítsuk be, hogy ha adott n darab egész szám, ezek közül mindig kiválasztható néhány (legalább egy, esetleg mind), amelyek összege osztható n-nel. (Kürschák verseny, 1948. [10])

18.18. (MS) Adott a síkon kilenc rácspont, semelyik három nincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük három, amelyek által alkotott háromszög súlypontja is rácspont.

Igaz-e az állítás nyolc rácspontra is?

18.19. (MS) A -3-as számrendszert a következőképpen definiáljuk. A számjegyek a 0,1,2 számok. Az n-edik helyen álló jegyet $(-3)^{n-1}$-gyel kell megszorozni, s az így kapott számokat kell összeadni. Tehát például az $\overline{121}$ szám értéke $9-6+1=4$.

Bizonyítsuk be, hogy a -3-as alakú számrendszerben is egyértelmű az egész számok felírása: minden egész szám egyértelműen írható fel ilyen alakban.

18.20. (S) Adva van az n természetes számnál kisebb s egymástól különböző pozitív számoknak egy sorozata, adva van továbbá egy másik ugyanilyen tulajdonságú sorozat. Bizonyítandó, hogy ha a két sorozat elemeinek együttes száma legalább n, akkor található a két sorozatnak egy-egy eleme, melyeknek összege éppen n. (Kürschák verseny, 1953. [10])

18.21. (M) Anna kiválasztott néhány egész számot és megállapította, hogy ezek összesen k darab különböző maradékot adnak n-nel osztva, Barna is kiválasztott néhány egész számot és megállapította, hogy ezek l darab különböző maradékot adnak n-nel osztva. Tudjuk, hogy $k+$ $+l>n$. Bizonyítsuk be, hogy van egy-egy olyan szám Annánál és Barnánál, amelyek összege osztható n-nel.

Vagy másképp fogalmazva:

Anna kiválasztott k darab maradékosztályt mod n, Barna kiválasztott l darab maradékosztályt mod n. Tudjuk, hogy $k + l > n$. Bizonyítsuk be, hogy van egy-egy olyan maradékosztálya Annának és Barnának, amelyek összege a 0 maradékosztály.

18.22. (MS) * Legyen p egy tetszőleges prímszám és bizonyítsuk be, hogy van olyan x és y egész szám, amelyre $x^2 + y^2 + 1$ osztható p-vel.

Megjegyzés. Ebből a tételből bebizonyítható az a másik nevezetes tétel, hogy bármely egész szám felírható négy négyzetszám összegeként. A bizonyítás szintén használja a skatulyaelvet, egy meglehetősen „cseles” formában. Erről olvashatunk Erdős Pál és Surányi János *Válogatott fejezetek a számelméletből* c. könyvében ([20] 246-251. oldal).

Megjegyzés. A 18.22. feladat bizonyítása során beláttuk, hogy az első $(p+1)/2$ nem-negatív szám négyzete mind különböző maradékot ad p-vel osztva. Másrészt nyilvánvaló, hogy i és $-$ $-i$ négyzete ugyanazt a maradékot adja p-vel osztva, és hogy azonos maradékosztályban levő számok négyzetei is azonos maradékosztályban vannak. Ezzel beláttuk, hogy *pontosan* $(p+1)/2$ „kvadratikus maradék” van, vagyis olyan maradékosztály, amelyben van négyzetszám. Ez azt is jelenti, hogy ha eltekintünk a 0 maradékosztálytól, akkor ugyanannyi (nevezetesen $(p-1)/2$) kvadratikus maradék van $\pmod p$, mint kvadratikus nem-maradék. Erre szükségünk lesz a következő feladatban. Összefoglaljuk:

Definíció. Legyen p egy prímszám. Az a egész számról akkor és csak akkor mondjuk, hogy *kvadratikus maradék* a p modulusra nézve, ha van olyan x egész szám, amelyre $x^2 - a$ osztható p-vel. Ha ilyen x egész szám nincsen, akkor a-t a p modulusra nézve kvadratikus nem-maradéknak mondjuk. Ha nem okoz félreértést, a „p modulusra nézve” kitételt elhagyjuk.

Ha a kvadratikus maradék, akkor az $a \pmod p$ maradékosztály minden eleme az.

Bebizonyítottuk, hogy pontosan $(p+1)/2$ olyan maradékosztály van, amelynek elemei kvadratikus maradékok, vagyis ha eltekintünk a nullától, akkor ugyanannyi kvadratikus maradék és kvadratikus nem-maradék van egy adott prím modulusra nézve.

18.23. (M) Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor

a) két mod p kvadratikus maradék szorzata kvadratikus maradék;

b) egy-egy mod p kvadratikus maradék és kvadratikus nem-maradék szorzata kvadratikus nem-maradék;

c) két mod p kvadratikus nem-maradék szorzata kvadratikus maradék.

Megjegyzés. A feladat állításai együtt azt mondják ki, hogy a kvadratikus maradékok és nem-maradékok hasonlóan viselkednek, mint a valós számok között a pozitív és a negatív számok. Egy másik analógia, ha azt mondjuk, hogy úgy viselkednek, mint a valós és a képzetes számok, csak azzal a különbséggel, hogy itt minden szám vagy „valós”, vagy „képzetes”.

18.24. (MS) Nyilvánvaló, hogy ha α irracionális szám, akkor bármely pozitív egész n számhoz van olyan m/n nevezőjű tört, amely α-tól kevesebb, mint $1/2n$-nel tér el. Kérdés azonban, hogy nem lehet-e ennél jobban is megközelíteni egy tetszőleges irracionális számot. Dirichlet bizonyított egy tételt, amelyből következik, hogy itt a kettes szám helyett akármilyen nagyobb számot is írhatunk. Mint a *Skatulyaelv* c. fejezet bevezetőjében említettük, a tétele bizonyításához ő használta először – legalábbis kimondva és hangsúlyosan – a skatulyaelvet. Mi most ennek a tételnek csak a következő alakjával foglalkozunk:

* Legyen α egy irracionális szám, n tetszőleges pozitív egész. Ekkor létezik olyan n-nél nem nagyobb pozitív b egész szám és hozzá egy a egész szám, amelyre igaz, hogy az a/b tört csak $1/bn$-nél kevesebbel tér el α-tól.

Ezt a tétel a skatulyaelv nagyon egyszerű alkalmazásával Riesz Frigyes bizonyította (l. [9]. 176sk.). Vajon hogyan?

18.25. (MS) Bizonyítsuk be, hogy Dirichlet tételéből (l. a 18.24. feladatot) következik, hogy bármely irracionális α számhoz végtelen sok olyan n pozitív egész nevezőjű tört létezik, amely $1/n^2$-nél jobban megközelíti α-t.

18.26. (MS) Jelöljük $||x||$-gal az x valós szám eltérését a hozzá legközelebbi egész számtól. Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számhoz végtelen sok olyan n pozitív egész van, amelyre $||nx|| < 1/n$.

18.27. (MS) * Adott egy p prímszám és adott p darab különböző pozitív egész: $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Tekintjük az összes $i, j = 1,2,\ldots,p$ számpárra az $a_i/(a_i, a_j)$ számot. Bizonyítandó, hogy ezek közül a legnagyobb legalább p.

Megjegyzés. Az állítást p prímszámok helyett *tetszőleges* n számra is ki lehet mondani. Ez volt Graham nevezetes sejtése, amelyet (elég nagy n-ekre) Szegedi Márió bizonyított be még egyetemista korában 1985-ben.

18.28. (MS) * Tekintsünk 1997 különböző pozitív egészt, amelyek közül bármely tíznek ugyanaz a legkisebb közös többszöröse. Maximálisan hány szám lehet közöttük, amelyek páronként relatív prímek (azaz közülük semelyik kettőnek sincs egynél nagyobb közös osztója)? (OKTV, 1997.)

18.29. (M) a) Bizonyítsuk be, hogy az $1,2,3,\ldots,18$ számok közül akárhogyan választunk ki kilencet, a kiválasztott számokból képzett kéttagú összegek között lesz két egyenlő!

b) Bizonyítsuk be, hogy $n > 8$ esetén az $1,2,3,\ldots,2n$ számok közül akárhogyan választunk ki n darabot, a kiválasztott számokból képzett kéttagú összegek között lesz két egyenlő!

Vö. Arany Dániel-verseny, 1999H.

18.30. (M) * 2001 darab különböző pozitív egész számról tudjuk, hogy a számok szorzatának pontosan 2000 darab különböző pozitív prímosztója van. Bizonyítsuk be, hogy a 2001 darab szám közül kiválasztható egy vagy több úgy, hogy azok szorzata négyzetszám legyen (vagy az egy kiválasztott szám maga négyzetszám)! (Arany Dániel-verseny, 2001H)

18.31. (MS) * Bizonyítandó, hogy $nk+1$ egész szám közül kiválasztható $n+1$, amelyek közül mindegyik osztható a következővel, vagy kiválasztható $k+1$, amelyek közül egyik sem osztható semelyik másikkal. ([20], 240. oldal.)

19. FEJEZET

Leszámlálás

Természetesen a leszámlálási feladatoknak se vége, se hossza, és ez a legismertebb és legjobban feldolgozott területe a kombinatorikának. Sajnos még mindig gyakori az az elképzelés, hogy a kombinatorika tkp. leszámlálási feladatokból áll. Ezért a szokásos feladatok közül csak a legszükségesebbek szerepelnek, helyette jó pár a kevésbé szokásos feladatokból. A fejezet második felében alaposabban szemügyre vesszük azt, amit „kétszeres leszámolásnak" szoktak nevezni.

Korábbi, ide tartozó feladatok: 3.3., 17.7., 17.9., 17.10.

L. még a GR.II.2.2., GR.II.4.25. feladatokat és a 11.4M2. megoldást.

19.1. Egyszerű leszámlálási feladatok

19.1. Hány olyan pontosan négyjegyű szám van, amely nem osztható öttel és minden jegye különböző?

19.2. (S) [10] Hány olyan ötjegyű szám van, amely 6-tal végződik és hárommal osztható? (Kürschák-verseny 1930.)

19.3. (MS) [15]. Book 5. Hány olyan permutációja van az első n pozitív számnak, ahol sem az egyes, sem a kettes nem áll a helyén?

19.4. (S) [3] Hány olyan legfeljebb hatjegyű természetes szám van, amelyben előfordul az 1-es számjegy? (OKTV, 1960)

19.5. (S) [3] Hány olyan megoldása van az $| x | + | y | < 1000$ egyenlőtlenségnek, amelyben x és y egész számok? (OKTV, 1959)

19.6. (M) [3]* Legyenek a és b valós számok. Hány olyan száztagú számtani sorozat van, amelynek a és b is tagja?

19.7. Egyforma egyforintosokat osztunk ki gyerekek között. Hányféleképpen oszthatunk ki

a) 2 gyereknek 8 Ft-ot **b)** 3 gyereknek 8 Ft-ot **c)** 4 gyereknek 10 Ft-ot

d) k gyereknek n Ft-ot

,

ha azt akarjuk, hogy minden gyerek kapjon legalább egy forintot?

19.8. Egyforma egyforintosokat osztunk ki gyerekek között, de most nem ragaszkodunk hozzá, hogy mindenki kapjon legalább 1 forintot. Hányféleképpen oszthatunk ki

a) 2 gyereknek 8 Ft-ot? **b)** 3 gyereknek 8 Ft-ot? **c)** 4 gyereknek 10 Ft-ot?

d) k gyereknek n Ft-ot?

19.9. (S) Hányféleképpen lehet szétosztani n darab egyforma egyforintost k gyerek között úgy, hogy mindenki kapjon legalább 2 forintot?

19.10. (M) Hányféleképpen oszthatunk szét n darab egyforma egyforintost k fiú és l lány között úgy, hogy a lányok mindegyike kapjon leaglább egy forintot?

19.11. (M) A kaszinóban k gróf kártyázik. Eredetileg mindegyiknek p pengője volt. A játék végén összeszámlják, hogy ki hány pengőt nyert vagy vesztett. Hány lehetséges kimenetel adódhat? (Senki sem kért kölcsön a játék közben.)

19.12. (M) * Hányféleképp lehet a kocka gráfjának hét élét úgy kiválasztani, hogy azok egy Hamilton-utat alkossanak?

19.2. Néhány feladat a Pascal-háromszögről és „környékéről”

19.1. Kutató munka:
Hozzuk zárt alakra a következő összeget: $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\dots+\binom{n}{2}$!

19.2. Kutató munka:
Hogyan általánosítható a 19.1. feladat eredménye?

19.3. (M) Hozzuk zárt alakra a következő kifejezést:
$\binom{n}{0}\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n}{k-1}+\dots+\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}+\dots+\binom{n}{k}\binom{n}{0}$

19.4. (M) Hogyan általánosítható a 19.3. feladat állítása?

19.5. Kutató munka:
A K.I.4.19. feladatban már szó esett Dr. Kekecről, aki a Piscal-háromszögre esküszik. Ennek 0-adik sorában egyetlen 1-es áll, az alatta levő sorokban minden szám a fölötte lévő három szám összegével egyenlő (az üres helyek 0-nak tekintendők).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \text{0. sor}\\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \text{1. sor}\\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \text{2. sor}\\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & & \text{3. sor}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & &
\end{array}$$

A „rendes” Pascal háromszög n-edik sorának k-adik helyén álló számot megkaphatjuk úgy, hogy összeszámoljuk, hányféleképpen írhatjuk fel a k számot n tagú összegként úgy, hogy minden tag nulla vagy egy, a sorrend számít. Próbáljunk ehhez hasonló utasítást találni a Piscal-háromszög n-edik sorának

a) n-edik sorának középső oszlopában álló számra,

b) n-edik sorának a középső oszlopától balra és jobbra k hellyel arrébb álló számra!

19.6. Kutató munka:
Folytassuk a Piscal-háromszögnek a 19.5. feladatban megkezdett elemzését! Bizonyítsuk be, hogy az n-edik sor középső oszlopában álló számok megegyeznek azzal, ahányféleképpen n golyót ki tudunk színezni három színnel, fehérrel, feketével és tarkával úgy, hogy a fehér és a fekete golyók száma megegyezik.

19.7. Kutató munka:
Folytassuk a Piscal-háromszög a 19.5. feladatban megkezdett elemzését! Fejezzük ki az n-edik sor középső oszlopában álló számot binomiális együtthatókkal!

19.8. (M) [15]. Book 3. A következő azonosságra keresünk kombinatorikai bizonyítást:

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n+1}{4}.$$

Felveszünk n pontot a síkon. Az azonosság bal oldala ekkor az ezek között behúzható szakaszokból alkotott párok száma. Hogyan interpretáljuk az azonosság jobb oldalát?

19.3. Egy Turán-feladat és „környéke”

19.1. (M) Egy kilencelemű halmazból akarunk kiválasztani hármasokat úgy, hogy semelyik két kiválasztott hármasnak ne legyen egynél több közös eleme. Legfeljebb hány hármast választhatunk ki?

19.2. (M) Egy n elemű halmazból háromelemű részhalmazokat akarunk kiválasztani úgy, hogy semelyik elempár ne szerepeljen két kiválasztott részhalmazban. (Vagy másképp fogalmazva: hogy bármely két kiválasztott hármasnak legfeljebb egy közös eleme legyen.) Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb a hármasok $n-2$-ed részét választhatjuk ki!

19.3. Bizonyítsuk be, hogy a 19.2. feladatban kapott becslés végtelen sok n-re pontos.

19.4. Hány olyan különböző (H_1, H_2, H_3) halmazhármas van (ahol a halmazok sorrendje is lényeges), amelyek uniója az $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ halmaz, és a három halmaznak nincs közös eleme? (OKTV, 1991)

19.5. (M) a) Egy húszelemű halmaznak kiválasztottunk néhány ötelemű részhalmazát úgy, hogy semelyik kettőnek nincs egynél több közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 19 részhalmazt választottunk ki.

b) Igaz marad-e az állítás akkor is, ha csak azt tudjuk, hogy minden halmaz legalább ötelemű?

* c) Meg lehet-e adni egy húszelemű halmaz 19 ötelemű részhalmazát úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen egynél több közös pontja?

d) Kiválasztottuk egy 16 elemű halmaznak néhány ötelemű részhalmazát úgy, hogy semelyik kettőnek nincs egynél több közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 12 részhalmazt választhattunk ki.

19.6. (M) Legyen $n > 5$, és tegyük fel, hogy egy n elemű halmazból kiválasztható néhány ötelemű részhalmaz úgy, hogy az n elemű halmaz minden háromelemű részhalmazát a kiválasztott öteleműek közül pontosan egy tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy ekkor n legalább 16. (Arany Dániel-verseny, 2002K)

19.7. (M) Egy n elemű halmazból H kiválasztottunk néhány l elemű részhalmazt úgy, hogy bármely kettőnek legfeljebb egy közös eleme van.

a) Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $n(n-1)/l(l-1)$ halmazt választottunk ki.

b) Tudjuk még azt is, hogy a kiválasztott halmazok a H halmaz minden elempárját pontosan egyszer fedik le. Bizonyítsuk be, hogy akkor $n-1$ osztható $l-1$-gyel és $n(n-1)$ osztható $l(l-$ $-1)$-gyel.

19.4. Sidon-sorozatok

19.1. Hány szám választható ki az első

a) 8 **b)** 9 **c)** *10

számból úgy, hogy bármely két kiválasztott szám összege különböző legyen? (A számok kétszeresét is kéttagú összegnek tekintjük.)

19.2. (MS) Legyen n pozitív egész szám. Adott k darab n-nél nem nagyobb pozitív egész szám úgy, hogy bármely kettő összege különböző. (A számok kétszeresét is kéttagú összegnek tekintjük.) Bizonyítsuk be, hogy
$k < 2\sqrt{n}$;

19.3. (MS)
* Bizonyítsuk be, hogy a 19.2. feladatban adott becslés $k < \sqrt{2n-1} + 1/2$-re javítható.

Megjegyzés. A 19.2. és 19.3 feladatban szereplő sorozatokat *Sidon-sorozatnak* nevezik. Bebizonyítható, hogy az első n számból kiválasztható leghosszabb Sidon-sorozat k hossza legfeljebb $k < \sqrt{n} + \sqrt[4]{n} + 1$. Másrészt megadható $\sqrt{n}$-nél nem sokkal kevesebb, n-nél kisebb egész szám úgy, hogy Sidon-sorozatot alkossanak. A bizonyításokat l. például Erdős Pál és Surányi János *Válogatott fejezetek a számelméletben* c. könyvében ([20], 235-239. oldal.)

19.5. Néhány versenyfeladat

19.1. (M) Van két azonos sugarú körünk, mindkettő fel van osztva 16 darab 22,5°-os körcikkre 16 sugárral. A körcikkek közül mindkét körben nyolc-nyolc feketére van festve, nyolc-nyolc pedig fehérre. (Nem feltétlenül váltakozva jönnek a színek!) Csak úgy helyezhetjük a két kört egymásra, hogy az egyes körcikkek fedjék egymást. (Két körcikk vagy teljesen fedi egymást, vagy nincs közös területű részük.) Bizonyítsuk be, hogy egymásra helyezhetők úgy, hogy legalább nyolc-nyolc egymást fedő körcikknek azonos legyen a színe. (Ki miben tudós? 1984)

19.2. (M) * [11] Egy $3n + 1$ tagú társaság bármely két tagja vagy teniszezni, vagy sakkozni, vagy pingpongozni szokott egymással. Mindegyiküknek n tenisz-, n sakk- és n pingpongpartnere van. Bizonyítsuk be, hogy van a társaságban három olyan ember, akik egymás között mind a három játékot játsszák. (Kürschák J. verseny, 1987)

19.3. (M) [6] Legfeljebb hány valós számból állhat az a sorozat, amelynek bármely hét egymás utáni tagját összeadva pozitív számot, bármely 11 egymás utáni tagját összeadva negatív számot kapunk? (IMO 1977/2)

20. FEJEZET
Vegyes feladatok

20.1. (M) Legyen G egy 2-átmérőjű gráf, és tekintsük a belőle a Mycielski-konstrukcióval kapott gráfot (l. az GR.II.1.11. feladat megoldását). Lehet-e a kapott gráf átmérője nagyobb 2-nél?

20.2. (M) [10] Három fívér egy napon látogatott me egy beteget. Ugyanazon a napon mindegyiknek a felesége is járt ott. Egyikük sem volt ott aznap többször. Mindhárom fívér találkozott a betegágynál mindkét sógornőjével. Bizonyítandó, hogy valamelyikük a feleségével is találkotott ott. (Kürschák-verseny, 1959.)

20.3. (M) Egy 1999 tagú társaságban mindenki a társaság k másik tagjával szimpatizál. Milyen k esetén lehetünk biztosak abban, hogy van két ember, akinek azonosak az érzelmei egymás iránt, vagyis vagy mindketten szimpatizálnak egymással, vagy egyikük sem szimpatizál a másikkal? (Arany Dániel-verseny/H)

20.4. (M) Igaz-e, hogy ha adott az egyenesen 26 intervallum, akkor vagy kiválasztható közülük hat olyan, amelyeknek közös pontja van, vagy kiválasztható hat olyan, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja? (Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny, 1987, döntő.)

20.5. (M) Fel akarjuk bontani a pozitív egész számok halmazát olyan, páronként diszjunkt számpárokra, hogy minden pozitív n egészhez pontosan egy kiválasztott $\{u, v\}$ számpár legyen, amelyben a számok különbségének abszolútértéke pontosan n. Lehetséges-e ez?

És mi a helyzet, ha az összes egész szám halmazát akarjuk ilyen számpárokra bontani?

20.6. (M) Egy sakktáblán „gyenge királyok” állnak. A gyenge király csak a vízszintesen és függőlegesen szomszédos mezőre léphet, ha azon nem áll bábu. Egy adott pillanatban minden bábu visszatért a helyére, miután a tábla minden mezejét bejárta. Biazonyítsuk be, hogy volt olyan pillanat, amikor egyetlen bábu sem állt a helyén.

20.7. (M) Van-e olyan tízjegyű szám, amelynek első jegye megmutatja, hogy a számban hányszor szerepel a 0 számjegy, második jegye megmutatja, hogy hányszor szerepel az 1 számjegy, és így tovább, a tizedik jegye azt mutatja meg, hogy hányszor szerepel a számban a 9 számjegy?

20.8. (M) Általánosítsuk és oldjuk meg 20.7. feladatot n alapú számrendszerre!

20.9. (M) Bizonyítsuk be, hogy egy száz csúcsú konvex poliéder élei megszámozhatók a 1 és -1 számokkal úgy, hogy minden csúcsra teljesül, hogy az oda befutó élekre írt számok szorzata -1.

20.10. Adott két kupac kavics, az egyikben 4, a másikban 10 kő. Ketten a következő játékot játsszák: felváltva lépnek; a soron következő játékos minden olyan kupacot kettéoszt, amelyben legalább két kavics van; az nyer, aki eléri, hogy mindegyik kupacban egy kavics legyen. Kinek van nyerő stratégiája?

20.11. [13] Hanoi tornyai. Van három rúd és n különböző nagyságú korong az első rúdon nagyság szerint sorba rakva. A legnagyobb van legalul. Át kell pakolni a korongokat egy másik rúdra ugyanilyen sorrendben úgy, hogy nagyobb korongot közben sem szabad soha kisebbre tenni. Hány lépésben lehet ezt megtenni?

20.12. (M) Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van! (Arany Dániel-verseny, 2004H)

20.13. (MS) Adjunk a 20.12. feladatra megoldást a 9.6. feladat segítségével!

20.14. Egy 8x8-as sakktáblára 8 bástyát helyeztünk el úgy, hogy semelyik kettő nem üti egymást. Bizonyítsuk be, hogy páros sok bástya áll fekete mezőn! (Arany Dániel-verseny, 2004H)

20.15. (M) [13] Olivér és Xénia egy végtelen sakktáblán a következőt játsszák: O. kezd, és minden lépésben egy O-t tesz valamelyik még üres mezőbe, utána X. tesz két még üres mezőbe egy-egy X-et. Meg tudja-e akadályozni Olivér Xéniát abban, hogy ezer X-et tegyen egymás melletti mezőkbe ugyanabban a sorban, vagy ugyanabban az oszlopban?

20.16. (M) [13] Olivér és Xénia most is a 20.15. feladatban ismertetett játékot játsszák. Meg tudja-e akadályozni Olivér Xéniát abban, hogy végtelen sok X-et tegyen egymás melletti mezőkbe ugyanabban a sorban vagy ugyanabban az oszlopban?

20.17. (MS) * **Kutató munka:**

Megadható-e akárhány általános helyzetű pont a sikon úgy, hogy bármely kettő távolsága egész legyen? (Általános helyzetű pontokon azt értjük, hogy semelyik három nincs egy egyenesen.)

20.18. (M) * [6] Döntsük el, kiválasztható-e az egységkörön 1975 pont úgy, hogy közülük bármely kettő által meghatározott húr hossza racionális szám legyen. (IMO, 1975.)

20.19. (MS) * Bizonyítsuk be, hogy nem adható meg végtelen sok általános helyzetű pont a síkon úgy, hogy bármely kettő távolsága egész legyen. (Általános helyzetű pontokon azt értjük, hogy semelyik három nincs egy egyenesen.)

20.20. (MS) Kiszínezhetők-e a sík racionális rácspontjai két színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy minden függőleges egyenesen csak véges sok piros pont legyen, és minden vízszintes egyenesen csak véges sok piros pont legyen?

20.21. (MS) Hány egymást nem metsző gömbbel takarható el egy pontszerű, minden irányba sugárzó fényforrás? (KöMaL)

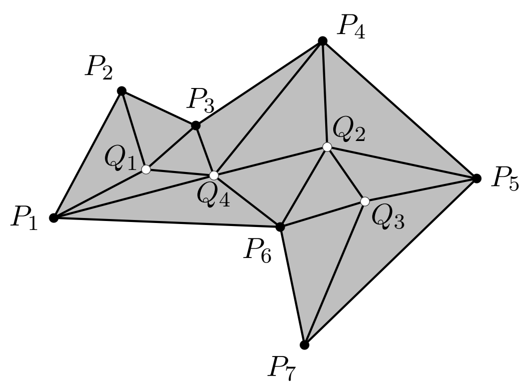
20.22. (S) [15] Book 5.

Legyen adott az n csúcsú P sokszög, legyenek a csúcsai P_1, P_2, P_n. Legyen továbbá adva P belsejében m pont, Q_1, $Q_2, \cdots Q_m$. Ennek az alakzatnak egy háromszögelése azt jelenti, hogy P_i és Q_j pontokat illetve két Q_j pontot összekötő szakaszokat húzunk be, úgy, hogy e szakaszok ne messék egymást, az alakzatot csupa háromszögre bontsák és e háromszögek egyike se tartalmazzon sem a belsejében, sem a határán további P_i vagy Q_j pontot. Lásd az 1. ábrát.

Mutassuk meg, hogy minden ilyen háromszögelésben ugyanannyi lesz a háromszögek száma és fejezzük ki n és m segítségével a számukat.

20.23. (M) ** [12] a) Bizonyítsuk be, hogy $\sum(-1)^i\binom{n}{i}i^k = 0$, ha $k < n$, ahol az összegzés $i = 0, 1, \cdots n$-re történik.

b) Mennyi az összeg értéke $k = n$-re?



20.22.1. ábra.

Segítség, útmutatás

1. A gráf fogalma

1.7. Most az adott telefonon folyt beszélgetések számát kell figyelnünk.

1.9. Először figyeljük meg, mi a különbség e között a feladat között és a között a már bizonyított állítás között, hogy egy társaságban mindig van két ember, aki ugyanannyi másikkal fogott kezet.

1.1. Négy. Ilyen például egy „négyszög”-gráf, azaz az a gráf, amelynek csúcsai egy négyszög csúcsai, élei a négyszög oldalai.

2. Részgráfok és a komplementergráf – izomorfia

2.2. Nem.

2.11. $n(n-1)/2$.

2.4. A tízpontú teljes gráfnak 45 éle van.

2.5. Azokra az n-ekre, amelyekre $n(n-1)/2$ páratlan. Tehát azokra, amelyekre n néggyel osztva 2 vagy 3 maradékot ad.

2.2. Érdemes a gráf helyett a komplementerét vizsgálni.

2.4. A gráfnak nincs éle (üres gráf).

2.8. Egyetlen esetben: ha a részgráf azonos a gráffal.

2.9. L teljes gráf.

3. Összefüggések a fokszám és az élszám között

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

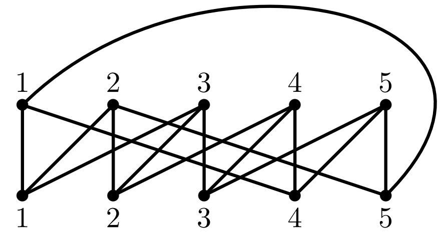
4. Páros gráfok

4.5. a) páros gráf, b) és c) nem.
d) Páros gráf: a „3-ház-3-kút” gráfról, vagyis a $K_{3,3}$ gráfról van szó. Lásd a 2.3. feladatot.

4.6. Igen, ugyanazzal az „osztályozással”.

4.13. Mit árul el a legmagasabb fokú pont a csúcsok eloszlásáról?

4.3. a) L. az 1. ábrát.
b) Minden páros n-re van, a két osztályban egyaránt $n/2$ pont lesz és ha egytől $n/2$-ig megszámozzuk mindkét osztály pontjait, akkor az első osztály i-edik pontját a második osztályból az i, $i+1 \cdots i+k-1$ számú pontokkal kötjük össze, a számozást mod $n/2$ értve.



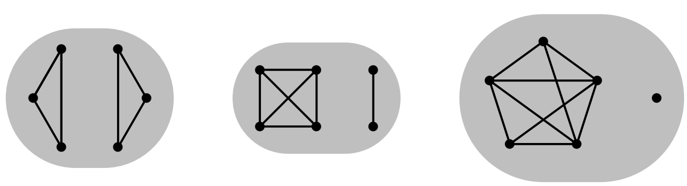
4.3S.1. ábra.

5. Utak, összefüggő gráfok

5.6. a), b) és c) a definícióból következik. d) nem igaz. e) csak „majdnem” igaz: ha például mindkét pont egy-egy egy pontból álló komponens, akkor e) feltétele e két pontra nem teljesül. Ha a gráfban nincs izolált pont, akkor e) már igaz.

5.8. Igen. Ha van ilyen pont, akkor bármely pontból bármely pontba vezet séta, tudniillik ezen a ponton keresztül. De akkor az 5.2. feladat szerint bármely két pont között vezet út is.

5.10. a)-ra jó példa két diszjunkt háromszög, b)-re egy négypontú teljes gráf és egy ettől pontfüggetlen él, c)-re egy ötpontú teljes gráf minusz egy él és egy izolált pont. 10 élű ugyanez, csak az ötpontú komponensben minden él be van húzva. 11 élű viszont nincs. Lásd az 1. ábrát.



5.10S.1. ábra.

5.11. Az állítás megfordítása: ha egy gráf csúcsait bárhogyan bontjuk két nemüres részhalmazra, mindig van a két halmaz csúcsait összekötő él, akkor a gráf összefüggő.

Mind a feladat állítása, mind ez a megfordítása igaz.

5.12. a 3.5. feladat eredménye alkalmazható külön-külön minden komponensre.

6. Elvágó pontok, hídélek

6.4. Az elsőnek két elvágó pontja van, a másodiknak nincs elvágó pontja, a harmadiknak négy elvágó pontja van, a negyediknek nincs elvágó pontja.

6.5. Csak a harmadik gráfnak van hídéle.

6.8. A hídél elhagyásával pontosan két komponens keletkezik. (Ezt használtuk már a 6.1. feladat megoldásánál is.)

Elvágó pont elhagyásával akárhány komponens keletkezhet, mert akárhány összefüggő gráfot „összeragaszthatunk” egy pontjánál.

6.9. Ha a hídél egyik végpontja elsőfokú, akkor az a végpont nem elvágó pont.

6.10. Tegyük fel, hogy xy él hídél és $v(x) \geq 2$ (x nem elsőfokú), legyen továbbá x egy y-tól különböző szomszédja z. xy hídél, tehát x és y között ezen az élen kívül nem vezet más út a gráfban. Másrészt z-ből nem vezethet x-et megkerülő út y-ba, mert akkor ez elé x-et odatéve x-ből is vezetne az xy éltől különböző út y-ba. Tehát a $G - x$ részgráfban z és y különböző komponensben van, így x elvágó pont.

6.11. Nem. A 6.4. feladat gráfjai között találhatunk ellenpéldát.

6.4. A kérdés átalakítható így: Lehetséges-e, hogy egy összefüggő gráf minden körének minden pontja elvágó pont?

A válasz: igen. Bármelyik „napsugár” gráf ilyen, azaz veszünk egy kört és minden pontjából indul egy-egy él egy-egy elsőfokú ponthoz. Például a „Luca széke” gráf, amit a 2.3. feladat megoldásánál az ábra bal oldalán láthatunk.

6.3. Igen. Bármely pontját elhagyva marad egy út, amely az összes többi pontot tartalmazza.

7. Fák, erdők, favázak

7.8. Igen. Lásd az 5.5. feladatot.

7.4. Melyiknek van Hamilton-köre az ábrán szereplő három gráf közül?

7.10. Az állítás a 7.1. feladat d) részéből egyszerűen következik.

7.11. Keressünk olyan feladatot, amelynek állításából ez a feladat azonnal következik.

7.4. Ha egy fa két útjának van két közös pontja, x és y, akkor mindkét út tartalmazza a köztük futó egyetlen utat.

7.5. A gráf körmentes. Ha ugyanis a gráfban van egy kör, akkor vegyük a kör egy $e = xy$ élét. A körben két út fut x és y között, az egyik az e élből áll, a másik viszont nem tartalmazza e-t. Tehát a két útnak két közös pontja van, mégsem út a közös részük.

7.1. G-nek pontosan akkor van az e élt nem tartalmazó faváza, ha $G - e$ összefüggő, azaz ha e nem hídél.

8. Utak, távolság, átmérő.

8.4. Számoljuk meg külön azokat, amelyek az ötpontú osztályban kezdődnek és végződnek, és külön azokat, amelyek a hatpontú osztályban kezdődnek és végződnek.

8.5. Számoljuk meg külön azokat, amelyek az egyik osztályban kezdődnek és végződnek, és külön azokat, amelyek a másik osztályban kezdődnek és végződnek.

8.6. Minthogy tíz fiú van és a lányok és fiúk felváltva ülnek, legfeljebb huszan ültethetők az asztal köré. Ennyi nyilván le is ültethető.

8.7. Egy kör két szomszédos pontja nem lehet azonos osztályból.

8.8. Rajzoljunk két pontdiszjunkt utat és bizonyítsuk be, hogy ha a gráf összefüggő, akkor van olyan út, amely hosszabb e két út hosszának számtani közepénél.

8.9. Tekintsük a gráf egy komponensét és a maradó pontokat.

8.2. Ha a P út két pontja között volna rövidebb út, akkor P-nek e két pont közötti részét kicserélhetjük erre a rövidebb útra, s így P két végpontja között kapunk egy rövidebb sétát. S ebből a sétából már tudunk egy (esetleg még rövidebb, de semmiképp sem hosszabb) utat csinálni P két végpontja között, ami viszont ellentmond annak, hogy P a legrövidebb út a két végpontja között.

8.7. Egy négypontú kör és egy ötpontú kör átmérője egyaránt 2.

8.8. Egy $2k$ pontú kör átmérője k és ugyanennyi egy $2k+1$ hosszú köré is.

8.9. A szabályos tetraédere 1, az oktaédere 2, a kockáé és az ikozaédere 3, a dodekaédere

8.10. a) Elég egy pontra ellenőrizni, hogy minden más pontot elérünk belőle legfeljebb két élen. Az átmérő tehát 2.

b) Elég egy pontra ellenőrizni, hogy két élen nem érünk el minden ponthoz (két pont kimarad), viszont három élen már minden pontot elérünk. Az átmérő tehát 3.

8.11. A teljes páros gráfok átmérője 2, minden más páros gráfban van két különböző osztályba tartozó pont, amelyek nincsenek összekötve, s ezek távolsága legalább 3.

8.12. Mekkora egy teljes páros gráf átmérője?

8.1. A szomszédja minden ponttal össze van kötve.

8.2. Ha minden pont foka legalább kettő, akkor legalább n éle van. Ha viszont van elsőfokú pontja, akkor annak szomszédja minden ponttal össze van kötve, tehát legalább $n-1$ éle van. Az n pontú csillag mutatja, hogy ez lehetséges is. Tehát a válasz: $n-1$.

8.3. 2.

9. Független pontok és élek

9.5. Egy $2k+1$ pontú kör bármely pontját elhagyva is van még k független él.

9.6. Vegyünk fel egy élt és nézzük meg, hol futhat a többi él.

A maximum: $n=3$-ra három, különben $n-1$.

9.7. Vegyünk egy maximális független élrendszert és vizsgáljuk meg, hogy egy független él két végpontjából hány él indulhat ki.

9.9. A 9.9. feladat megoldásában csak azzal az esettel kell alaposabban foglalkoznunk, amikor a két független él végpontjai között öt vagy hat él fut, különben legfeljebb $2n-4$ él van.

9.9. Egy 2-reguláris gráf pontdiszjunkt körökből áll. Egy körben pontosan akkor van teljes párosítás, ha páros.

9.2. Következik a 9.1. feladatból.

9.5. a) $n-1$.

b) 4. Lásd a 9.4. feladatot.

c) 3.

d) $n+1$.

9.8. a) Egy háromszög már ellenpélda $k = 1$ esetben. Ebből minden esetre tudunk ellenpéldát mutatni a)-ra is, b)-re is.

c) Vegyünk egy maximális független élrendszert.

10. Vegyes gráfelméleti feladatok

10.3. Alkalmazzuk először a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget, majd azt az Euler-tételt, hogy a fokszámok összege egyenlő az élszám kétszeresével.

10.1. Ha van zárt Euler-séta, akkor minden pontba pontosan annyiszor megyünk be, ahányszor kijövünk belőle, tehát minden pontból páros sok él indul.

Az ellenkező irányhoz vegyünk egy lehető leghosszabb „jó” sétát (tehát olyan zárt sétát, amelyben egyetlen él sem szerepel kétszer). Erről bizonyítsuk be, hogy nem marad ki belőle él.

10.2. a): 7.

b): 11.

11. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt! Bevezető feladatok

11.1. Nyilván feltehető, hogy a számok nem negatívak, sőt, azt is feltehetjük, hogy az egyik csúcson a nulla áll.

11.2. Próbálkozzunk a 11.1. feladat megoldásaiban bevált ötlettel! Melyik alkalmazható itt is?

11.3. Melyik csúcsból érdemes most elindulni? Amelyiken (= az egyik olyanból, amelyiken) a legnagyobb szám áll, vagy amelyiken a legkisebb?

11.4. A 11.1. feladat 11.1M2. megoldását érdemes vizsgálni.

11.5. Gondoljuk meg, mit jelent gráfokra a 11.4. feladat megoldásában megfogalmazott feltétel!

11.6. Gondoljunk a 11.3. feladatra.

11.8. Gondoljunk a végtelen számtani sorozatokra, s közülük is a legegyszerűbbre!

11.9. A csúcsokra írt számoknak melyik tulajdonsága az, amit véges gráfoknál tudtunk használni, végtelen gráfoknál nem?

11.1. Minél több élű egy lap, annál több szomszédos lapja van.

11.2. Állítsuk nagyság szerint sorba a számokat!

11.6. Vegyük a(z egyik) legnagyobb területű háromszöget.

11.7. Vegyük a halmaz egy AB átmérőjét.

11.1. Tudunk mondani egy időpontot, amikor mindenki ott volt?

11.2. Az előző – 11.1. – feladat gondolatmenetét alkalmazzuk most is!

11.4. Melyik korábbi feladat átfogalmazásáról van szó?

11.1. Figyeljünk arra, hogy egy tanuló hány tanulót ismer *egy* másik iskolából.

11.2. Gondolatban próbáljunk meg egy tetszőleges abc számot letörléssel kiolvasni. Honnan fogjuk az a-t kiválasztani.

12. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt! Gráfelmélet

12.1. A feladat szövege sugallja, hogy melyik versenyzőt érdemes nézni.

12.1. Hogyan keresnénk „mohó algoritmussal” kört?

12.3. Következik a 12.2. feladat állításából.

12.4. A 12.3. feladathoz hasonlóan látható be a 12.2. feladatból.

12.6. Alkalmazzuk a 12.1. feladat megoldását!

12.2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf teljesíti a feladat fokszámfeltételét és van Hamilton-útja, akkor van Hamilton-köre is.

12.4. Használjuk a 12.2. feladat megoldásának gondolatmenetét.

12.1. Ha nem volna három ilyen csapat, akkor bármely csapatra igaz volna, hogy azok a csapatok, amelyekkel ő játszott, nem játszottak egymással. Igaz volna ez arra a csapatra is, amelyik a legtöbbször játszott.

12.2. Ez a feladat a 12.1. feladat általánosítása. Használjuk az ottani megoldás gondolatmenetét.

12.3. A bizonyítás hasonló a 12.2. feladat bizonyításához.

12.1.

1. segítség, útmutatás. Elég minden színből egy élt venni.

2. segítség, útmutatás. „Ha n betűt látunk, milyen bizonyítási módszerrel érdemes kísérleteznünk?”

12.2. A 8.8. feladat alapján visszavezethetjük a feladatot a 11.1. feladatra.

13. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt!

13.5. Vegyük észre, hogy az egyenlet homogén (minden tag harmadfokú az ismeretlenekben), ezért az ismeretlenek közös nevezőjének köbével végigszorozhatunk, s így egy diofantikus egyenlethez jutunk, ahol már alkalmazhatók oszthatósági meggondolások.

13.6. Az ottani megoldás szinte változtatás nélkül átvihető erre az általános esetre is.

13.1. Vegyük a sokszög konvex burkát.

13.2. Miért nem jó két legközelebbi csúcsot összekötő átló?

Miért nem feltétlenül jó egy konvex csúcs két szomszédját összekötő átló? Hogyan javítható mégis ez az ötlet?

13.4. Rajzoljuk fel a P pontot, az AB oldal egyenesét és tegyük fel, hogy P merőleges vetülete az AB oldal B-n túli meghosszabbítására esik. Mit mondhatunk ekkor a BC félegyenes pontjairól, ahol C a következő csúcsot jelöli?

13.8. Gondoljunk a 13.4. feladat megoldására.

13.10. Zárt ponthalmazról van szó, ezért van átmérője, azaz olyan PQ szakasz, amelynek két végpontja a ponthalmazhoz tartozik, és a ponthalmaz semely két pontja nem határoz meg hosszabb szakaszt.

13.11. A négyzetlapok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatunk. A kezdő lépés triviális.

Ezután az indukciós lépéshez keressünk olyan négyzetet, amelyről garantálni tudjuk, hogy csak két másik négyzettel van közös pontja. Ezt elhagyva megy az indukció.

13.13. Véges sok kör között van legnagyobb. Mit segít ez?

13.14. Tegyük fel, hogy találtunk egy $P_1P_2 \ldots P_n$ szabályos rács-n-szöget. Próbáljunk ebből egy kisebb szabályos rács-n-szöget előállítani.

13.15. Vegyük a ponthalmaz egy támaszegyenesét.

14. Tetszőlegesen sok és végtelen sok

14.4. A megoldásban csak a különböző tagokból álló (tehát nem nulla differenciájú), pozitív számokból álló számtani sorozatokra szorítkozunk.

Ha egy számtani sorozat kettővel kezdődik, akkor a következő két eleme közül legalább az egyik páros és nagyobb kettőnél, tehát nem prím.

Ha egy számtani sorozat hárommal kezdődik, akkor a negyedik tagja biztosan osztható hárommal (MIÉRT?) és nagyobb háromnál, tehát nem prím.

Ha egy számtani sorozat öttel kezdődik, akkor hanyadik tagja lesz biztosan osztható öttel (és nagyobb ötnél)?

Ha egy számtani sorozat p-vel kezdődik, akkor hanyadik tagja lesz biztosan osztható p-vel (és nagyobb p-nél)?

14.5. Nyilván elég tetszőleges pozitív egész n-re mutatni n egymás utáni pozitív egész számot, amelyek mindegyike összetett szám.

14.6. Próbáljuk meg a 14.5. feladat megoldásának gondolatmenetét alkalmazni: keressünk olyan x pozitív egész számot és n darab olyan (egynél nagyobb) számot, amelyre $x + i$ osztható az i-edik szám négyzetével.

14.7. Próbáljuk meg a 14.6. feladat megoldásának gondolatmenetét alkalmazni: most azt kell elérnünk, hogy $x + i$ az i-edik prímszámmal osztható legyen, de négyzetével ne legyen osztható.

14.8. Ha egy szám sok „kis” prímszám szorzata, mit mondhatunk az eggyel nagyobb szám prímosztóiról és osztóinak számáról?

14.9. Mit tudunk mondani $d(n-1)$-ről, ha n-et úgy választjuk, ahogyan az előző feladat megoldásában választottuk?

14.1. Használhatunk-e hasonló gondolatot, mint a 14.1. feladat megoldásában?

14.3. A feladat látszatra ugyanúgy a 14.3. analogonja, ahogy az előző – 14.1. – feladat a 14.1. feladat analogonja, s ennek megfelelően azt várjuk, hogy erre a kérdésre is igenlő a válasz. Lehet, hogy az analógia itt csalóka?

14.4. Hogyan lehetne erre a feladatra átvinni a 14.1. feladat megoldásának gondolatmenetét?

14.5. Próbáljunk olyan végtelen egyszerű gráfot rajzolni, amiben minden pont foka kettő és összefüggő!

14.6. Próbáljunk ellenpéldát rajzolni! Ki tudjuk-e használni, hogy végtelen sok pontja van a gráfnak?

14.7. Itt látszólag kihasználhatnánk, hogy ha minden kör hossza páros, akkor a gráf minden véges részgráfja két színnel jól színezhető, és elkezdhetnénk ennek alapján színezni a pontokat. Csakhogy elképzelhető, hogy ennek során egy pont színét állandóan váltogatnunk kell, s akkor bajban vagyunk, hogy mi is legyen e pont színe. Nézzük inkább végig a véges gráfokra szóló bizonyítást, nem akad-e el valahol?

14.9. (i)-hez azt kell belátni, hogy az „x és y pont nincs összekötve éllel” reláció ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok száma legfeljebb három. Fogalmazzuk meg pontosan, hogy mit jelent ez a reláció.

Másrészt az (i) állítás biztosítja, hogy ha egy végtelen gráf „kritikus”, akkor három színnel jólszínezhető. Igaz-e, hogy minden olyan gráf, amelynek minden véges részgráfja három színnel jólszínezhető, kiegészíthető „kritikus” gráffá?

14.10. Az A) feladat megoldásához használjuk a végtelen skatyulaelvet.

B) feladat: Könyen előfordulhat, hogy A) eljárásával *bármely* ponthoz hozzárendelhető *ugyanaz* a szín. Mutassunk erre példát.

C) feladat: Ha egy elem végtelen sok halmazban nem szerepel, akkor ezt a végtelen sok halmazt kiválasztva az unió kisebb lesz az összes halmaz uniójánál. Tehát arra kell törekednünk, hogy minden elem csak véges sok halmazban NE szerepeljen.

D) feladat: Válasszuk G_n-nek az első n csúcs által feszített részgráfot és ezekre alkalmazzuk A) állítást, majd használjuk C)-t, és ismételjük ezt az eljárást a második, a harmadik stb. pontra.

14.1. Próbáljunk meg az előző feladat megoldásában használt gondolatmenethez hasonlót találni.

14.2. A „bőség zavara” a nehézség!

14.3. Mi a különbség e között a feladat között és az GR.II.1.1. feladat között?

14.4. Első lépésként gondoljuk meg,

a) milyen nehézségbe ütközünk, ha azt mondjuk: minden n-re az első n pontot úgy színezzük, ahogy azt az általuk feszített részgráf jólszínezése diktálja;

b) milyen jólszínezésekre van szükségünk ahhoz, hogy ez a nehézség ne lépjen fel?

14.5. Alkalmazható-e az előző (=14.4.) feladat bizonyításának gondolatmenete vagy a 14.9. feladat megoldásának gondolatmenete általában?

15. Kombinatorikus geometria

15.5. Ha ügyesen választjuk el egy egyenessel a pontokat, akkor mindkét oldalán alkalmazni tudjuk a 13.15. feladat megoldását!

15.1. Érdemes meggondolni, mi köze a feladatnak a 11.4. feladathoz.

15.3. Jelöljünk ki egy-egy pontot minden három halmaz metszetéből és alkalmazzuk rájuk a konvex halmazoknak azt a tulajdonságát (ami definiáló tulajdonságuknak is vehető), hogy ha egy konvex alakzat tartalmazza az A és a B pontot, akkor tartalmazza az egész AB szakaszt. Ebből következik az is, hogy ha egy konvex alakzat tartalmazza az A, B és C pontot, akkor tartalmazza az egész ABC háromszöget is.

15.4. Teljes indukciót használhatunk, mert a 15.3. feladatból négy halmazra már tudjuk az állítást. A „csel" az, hogy a 15.3. feladatot még egyszer alkalmazhatjuk. De hogyan?

15.9. Ha egy 1/2 oldalú négyzet teljesen az egységkörben van, és két pontja a kör kerületén van, akkor ez a két pont mi lehet?

16. Az egyszerű skatulyaelv

16.2. Használjuk a skatulyaelvet és a kettes számrendszert.

16.4. Tekintsük a mezőket határoló egyeneseket, s nézzük, ezek közül hányat metszhet egy ilyen egyenes.

16.5. Vizsgáljunk három egymás utáni számot.

16.7. Rendeljünk ügyesen a „nagy" számokhoz „kisebbeket" úgy, hogy egy-egy „nagy" szám és a párja kettőhatvány legyen, és a kimaradó „kis" számokra alkalmazhassunk teljes indukciót!

16.8. Először bizonyítsuk be, hogy van olyan a szám, amely több, mint 5^4 olyan szelvényen van bejelölve.

16.1. A sorozat minden tagjához rendeljük hozzá a belőle induló leghosszabb szigorúan monotonan növekvő sorozat hosszát.

16.2. Az előző (=16.1.) feladat megoldásából pontosan ez jön ki. Azok a tagok, amelyekhez ugyanazt a számot rendeltük (tehát amelyekből ugyanolyan hosszú szigorúan monotonan növekvő sorozat indul), egy-egy monoton csökkenő sorozatot alkotnak.

17. A skatulyaelv a kombinatorikus geometriában

17.1. Próbáljuk a skatulyaelvet használni. Ehhez ügyesen kell négy részre osztani a négyzetet.

17.2. Mit tudunk mondani, ha egy kört hét sugárral hét részre osztunk?

17.3. Ha a négyzetet sikerül felbontanunk 25 darab olyan kisebb négyzetre, amelyek átlója kisebb kettőnél, akkor kész vagyunk.

17.4. Próbáljuk meg felbontani a háromszöget 12 egybevágó háromszögre, amelyek mindegyike lefedhető egy $1/\sqrt{3}$ átmérőjű körlappal.

Vagy egészítsük ki a háromszöget egy téglalappá és azt fedjük le 15 kisebb téglalappal.

17.2. A 17.1. feladatban láttuk, hogy ha egy alakzat átmérője kisebb egynél, akkor a háromszög három csúcsa közül legfeljebb egyet fedhet le. A háromszög lefedéséhez tehát legalább három kisebb átmérőjű alakzat kell. Ugyanott láttuk azt is, hogy három kisebb átmérőjű alakzat (háromszög) elég is a lefedéshez.

17.4. A körlemez kerületét érdemes vizsgálni.

17.5.

1. segítség, útmutatás. Gondoljunk a 17.2. feladat megoldására.

2. segítség, útmutatás. Bizonyítsuk be, hogy hat körlappal nem lehet lefedni. Másrészt hét körlap elég: vegyünk egy, a körbe írható szabályos hatszöget, és azt a hat kört, amelynek átmérője e hatszög egy-egy oldala. A hetedik körlap középpontja legyen a kör középpontja (sugara pedig az eredeti kör sugarának a fele). Bizonyítsuk be, hogy ezek együtt lefedik a teljes kört.

17.1. Tekintsük az adott pontok konvex burkát.

17.2. Tekintsük az adott pontok konvex burkát.

17.3. Tekintsük az adott pontok konvex burkát.

17.5. Ha a négy pont közül semelyik három nincs egy egyenesen, alkalmazható a 17.1. feladat.

17.6. Ha a négy pont közül semelyik három nincs egy egyenesen, alkalmazható a 17.2. feladat.

17.7. Bárhogy választunk ki négyet az öt pont közül, ezek meghatároznak egy nem-hegyesszögű háromszöget. Hány különböző háromszöget kaphatunk így?

17.8. Alkalmazzuk a 17.7. feladat állítását és megoldásának gondolatmenetét!

17.9. A 17.8. feladat megoldásának gondolatmenete most is alkalmazható.

17.10. A 17.9. feladat megoldásának gondolatmenete most is alkalmazható.

17.11. Használjuk a 17.1. feladatot.

17.13. A megoldás pontosan úgy megy most is, mint a 17.12. feladatban.

17.3. Ha csak kétféle távolság van, akkor az egyik legalább háromszor lép fel. Tekinthetjük azt a gráfot, amelynek élei az ilyen hosszúságú szakaszok.

17.4. A négy 1/2 sugarú kör területének összege pontosan kiadja a kör területét. Tehát a nagy körlemez minden belső pontját tartalmaznia kell valamelyik kis körnek. Ez azt is jelenti, hogy bármelyik kis körnek érintkeznie kell egy másik kis körrel. De akkor a közös érintőnek az érintőhöz közeli pontját nem tudjuk 1/2 sugarú körrel lefedni úgy, hogy az ne messe valamelyik érintett kis kört.

18. Skatulyaelv a kombinatorikus számelméletben

18.2. Most a három koordináta utolsó számjegyeire összesen ezer lehetőség van.

18.6. A páros számok között nincs kettő, amely relatív prím egymáshoz. Ez n szám. Ha viszont legalább $n+1$ szám van kiválasztva, akkor van közöttük kettő, amelyik szomszédos.

18.7. Vegyük észre, hogy a (2,3,4,6) számok közül akárhogyan választunk ki hármat, valamelyik kettőnek van egynél nagyobb közös osztója. Hogyan általánosítható ez?

18.8. A 18.7 feladatban használt konstrukció most azt adja, hogy $4n$ számot ki tudunk választani úgy, hogy bármely három között legyen kettő, amelyek egymáshoz nem relatív prímek. Annak bizonyításához, hogy $4n+1$ számot már nem lehet kiválasztani, használjunk teljes indukciót.

18.11. Vegyük a számok „páratlan részét”, ezek között van két azonos.

18.12. A feladat mindkét állításának bizonyításához érdemes a 18.11. feladatra emlékezni.

18.13. Használjuk a 18.11. feladatot.

18.14. Egy szám akkor négyzetszám, ha a prímfelbontásában minden kitevő páros. Ezért elég a számok prímfelbontásában a kitevők paritását vizsgálni.

18.16. Feltehető, hogy a $3n$ szerepel a kiválasztott számok között (MIÉRT?). Nézzük meg, melyik számokat zárja ez ki és állítsuk jó párokba a többi számot.

18.17. Használjuk a fejezet elején kimondott „számelméleti skatulyaelvet”!

18.18. A feladat állítása helyett elég azt bizonyítani, hogy ha adva van kilenc – nem feltétlenül különböző – olyan számpár, amelynek mindkét koordinátája 0, 1 vagy -1, akkor van köztük három, amelyek első koordinátáinak összege is, második koordinátáinak összege is osztható hárommal.

18.19. Bizonyítsuk be, hogy két, formálisan különböző szám értéke nem lehet azonos. Majd, számoljuk össze, hány darab $2n$-jegyű szám van és mekkora a legkisebb és a legnagyobb szám, amit $2n$-jegyű számmal felírhatunk.

18.20. Alkossunk egy újabb sorozatot azokból a számokból, amelyek a második sorozat elemeit n-re egészítik ki. Erre és az első sorozatra alkalmazzuk a skatulyaelvet.

18.22. Használjuk az előző feladatot és gondoljuk meg, hány különböző maradékot adnak a négyzetszámok egy p prímszámmal osztva.

18.24.

1. segítség, útmutatás. Valójában azt kell bizonyítani, hogy van olyan egy és n közötti b egész szám, amelyre $b\alpha$ a hozzá legközelebbi egész számtól $1/n$-nél kevesebbel tér el.

2. segítség, útmutatás. Helyettesítsünk a 16.8. feladatban mind az $n-1$ valós szám helyett α-t és alkalmazzuk az ottani megoldását.

18.25. Könnyen látható, hogy Dirichlet approximációs tétele (l. a 18.24. feladatot) ad ilyen törtet. És miért ad végtelen sokat is?

18.26. Írjuk fel, hogy mit jelent az állítás, ha kibontjuk a $||$-jelek közül!

18.27. Először osszunk végig a számok közös osztójával. Ezután két eset van: azt az esetet, ha van a számok között p-vel osztható, könnyen elintézhetjük. Ha viszont ilyen nincs, akkor van két különböző $a_i > a_j$, amelyek p-vel osztva egyforma maradékot adnak. Használjuk azt, hogy az $a_i/(a_i, a_j)$ hányados nevezője megegyezik $(a_i - a_j, a_j)$-vel.

18.28. Nem nehéz belátni, hogy ha legalább 12 különböző szám van (tehát nem is kell 1997), akkor legfeljebb kilenc páronként relatív prím szám van közöttük.

A feladat nehezebb része konstrukciót találni arra, hogy kilenc darab, páronként relatív prím szám legyen is közöttük. Jó sok prímet kell venni és azok szorzataival operálni.

18.31. A 16.1. feladat megoldása kis változtatással most is megy.

19. Leszámlálás

19.2. Mit mondhatunk az első négy jegyből alkotott számról?

19.3. Szitáljunk!

19.4. Szitálhatnánk is, de könnyebb azokat megszámolni, amelyekben nem fordul elő 1-es.

19.5. Lehetőségek:

1)Rögzítsük x értékét, és számoljuk ki, rögzített x esetén hány megfelelő y érték van. És összegezzük a kapott megoldásszámokat.

2) Számoljuk ki, hogy az $\mid x \mid + \mid y \mid = k$ egyenletnek hány egész megoldása van, és ezeket összegezzük.

3) Rajzoljuk fel a koordinátasíkon az egyenlőtlenség által határolt tartományt és számoljuk ki, hány rácspont esik bele.

A megoldásszám: 1 998 001.

19.9. Lásd a 19.8 feladatot!

19.2. Használjuk a 11.2. gondolatmenetét, vagyis használjuk ki, hogy minden kéttagú összeg $\leq 2n - 1$.

19.3. Most azt használhatjuk, hogy minden kéttagú különbség is különböző.

20. Vegyes feladatok

20.13. Legyenek a nagyapók a gráf pontjai!

20.17. Segít-e a 20.18. feladat?

20.19. Ffixáljunk három pontot és nézzük meg, hol helyezkedhet el a többi adott pont.

20.20. Ki tudjuk-e színezni megfelelően a sík egész rácspontjait? És ha igen, elég-e ez a feladat megoldásához?

20.21. Gondoljunk a tetraéderre!

20.22.

1. segítség, útmutatás. A belső pontok m számára vonatkozó teljes indukcióval könnyen belátható, hogy a háromszögek száma $n + 2m - 2$, mert minden új belső pont kettővel növeli a szükséges háromszögek számát.

2. segítség, útmutatás. A P_i és Q_j pontoknál levő szögek összeszámolásával is kijön, hogy a háromszögek száma $n + 2m - 2$.

Megoldások

1. A gráf fogalma

1.1. Öttagú társaságban mindenki legfeljebb négy mérkőzést játszhatott, hiszen semelyik két ember nem játszott kétszer egymással.

Ha van olyan, aki már minden mérkőzését lejátszotta, akkor már mindenki játszott legalább egy mérkőzést. Tehát mindenki egy, kettő, három vagy négy mérkőzést játszhatott. Ez négy lehetőség, de a társaság öttagú, tehát vannak ketten, akik ugyanannyi mérkőzést játszottak.

Ha nincs olyan, aki már minden mérkőzését lejátszotta, akkor mindenki nulla, egy, kettő vagy három mérkőzést játszhatott. Ez ismét csak négy lehetőség, tehát vannak ketten, akik ugyanannyit játszottak.

Az állítás ugyanígy bizonyítható akárhány tagú társaságra. Például hattagú (tíztagú) társaság esetén mindenki nulla, egy, kettő, három, négy, vagy öt (nulla, egy, kettő ... vagy kilenc) mérkőzést játszhatott. Ez hat (tíz) lehetőség. Azonban ha van olyan tagja a társaságnak, aki már minden mérkőzését lejátszotta, akkor már mindenki játszott legalább egy mérkőzést, tehát csak öt (kilenc) lehetőség marad. Ha viszont nincs olyan tagja a társaságnak, aki minden mérkőzését lejátszotta, akkor megint csak öt (kilenc) lehetőség marad. Mivel a társaság hattagú (tíztagú), mindkét esetben lesz két ember, aki ugyanannyi mérkőzést játszott.

1.2. Legyen a társaság tagjainak a száma n és nézzük, egy ember hány mérkőzést játszhatott. Nyilvánvaló, hogy legfeljebb $n-1$-et, hiszen mindenkivel legfeljebb egyszer játszott. Másrészt elképzelhető az is, hogy még egyet sem játszott. Tehát az általa játszott mérkőzések száma nullától $n-1$-ig bármely szám lehet.

Nem lehet azonban a társaságban egyszerre olyan, aki még egyetlen mérkőzést sem játszott és olyan, aki már mindenkivel játszott. Vagyis nem lehet egyszerre olyan is, aki nulla és olyan, aki $n-1$ mérkőzést játszott. Így két lehetőség van: vagy 1 és $n-1$ között van mindenki mérkőzéseinek a száma, vagy 0 és $n-2$ között. A társaság tagjainak a száma azonban n, tehát a „skatulyaelv” szerint van közöttük kettő, aki ugyanannyi mérkőzést játszott.

1.3. Legyen a társaság tagjainak a száma n és nézzük, egy embernek hány ismerőse lehet a társaságban. Nyilvánvaló, hogy legfeljebb $n-1$, másrészt elvileg elképzelhető az is, hogy egyetlen ismerőse sincs (bár nem világos, ebben az esetben hogyan kerül a társaságba). Tehát ismerősei száma nullától $n-1$-ig bármely szám lehet.

Nem lehet azonban a társaságban egyszerre olyan, aki senkit sem ismer és olyan, aki mindenkit ismer. Vagyis nem lehet egyszerre olyan is, akinek nulla és olyan, akinek $n-1$ ismerőse van. Így két lehetőség van: vagy 1 és $n-1$ között van mindenki ismerőseinek a száma, vagy 0 és $n-2$ között. A társaság tagjainak a száma azonban n, tehát a „skatulyaelv” szerint van közöttük kettő, akinek ugyanannyi ismerőse van a társaságban.

1.4.

1. megoldás. Rendeljük most hozzá a társaság minden tagjához azt a számot, ahány tagját a társaságnak nem ismeri. A számok most is nulla és $n-1$ között változhatnak. Viszont most sem lehet, hogy van olyan is, akinek nulla számú „nem-ismerőse” van (vagyis mindenkit ismer), és olyan is, akinek $n-1$ számú „nem-ismerőse” van (vagyis senkit sem ismer). Tehát ismét csak

$n-1$ különböző szám közül kerülhet ki a „nem-ismerősök” száma. A társaság viszont n tagú, tehát van két ember, akinek ugyanannyi „nem-ismerőse” van, vagyis aki ugyanannyi embert nem ismer a társasgából.

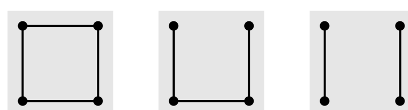
2. megoldás. Az állítás egyszerű következménye az 1.3. feladatnak. Hiszen ott beláttuk, hogy mindenképp van a társaságban két ember, akinek ugyanannyi az ismerőse, de akkor ezeknek ugyanannyi a „nem-ismerőse” is.

1.5. Az 1.3. feladatban csak az volt az érdekes, hogy két ember ismeri-e egymást vagy sem, az 1.2. feladatban csak az az érdekes, hogy két ember játszott-e egymással vagy sem. A megoldás tehát pontosan ugyanaz lesz, ha az „ismerősök” száma helyett a „sakkpartnerek” számát tekintjük. Ugyanígy az 1.4. feladat első megoldásában csak az volt érdekes, hogy hány „nem-ismerőse” van egy-egy embernek, vagyis itt ezzel helyettesíthető a „sakkpartnerség”.

1.2. Egy (véges) egyszerű gráfban mindig van két azonos fokú pont.

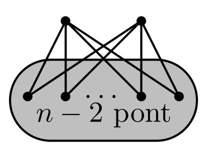
1.2. Egy ilyen gráfban minden pont foka egy vagy kettő. Ha minden pont foka kettő, akkor csak egyetlen ilyen gráfot tudunk rajzolni (egy „négyszöget”). Ha minden pont foka egy, az azt jelenti, hogy a gráf két közös pont nélküli élből áll. Végül marad az az eset, ha két pont foka egy, kettőé kettő, így a „Z betűt” kapjuk.

Összesen tehát három megfelelő gráf van. Lásd az 1. ábrát.



1.2M.1. ábra.

1.4. $n = 1,2,3$ esetén nincs ilyen. $n \geq 4$ esetén a $K_{2,n-2}$ teljes páros gráf megfelel. L. a **??**. ábrát.



1.4M.1. ábra.

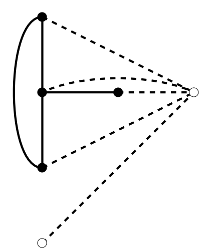
1.6. $n = 1,2$ esete triviális. $n = 3$-ra megfelel például az a gráf, amely egyetlen élből áll. $n = 4$-re megfelel az a gráf, amelyet úgy kapunk, hogy egy „háromszög” egyik csúcsáról „lelógatunk” egyetlen élt.

Általában állapítsuk meg a következőt. Ha a gráfban egy kivétellel minden fokszám különböző, akkor van benne telített pont vagy izolált pont. A két eset bizonyos értelemben szimmetrikus (l. az 1.5. feladat megoldását), ezért feltehetjük, hogy van telített pont. Tegyük fel, hogy egyetlen telített pont van. (Megjegyezzük, hogy szintén az 1.5. feladat szerint a keresett gráfban biztosan egy van.) Vegyük észre továbbá, hogy a keresett gráfban minden fokszám előfordul egytől $n-1$-ig.

Hagyjuk most el a gráfból a telített pontot a belőle futó élekkel együtt. Így a megmaradó pontok fokszáma eggyel csökken. Ez azt jelenti, hogy minden fokszám előfordul nullától $n-3$-ig. (Az $n-2$ fokszám kimarad, mert az egyetlen telített pontot elhagytuk.) Ez a következőket jelenti. Egyrészt van izolált pont, másrészt ezt elhagyva egy olyan $n-2$ pontú gráfot kapunk, amelyben minden fokszám előfordul egytől $n-3$-ig. Vagyis: egy kettővel kevesebb pontú gráfot, amelyre igaz a feladat feltétele!

Ez viszont azt jelenti, hogy ha már megkonstruáltunk egy $n-2$ pontú G_{n-2} egyszerű gráfot, amelyben pontosan egy azonos fokszámú pontpár van és nincs izolált pont, akkor ebből a következő módon nyerhetünk egy n pontú, ugyanilyen tulajdonságú G_n egyszerű gráfot: először hozzáveszünk G_{n-1}-hez egy izolált pontot, az így kapott $n-1$ pontú G' gráfban továbbra is egyetlen azonos fokszámú pontpár lesz. Ezután ehhez a gráfhoz hozzáveszünk még egy pontot és azt összekötjük az eredeti gráf minden pontjával. Így minden pont fokát eggyel növeltük, és az új pont kivételével nem lesz telített pont (hiszen előtte volt izolált pont, tehát G'-ben minden pont foka legfeljebb $n-3$). Végül a kapott G_n gráfban nincs izolált pont, mert van telített pont.

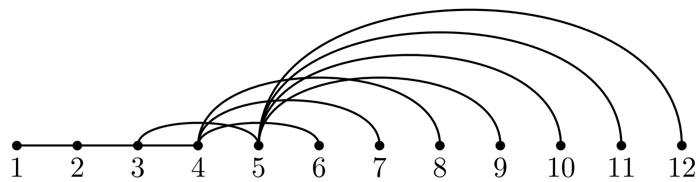
Mivel $n = 1,2,3$-ra könnyen találtunk a feladatnak megfelelő példát, amelyben nincs izolált pont, ebből már minden n-re felépíthetünk egy-egy megfelelő gráfot, amelyben nincs izolált pont. Az 1. ábra mutatja, hogyan kapunk a négypontú példából hatpontú példát.



1.6M.1. ábra.

1.3. Vezessük be a „petákot”: ez 100 Ft-ot jelent. Ekkor a társaság minden tagja egy-egy petákot ad a társaság öt másik tagjának. Azt kell bebizonyítanunk, hogy van két olyan ember, aki ugyanannyi embertől kapott egy-egy petákot. Magának senki nem adott ajándékot, tehát mindenki legfeljebb nyolc másiktól kaphat ajándékot. Kilencen vannak, így ha mindenki más számú petákot kapott, akkor rendre 0,1,2,3,4,5,6,7,8 petákot kaptak az egyes emberek. Ez összesen 36 peták. Viszont ha mindenki 5-5 petákot adott, akkor összesen 45 petákot adtak. Ez lehetetlen, tehát valóban van két tagja a társaságnak, akik ugyanannyi petákot kaptak.

1.4. Legyenek a gráf pontjai a pozitív egész számok. Az 1-es pontot kössük össze a kettessel, mással ne kössük össze. Így fokszáma 1 lesz. A kettes pontot kössük össze a hármas ponttal, több ponttal ne kössük össze. Így a kettes pont fokszáma kettő lesz. A hármas pontot kössük össze még a négyes és az ötös ponttal, így a fokszáma három lesz. Ezt az eljárást akarjuk folytatni úgy, hogy az n-es számú pont fokszáma pontosan n legyen. Tegyük fel, hogy az első $n-1$ pont fokszáma megegyezik a számával (az egyes pont foka egy, a kettesé kettő stb.) és a további pontok fokszáma egy ideig egy, a nagyobb számúaké pedig nulla. Most az n-es pont következik. Ez egyetlen korábbi ponttal van összekötve. Válasszuk ki az első $n-1$ darab olyan pontot, amelybe még nem fut él és kössük össze az n-es pontot ezekkel. (Az első öt lépést mutatja az 1. ábra.) Így továbbra is igaz, hogy az első n pont fokszáma megegyezik a számával és a következő pontok közül néhány fokszáma egy, a továbbiaké nulla. Az eljárás tehát vég nélkül folytatható. A végtelen eljárás eredményeképpen létrejövő gráfban már minden pont fokszáma megegyezik a számával, tehát bármely két pont fokszáma különböző. Végtelen gráfokra tehát nem mindig igaz az állítás.



1.4M.1. ábra.

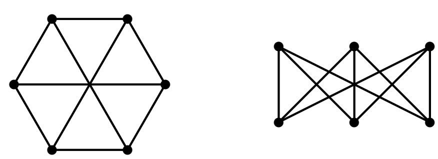
2. Részgráfok és a komplementergráf – izomorfia

2.3. Igen. Ültessünk le egy kerek asztal köré hat embert, akik közül senki nem ismer senkit. Ezután ismertessünk össze mindenkit a két szomszédjával és a vele szemközt ülővel.

A másik lehetőség: állítsunk szembe egymással három lányt és három fiút, akik közül senki nem ismer senkit, majd ismertessük össze a lányokat a fiúkkal.

Megjegyzés. Az utóbbi esetben is leültethetők a kerek asztal köré úgy, hogy mindenki a két szomszédját és a vele szemben ülőt ismerje: felváltva ültetjük a fiúkat és a lányokat. Vagyis: a kétfajta társaság ugyanaz – a hozzájuk tartozó két gráf izomorf.

A kapott gráf az úgynevezett „3-ház-3-kút” gráf. L. a **??**. ábrát.



2.3M.1. ábra.

2.4. Ha n páros és legalább négy, akkor a 2.3. feladat megoldásában adott konstrukció működik: veszünk n embert, akik közül senki sem ismer senkit, leültetjük őket egy kerek asztal köré és mindenkit összeismertetünk a két szomszédjával és a vele szemközt ülővel.

Ha n páratlan, akkor ez a konstrukció nem működik, nincs „szemközt ülő”.

Megmutatjuk, hogy egyáltalán nincs ilyen társaság. Ha ugyanis össze akarjuk számolni, hogy hány ismeretség van a társaságban, akkor ezt megtehetjük úgy is, hogy összeadjuk, ki hány embert ismer és elosztjuk kettővel (hiszen minden ismeretség kölcsönös, így minden ismeretséget kétszer számoltunk). Ha azonban n páratlan, akkor az így kapott $3n/2$ szám nem egész, ami ellentmondás.

2.5. Természetesen n-nek legalább hétnek kell lennie. Megmutatjuk, hogy más kikötés nem kell. Legyen tehát $n > 6$ és ültessünk le egy kerek asztal mellé n olyan embert, akik közül senki nem ismer senkit. Ezután ismertessünk össze mindenkit a három bal és három jobb oldali szomszédjával. Így egy megfelelő társaságot kapunk.

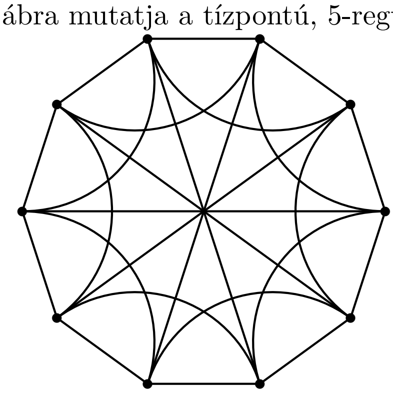
2.6. a) Ha n legalább hét, akkor van n pontú, 6-reguláris egyszerű gráf.

b) Ha $k = 2l$ páros szám és $n > 2l$, akkor van n-pontú k-reguláris egyszerű gráf. (A konstrukciót ismét társasági ismeretségekre egyszerű elmondani: leültetjük az n embert egy kerek asztal köré és mindenkit összeismertetünk az l darab bal és l darab jobb oldali szomszédjával.)

2.7. Nyilván szükséges, hogy $n > k$ legyen. A 2.6. feladatban láttuk, hogy ha k páros és $n > k$, akkor van k-reguláris egyszerű gráf.

Ha k páratlan és n is, akkor nincs ilyen gráf. Ennek bizonyítása pontosan úgy megy, mint a 2.3. feladatban. Ez most azt jelenti, hogy összeszámoljuk az éleket úgy, hogy a fokszámokat adjuk össze és a kapott számot elosztjuk kettővel. Ha n és k is páratlan, akkor a kapott szám, $nk/2$ nem egész, ami ellentmondás.

Ha $k = 2l + 1$ páratlan és $n > k$ páros, akkor viszont ismét konstruálható megfelelő, tehát n pontú és k-reguláris egyszerű gráf. Ismét a olyan társaságot konstruálunk, ahol kölcsönös az ismeretség. Az n embert, aki nem ismeri egymást, ismét a kerek asztal köré ültetjük és mindenkit összeismertetünk az l darab bal és az l darab jobb oldali szomszédjával, továbbá a szemközt ülővel. $n = 10$ és $k = 5$-re az 1. ábra mutatja a tízpontú, 5-reguláris gráfot.

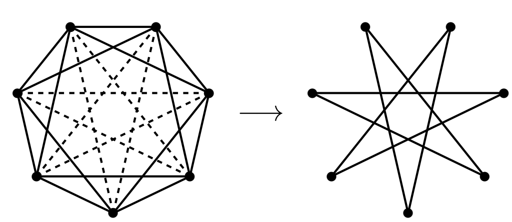


2.7M.1. ábra.

2.10. Vegyünk három pontot. Nézzük, melyik pontok nem jók közös szomszédnak. Egyrészt ők maguk, ez három pont. Másrészt azok, amelyekkel legalább az egyikük nincsen összekötve, ez minden pontnál legfeljebb $k - 2$ pont. Összesen legfeljebb $3 + 3(k - 2) = 3k - 3$ pont nem jön tehát szóba. (Azért legfeljebb, mert lehet olyan pont is, amelyik a kiválasztott három közül többel sincs összekötve.) Tehát marad legalább két megfelelő pont. Azt kaptuk, hogy bármely három pontnak legalább két közös szomszédja is van.

Annak ellenére, hogy ilyen „bőven” teljesült az állítás $3k-1$ pontra, mégsem minden $3k$ pontú gráfra igaz az állítás. Vegyünk ugyanis $3k$ pontot és osszuk őket három egyforma csoportba. Kössünk össze minden pontot az összes olyan ponttal, amellyel *nincsen* egy csoportban. Ha minden csoportból kiveszünk egy-egy pontot, e három pontnak nincs közös szomszédja.

2.12. Könnyebben áttekinthető a feladat, ha nem azt nézzük, hogy melyik élek vannak behúzva, hanem azt, hogy melyikek nincsenek. 4-reguláris hétpontú gráfnál minden pontból két másikhoz nem megy él. Jelöljük be ezeket a nem-éleket mondjuk szaggatott vonallal, ahogy az 1. ábrán látható.



2.12M.1. ábra.

Tekintsük most azt a gráfot, amelyet a szaggatott vonalak alkotnak. Ebben a gráfban minden pont foka kettő, vagyis hétpontú 2-reguláris gráfot kapunk. A kérdés tehát az, hogy hány hétpontú 2-reguláris gráf van. Könnyen látható, hogy mindössze kettő: a „hétszög” (azaz olyan gráf, amelynek hét csúcsa tekinthető egy hétszög hét csúcsának, az élei pedig a hétszög oldalai), és az a gráf, amely egy-egy – közös pont nélküli – „háromszögből” és „négyszögből” áll. Így nyilván az eredeti kérdésre is az a válasz, hogy összesen kétféle hétpontú 4-reguláris gráf van.

Kilencpontú 6-reguláris gráf esetén is érdemes behúzni szaggatott vonallal az eredeti gráfban nem szereplő éleket, ezek önmagukban ismét egy 2-reguláris gráfot alkotnak. Most tehát az a kérdés, hogy hányféle kilencpontú 2-reguláris gráf van. Ebből négyet találunk:

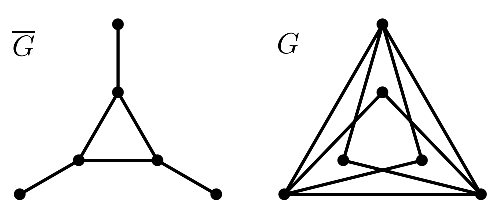
– egy „kilencszög”,
– egy közös pont nélküli „hatszög” és „háromszög” egymás mellett,
– egy közös pont nélküli „ötszög” és „négyszög” egymás mellett,
– három, páronként közös pont nélküli „háromszög” egymás mellett.

Tehát kilencpontú 6-reguláris gráfból négyféle van.

2.13. A kérdés egyenértékű azzal, hogy maximálisan hány éle lehet egy olyan gráfnak, amelyben minden pont foka legfeljebb $k-2$. Ha k páros, akkor minden n-re van n pontú, k-reguláris egyszerű gráf (l. a 2.7. feladatot), tehát a maximális élszám $n(k-2)/2$. Ha k páratlan akkor minden páros n-re van ilyen reguláris gráf, tehát a maximális élszám most is $n(k-2)/2$. Marad az az eset, ha n is, k is páratlan. Ekkor vegyük a 2.7. feladatban definiált $n-1$ pontú, $k-2$-reguláris gráfot. Hagyjuk el az $12, 34, \ldots, (k-4)(k-3)$ éleket és kössük össze az $1{,}2, \ldots, (k-3)$ pontokat egy n-edik ponttal. Így egy olyan gráfot kapunk, amelynek $n-1$ pontja (ez utolsó pont kivételével minden pontja) $k-2$-edfokú, az n-edik pont pedig $k-3$-adfokú. Nyilván ez a maximális élszám: $(n-1)(k-2)/2+(k-3)/2 = \lfloor n(k-2)/2 \rfloor$.

2.2. Mivel $d_{\overline{G}} = n-1-d_G(x)$, ahol n G pontszámát jelöli, ezért az állítás pontosan akkor igaz, ha G pontszáma páratlan.

2.3. Itt is könnyít a helyzetünkön, ha áttérünk a komplementergráfra. Ott a megfelelő fokszámok 1,1,1,3,3,3. Megfelelő gráfot kapunk, ha minden elsőfokú pontot egy-egy harmadfokúval kötünk össze. Lásd a **??**. ábrát. Ha viszont két elsőfokú pont egymással lenne összekötve, akkor a maradó négy pont között fut az összes többi él, tehát egy olyan négypontú gráfot kapunk, amelyben a fokszámok rendre 1,3,3,3. Vagyis a négy pont közül három mind a három másikkal össze van kötve. Ez azonban azt jelenti, hogy nem lehetne elsőfokú pont közöttük. Ilyen gráf tehát nincsen.



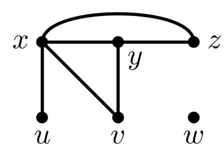
2.3M.1. ábra.

Egyetlen jó gráfot kaptunk.

2.2. Ha a gráf minden hárompontú feszített részgráfjában két él van, ez azt jelenti, hogy a komplementer gráf minden feszített részgráfjában pontosan egy él van. *A komplementergráfban tehát minden pont foka nulla vagy egy.* (Ha x-nek két szomszédja volna a komplementerben, y és z, akkor az x, y, z által feszített részgráfra nem teljesülne a feltétel.) Ha a gráfnak legalább öt pontja van, akkor ez azt is jelenti, hogy a komplementergráfban van három pont, amelyek között nem fut él, ez azonban ellentmond a feltételünknek.

Azt kaptuk, hogy egy ilyen gráf pontszáma legfeljebb négy lehet. A kétpontú gráfok triviálisan jók (nincs kikötés) és a hárompontú, kételű gráf is jó. A négypontú gráfok közül a „négyszög” az egyetlen jó. Összesen tehát négy ilyen gráfot találtunk.

2.3. Kell lenni három pontjának, amelyek között minden él be van húzva és kell lenni három olyan pontjának is, amelyek között egy él sincs behúzva. Ez azt jelenti, hogy kell lenni legalább hat pontjának, melyek közül három egy „háromszöget” feszít, a másik három pedig élnélküli (üres) részgráfot feszít. Az előbbi pontjai legyenek x, y és z, az utóbbi pontjai legyenek u, v és w. A gráf álljon tehát az xy, yz, zx élekből, továbbá az xu, xv és yv élekből. Ekkor az x, u és v által feszített részgráfnak két éle van, az y, u és v által feszített részgráfnak pedig egyetlen éle van. Tehát mind a négyféle hárompontú feszített részgráfot megtaláljuk ebben a gráfban, amelynek hat pontja és hat éle van. L. a **??**. ábrát.



2.3M.1. ábra.

2.5. Ha mindenki játszott legalább tíz másikkal, akkor az összes versenyzőt kiválaszthatjuk. Általában, ha versenyzőknek egy halmaza kielégíti azt a követelményt, hogy mindenki legalább tíz másikkal játszott a halmazba vett többi versenyzővel, akkor e halmazt *jó* halmaznak nevezzük. A világranglistán szereplő versenyzők számát jelölje n.

Ha az öszses versenyző nem alkot jó halmazt, akkor ez azért van, mert volt egy aránylag lusta x_1 versenyző, aki legfeljebb kilenc ellenféllel játszott. Hagyjuk el őt a versenyzők közül. Ha a megmaradó versenyzők H_1 halmaza jó halmazt alkot, kész vagyunk. Ha nem, akkor H_1-ben egy x_2 versenyző, aki H_1-beli versenyzők közül legfeljebb kilenccel játszott. Hagyjuk el x_2-t is és a maradó versenyzők halmaza legyen H_2. Folytassuk az eljárást. Tegyük fel, hogy már kiválasztottuk az $x_1, x_2 \ldots, x_k$ versenyzőket úgy, hogy x_{i+1} a H_i halmazbeli versenyzők közül legfeljebb kilenccel játszott, és tekintsük a $H_{k+1} = H_k - \{x_k\}$ halmazt. Ha ez jó halmaz, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor találunk benne egy x_{k+1} pontot, amely H_{k+1}-ből legfeljebb kilenccel játszott. Folytassuk az eljárást, amíg vagy nem találunk egy jó H_m halmazt, vagy elérünk oda, hogy már csak tíz versenyző van H-ban.

Megmutatjuk, hogy utóbbi eset nem állhat fent. Ugyanis az elhagyott $n-10$ darab versenyző mindegyike csak kilenc másikkal játszott a „később” elhagyottak között. Ez összesen $9(n-10)$ mérkőzés, és marad még legfeljebb 45 mérkőzés a megmaradt tíz versenyző között. Ez összesen még mindig kevesebb $9n$-nél, így az átlagosan tizennyolc mérkőzésnél valójában kevesebb mérkőzés volt csak. ez az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását.

2.6. Ha egy gráf egyszerű átlagfokszáma 18 – vagy ami ugyanaz: élszáma $9n$, ahol n a gráf pontszáma –, akkor van olyan feszített részgráfja, amelyben minden pont foka legalább 10.

2.10. Egy 21 pontú gráf pontdiszjunkt teljes részgráfokból – azaz klikkekből – áll (tehát két teljes gráfnak nincs közös pontja). Tudjuk, hogy a gráfnak nincs izolált pontja, továbbá tudjuk, hogy van öt darab harmad- és nyolc darab negyedfokú pontja, mennyi a többi pont fokszáma?

2.1. **a)** Nincs ilyen gráf.
b) két ilyen gráf van.

2.2. A négypontú teljes gráfnak hat éle van, tehát egy négypontú egyszerű gráfnak legfeljebb ennyi éle lehet. Hatélű nyilván csak egy van: a teljes gráf. Ugyanígy egyetlen nulla élű gráf van: az üres gráf. Ezek egymás komplementerei. Egyélű gráfból is nyilván egy van csak, s akkor ötélűből is csak egy van, hiszen annak komplementere egyélű. Ez eddig négy gráf.

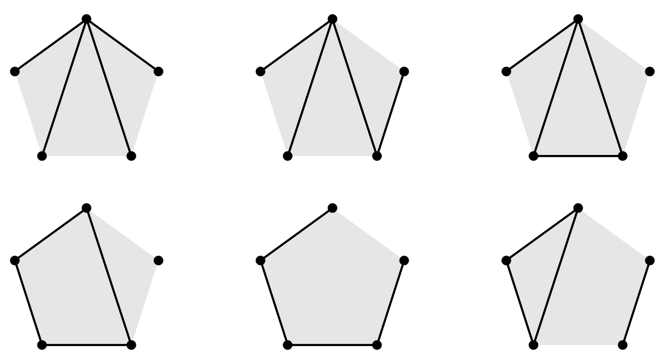
Kételű gráfból kettő van annak megfelelően, hogy a két élnek van-e közös végpontja, vagy nincs. (Többszörös élek nincsenek megengedve.)

Négyélű gráfból is kettő van, hiszen ezek a kételű gráfok komplementerei. Ez újabb négy gráf, eddig tehát összesen nyolcat találtunk.

Hátravannak még a háromélű gráfok. (Ezek komplementerei is háromélűek.) Ebből három van: az egyik az, ahol a három élnek egy közös végpontja van (egy háromágú „csillag"-gráf), a másik az, ahol a három él egy „háromszöget" alkot, végül a harmadik az, ahol az élek egy „láncra" vannak felfűzve, azaz ha a pontokat egytől négyig számozzuk, akkor az élek a szomszédos számokat kötik össze.

Összesen tehát 11 négypontú egyszerű gráfot találtunk.

Megjegyzés. A háromélű gráfok közül az első komplementere a második, viszont a harmadik önmaga komplementere. Ehhez kapcsolódik a GR.II.4.1., GR.II.4.2., GR.II.4.2., GR.II.4.3. és a GR.II.4.4. feladat.



2.3M.1. ábra.

2.3. Lásd az 1. ábrát.

3. Összefüggések a fokszám és az élszám között

3.1. Nem. A válaszul kapott számok összege páratlan, márpedig ha az ismeretségek kölcsönösek volnának, akkor minden ismeretséget kétszer számoltunk volna az összegben, így annak párosnak kellene lennie.

3.2. Összesen 39 ismeretséget számoltak össze. Mivel az ismeretségek kölcsönösek, minden ismeretséget kétszer kellett számolni, vagyis az összegnek páros számnak kellene lennie. Tehát valaki – legalább egyvalaki – biztosan rosszul számolt.

3.3. Ha egy társaságban az ismeretségek kölcsönösek, és mindenki megszámolja, hány ismerőse van, akkor e számok összege páros.

Gráfelméleti nyelven: egy (véges) gráfban a fokszámok összege mindig páros. De ennél többet is mondhatunk: Egyszerű gráfban a fokszámok összege éppen az élek számának kétszerese.

3.4. Ha nincs hurokél, akkor nyilvánvalóan igaz, továbbra is minden élt kétszer számolunk a fokszámok összegénél. Ha azonban hurokél is van a gráfban, akkor ezt az illető pont fokszámánál kétszer kell számolnunk, ha azt akarjuk, hogy az állításunk igaz maradjon.

3.5. Hurokél nélküli véges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.
Megjegyzés. A ma már „közhelynek” számító feladatot 1943-ban még kitűzhették a Kürschák-versenyen! Lásd [10].

3.4. A 2.6. feladat állítása természetesen általánosítható. Az általánosítás így szól:

Ha egy egyszerű gráf átlagfokszáma $2k$, akkor van olyan feszített részgráfja, amelyben minden pont foka legalább $k + 1$. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint az eredeti a 2.5. feladatban.

3.5. A feladat ugyan nem mondja ki, de a megfogalmazása implicite tartalmazza, hogy az ismeretségek kölcsönösek. Tehát egy n pontú gráfról van szó, amelyről egyrészt tudjuk, hogy nincs benne háromszög (három pontú teljes részgráf), másrészt azt is tudjuk, hogy bármely hét pontja között van kettő, amelyeket él köt össze (a komplementerében nincs hétpontú teljes gráf).

Az átadott ajándékok száma éppen a gráf pontjai fokszámának összege. (Vigyázat! Most minden élhez KÉT ajándék tartozik, tehát az ajándékok fokszáma = a fokszámösszeggel.)

Azt kell belátnunk, hogy egy ilyen gráfban a fokszámok összege legfeljebb $6n$, vagyis hogy egy ilyen gráfban legfeljebb $3n$ él van. (Az Euler-összefüggés szerint a fokszámok összege az élszám kétszerese.)

Ennél valamivel többet látunk be, éspedig azt, hogy minden pont foka legfeljebb hat. Ez pedig következik abból, hogy egy pont szomszédai között nem futhat él, hiszen akkor lenne három pontú teljes gráf. Másrészt ha egy pontnak hét vagy több szomszédja volna, akkor volna hét pont, amelyek között nem fut él, s ezt a feladat feltétele kizárta.

A GR.II.3.11. feladatban bizonyításra kerülő Erdős-Szekeres tétel szerint ennek az üdülőnek legfeljebb 20 lakója lehet.

3.6. A feltétel szerint egy állomás legfeljebb k másikkal lehet összeköttetésben. Ha ugyanis egy A állomás legalább $k + 1$-gyel volna közvetlen telefonkapcsolatban, e között a (legalább) $k + + 1$ állomás között a feltétel szerint biztosan lenne kettő, mondjuk B és C, amelyek között van közvetlen telefonösszeköttetés. De akkor A, B és C három olyan állomás volna, amelyek közül bármely kettő közvetlen összeköttetésben volna.

Mivel bármelyik állomás legfeljebb k másikkal van közvetlen összeköttetésben, ez legfeljebb nk összeköttetést jelentene, de mindegyiket kétszer számoltuk, vagyis az összeköttetések száma valóban $nk/2$.

Gráfelméleti nyelven elmondva azt láttuk be, hogy ha egy egyszerű, n pontú gráfban nincs háromszög és nincs üres $k + 1$-es, akkor az élszáma legfeljebb $nk/2$.
Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ez a feladat a 3.5. feladat általánosítása. Az ott említett Erdős-Szekeres tétel szerint a feladat feltétele nem teljesülhet, ha legalább $\binom{n+k-2}{n-1}$ megfigyelő állomás van.

3.1. a) 29.
b) 25.

3.2. Egy irányított gráfban a kifokok összege megegyezik a befokok összegével.

4. Páros gráfok

4.8. Páros gráfban a két osztályban a fokszámok összege egyenlő.

4.9. Ha a páros gráf egyik osztályában k pont van, akkor a másikban $10-k$ (illetve $11-k$). Maximálisan tehát $k(10-k)$ (illetve $k(11-k)$) éle lehet. Ismeretes, hogy ha egy kéttényezős szorzatban a tényezők összege állandó, akkor a szorzat annál nagyobb, minél kisebb a különbség a két tényező között. Tehát a maximális élszámot $k=5$-nél (illetve $k=5$ és $k=6$-nál) érjük el. Tíz pont esetén tehát a $K_{5,5}$ teljes páros gráfnak van a legtöbb éle: 25, 11 pont esetén pedig a $K_{5,6}$ teljes páros gráfnak: 30.

4.10. A megoldás pontosan ugyanúgy működik, mint a 4.9. feladatnál. Ha $n=2m$ páros, akkor a legtöbb éle a $K_{m,m}$ teljes páros gráfnak van: $m^2=n^2/4$, ha $n=2m+1$ páratlan, akkor a legtöbb éle a $K_{m,m+1}$ teljes páros gráfnak van: $m(m+1)=\lfloor n^2/4\rfloor$.

4.12. Ilyen gráfot kapunk, ha egy $K_{4,4}$-ből elhagyunk két, közös pont nélküli (független) élt. Több nincs. Ugyanis az ilyen gráf élszáma 14, tehát mindkét csoportból 14 élnek kell kiindulnia. Vagyis mindkét csoportban 14 a fokszámok összege, ami csak úgy lehet, hogy mindkét csoportban két-két negyed- és harmadfokú pont van. A negyedfokú pontok a másik csoport minden pontjával össze vannak kötve, a harmadfokúak eggyel-eggyel nincsenek összekötve, s nem lehetnek ugyanazzal az x ponttal nem összekötve, mert akkor x legfeljebb másodfokú lehetne.

4.13. Ha volna ilyen gráf, 9 csúcsa és 17 éle volna. Van hatodfokú pont, ezért az egyik osztályban legalább hat pont volna. Ha legalább hét volna ebben az osztályban, akkor az élszáma legfeljebb 14 lehetne. Tehát az egyik osztályban 6, a másikban 3 csúcs van és a két osztály között 17 él fut, tehát mindkét osztályban 17 a fokszámok összege. Ám a három legmagasabb fokú pontból is összesen 15 él indulhatna és ez ellentmondás.

4.15. Tegyük fel, hogy van benne egy (x,y) él. Minden további pontra igaz, hogy x és y közül pontosan az egyikkel van összekötve. Osszuk őket eszerint két osztályba, az elsőben vannak az y-nal összekötött (és x-szel össze nem kötött) pontok, a másodikban az x-szel összekötött (és y-nal össze nem-kötött) pontok. Vegyünk két, y-nal egy osztályban levő pontot és y-t. E három pont között nem futhat él, mert y-nal egyikük sincs összekötve. Tehát az egy osztályban levő pontok között nem fut él. Másrészt vegyünk két, különböző osztályba tartozó pontot és x-et. x a két másik pont közül pontosan az egyikkel van összekötve, tehát a másik kettő össze van kötve egymással.

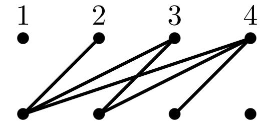
Azt kaptuk, hogy a gráf egy teljes páros gráf. Nyilvánvaló, hogy minden teljes páros gráfra teljesül is a feladat feltétele.

4.1. Egy olyan páros gráfot rendelünk a kijelölt 16 mezőhöz, amelynek egyik osztályában a 8 oszlop van, másik osztályában a 8 sor. Egy oszlopot és egy sort (jelölő csúcsot) akkor kötünk össze, ha a metszéspontjukat kijelöltük. Így egy olyan páros gráfot kapunk, amelyben minden pont fokszáma kettő. Egy ilyen gráf nyilvánvalóan páros hossszú páronként diszjunkt körökre bomlik, s ezeknek az *éleit* felváltva színezhetjük fehérre és feketére. Így 8-8 fehér illetve fekete élt kapunk, s nyilván minden csúcsból egy-egy fekete és fehér él fog kiindulni. Ez pontosan azt jelenti, hogy minden oszlopban és minden sorban pontosan egy fehér és egy fekete bábu fog állni, ha a megfelelő színű bábut helyezzük az él által reprezentált metszéspontba.

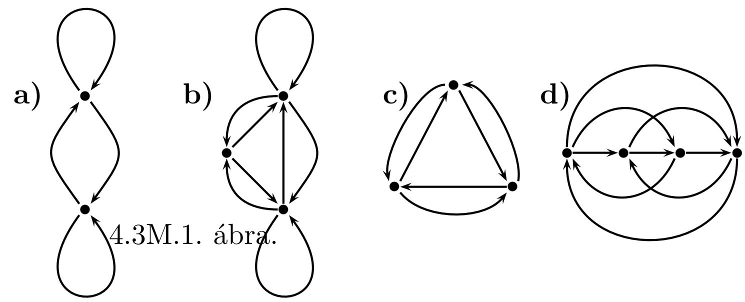
4.1. Az *eredmény* az irányított gráfoknál kapott eredményre hasonlít: arra, hogy irányított gráfban a kifokok összege egyenlő a befokok összegével – l. a 3.2. feladatot.

4.2. Lásd az 1. ábrát.

Ha a páros gráfban van izolált pont, akkor az irányított gráfban van olyan pont, amelyből minden él „egy irányba indul”, vagyis vagy a kifoka, vagy a befoka nulla.



4.2M.1. ábra.



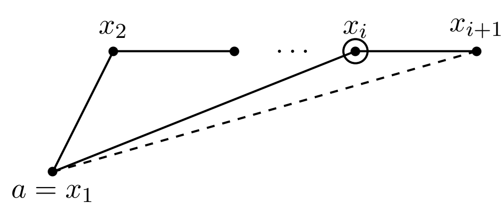
4.3M.1. ábra.

4.3. Lásd az 1. ábrákat.

Az a) és b) gráf egyértelmű. Viszont a c)-nél és d)-nél függ a pontok számozásától. Ettől függ az is, hogy lesz-e hurokél. Mi mindkét esetben azt az egyetlen gráfot rajzoltuk fel, ahol nem keletkezik hurokél.

5. Utak, összefüggő gráfok

5.7. Tegyük fel, hogy G-re teljesül, hogy minden csúcsának szomszédai teljes részgráfot feszítenek. Legyen G két pontja a és b, és tegyük fel, hogy nincsenek éllel összekötve, de vezet közöttük út a gráfban, azaz van egy $P = x_1x_2 \dots x_k$ út, ahol $a = x_1$ és $b = x_k$. Biztosan van olyan i, amelyre x_i össze van kötve $a = x_1$-gyel és x_{i+1}-gyel, de a és x_{i+1} nincs összekötve. Ilyen a legnagyobb indexű, a-val összekötött pont (és ez nem lehet $b = x_k$). (Lásd az 1. ábrát.) Ez viszont azt jelentené, hogy x_i-nek van két szomszédja, amelyek között nem fut él, tehát x_i szomszédai nem feszítenének teljes részgráfot.

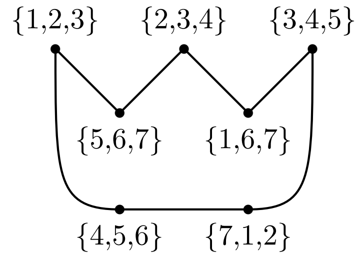


5.7M.1. ábra.

Azt kaptuk, hogy ha G két pontja között vezet út a gráfban, akkor éllel is össze vannak kötve. Tehát G minden komponense teljes gráf. Innen már világos a szükséges és elégséges feltétel: a feladat állítása pontosan az összefüggő gráfokra igaz.

5.8. Igen. Elég megmutatni, hogy az $\{1,2,3\}$ „pontból” vezet út minden olyan „pontba”, amellyel nem köti össze él. Kétféle ilyen „pont” van: aminek egy, és aminek két közös eleme van az $\{1,2,3\}$ halmazzal. Elég tehát megmutatni, hogy a $\{2,3,4\}$ és a $\{3,4,5\}$ „pontba” vezet út az $\{1,2,3\}$ „pontból”. Az előbbibe kettő hosszú út vezet az $\{5,6,7\}$ „ponton” keresztül. Az utóbbiba pedig eljutunk egy négy hosszú úttal, ha előbb az $\{5,6,7\}$ ponton keresztül elmegyünk a $\{2,3,4\}$ pontba, majd onnan az $\{1,6,7\}$ ponton keresztül a $\{3,4,5\}$ pontba.

A $\{3,4,5\}$ „pontba” eljuthatunk rövidebb úton is, a $\{4,5,6\}$ és $\{7,1,2\}$ „pontokon” keresztül. $KG(7,3)$ megfelelő részletét 1. ábra mutatja.



5.8M.1. ábra.

5.9. Ha $n < 2k$, akkor a $KG(n,k)$ gráf üres, tehát nem összefüggő. Ha $n = 2k$, akkor független élekből áll, tehát a $k = 1$ esetet kivéve nem összefüggő. Ha viszont $n \geq 2k+1$, akkor a gráf összefüggő.

Először gondoljuk meg, hogy elég azt bebizonyítani, hogy ha két részhalmaznak $k-1$ közös pontja van, akkor a nekik megfelelő pontok között vezet út. Tegyük fel ugyanis, hogy ezt már tudjuk. Ha azt akarjuk belátni, hogy két olyan k elemű halmazhoz tartozó „pont” között is vezet út, amelyeknek j darab közös pontja van, akkor alkalmazhatunk egy kicsit „cselesebb” indukciót: $l = k - j$-re vonatkozó teljes indukciót. $l = 1$-re tehát feltesszük az állítást. Tegyük fel, hogy A-nak és B-nek $j = k - l$ közös eleme van, a közös elemek halmaza legyen C, legyen továbbá $A \setminus C = A'$ és $B \setminus C = B'$. Cseréljük ki A' egy x elemét B' egy x' elemére. A kapott $A'' = A \setminus \{x\} \cup \{x'\}$ halmaznak eggyel több közös eleme van B-vel, tehát j értéke eggyel nőtt, l értéke eggyel csökkent. Alkalmazhatjuk tehát az indukciós feltevést, az A'' és B halmaznak megfelelő két pont között van út. Másrészt A'' és A csak egy elemben különböznek, tehát rájuk vonatkozóan $l = 1$, közöttük is van út (a kezdő lépés szerint). E két utat összerakva kapunk egy sétát A és B között, s ebből kaphatunk egy utat is A és B között.

A bizonyítás szemléletesen a következőképp mondható el. Nyilván számozhatjuk úgy az elemeket, hogy A épp az első k számból áll, B pedig az $\{l+1, l+2, \cdots, l+k\}$ számokból. Ekkor A-ból először elmegyünk az $\{l, l+1, \cdots l+k-1\}$ halmazba, ezt az indukciós feltevés szerint megtehetjük, majd innen elmegyünk a B halmazba, amit viszont a kezdő lépés szerint tehetünk meg.

Ezután elég megmutatnunk, hogy az $\{1, 2, \ldots, k\}$ és a $\{2, 3, \ldots, k+1\}$ „pontok” között vezet út. Ez viszont nyilvánvaló, ugyanis a $\{k+2, k+3, \ldots, 2k+1\}$ „pont” közös szomszédjuk.

6. Elvágó pontok, hídélek

6.1. Tegyük fel, hogy G összefüggő, 4-reguláris gráf és az e él elhagyásával megszűnik összefüggő lenni. Hagyjuk el az $e = xy$ élt, ekkor $G - e$-ben pontosan két harmadfokú pont van: x és y. E két pont a gráf két különböző komponensében lesz, s e két komponensben minden más pont foka 4, azaz páros. Vagyis ebben a két komponensben pontosan egy-egy páratlan fokú pont lesz, ami ellentmond 5.12. feladatnak.

6.1. a): Nem. b): Igen.

6.6. Nincs.

6.12. Igen.

6.13. Igen.

6.14. Ha a fa egy x pontja nem elsőfokú, akkor legyen két szomszédja y és z. Ezek között egyetlen út vezet (lásd a 7.2. feladatot), és ez az yxz út. Ha tehát x-et elhagyjuk a gráfból, a gráf legalább két komponensre esik szét.

Másrészt a fa bármely elsőfokú pontját elhagyva továbbra is fát, tehát összefüggő gráfot kapunk. Tehát a fa elvágó pontjai a legalább másodfokú pontjai.

6.1. A 6.14. feladat megoldásában láttuk, hogy fa minden legalább másodfokú pontja elvágó pont.

Visszafele azonban nem igaz az állítás. Lásd a 2.3. feladat megoldásában az ábra bal oldalán szereplő gráfot, és általában bármelyik „napsugár" gráfot (egy kör és minden pontjából egy hídél indul egy-egy elsőfokú ponthoz). Ezek mindegyikében minden legalább másodfokú pont elvágó pont.

6.2.

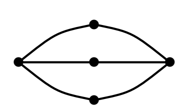
1. megoldás. Igaz. Vegyük a gráf egy P leghosszabb útját és tekintsük ennek egyik v végpontját. Ennek a pontnak minden szomszédja a P pontja, tehát v bármely két szomszédját köti össze olyan út, amely elkerüli v-t. (Ha v elsőfokú, akkor az állításunk semmitmondóan igaz.) Ez viszont azt jelenti, hogy v elhagyása után bármely két pont között vezet út, ha előtte is vezetett.

2. megoldás. Igaz. Vegyük a gráf egy favázát. Ennek bármely elsőfokú pontját elhagyva a gráfból összefüggő gráf marad, hiszen már a faváza is megmarad.

6.1. Legegyszerűbb a gráf csúcsainak n számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítani. $n = 1,2,3$-ra az állítás nyilvánvaló. Ha $n-1$ pontú gráfokra már tudjuk az állítást, akkor mindössze annyi a feladatunk, hogy minden összefüggő, n pontú gráfban találjunk egy pontot, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad. Vagyis egy olyan pontot kell találnunk, amelyik nem elvágó pont. A 6.2. feladat megoldása szerint minden összefüggő gráfban van ilyen pont.

6.2. Nem létezik. Vegyük ugyanis a gráf egy favázát és annak két elsőfokú pontját. Ezeket elhagyva továbbra is fát kapunk, így az eredeti gráfból e két pontot elhagyva nem üres összefüggő gráfot kapunk.

6.4. L. az 1. ábrát



6.4M.1. ábra.

7. Fák, erdők, favázak

7.7. A 7.6. feladatban látnunk kellett, hogy egy n pontú össszefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van. Másrészt a 7.4. feladat szerint egy n pontú körmentes gráfnak legfeljebb $n-1$ éle van. E kettőből a feladat állítása következik.

7.1. a) nyilvánvaló, hiszen épp úgy válogattuk az éleket T-be, hogy ne alkossanak kört.

b) Egyetlen részgráfnak sem lehet kevesebb komponense, mint az eredeti gráfnak, tehát az eljárás végén kapott G_0 feszítő részgráfnak sem. De több sem lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy van egy e él az eredeti G gráfban, amely G_0 két komponensét köti össze. Ez azt jelentené, hogy e végpontjai között nem fut T-beli élekből álló út, mégsem választottuk ki. Ez azonban lehetetlen, hiszen amikor sorra került, éppen azért nem választottuk ki, mert már az aktuális T-beli élekből álló út is volt a végpontjai között.

c) megválaszolásához szükségünk van a következő, nyilvánvaló megállapításokra. Az első esetben – amikor a soron következő él kört zár be a már T-be kiválasztott élekkel, akkor T változatlan marad, így a T-ben levő élek által meghatározott komponensek is változatlanok maradnak.

Ellenkező esetben a sorra vett e_i él két, a T_r-ben levő élek által meghatározott komponenst köt össze, azaz most a komponensek száma eggyel csökken, viszont T éleinek száma eggyel nő. Ebből máris következik az a) állítás:

A T-ben levő élek száma és a komponensek számának összege változatlan (a komponensek száma pontosan akkor csökken eggyel, amikor T-be új élt teszünk). Minthogy kezdetben T üres, s így minden csúcs egy-egy komponens, ezért kezdetben ez az összeg a csúcsok számával egyenlő.

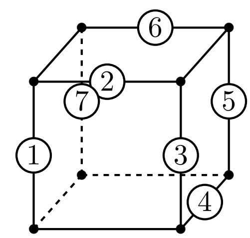
d) egyszerű következménye c)-nek.

7.6. ax) lehetetlen, mert a kockának nincs telített pontja.

ay) egy lehetséges megoldását az 1. ábra mutatja. Csak azt a hét élt számoztuk meg, amelyik az első hét számot kapja, a többi számozása tetszőleges lehet. (És persze a hét beszámozott él számozási sorrendjét is felcserélhetjük.)

bx)-re csakkor kapunk jó megoldást, ha kiválasztunk egy pontot és a belőle induló élek kapják az első $n-1$ számot.

by)-ra jó megoldást kapunk, ha először megszámozzuk a pontokat egytől n-ig, aztán az első $n-1$ számot rendre úgy osztjuk ki, hogy az i számot az $i, i+1$ él kapja.



7.6M.1. ábra.

7.7. Először a második kérdésre válaszolunk: a feladatban megadott, tovább nem bővíthető, páronként relatív prímekből álló halmaz elemszáma négy. De ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik a $\{1,5,6\}$ háromelemű halmaz is.

Nyilván minden ilyen halmazban kell szerepelnie az egynek, kell szerepelnie egy páros számnak, egy hárommal oszthatónak és egy öttel oszthatónak (különben a 2-vel, a 3-mal vagy az 5-tel bővíthetnénk a halmazt.) Az egynek mindenképp szerepelnie kell. A kettő és a négy szabadon cserélhető egymással. Így a következő tovább nem bővíthető, páronként relatív prímekből álló halmazokat kapjuk:

$\{1,2,3,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,5,6\}$.

7.9. Láttuk, hogy ha G k komponensből áll, akkor G_0 is és G_0-nak $n-k$ éle van. G egy részgráfjának csak úgy lehet ennél több éle, hogy valamelyik komponensében legalább annyi éle van, ahány pont. De akkor ebben a komponensben a 7.4. feladat szerint volna kör, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy G_0 valóban maximális élszámú körmentes részgráf.

Megjegyzés. Az 1. eljárásban kapott G_0 részgráf tehát maximális élszámú körmentes részgráfja G-nek. Ebből még nem következik, hogy nincs kisebb élszámú, nem bővíthető, körmentes részgráfja. Erre a kérdésre a 7.4. feladatban térünk majd vissza.

7.10. Az állítás egyszerű következménye a 7.1. feladat d) részének. Csak annyit kell meggondolnunk, hogy ha a gráf körmentes, akkor az ottani eljárás során F-be nem kerül él, tehát minden él T-be kerül.

7.11. A 7.10. feladatból következik. De következik a 7.4. feladatból is.

7.12. Ha az n pontú gráf összefüggő, akkor a 7.1. feladat d) része szerint T-ben az ottani eljárás végén legalább $n-1$ él van.

7.1.

1. megoldás. Hogy b)-ből és c)-ből következik a), az a 7.10. feladatból is azonnal látszik.

Tegyük fel, hogy a) és c) teljesül a G véges, egyszerű gráfra és tekintsük a 7.1. feladat eljárását. Mivel a gráf összefüggő, az eljárás végén a komponensek száma egy, így a T tárolóba $n-1$ él került. De c) szerint a gráfnak pontosan ennyi éle van, tehát F üres, azaz a gráfban egyetelen lépésben sem találtunk kört. (Ha a gráfban volna kör, annak utoljára sorra kerülő élét F-be kellett volna tennünk.) Tehát a gráf körmentes: a)-ból és c)-ből következik b).

2. megoldás. A fentihez hasonló megoldást adhatunk arra is, hogy b)-ből és c)-ből következik a).

Tegyük fel, hogy b) és c) teljesül a G véges, egyszerű gráfra és tekintsük ismét a 7.1. feladat eljárását. Mivel a gráf körmentes, F az eljárásban végig üres maradt. Tehát mind az $n-1$ él T-be került, így az eljárás végén egyetlen komponens maradt, azaz a gráf összefüggő.

7.2. Az állításból következik, hogy a gráf összefüggő és körmentes. Tehát fa. Másrészt minden fára igaz az állítás: a fa összefüggő, tehát bármely két pontja között vezet út. Másrészt ha két pontja között két út vezetne, akkor volna kör a gráfban.

7.3. Mindegyik, hiszen egy gráf pontosan akkor páros, ha nincs benne páratlan kör, márpedig a fában egyáltalán nincs kör.

7.2. Ha legalább kettő volna, akkor, minthogy a többi pont fokszáma legalább egy, a fokszámösszeg nagyobb volna 12-nél. Márpedig egy n pontú fában a fokszámok összege $2(n-1)$.

7.3. Igaz. Az eredeti gráfnak $2n$ éle van, a favázzal ebből $n-1$ élt hagyunk el. Marad több, mint n él, tehát marad kör. Hagyjuk el ennek a körnek egy e élét. Így még mindig n él marad, tehát még mindig marad egy kör.

7.4.

1. megoldás. Ha tovább már nem bővíthető, akkor ugyanannyi komponense van, mint G-nek. Ha ugyanis volna G-ben egy olyan $e=xy$ él, amely G' két komponensét köti össze, e-t hozzávéve G'-höz nem keletkezhetne kör, tehát G' bővíthető volna.

Ez viszont azt jelenti, hogy G minden komponenséből egy feszítő fát választ ki, aminek a komponens pontszámánál eggyel kevesebb éle van. Vagyis G'-nek pontosan $n-k$ éle van, ahol n jelöli G pontszámát, k a komponenseinek számát. Az 1. eljárásban láttuk, hogy a maximális élszámú körmentes részgráfnak pontosan ennyi éle van. Azt kaptuk, hogy egy véges, hurokél nélküli gráf minden tovább nem bővíthető körmentes részgráfja egyben maximális élszámú is és minden ilyen gráfnak $n-k$ éle van.

2. megoldás. A feladat egyszerűen következik a 7.10. feladatból is.

7.5. Izolált pont nincs, mert a fa összefüggő és legalább két pontja van.

Az n pontú fa élszáma $n-1$, tehát a fokszámösszege $2n-2$. Ha csak egyetlen elsőfokú pontja volna, akkor a fokszámösszeg legalább $1+2(n-1)=2n-1$ volna, ami ellentmondás.

7.6. Ha a fa n pontú, van egy k-adfokú pontja, és l darab elsőfokú pontja van, akkor a fokszámösszege legalább $l+k+2(n-l-1)=2n-l+k-2$. Másrészt a fokszámösszege $2n-2$, tehát $2n-l+k-2 \le 2n-2$, azaz $l \ge k$. Egy ilyen fának tehát legalább k elsőfokú pontja van.

Ha $n=k+1$, akkor a $k+1$ pontú csillag mutatja, hogy a becslés pontos. Ha $n>k+1$, akkor a $k+1$ csillag egyik élét helyettesíthetjük egy megfelelő hosszúságú úttal, s továbbra is k darab elsőfokú pont lesz a fában.

7.7. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük, és arra az észrevételre építünk, hogy a legkisebb d_i csakis egy lehet, másrészt egy fának a 7.5. feladat szerint van elsőfokú pontja.

A kezdő lépés $n=2$, ekkor $d_1=d_2=1$ és az egyetlen kétpontú fában valóban két elsőfokú pont van.

Tegyük fel, hogy $n=m-1$-re már tudjuk az állítást és legyen adva egy pozitív számokból álló $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_m$ számsorozat, és a számok összege legyen $2m-2$. Ekkor d_1, a legkisebb szám csakis 1 lehet. Ha ugyanis legalább kettő volna, akkor minden szám legalább kettő volna, s így az összegük is legalább $2m$ volna, ami ellentmond a feltételnek. Másrészt $d_m>1$, különben minden d_i egy volna, tehát az összegük m volna, ami $m>2$ esetén kevesebb, mint $2m-2$. Hagyjuk el a d_1 számot és csökkentsük d_m értékét eggyel: $d'_m=d_m-1$. Az így kapott $m-1$ szám összege $2m-4$, mind pozitív, hiszen d'_m is az, a többi nem változott. Tehát van olyan $m-1$ pontú fa, amelynek csúcsai rendre $d_2, d_3, \cdots, d_{m-1}, d'_m$. Ha ehhez a fához hozzáillesztünk egy csúcsot, amely a d'_m fokú pontot köti össze egy új ponttal, megkapjuk a megfelelő fát.

8. Utak, távolság, átmérő.

8.1.

1. megoldás. Tegyük fel, hogy már megtaláltuk az $x_1x_2\ldots x_i$ utat, ahol $i \le k$. Mivel az út utolsó pontja is k-adfokú, van olyan x_{i+1} szomszédja, amely még nem szerepel az úton. Az út tehát mindaddig folytatható, amíg legalább k élű nem lesz.

2. megoldás. Természetesen a feladat következik a 12.6. feladatból is, hiszen egy legalább $k+1$ pontú (és élű) körben van legalább k élű út.

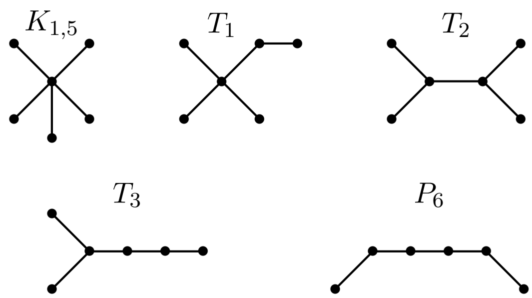
8.2. a) Háromféle ötpontú fa van: az ötpontú (négyélű) út, a csillag és az a fa, amelynek egy harmadfokú és egy másodfokú pontja van (ezek illeszkednek).

Az ötpontú útban három ilyen út van, és ennél kevesebb nyilván nem lehet. Az ötpontú csillagban bármely két él 2 hosszú utat alkot, így hat ilyen út van. Ha a fának három végpontja, egy másod- és egy harmadfokú pontja van, akkor négy ilyen út van benne, tehát pontosan öt darab 2 hosszú út nem lehet egy ötpontú fában.

A megoldás: 3, 4 vagy 6.

b) Ötféle hatpontú fa van. A hatpontból álló (ötélű) út, a csillag ($K_{1,5}$), és három további. Ezek közül az elsőben (T_1) egy negyedfokú pont van, egy másodfokú és négy elsőfokú. A másodikban (T_2) két – egymással összekötött – harmadfokú pont van és négy elsőfokú. A harmadikban (T_3) egy harmadfokú pont van, két másodfokú és három elsőfokú. Az ötélű útban 4 darab 2 hosszú út van, a csillagban 10, ez a két szélső eset. T_1-ben 7, T_2-ben 6, T_3-ban 5 darab 2 hosszú út van. Lásd az 1. ábrát.

A megoldás: 4,5,6,7 vagy 10.



8.2M.1. ábra.

8.3. a) Nyilvánvaló, hogy az n pontú egyszerű gráfok közül a legtöbb 2 hosszú út a teljes gráfban van, éspedig $\frac{n(n-1)n-2)}{2}$.

b) A legtöbb 2 hosszú út nyilván akkor lesz, ha bármely két él egy 2 hosszú utat alkot. Ez pontosan akkor fordul elő, ha bármely két élnek van közös pontja, fa esetében csak úgy lehet, ha a gráf egy n pontú csillag. Ekkor a 2 hosszú élek száma $(n-1)(n-2)/2$.

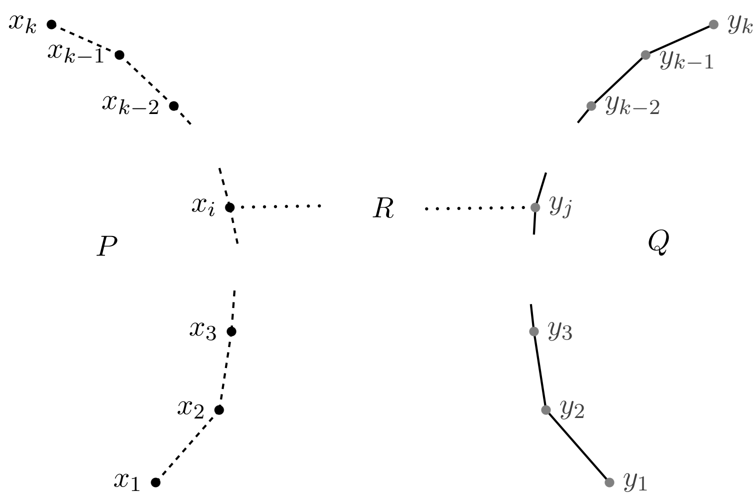
c) $n = 4$-re a négypontú csillagban három van, a négypontú útban kettő. A 8.2. feladatban láttuk, hogy ötpontú fában nem lehet öt, hatpontú fában nem lehet kilenc darab 2 hosszú út. Teljes indukcióval belátjuk, hogy semmilyen nagyobb n-re sem lehet $n(n-1)/2$-nél eggyel kevesebb 2 hosszú út. Legyen T egy n pontú fa. Tekintsük egy x végpontját, legyen az egyetlen szomszédja y. Az x-ből induló 2 hosszú utak száma egyenlő $d_y - 1$-gyel (azaz y fokszáma mínusz eggyel). Olyan út pedig nincsen, amelynek x volna a középső pontja. Így T-ben a 2 hosszú utak száma egyenlő a $T - x$ gráf 2 hosszú útjainak a számával, plusz $d_y - 1$. Nézzük, lehet-e ez $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$? A $T - x$ gráf egy $n - 1$ pontú fa. Két eset van.

Ha $T - x$ nem csillag, akkor az indukciós feltevésünk szerint legfeljebb $\frac{(n-2)(n-3)}{2} - 2$ darab 2 hosszú út van benne. y fokszáma legfeljebb $n - 1$, tehát ehhez legfeljebb $n - 2$ további 2 hosszú út jön, ami összesen legfeljebb $\frac{(n-2)(n-1)}{2} - 2$.

Ha $T - x$ csillag, akkor pontosan $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ darab 2 hosszú út van benne. Ahhoz, hogy T-ben pontosan $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ legyen, pontosan $n - 3$ darab további 2 hosszú útra lenne szükségünk, ami azt jelenti, hogy y fokszáma T-ben $n - 2$, tehát $T - x$-ben $n - 3$. De $n > 4$-re ez nem lehetséges, mert $T - x$ csillag, tehát egyetlen $n - 2$-edfokú pontján kívül csak elsőfokú pontok vannak benne.

8.7. A kör pontjai felváltva jönnek a két osztályból (két szomszédos pont nem lehet azonos osztályban), így minden második csúcsnak a k pontú osztályból kell lennie. Ebből az első állítás következik. Ugyanez igaz az útra is, tehát annak legfeljebb $2k + 1$ pontja lehet. Mindkettő elérhető, erre könnyű példát mutatni: ha az egyik osztálynak k pontja van, a másiknak $k + 1$ és a két osztály között minden él be van húzva.

8.8. Legyen $P = x_1x_2 \dots x_k$ és $Q = y_1y_2 \dots y_k$ két leghosszabb út (lásd az 1. ábrát). Tegyük fel, hogy nincs közös pontjuk. De például x_1-et és y_1-et köti össze út, mert a gráf összefüggő. Vegyük ennek az x_1-ből induló útnak az utolsó P-re eső pontját, majd az ezutáni első, Q-ra eső pontját. Legyenek ezek x_i és y_j pontok, a közöttük futó út R. Tekintsük az $x_1x_2 \dots x_iRy_jy_{j+1} \dots y_k$ és az $y_1y_2 \dots y_jRx_ix_{i+1} \dots x_k$ utakat. Ezeknek együtt legalább $2k+2$ pontjuk van, tehát valamelyiknek biztosan legalább $k + 1$ pontja van, ami ellentmond annak, hogy P egy leghosszabb út.



8.8M.1. ábra.

8.9. Ha a gráf nem összefüggő, akkor van egy $k > 0$ pontú komponense, ahol $k < n$ (n a csúcsok száma). Ennek minden pontja a többi $n - k$ pont mindegyikével a komplementerben van összekötve. Vagyis a komplementer tartalmaz egy $K_{k,n-k}$ teljes páros gráfot, s az összefüggő. Mivel a gráf tartalmaz összefüggő feszítő részgráfot, ezért az 5.9. feladat szerint maga is összefüggő

8.1. Ha egymás után rakjuk az x-ből y-ba vezető legrövidebb utat és az y-ból z-be vezető legrövidebb utat, akkor egy x-ből z-be vezető sétát kapunk. Ez vagy megegyezik az x-ből z-be vezető legrövidebb úttal, vagy ellenkező esetben a legrövidebb út ennél rövidebb.

8.4. Tekintsük Bergengócia városait egy gráf pontjainak, a gráf két pontja között akkor húzzunk be élt, ha van közöttük repülőjárat.

Vegyük Bergengócia egy tetszőleges x városát. Legyen S_x azoknak a városoknak a halmaza, amelyekbe van x-ből repülőjárat. Legyen továbbá T_x a maradó városok halmaza. A feladat feltétele szerint T_x minden városába megy repülőjárat valamelyik S_x-beli városból. A feladat másik feltétele szerint S_x-ben legfeljebb három város van, s ezekből egyenként legfeljebb két új – x-től különböző – városba van repülőjárat, tehát T_x-ben legfeljebb hat város van. Bergengóciában tehát legfeljebb 10 város lehet.

Még meg kell mutatnunk, hogy Bergengóciának tényleg lehet is 10 városa. Ehhez a következők kellenek:

a) minden x városból ténylegesen három járat induljon,

b) S_x városai ne legyenek egymással összekötve,

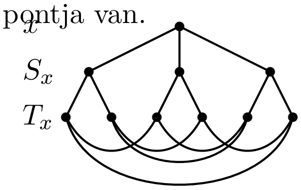
c) S_x semelyik két városából ne induljon T_x azonos városába járat.

Az a) feltétel azt jelenti, hogy nincs három város, amelyek közül bármelyik kettőt járat köt össze, a c) feltétel pedig azt, hogy nincs két város, x és y, hogy x-ből y-ba két különböző módon lehet eljutni egy átszállással. (A két feltételt együtt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy bármely két város között csak egyféleképp lehet legfeljebb egy átszállással közlekedni.)

Ez viszont azt jelenti, hogy T_x bármely városából két járat indul T_x-beli városba. Ez csak úgy lehetséges a) miatt, ha

d) a T_x-beli városok közötti járatok egyetlen hatpontú – gráfelméleti értelemben vett – kört alkotnak.

Ha most a)-d) feltételek figyelembe vételével fel akarjuk rajzolni a járatok által alkotott gráfot, akkor lényegében egyetlen módon tehetjük ezt, amit az 1. ábra mutat. Ez a gráf valóban megfelel a feladat minden feltételének és 10 pontja van.



8.4M.1. ábra.

Megjegyzés. A kapott gráfot Petersen-gráfnak nevezik. Több fontos tulajdonságát fogjuk még látni.

8.6. Ha egy 2-átmérőjű gráfban minden pont foka legfeljebb három, akkor a gráfnak legfeljebb tíz pontja van. Egyetlen, a feltételeknek megfelelő tízpontú gráf van, ezt a 8.4. megoldás ábrája mutatja.

8.12. Ha a gráf nem összefüggő, akkor van egy $k > 0$ pontú komponense. Ennek minden pontja a többi $n - k$ pont mindegyikével a komplementerben van összekötve. Tehát a komplementerben bármely két pont vagy éllel van összekötve, vagy egy legfeljebb kettő hosszú úttal. A komplementer átmérője tehát kettő, vagy üres gráf esetén egy.

8.4. a) A 8.1. feladatban láttuk, hogy elsőfokú pont nem lehet a gráfban, mert annak szomszédja telített pont volna. Tehát minden pont foka legalább 2. Ha a gráfban minden pont foka legalább 3, akkor az élszáma legalább $3n/2$, és kész vagyunk. Feltehető tehát, hogy van egy x másodfokú pont a gráfban.

Legyen x két szomszédja y és z és legyen H a maradó $n - 3$ pont halmaza. H minden pontja össze van kötve y és z közül legalább az egyikkel, válasszunk ki minden H-beli ponthoz egy-egy ilyen élt. Ez $n - 3$ él, amihez hozzávéve az xy és xz élt eddig $n - 1$ élünk van. De H minden pontjából indul még legalább egy él (hiszen legalább másodfokú minden pont), ez még legalább $(n - 3)/2$ él, ami összesen éppen $(3n - 5)/2$ élt jelent.

Ha $n = 4$, akkor ez legalább négy élt jelent és a négypontú körnek ennyi éle van és 2 az átmérője. Ha $n = 5$, akkor ez legalább öt élt jelent és az ötpontú körnek ennyi éle van és 2 az átmérője.

b) $n = 5$-re az öt hosszú kör a példa. Ha pedig ennek egy pontját „megsokszorozzuk”, akkor minden n-re kapunk egy megfelelő gráfot. Megsokszorozáson a következőt értjük. Legyen x az ötszög egy pontja, két szomszédja y és z. Vegyünk még $n - 5$ darab pontot és mindegyiket kössük össze y-nal és z-vel. Könnyen látható, hogy az így kapott n pontú, $2n - 5$ élű gráfnak továbbra is 2 az átmérője és nincs telített pontja.

8.5. A 8.4. feladat a) részének megoldásmenetét követjük. De most a pontszámra vonatkozó teljes indukciót is alkalmazunk. $n = 5$-re láttuk, hogy legalább öt élre van szükség, tehát a kezdő lépés biztosítva van.

Legyen G egy n pontú, 2-átmérőjű gráf, $n > 5$ és tegyük fel, hogy n-nél kisebb gráfokra már tudjuk a feladat állítását. Legyen a G-beli fokszám minimuma k. Ha k legalább négy, akkor a gráf élszáma legalább $2n$, tehát nincs mit bizonyítanunk. $k = 1$ nem lehet, mert akkor a 8.1. feladat szerint a szomszédja telített pont volna. Tehát $k = 2$ vagy $k = 3$.

a) $k = 3$. Legyen x egy harmadfokú pont és legyenek x szomszédai y, z, u. Legyen a további pontok halmaza H. H minden pontja össze van kötve y, z, u közül legalább eggyel (mert a gráf 2-átmérőjű). Válasszunk ki H minden pontjához egyet y, z, u közül, amellyel össze van kötve. (L. a szélességi favázat az ALG.II.3.3. feladatban.) Ez az xy, xz, xu élekkel eddig $n - 1$ él. Hagyjuk el ezt az $n - 1$ élt a gráfból. H minden pontja legalább harmadfokú, tehát a maradó gráfban még legalább másodfokú. Ez összesen legalább annyi élt jelent, amennyi H pontjainak száma, azaz $n-4$-et. Tehát összesen legalább $(n-1)+(n-4)=2n-5$ éle van a gráfnak.

b) $k=2$. Legyen x egy másodfokú pont, két szomszédja legyen y és z. Tegyük fel először, hogy y-nak és z-nek nincs közös szomszédja x-en kívül. Legyen y további (x-től különböző) szomszédainak halmaza Y, z további szomszédainak halmaza Z. E két halmaz x, y, z-vel együtt kiadja a gráf összes pontját, különben x-ből nem volna minden kettő hosszú úttal elérhető. Az xy, xz, yY, zZ élek együtt tehát $n-1$ élt adnak. Két esetet választunk szét.

b1) Ha x az egyetlen másodfokú pont a gráfban, akkor ennek az $n-1$ élnek az elhagyása után $Y\cup Z$ minden csúcsa még legalább másodfokú marad, tehát ez még legalább annyi él, ahány csúcs $Y\cup Z$-ben van, azaz $n-3$. Ebben az esetben tehát legalább $2n-4$ élt is tudunk garantálni. Ugyanez a meggondolás megy akkor is, ha x-en kívül csak y vagy z volna másodfokú.

b2) Ha $Y\cup Z$ halmazban is van egy másodfokú pont. Feltehetjük, hogy ez a pont Y-ban van, jelöljük y'-vel. Először legyen u az Y halmaz egy tetszőleges pontja. Tudjuk, hogy u nincs összekötve z-vel, tehát van egy közös szomszédja vele, azaz u össze van kötve Z valamelyik pontjával. Ez azt jelenti, hogy Y minden pontjából fut legalább egy él Z-be. (Ugyanez természetesen igaz Z pontjaira is: belőlük is fut legalább egy-egy él Y-ba.) Vegyük most az y' pontot. Mivel másodfokú és egyik szomszédja y, így a másik szomszédja biztosan Z-ben van, legyen ez a szomszédja z'. Mivel a gráf átmérője 2, y'-ből is minden pontot el kell érnünk kettő hosszú úttal. Ha y-on keresztül indulunk, akkor csak $Y\cup\{x\}$ pontjaihoz jutunk el. Tehát Z pontjaihoz csak z'-n keresztül vezethet az út. Ez viszont azt jelenti, hogy z' össze van kötve Z minden más pontjával. Ez $|Z|-1$ él. Másrészt Y minden pontjából is indul legalább egy-egy él Z-be, ez további $|Y|$ él, összesen eddig $|Z|+|Y|-1=n-4$ él. Hozzávéve az xy, xz, yY és zZ éleket, ami további $n-1$ él, összesen ismét legalább $2n-5$ élt kapunk.

Marad az az eset, amikor x másodfokú pont, és két szomszédjának, y-nak és z-nek van közös szomszédja x-en kívül is. Könnyen látható, hogy ebben az esetben $G-x$ is 2-átmérőjű, és pontszáma $n-1$. Ha nincs telített pontja, akkor alkalmazható rá az indukciós feltétel, azaz legalább $2n-7$ éle van, s ehhez hozzávéve az xy, xz éleket megint legalább $2n-5$ élt kapunk.

Befejezésül azt kell még megvizsgálnunk, mi van, ha a $G-x$ gráfban van telített pont. Sem y, sem z nem lehet telített pont, mert akkor G-ben is telített pont volna, amit kizártunk. Ha viszont egy y-tól és z-től különböző u pont a telített pont, akkor u-ból $n-2$ él indul ki. Ez az xy és xz éllel együtt már n él a G gráfban. Vegyünk egy tetszőleges további v pontot. Mivel v nincs összekötve x-szel, vagy y-on keresztül érhető el x-ből, vagy z-n keresztül. Ez minden v pontra egy-egy további yv vagy zv élt jelent, összesen még legalább $n-4$ élt. Ebben az esetben tehát legalább $2n-4$ élt is tudunk garantálni.

Ezzel a bizonyítást minden esetben befejeztük.

8.6. Csak $n\geq 10$ esetén lehet ilyen gráf. Az $n=10$ esetben a Petersen gráfnak pontosan 15 éle van és 2 az átmérője. A 8.5. feladat megoldásának a) részét kissé pontosítva belátható, hogy elég nagy n-ekre már nincs ilyen gráf.

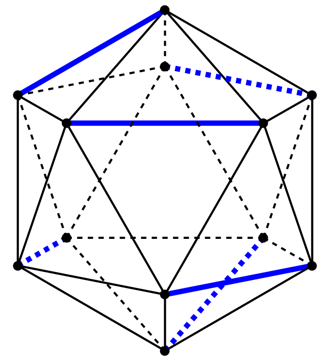
9. Független pontok és élek

9.1. Ha $n=2k$ vagy $n=2k+1$, akkor van k független él, több pedig nem lehet. Tehát $\nu(K_n)=\lfloor n/2\rfloor$.

9.2. a) A kocka bármely négy párhuzamos éle négy független él. Miután nyolc csúcsa van, több független éle nem is lehet. Tehát ebben az esetben $\nu(G)=4$.

b) Az oktaéderben nincs három független él, kettőt viszont könnyű találni. Itt $\nu(G)=2$.

c) Az ikozaédernek 12 csúcsa van, és van benne 6 független él. L. az 1. ábrát. Több nem lehet, tehát itt $\nu(G)=6$.



9.2M.1. ábra.

9.3. a) Az ötszögben két független él van, azaz $\nu(C_5) = 2$.

b) Az $n = 2k$ és $n = 2k + 1$ pontú körben egyaránt k független él van. Tehát $\nu(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$.

9.4. Vegyük a Hamilton-kör minden második élét.

9.5. a) Ha a gráfban van olyan kör, amelynek legalább $2k+2$ pontja van, akkor ebben a körben van $k + 1$ független él. A mi gráfjainkban tehát a legnagyobb kör hossza maximálisan $2k + 1$ lehet. Ez viszont lehetséges: egy $2k + 1$ (és egy $2k$) pontú gráfban tényleg k a független élek maximális száma.

b) Mivel egy $2k + 1$ pontú körben van k független él, ezért a gráf további pontjai között nem futhat él. S mivel a kör bármely pontját elhagyva is van még k független él, ezért egyik pontjából sem indulhat ki a körön kívüli pontba él. Tehát a gráf többi pontja izolált pont. Vagyis a gráfnak van egy $2k+1$ pontú komponense, amelyben van Hamilton-kör, a többi komponense izolált pont.

A gráfnak akkor van a legtöbb éle, ha a kör pontjai teljes gráfot alkotnak. Ennek $(2k + 1)k$ éle van.

9.6.

1. megoldás. Ha $n = 3$, akkor lehet három éle, a háromszögben nincs két független él. Minden más n értékre $n-1$ a maximum, és ha n nem 3 vagy 4, akkor egyetlen n pontú, $n-1$ élű egyszerű gráf van, amiben nincs két független él: az n pontú csillag.

Tegyük fel, hogy a G gráfban nincs két független él, és legyen xy a gráf egy éle. Minden további e él egyik végpontja x, vagy y, ellenkező esetben e független volna xy-tól. Ha van olyan z pont, amellyel x is, y is össze van kötve, akkor a gráfban nem lehet további él, hiszen az e három él valamelyikétől független lenne. Ha pedig nincs ilyen z pont, akkor vagy x-ből, vagy y-ból nem indul él, hiszen ha volna egy xu és egy yv él, ezek függetlenek volnának ($u \neq v$). Tehát a gráf minden éle x-ből indul (vagy minden éle y-ból indul). Nyilvánvalóan akkor van a legtöbb él, ha a gráf egy csillag.

A kritikus gráf tehát az n pontú csillag és az a gráf, amely egy háromszögből és $n - 3$ darab izolált pontból áll.

Ebből már következik, hogy $n = 3$-ra a maximális élszám három, a háromszög a maximális élszámú gráf, ha viszont $n \geq 4$, akkor a maximális élszám $n - 1$. $n = 4$-re a hárompontú csillag is, a háromszögből és egy izolált pontból álló gráf is maximális élszámú, ha $n > 4$, akkor csak az n pontú csillagnak van maximális élszáma.

2. megoldás. Lényegében ugyanez a bizonyítás elmondható az 1.3. feladatra hivatkozva is. Nevezzük *kritikus gráfnak* azokat az egyszerű gráfokat, amelyekben nincs két független él, de bármely még nem szereplő élt behúzva már keletkezik két független él. Az említett feladat szerint egy ilyen gráfban vagy van telített pont, vagy van izolált pont. De az izolált pontokat nyugodtan elhagyhatjuk, ettől a gráf továbbra is kritikus gráf marad és most már biztosan van benne telített pont, legyen ez x. Ha x két szomszédja között fut egy $e = yz$ él, akkor x-nek nem lehet további szomszédja. Ha ugyanis u egy további szomszédja volna, akkor xu és yz két független él volna. Tehát az izolált pont nélküli kritikus gráfok a háromszög és a csillag.

9.7. Legyen $x_1y_1, \dots, x_ky_k$ egy maximális független élrendszer a gráfban. A gráf többi pontjának halmazát jelöljük T-vel. T pontjai között nem futhat él. Meg akarjuk becsülni, hány él indulhat az x_i és y_i pontokból T-be. Ha x_i-ből megy él egy $u \epsilon T$ pontba, akkor a párjából, y_i-ből nem futhat él T-nek u-tól különböző pontjába. Ha ugyanis futna él egy $v \epsilon T$ pontba, akkor az x_iy_i élet kicserélhetnénk az x_iu, y_iv élpárra és nagyobb független élrendszert kapnánk, ami ellentmond feltevésünknek.

Ebből viszont következik, hogy vagy u van összekötve x_i-vel és y_i-vel és T többi pontja közülük egyikkel sem, vagy y_i nincs összekötve T egyetlen pontjával sem. Mindkét esetben legfeljebb $n-2k$ él fut az x_iy_i végpontjaiból T-be. Ezt az összes x_iy_i élre összeadva azt kapjuk, hogy a független élek végpontjaiból T-be legfeljebb $k(n-2k)$ él fut. Másrészt a független élek végpontjai között legfeljebb $k(2k-1)$ él fut. Ez összesen legfeljebb $kn-k$ él, ahogy a feladat állítja. (Érdemes meggondolni, hol használtuk, hogy $n \geq 2k+2$.

Ha $n = 2k+1$, akkor a teljes gráfban sincs $k+1$ független él, tehát a maximális élszám $k(2k+1)$.

9.9. A 9.7. feladat megoldásának gondolatmenetét fogjuk alaposabban szemügyre venni.

Vegyünk tehát két független élt, legyenek ezek x_1y_1, x_2y_2. A 9.7. feladat megoldásában láttuk, hogy e négy pontból a többi pontba legfeljebb $2(n-4)$ él indul. Ha a négy pont között legfeljebb négy él van, akkor összesen legfeljebb $2n-4$ él van, ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk.

Ha a négy pont között legalább öt él van, akkor a kényelem kedvéért betűzzük át e négy pontot: legyenek az a, b, c, d pontok és tegyük fel, hogy az ab, ad, bc, bd, cd élek a gráfban vannak. Legyen T a gráf többi pontjának halmaza. Tudjuk, hogy T pontjai között nem fut él.

Tegyük fel, hogy c-ből indul él egy $u \epsilon T$ pontba. Ha egy u-tól különböző $v \epsilon T$ pontból indulna él b-be, akkor bv, uc, ad három független él volna. Hasonló a helyzet, ha v-ből d-be indulna él. Ha v-ből a-ba indulna él, akkor va, bd, cx három független él volna, megint ellentmondás. Tehát v-ből csak c-be indulhat él.

Ugyanez elmondható a-ra is, és ha az ac él is szerepel, akkor ugyanez elmondható b-re és d-re is.

Ebből az következik, hogy három esetet kell vizsgálnunk:

a) ac nem él és két végpontjából nem indul él T-be. Ekkor b és d a gráf összes élét lefogja, a gráfnak $2n-3$ éle van és n darab élben (nevezetesen a bd élben) illeszkedő háromszögből áll.

b) A négy pontból egyáltalán nem indul él, ekkor a gráfnak legfeljebb hat éle lehet, ami kevés.

c) Esetleg átbetűzéssel feltehetjük, hogy c-ből indul él valamely $u \epsilon T$-be és bd éle a gráfnak. Ezen belül két esetet kaptunk.

c1) Vagy u van a négy pont közül többel összekötve, és ekkor T többi pontjából egyáltalán nem indul él, ekkor összesen legfeljebb tíz éle van a gráfnak, ami $n > 6$-re kevesebb $2n-3$-nál. $n = 6$-ra viszont a maximumot adja.

c2) T minden pontja c-vel van összekötve a négy pont közül. Ez legfeljebb $n-4$ él, plusz a négy pont között futó öt vagy hat él, ez még mindig csak $n+2$ él, ami kevesebb, mint $2n-3$.

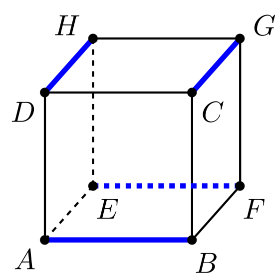
9.1. Válasszunk ki két embert, akik ismerik egymást, legyenek ők E_1 és E_2. Vegyünk egy harmadik embert, E_3-at. E_3 három embert ismer, tehát van egy E_1-től és E_2-től különböző E_4 ismerőse. Marad még két ember: E_5 és E_6. Ha ők is ismerik egymást, máris kész vagyunk: leültetjük őket $E_2, E_4, E_6, E_1, E_3, E_5$ sorrendben egymás mellé.

Közbevetőleg: azt kell bizonyítanunk, hogy egy 3-reguláris hatpontú gráfban van három független él. Egyelőre találtunk kettőt: az E_1E_2 és az E_3E_4 élt, és feltehetjük, hogy E_5E_6 nem él a gráfban. Akkor viszont E_5-nek az első négy ember között három ismerőse van, átbetűzéssel elérhetjük, tehát az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy például E_1-et és E_2-t ismeri. Másrészt E_6 is hármat ismer az első négy emberből, tehát E_1 és E_2 közül is ismer legalább egyet. Ismét az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy E_1-et ismeri. Ekkor viszont az E_1E_2 párt kicserélhetjük az E_1E_6 és E_2E_5 párokra, és találtunk három megfelelő párt, azaz három független élt a gráfban.

9.4.

1. megoldás. Ha a párhuzamos éleit vesszük, ezek teljes párosítást alkotnak, ilyenből három van. Ha nem ilyet keresünk, abban kell lennie két kitérő élnek. Az $ABCDEFGH$ kocka AB és CG kitérő éléhez egyféleképpen találhatunk még két élt, amely velük együtt teljes párosítást alkot: DH és EF. Ugyanez az egyetlen teljes párosítás tartozik az AB és DH kitérő élpárhoz is. Az AB és FG kitérő élpárral az EH és CD élpár alkot teljes párosítást. Tehát minden él összesen három-három teljes párosításban szerepel, minden teljes párosításban négy-négy él szerepel, a kockának tehát összesen kilenc teljes párosítása van. Lásd a 9.4M2. ábráját.

2. megoldás. A kocka élei három párhuzamos élnégyest alkotnak. Egy teljes párosításban négy él van, tehát biztosan van közöttük két párhuzamos. Két olyan párhuzamos él, amelyik nincs közös lapon (például az AB és GH él), csak egyféleképpen egészíthető ki teljes párosítássá: ha a maradó két párhuzamos élt vesszük hozzájuk. Két azonos lapon levő él viszont (például az AB és EF él) kétféleképpen is kiegészíthető (lásd az 1. ábrát), ebből az egyik „új”. Így tehát hat „új” teljes párosítást kapunk a párhuzamos élnégyeseken kívül. Ez összesen kilenc teljes párosítás.



9.4M2.1. ábra.

9.5. A negyedfokú pontokat összekötő élek egyike sem szerepelhet a teljes párosításban, mert ha szerepelne, akkor közös másodfokú szomszédjuk kimaradna a párosításból. A maradó élek egy hatpontú kört alkotnak, ennek két teljes párosítása van.

9.6. a)-nak 4 (a két szélső háromszög minden éléhez egy-egy valamint a középső „gerendákból” alakított teljes párosítás).

b)-nek 11:

– vagy vesszük az összes küllőt, ez egy lehetőség,

– vagy a külső a ötszögből két független élt, ehhez már csak egy küllőt vehetünk és akkor belülről is két, a kívülről választottal párhuzamos független él kell, ez öt lehetőség. Ugyanezeket kapjuk, ha belülről veszünk két független élt.

–Marad az az eset, ha belülről is, kívülről is egy-egy élt veszünk. Ekkor három küllő kell, ezeknek szomszédosaknak kell lenniük, s hozzájuk a kívülről vett éllel párhuzamos belső élt kell választani. Ez ismét öt lehetőség.

c)-nél ha az egyik, a két négyest összekötő él szerepel, akkor szerepelnie kell a másiknak is (MIÉRT?), s ez csak egyféleképp fejezhető be. Ha egyik ilyen él sem szerepel, akkor mindkét „majdnem teljes négyesből” kell egy-egy 1-faktornak szerepelnie, ez négyféleképp lehetséges. c)-nek tehát összesen öt teljes párosítása van.

9.7. Azt kell meggondolnunk, hogy amikor a gráfot létrehoztuk, nemcsak a legfelső pontot választottuk tetszőlegesen a gráf pontjai közül, hanem a három szomszédját is tetszőleges sorrendben felrajzolhattuk (kihasználjuk, hogy a végeredményül kapott gráfról tudjuk, hogy egyértelmű). Tehát a legfelső pontból – nevezzük x-nek – induló bármelyik él szerepe egyforma. Vegyük a bal oldalit. Az x-ből induló további élek már nem jönnek szóba a teljes párosításhoz. A második szinten levő pontok közül tehát mind a középsőt, mind a jobb oldalit egy-egy lefelé menő éllel kell lefednünk. A középsőből lefelé induló két él az előzőkhöz hasonló okoskodás miatt szintén „egyforma”, tehát mindegy, melyiket választjuk. Ha itt is a bal oldalit választjuk, akkor a harmadik csúcsnál is a bal oldalit kell választanunk (különben a legalsó szinten a legszélén bal oldalt állót már nem tudjuk lefedni.) S ezt a három élt már egyértelműen lehet teljes párosítássá kiegészíteni.

Mivel az első élt háromféleképp választhattuk, a másodikat kétféleképp és utána már nem volt szabad választásunk, ezért hat teljes párosítás van.

9.10. Ha k és n nem egyenlő, akkor egy sincs. Ha $k = n$, akkor egyenlő az n elemű permutációk számával, $n!$-ral, hiszen az egyik csoport pontjainak sorrendjét rögzíthetjük, és a másik csoport pontjait tetszőleges sorrendben az első pontjai mellé írhatjuk, mindegyikhez tartozik pontosan egy teljes párosítás (és más nincsen).

9.11. Ha n páratlan, akkor egy sincsen. Ha n páros, akkor annyi, amennyi egytől $n-1$-ig a páratlan számok szorzata, azaz $(n-1)!!$. Számozzuk meg ugyanis a pontokat egytől n-ig. A teljes párosítás éleit a következő sorrendben soroljuk fel: először felírjuk, hogy az egyes számú pont melyik ponttal van párosítva. Aztán sorra mindig megnézzük, hogy a legkisebb, még nem párosított pont melyik ponttal van összekötve. Ha minden teljes párosítást így írunk fel, akkor mindegyiket pontosan egyszer fog szerepelni. Az első pontpárnál $n-1$ választásunk van, a másodiknál $n-3$, általában a k-adiknál $n-2k+1$.

9.1. Egy gráfot pontosan akkor nevezünk páros gráfnak, ha pontjainak halmaza két független ponthalmaz uniója.

9.4. Három pont nem elég. Ha ugyanis vesszük a kockának négy, párhuzamos élét, ezek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa (vagyis a kocka gráfjának négy független élét alkotják). Ha tehát három pontot hagyunk el a kocka gráfjából, akkor e négy él valamelyike még biztosan megmarad.

Viszont ha négy olyan csúcsot hagyunk el, amelyek szabályos tetraédert alkotnak, akkor a megmaradó négy pont között nem fut él (azok alkotják a másik szabályos tetraédert). Ugyanezt megfogalmazhatjuk a következőképpen is: a kocka gráfja páros gráf, amelynek mindkét osztálya négy pontból áll (a megfelelő csúcsok egy-egy szabályos tetraédert alkotnak). Bármelyiket elhagyva csak a másik osztály pontjai maradnak és azok független ponthalmazt alkotnak.

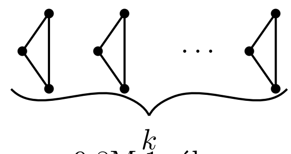
9.7. A 9.2. és 9.5. feladatban beláttuk, hogy az ötszög és általában a $2n+1$-szög éleinek lefogásához eggyel több pont kell, mint ahány független élük van.

Ha egymás mellé teszünk például k darab ötszöget, akkor az így kapott gráfban a független élek maximális száma $2k$, míg az élek lefogásához legalább $3k$ pontra van szükség, tehát a két mennyiség különbsége k, ami akármilyen nagy lehet.

Még egyszerűbb példa az n pontú teljes gráf. Ebben a független élek maximuma $\lfloor n/2 \rfloor$, míg az összes él lefogásához $n-1$ pontra van szükség. A kettő különbsége legalább $(n-1)/2$, s ez tetszőlegesen nagy lehet n növelésével. Ez a feladat mindhárom részére egyszerre ad választ.

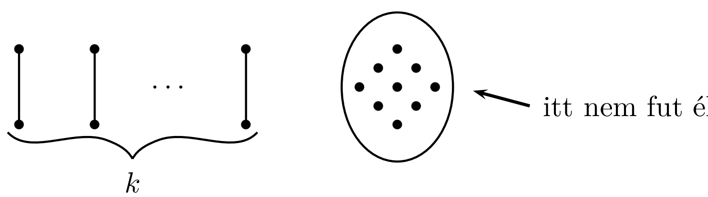
9.8. a) Ha a gráf $k-1$ független élből és egy további háromszögből áll, akkor élei lefogásához legalább $k+1$ pont kell.

b) Ha a gráf k darab páronként pontdiszjunkt háromszögből áll (lásd az 1. ábrát), akkor élei lefogásához legalább $2k$ pont szükséges.



9.8M.1. ábra.

c) Vegyük a gráf egy maximális független élrendszerét. Ennek az élrendszernek legfeljebb k éle van, és az élek végpontjai együtt minden élt lefognak, hiszen a maximalitás miatt az élrendszeren kívüli pontok nem lehetnek egymással összekötve. L. a 2. ábrát



9.8M.2. ábra.

9.2. A kocka gráfjának pontjait bármely négy „párhuzamos” – azaz független – él lefedi. Egy $2k$-pontú kört minden második éle lefed, tehát k éle lefed. Egy $2k+1$ pontú kört $k+1$ éle fed le. Ugyanígy a teljes gráfot is páros n-re $n/2$ független éle lefedi, páratlan n-re $(n+1)/2$ éllel tudjuk lefedni. A $K_{k,l}$ teljes páros gráfot $k \leq l$ esetén l éllel tudunk lefedni. Veszünk a kisebbik ponthalmazból induló k darab független élt és a lefedetlenül maradó $l-k$ pontot egy-egy további éllel lefedünk. A 8.4. feladat tízpontú gráfjában van öt független él, ezek tehát lefedik a gráfot.

Az ikozaéder gráfjában van egy 10 hosszú kör. Ennek két szomszédos pontját a kimaradó két csúcsból induló egy-egy éllel le tudjuk fedni, a maradó nyolc pontot pedig a kör négy élével lefedjük. Tehát az ikozaéder gráfjában van hat élű lefedő élrendszer.

Ugyanez egyszerűbben elmondva: a 9.2. feladatban láttuk, hogy az ikozaéder gráfjában van teljes párosítás és tudjuk, hogy a teljes párosítás egyben minimális lefedő élrendszer is.

Az n pontú csillag lefedéséhez $n-2$ él kell (a telített pontot és egy elsőfokú pontot lefedünk egy éllel, de a többi elsőfokú mindegyikéhez kell egy-egy további él).

A k darab diszjunkt háromszögből álló gráf minden háromszögének lefedéséhez két-két él kell, ez összesen $2k$ él.

10. Vegyes gráfelméleti feladatok

10.1. Nem. Ellenpélda minden „csillag”.

10.2. Nem. Csak kicsit kell a korábbi ellenpéldán módosítanunk. Veszünk két pontot, amelyek nincsenek összekötve egymással, de össze vannak kötve minden további ponttal. Ez utóbbiak sincsenek egymással összekötve. Vagyis veszünk egy $K_{2,n-2}$ teljes páros gráfot.

Megjegyzés. A feladat folytatása az úgynevezett „Barátság-probléma”. Ez azt mondja ki, hogy ha egy társaságban bármely két embernek pontosan egy közös ismerőse van, akkor vagy mindenkinek azonos számú ismerőse van, vagy van olyan ember, aki a társaság minden tagját ismeri. Ennek az állításnak a bizonyítása azonban igen nehéz. L. [17] I. fejezet 27. feladatát.

10.4. Ha van olyan ember, E, aki legfeljebb n másikat ismer, akkor válasszuk ki őt és az ismerőseit. Ha F-et nem ismeri E, akkor valamelyik ismerőse ismeri, hiszen bármely két embernek, így E-nek és F-nek is van közös ismerőse.

Ha minden ember legalább $n+1$ másikat ismer, akkor válasszuk ki az egyiket, most legyen ő E. Rajta és ismerősein kívül legfeljebb $2n-2$ ember maradt. Állítsuk őket párba tetszőlegesen. Minden párnak van egy közös ismerőse, ez a legfeljebb $n-1$ ember és E együtt E-n kívül mindenkit ismer. Ha még hozzájuk vesszük E egy ismerősét, akkor már találtunk $n+1$ embert, akik együtt mindenkit ismernek.

10.5. Vegyük sorra a poliéder éleit, és írjunk mindegyikre egy-egy prímszámot, mindegyikre másikat. Ezután vegyük sorra a poliéder csúcsait és minden csúcsra azt a számot írjuk, amelyet úgy kapunk, hogy összeszorozzuk a belőle induló éleken álló prímeket. Az így kapott számozás megfelelő lesz: két élszomszédos csúcson álló szám közös osztója éppen az összekötő élen álló prímszám lesz, két nem szomszédos csúcsra viszont olyan számok kerültek, amelyeknek nincs közös prímosztójuk, így egynél nagyobb közös osztójuk sem.

Az eljárást bármely egyszerű gráfra ugyanígy elvégezhetjük, tehát például arra a gráfra is, amit úgy kapunk, hogy a poliédert gráfnak tekintjük és vesszük a komplementerét.

10.8. A gráf pontjai szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Ha minden pont foka páros, akkor nincs mit bizonyítanunk.

Ellenkező esetben van egy páratlan fokú x pont. Legyen x szomszédainak halmaz a S, és a többi pont halmaza T. Vegyük az S által feszített részgráf komplementerét és vegyük ehhez hozzá az ST és a TT éleket.

A kapott G' gráfra alkalmazzuk az indukciós feltételt: S is, T is két részre bomlik – $S = S' \cup S''$ és $T = T' \cup T''$ – úgy, hogy az $S' \cup T'$ és az $S'' \cup T''$ által G'-ben feszített részgráfokban minden pont foka páros. S' és S'' közül az egyik páratlan, a másik páros sok pontból áll, mondjuk S' áll páratlan sokból és S'' páros sokból. Cserélljük ost vissza S'-ben és S''-ben az éleket az eredeti élekre és tegyük hozzá x-et S''-höz. Ekkor S'-ben minden pont fok paritása megmarad(!) és S''-ben megfordul, de miután hozzávettük x-et, amivel S'' minden pontja össze van kötve, ezért itt is minden pont foka páros marad. Végül x foka is páros, hiszen S'' minden pontjával össze van kötve és S'' pontszáma páros.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

10.1. Ha van zárt Euler-séta, akkor minden pontba pontosan annyiszor megyünk be, ahányszor kijövünk belőle, tehát minden pontból páros sok él indul.

Tegyük fel most, hogy a gráf minden pontjának fokszáma páros. Nevezzük „jónak” a gráf olyan sétáit, amelyeknek – kivételesen – azonos a kezdő és a végpontja és egyetlen élt sem tartalmaz kétszer.

Vegyük a leghosszabb jó sétát. Azt állítjuk, hogy ez a gráf minden élét tartalmazza. Ha ugyanis egy élt nem tartalmazna, akkor az összefüggőség miatt volna olyan xy él is, amit nem tartalmaz, s aminek x végpontját már érintette a séta. Másrészt a séta minden pontnál páros sok élt „foglal” le, tehát elhagyása után is minden pont foka páros. Vegyük a maradó gráfban x komponensét. Megmutatjuk, hogy a séta bővíthető egy x-ből induló jó sétával. Induljunk el az xy élen, y-ból indul él y-on kívül, hiszen páros a fokszáma. Ezen továbbhaladhatunk. Mindig egy új ponthoz jutunk, és az épp most alakuló sétánk eddig ennél a pontnál páratlan sok élt használt el, tehát van még egy, eddig nem használt él, amin továbbhaladhatunk. Ebből egyetlen kivétel van: ha visszaértünk az x pontba. Mivel véges a gráf, egyszer visszaérünk. Ezzel találtunk egy jó sétát, amit „hozzáragaszthatunk” a maximális sétánkhoz. Ez ellentmondás.

A leghosszabb jó séta tehát tartalmazza a gráf minden élét.

Megjegyzés. A bizonyítás valójában algoritmust ad, amely a gráfban vagy talál egy páratlan fokú pontot, vagy talál egy zárt Euler-sétát.

10.2. A 4-reguláris gráfnak van zárt Euler-sétája (l. a 10.1. feladatot). Járjuk be ennek éleit sorban, és színezzük őket felváltva feketére és fehérre. Így amikor egy pont sorra jön, akkor egy-egy belőle induló él lesz fehér és fekete. Tehát a kezdőpont kivételével biztosan minden pontból két-két fehér és fekete él indul ki. A kezdőpontban viszont azért lesz két-két fehér és fekete él, mert a gráfnak páros sok ($2n$) éle van, tehát az utolsó él az elsővel ellenkező színű lesz.

10.3. Nyilván elég összefüggő gráfokra bizonyítani.

A gráf minden pontja páros, tehát a 10.1. feladat szerint van zárt Euler-séta („Euler-kör”) az élein.

A gráf élszáma páros, mert fokszámösszege osztható néggyel. Ebből következik, hogy az Euler-séta éleit ki tudjuk színezni két színnel úgy, hogy felváltva színezzük az éleit. Tekintsük az egyik színt. Az a G_1 feszítő részgráf, amelynek az első színű élek az élei, egy 2-reguláris gráf. Könnyen látható, hogy ez azt jelenti, hogy ez a részgráf pontdiszjunkt körökből áll. Másrészt a 4.1. feladat szerint G minden köre páros, tehát ezeknek a köröknek az élei is felváltva színezhetők két színnel. Így viszont mindegyik szín egy 1-reguláris részgráfot, azaz egy teljes párosítást ad.

10.5. A csúcsokat úgy számozzuk, hogy a j-edik pont foka legyen d_j. Az első i pont halmazát H-val, a többi pont halmazát L-lel jelöljük. Kétféleképp megbecsüljük a HL élek számát. Egyrészt az ilyen élek száma nyilván legfeljebb az L-beli pontok fokszámának összege, vagyis $d_{i+1}+d_{i+2}+$ $+\ldots d_n$. Másrészt legalább $d_1+d_2+\ldots+d_i-i(i-1)/2$, hiszen H-n belül legfeljebb $i(i-1)/2$ él fut, a többi $d_1+d_2+\ldots+d_i-i(i-1)/2$ élnek H-ból kifelé kell futnia. E két becslést összehasonlítva a kívánt állítást kapjuk.

10.7. Egy gráfban nem lehet egyszerre telített és izolált pont. Ha egy gráfban van telített pont, akkor a komplementerében van izolált pont és fordítva. Ha egyik sincs a gráfban, akkor a komplementerében sincs egyik sem. Tehát a sem telített, sem izolált pontot nem tartalmazó gráfokat párba állíthatjuk: mindegyiknek a komplementere lesz a párja. Minthogy n legalább 2, a csúcsok számozottak, egyetlen gráfnak sem lehet önmaga a komplementere. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

10.1. $k=4$-re konstruálunk ilyen gráfot.

Induljunk ki abból a gráfból, amely az x és az y pontok között futó négy darab háromélű útból áll (az $xzz'y$, $xuu'y$, $xvv'y$ és $xww'y$ utakból):

Itt x és y már negyedfokú és a gráfnak nyilván nincs Hamilton-köre, hiszen x-ből akármilyen úton megyünk y-ba, majd vissza x-be, két-két pont mindenképp kimarad. Már csak az a dolgunk, hogy a közbülső pontokból is negyedfokúakat csináljunk. Hagyjuk el a zz' élt és kössük össze ehelyett z-t is, z'-t is ugyanazzal a három ponttal, és csináljuk meg ugyanezt az uu', vv' és ww' élekkel:

A kapott gráf 4-reguláris, és akármilyen úton is megyünk x-ből y-ba, majd vissza, legalább 5-5 pont kimarad. Tehát nincs benne Hamilton kör.

Nyilvánvaló, hogy hasonló módon bármely k-ra konstruálható k-reguláris gráf, amelyben nincs Hamilton-kör. x és y között k darab háromélű utat kell felvenni, és minden ilyen út középső élét ki kell cserélni két olyan pontra, amelyik egy teljes $k-1$ pontú gráf pontjaival van összekötve.

10.2. a) Egy négypontú teljes gráf és egyik pontjából kiinduló egyetlen él egy olyan hétélű gráf, amelyben nincs ötpontú kör. Ha viszont nyolc él van, akkor a komplementerben csak két él van, ez csak kétféleképp lehetséges és mindkét esetben találunk ötszöget a gráfban.

b) Egy ötpontú teljes gráf és egyik pontjából kiinduló egyetlen él egy olyan 11 élű gráf, amelyben nincs hatpontú kör. Ha viszont 12 él van, akkor a komplementerben csak három él van, ez csak ötféleképp lehetséges és minden eseteben esetben találunk hatszöget a gráfban.

10.3. Azt állítjuk, hogy ha egy n pontú gráfban legalább $\binom{n-1}{2}+1$ él van, akkor van benne Hamilton-út és ha ennél legalább eggyel több él van, akkor van benne Hamilton-kör. Nyilvánvaló, hogy az utóbbiból az előbbi következik. Ugyanis ha van egy $\binom{n-1}{2}+1$ élű gráfunk, akkor behúzunk még egy élt, és ebben már van Hamilton-kör. Két eset van: vagy az eredetiben is volt, vagy benne van az újonnan behúzott él, s akkor azt elhagyva kapjuk a két végpontja között futó Hamilton-utat.

b) állítást fogjuk n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítani. $n = 2$-re semmitmondóan igaz az állítás (nincs két pontú, két élű gráf), $n = 3$-ra pedig azt adja, hogy egy hárompontú, háromélű egyszerű gráfban van Hamilton-kör, ami igaz.

Tegyük fel, hogy $n-1$-re már beláttuk az állítást. Legyen G egy n pontú, $\binom{n-1}{2}+2$ élű egyszerű gráf. Vegyük a(z egyik) legnagyobb fokú pontját, legyen ez x. x foka $> (n-1)/2$, mert különben a gráfnak legfeljebb $(n^2-n)/2$ éle volna és ez kevesebb a megadott élszámnál. Ha $G-x$ gráfban van Hamilton-kör, akkor az egy $n-1$ hosszú kör. Mivel x foka $> (n-1)/2$, ezért össze van kötve e kör két szomszédos pontjával. E két pont közé tehát „beilleszthetjük” és így egy n pontú, azaz Hamilton-kört kapunk.

Marad az az eset, ha $G-x$-ben nincs Hamilton-kör. Ekkor az indukciós feltétel szerint legfeljebb $\binom{n-2}{2}+1$ éle van. Az indukciós feltételből és a megoldás elején mondottak szerint $G-x$-ben van Hamilton-út. Másrészt x foka $\binom{n-1}{2}+1-(\binom{n-2}{2}-1) = n-1$ tehát a gráf minden pontjával össze van kötve. Így a $G-x$-ben talált Hamilton-út két végpontjával is. Tehát az egész gráf egy Hamilton-körévé egészíti ki.

10.1. A férfiak egymás között $n(2n-1)$ játszmát játszottak, s ezeket mind férfiak nyerték, ez tehát biztosan legfeljebb az összes játszmák $5/12$ része. Az összes játszma száma $3n(3n-1)/2$, s ebből azt kapjuk, hogy $24n(2n-1) \leq 15n(3n-1)$, amiből n-nel való osztás és rendezés után $n \leq 3$. Az összesen lejátszott mérkőzések száma $n = 1$ esetén 3, $n = 2$ esetén 15, $n = 3$ esetén 36. Csak ez utóbbi esetben lehet a játszmákat 7:5 arányban elosztani, tehát $n = 3$ nő vett részt a játékban.

Meg kell még mutatnunk, hogy $n = 3$ esetén valóban elképzelhető, hogy a nők által nyert mérkőzések száma 21, a férfiaké 15. Ez a következőképpen lehetséges: a férfiak egymás között 15 mérkőzést játszottak, ezeket férfiak nyerték, és az összes többi meccset, tehát a nő-nő meccseket és minden nő-férfi meccset a nők nyertek.

10.3. Ha bármely két résztvevő találkozott korábban, nincs mit bizonyítani. Akkor sincs mit bizonyítani, ha csak két ember van, aki nem találkozott korábban, hiszen rajtuk kívül minden ember ismer mindenkit. Ha volna két pár résztvevő, a, b és c, d, akik nem találkoztak korábban és négy különböző ember volna, akkor közülük egyik sem ismerhetné a másik hármat. Tehát feltehető, hogy $a = d$. De akkor vegyünk egy tetszőleges további embert, e-t. Mivel a nem találkozott korábban sem b-vel, sem c-vel, ezért a, b, c, e közül csakis e lehet az, aki találkozott mindhármukkal. e tehát találkozott a, b, c-vel. Ha volna egy f ember, akivel még nem találkozott volna, akkor például a, b, e, f olyan négyes volna, akik közül senki nem találkozhatott volna mindhárom másikkal korábban. Vagyis e *minden* résztvevőt ismer. Mivel e-t tetszőlegesen választottuk, ezzel beláttuk, hogy a társaság 47 tagja mindenkit ismer. A feladat állítása viszont éppen ezt állítja más megfogalmazásban.

Tegyük fel, hogy a nem ismer egy további embert, nevezzük őt e-nek. Ekkor b-nak ismernie kell mindenki mást, mert ha történetesen egy f embert nem ismerne, akkor a, e, b, f között nem volna senki, aki ismeri a másik hármat.

10.4. Osszuk valahogy két csoportba az embereket. Ha az egyik csoportban találunk egy olyan embert, aki a saját csoportjából többet ismer, mint a másik csoportból, akkor tegyük át a másik csoportba. Ezzel a csoportok közötti ismeretségek száma nő, a csoportokon belüli ismeretségek száma csökken.

Az eljárást addig folytatjuk, amíg találunk ilyen embert. Mivel a csoportok közötti személyes ismeretségek száma mindig nő, egy embert kétszer nem mozgatunk, így legkésőbb 2004 csere után az eljárás véget ér. A végállapotban viszont minden ember legalább annyi embert ismer a másik csoportból, mint a sajátjából. Jelöljük azt a számot, ahányat az x ember a saját csoportjából ismer, $d_s(x)$-szel, azt a számot pedig, ahányat a másik csoportból ismer, $d_m(x)$-szel. Tudjuk, hogy az utóbbi legalább akkora, mint az előbbi. Adjuk össze az előbbieket minden emberre, ekkor a csoportokon belüli ismeretségek kétszeresét kapjuk Euler tétele szerint. Másrészt adjuk össze a $d_m(x)$ számokat, ekkor a csoportok közötti ismeretségek kétszeresét kapjuk. Vagyis éppen azt kapjuk, hogy a csoportokon belüli ismeretségek számának összege nem több, mint a két csoport tagjai közötti ismeretségek száma. Azt kellett bizonyítani, hogy van ilyen csoportosítás.

11. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt! Bevezető feladatok

11.1.

1. megoldás. Ha minden számhoz hozzáadunk ugyanannyit, akkor továbbra is teljesítik a feladat feltételét. Feltehető tehát, hogy a számok nem negatívak és az is feltehető, hogy az egyiken épp a nulla áll. Ha valamelyik szomszédján pozitív szám állna, akkor egy másik szomszédján negatív számnak kellene állnia, ami ellentmond a feltevésünknek.

Azt kaptuk, hogy a nullás csúcsok szomszédaira is nullát kellett írnunk. Ez már négy csúcs. De ezek szomszédaira is nullát kellett írnunk, így elérünk újabb három csúcsot, s ezek mindegyikének szomszédja a szemközti csúcs, tehát arra is nullát kellett írnunk.

Tehát az adott feltétel mellett minden csúcson ugyanannak a számnak kell állnia.

2. megoldás. Az első megoldásban felhasználtuk, hogy minden számhoz ugyanannyit adva a feladat feltétele továbbra is teljesül. Ez önmagában egy sok helyen jól használható ötlet. A feladatunk azonban megoldható ennek az ötletnek a használata nélkül is. Valójában azt a csúcsot – pontosabban: az egyik olyan csúcsot – vettük, amelyen a nyolc szám közül a(z egyik) legkisebb áll. Ha ez a szám a, akkor e csúcs szomszédain is az a számnak kell állnia, mert ha az egyiken nagyobb állna, akkor a szomszédok átlaga csak úgy lehetne a, ha legalább egyen a-nál kisebb szám állna, és ez ellentmond az a-ra tett feltételünknek.

Tehát ha egy csúcson a legkisebb szám áll, akkor a szomszédain is ez a legkisebb szám áll, annak szomszédain is, végül a szemközti csúcson is. Az adott feltétel szerint tehát minden csúcson ugyanaz a szám áll.

Megjegyzés. Természetesen ugyanígy jó volna a legkisebb helyett a legnagyobb szám is.

11.3. A legnagyobb számú csúcs szomszédjain is e legnagyobb számnak kell állnia. Innen a megoldás azonos a 11.1M2. megoldással.

11.4. A 11.1M2. megoldás azon múlt, hogy ha a a csúcsokra írt számok minimuma, és valamelyik csúcson a áll, akkor annak szomszédain is a áll, majd annak a szomszédain is, és így tovább, tehát minden olyan csúcson a áll, amelyhez eljuthatunk (szomszédos) éleken haladva. Egyszerű poliéder esetén pedig bármely csúcsból bármely csúcsba eljuthatunk csúcsban csatlakozó éleken haladva. Így továbbra is igaz, hogy a feladat feltétele mellett minden csúcson ugyanaz a szám áll.

11.5. Továbbra is érdemes a 11.1M2. megoldásának gondolatát használni. Gráfok esetében azt kapjuk, hogy ha az x csúcson a minimális szám áll, továbbá az x és y csúcs között van út a gráfban, akkor ugyanannak a számnak kell állnia rajtuk, tehát a gráf egy komponensének összes csúcsán ugyanaz a szám áll. Összes csúcsa megszámozásához legfeljebb annyi számot használhattunk, ahány összefüggő komponensre bomlik a gráf.

11.8. Könnyű ellenpéldát adni. A gráf pontjai legyenek az egész számok, az élek a szomszédos egészeket kötik össze. Ha minden csúcsra önmagát írjuk (a -1-re a -1-et, a 0-ra a 0-t, az 1-re az 1-et, a 2-re a 2-t, a -2-re a -2-t, stb.), akkor nyilván teljesül a feladat feltétele.

11.9. A csúcsokra írt számok közül a legkisebbet vettük. Véges sok szám között mindig van legkisebb, de végtelen sok szám között nem mindig van.

11.1.

1. megoldás. Vegyük a(z egyik) legnagyobb élszámú lapját, legyen ez a lap egy n-szög. A poliéder egyszerű, tehát ennek a lapnak mind az n éléhez a poliéder egy-egy különböző lapja csatlakozik, ezek élszáma azonban csak 3 és n közötti szám lehet. A skatulyaelv szerint van tehát közöttük kettő, amelynek az élszáma azonos.

2. megoldás. A megoldás elmondható úgy is, hogy ne látszódjék, hogy a „vegyük a legnagyobb” elvet használjuk.

Tegyük fel, hogy a poliédernek n lapja van és ezek mindegyikének más-más számú csúcsa van. Mivel a legkisebb csúcsszám a három, van egy legalább $n+1$ csúcsú lapja és ennek minden éle egy-egy különböző lappal közös, tehát a poliédernek legalább $n+2$ lapja van.

11.2. a) Vegyük az összes olyan összeget, amelyben szerepel a legkisebb és a legnagyobb közül legalább az egyik. Ez összesen 17 összeg. Rendezzük sorba a tíz számot nagyság szerint: $a_1 <$ $< a_2 < \ldots < a_{10}$. Világos, hogy a legkisebb és a legnagyobb szám közül legalább egyet tartalmazó 18 összeg mind különböző, nagyság szerint így következnek:

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < \ldots < a_1 + a_{10} < a_2 + a_{10} < a_3 + a_{10} \ldots < a_9 + a_{10}.$$

Tehát 17 féle különböző összeg biztosan van. Az 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 számokból alkotott legkisebb kéttagú összeg 3, a legnagyobb 19, ez összesen 17 összeg. Ez – és bármely más számtani sorozat – mutatja, hogy 17-nél több különböző összeg nem mindig fordul elő.

b) Az a) rész gondolatmenete változtatás nélkül alkalmazható. Általában $2n-3$-féle különböző összeg garantálható, több nem.

11.3. a) Ha az adott számok nagyság szerinti sorrendben: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, akkor a következő összegek mind különbözők:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 < a_1 + a_2 + a_4 < \ldots < a_1 + a_2 + a_{n-1} < \\ &< a_1 + a_2 + a_n < a_1 + a_3 + a_n < \ldots < a_1 + a_{n-2} + a_n \\ &< a_1 + a_{n-1} + a_n < a_2 + a_{n-1} + a_n < \ldots < a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Ez $3n-8$ szám, s ennél több különböző érték számtani sorozatok esetében nem lép fel.

b) Ha a k tagú összegeket vizsgáljuk, ugyanezt a gondolatot kell alkalmazni. Vagyis vennünk kell minden j-re azokat az összeget, ahol az első j tag a legkisebb j szám, az utolsó $k-j-1$ tag a legnagyobb $k-j-1$ szám. Ezek mind különbözők (a fenti módon nagyság szerinti sorrendbe állíthatók) és számtani sorozatok esetében ennél több különböző összeg nem lép fel.

11.4.

1. megoldás. Minden lány megszámolja, hány fiút ismer. Az öt szám összegének legalább 200-nak kell lennie. Állítsuk nagyság szerinti sorrendbe a kapott öt számot.

a) A(z egyik) legnagyobb szám legalább 40. Tehát van egy lány, aki legalább 40 fiút ismer.

b) Vegyük a három legnagyobb számot. Ha ezek összege kisebb volna 120-nál, akkor közülük a legkisebb kisebb volna 40-nél. De akkor a kimaradt két szám is kisebb 40-nél, így az öt szám összege kisebb volna 200-nál.

2. megoldás. Ismét megszámolja minden lány, hány fiút ismer, de most e számok átlagával érvelünk:

a) Az átlag legalább 40, tehát valamelyik szám legalább 40.

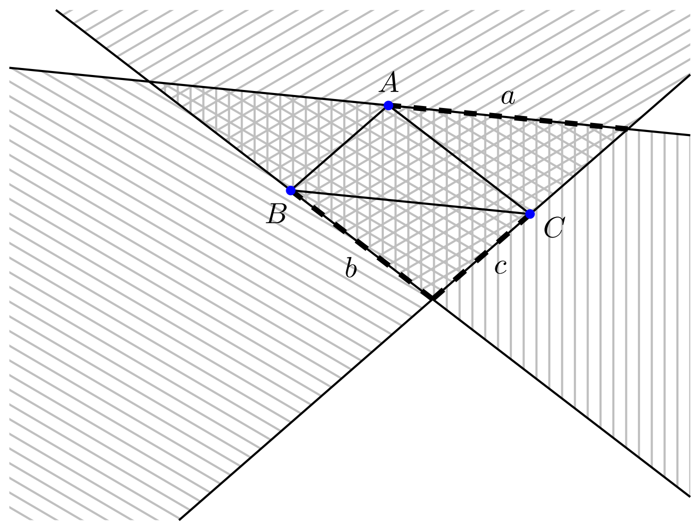
b) Ha mind a 10 lehetséges módon kiválasztunk három lányt, és összeadjuk az ismeretségi számaikat, akkor minden lányt hatszor vettünk sorra. Így ha összeadjuk ezt a tíz összeget, az összeg legalább 1200 lesz. Tehát van egy összeg, ami legalább a tizede ennek, azaz 120.

11.5.

1. megoldás. Gondolatban vágjuk el egy tetszőleges helyen a nyakláncot, és terítsük ki. Nézzük meg, hol lesz a legnagyobb az első k szám összegének és k-nak a különbsége (*nem* abszolútértékben, hanem ténylegesen). Ha több helyen is maximális lesz ez az érték, akkor vegyük ezek közül az utolsó helyet. Ha a l-edik helyen lesz utoljára maximális a gondolatban elvágott láncon az első l szám összege mínusz l, akkor vágjuk el ténylegesen az l-edik lánc után. Könnyen látható, hogy az így elvágott lánc első k gyöngyszemén álló számok összege nem lehet $k-1$-nél nagyobb. Legyen ugyanis a gondolatban elvágott lánc első l gyöngyszemén álló számok és l különbsége M. Ha most továbbmegyünk k helyet, de még nem értünk körbe, azaz $l+k \le n$, akkor adjuk össze a gondolatbeli vágástól az első $l+k$ gyöngyön álló számot és vonjunk le belőle $l+k$-t. Az első l gyöngyön álló számból levonva l-et éppen M-et kapunk, másrészt az $l+k$ helyen a különbség ennél kisebb, legfeljebb $M-1$. Ebből következik, hogy a tényleges vágási helytől számított első k gyöngyön álló szám összegéből levonva k-t legfeljebb -1-et kapunk, azaz e gyöngyökön álló számok összege legfeljebb $k-1$. Ha viszont már körbeértünk, vagyis $l+k = n+j$, $j > 0$, akkor vegyük külön az első n gyöngyöt, ezek az összes gyöngyöt jelentik, a rajtuk álló számok összege tehát $n-1$. A körbeérést követő j gyöngyön álló szám és j különbsége pedig legfeljebb M, tehát ha így (multiplicitással) összeadjuk a gyöngyökön álló számokat és kivonunk belőle $l+k$-t, akkor megint legfeljebb $M-1$-et kapunk.

2. megoldás. A bizonyítást elmondhatjuk a következő, talán szemléletesebb formában. Szemeljünk ki a gyöngyön egy helyet, és minden pozitív m-re definiáljuk azt az $f(m)$ függvényt, ami az első m gyöngyön álló szám összegének és m-nek a különbsége. Tudjuk, hogy $f(n) = n-1$ és azt is tudjuk emiatt, hogy $f(n+m) = f(m) - 1$. Tehát a függvény a maximumát biztosan az első n szám valamelyikén veszi fel. Vegye fel utoljára az l helyen és legyen $f(l) = M$. A mondottakból következik, hogy az $f(k+l)$ függvényérték minden pozitív l-re kisebb $f(l)$-nél. Vagyis $f(k+l) - f(l) \le -1$. De ha meggondoljuk, $f(k+l) - f(l)$ éppen az l-edik hely után jövő k darab gyöngyön álló számnak és k-nak a különbsége.

Talán még szemléletesebb, ha minden gyöngyön álló számból levonunk egyet. Ekkor azt tudjuk, hogy a gyöngyön álló számok összege negatív. És azt kell bebizonyítanunk, hogy valahonnan indulva minden k-ra negatív lesz az első k gyöngyön álló szám összege. Vagy eleve jó a „gondolatbeli vágásunk”, vagy jó, ha a gondolatbeli vágástól számított utolsó nulla összeg után vágjuk el a láncot. (Ez lehet, hogy nagyobb n-nél, de úgyis mod n számozzuk a gyöngyöket.)



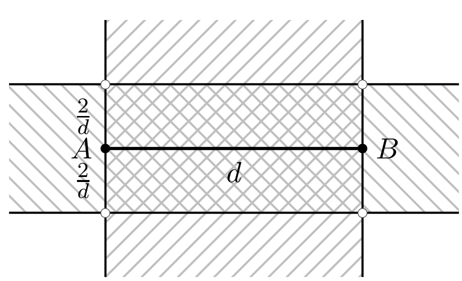
11.6M.1. ábra.

11.6. Legyen ABC háromszög a(z egyik) legnagyobb területű háromszög. Húzzunk párhuzamost A-n keresztül a BC oldallal, legyen ez az a egyenes. Hasonlóan legyen b a B-re illeszkedő, AC-vel párhuzamos egyenes és c a C-re illeszkedő és AB-vel párhuzamos egyenes.

Az ABC háromszög maximalitásából következik, hogy például az a egyenesnek BC-vel átellenes oldalán nem lehet megadott pont, mert az a B és a C pontokkal egy ABC háromszögnél nagyobb területű háromszöget alkotna.

Tehát az összes megadott pont az a, b és c egyenesek által határolt tartományban van. E tartomány egy olyan háromszög, amelynek területe éppen négyszerese az ABC háromszögének, tehát legfeljebb négy egységnyi.

Ismeretes, hogy egy háromszögbe írt paralelogramma területe legfeljebb fele a háromszög területének. Ha tehát egy 2 egység területű paralelogramma négy csúcsát vesszük, akkor mind a négy általuk határolt háromszög területe egységnyi, de nem fedhetők le négy egységnyi területnél kisebb háromszöggel.



11.7M.1. ábra.

11.7. Vegyük a halmaz egy AB átmérőjét (két pontját, amelynek távolsága maximális), legyen ennek hossza d. Húzzunk AB-vel párhuzamost az AB egyenes mindkét oldalán, tőle $2/d$ távolságban, és állítsunk merőleges A-ban és B-ben ezekre az egyenesekre. Az így kapott téglalap az összes pontot magában foglalja. Ha ugyanis valamelyik merőleges egyenes másik partján lenne pont, az az AB szakasz valamelyik végpontjától d-nél távolabb volna. Ha pedig az egyik párhuzamos egyenes másik partján volna egy C pont, akkor az ABC háromszög területe egységnyinél nagyobb volna. L. az 1. ábrát.

Megjegyzés. Ebben a feladatban már lényegesen nehezebb annak eldöntése, hogy javítható-e a négyes szorzó. Bebizonyítható, hogy bármely négynél kisebb számra már nem igaz a feladat állítása. Belátható ugyanis, hogy egy adott paralelogramma köré írható téglalapok közül a legkisebb területű az, amelynek egyik oldalegyenespárja azonos a paralelogramma egyik oldalegyenespárjával. Ha tehát egy olyan, két egységnyi területű paralelogramma négy csúcsát vessszük, amelynek egyik szöge „nagyon kicsi”, a másik „nagyon nagy” (közel van az egyenes szöghöz), akkor a köré írható legkisebb téglalap területe közel négy egység területű, a csúcsaiból alkotott mind a négy háromszög területe viszont egységnyi területű.

11.8. Ott használtuk, hogy véges sok pont van megadva, amikor vettük a legnagyobb területű háromszöget. Végtelen sok pont esetén nem feltétlenül van ilyen.

11.1. Amikor az utolsónak érkezett látogató is megérkezett, mindenkinek ott kellett lennie, hiszen ha valaki előbb elment volna, az az utolsó látogatóval nem találkozott volna.

Ugyanígy megfelel az az időpont is, amikor az elsőnek távozó látogató távozik.

11.2. Legyen az első időpont most az, amikor az elsőnek távozó látogató távozik. Akik ebben az időpontban ott voltak, azokkal már végeztünk. Akik viszont csak ezután érkeznek, azok közül egyik sem találkozhatott az Első Távozóval, tehát bármely kettőnek találkoznia kellett, különben az Első Távozó és ők ketten három olyan látogató volnának, akik közül semelyik kettő nem találkozott. A 12.2. feladat szerint van egy időpont, amikor ezek mind egyszerre voltak ott. Ezzel a feladat bizonyítását befejeztük.

11.3. k-ra vonatkozó teljes indukcióval ugyanígy bizonyítható, hogy ha bármely $k+1$ látogató közül volt kettő, aki találkozott, akkor volt k időpont, amelyeken együttesen minden látogató ott volt.

Tegyük fel ugyanis, hogy az állítást $k-1$-re már tudjuk. Tegyük fel, hogy a könyvtárlátogatók közül bárhogyan választunk ki $k+1$-et, közülük kettő találkozott a könyvtárban. Ismét válasszuk azt az időpontot első időpontnak, amikor az elsőnek távozó látogató távozik. Akik ebben az időpontban ott voltak, azokkal már nincs dolgunk. Viszont a többiek közül egy sem találkozhatott az Első Távozóval, tehát ezekre teljesül a feltétel $k-1$-re, vagyis bárhogy veszünk közülük k látogatót, ezek közül valamelyik kettő találkozott a könyvtárban. A teljes indukciós feltevés szerint tehát volt $k-1$ időpont, amikor együttesen mindannyian ott voltak.

11.1. Vegyünk egyelőre egy tetszőleges T tanulót és iskolája legyen az első iskola. Ismerjen ő k tanulót a második iskolából, és $n+1-k$ tanulót a harmadikból. Legyen T' egy olyan tanuló a második iskolából, akit T ismer. Ha T' ismer valakit a harmadik iskolának abból az $n+1-k$ tanulójából, akit T ismer, akkor ez a T'', tanuló, valamint T és T' megfelel a feladat feltételének. Ha viszont nincs ilyen T'' tanuló, akkor T' a harmadik iskolából legfeljebb $k-1$ tanulót ismerhet, hiszen egy iskolába n tanuló jár.

Ha most T-t úgy választjuk, hogy nála senki nem ismer kevesebbet egy másik iskolából (tehát mindenki legalább k-k tanulót ismer a másik két iskolából), akkor ez a második eset nem állhat fent.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

1. megjegyzés: A bizonyítást befejezhettük volna úgy is, hogy a gondolatmenetet ismét alkalmazzuk T'-re. Ekkor vagy kapunk egy megfelelő tanulóhármast, vagy találunk egy T'' tanulót, aki valamelyik másik iskolából legfeljebb $k-2$ tanulót ismer. Az eljárás valamikor véget ér, hiszen legalább egy tanulót mindenkinek kell ismernie bármelyik másik iskolából.

2. megjegyzés: A bizonyítás ugyanígy alkalmazható akkor is, ha csak azt tudjuk, hogy minden tanuló *legalább* $n+1$ tanulót ismer a másik két iskolából.

3. megjegyzés: Másik megoldást és további megjegyzéseket olvashatunk a feladatról Surányi János: *Matematikai versenytételek, III.* 198-201. oldalán. [11]

11.2. Legyen U egy 3-univerzális szám és az első jegyétől indulva keressük meg azt a számjegyet, amelyik utoljára fordul elő először. Legyen ez az a szám. Előtte legalább kilenc számjegy áll, hiszen minden számjegynek kell szerepelnie egy 3-univerzális számban. Ez után a szám után is még kell szerepelnie minden tőle különböző számnak legalább egyszer, mert ha például egy b számjegy nem szerepel, akkor az ab kezdetű háromjegyű számokat nem tudjuk megkapni belőle letörléssel. Megint keressük meg azt, amelyik utoljára fordul elő először az első a után. Legyen ez a b számjegy. Ekkor az első a és e között a b között még legalább nyolc számjegy van. Eddig összesen – a-t és b-t is beleszámolva – 19 számjegyből áll a szám. Viszont ez után a b után is minden további, a-tól és b-től különböző számjegynek elő kell fordulnia, különben nem tudnánk minden ab-vel kezdődő számot letörléssel megkapni. Vagyis eddig összesen legalább 27 számjegynek kell szerepelnie egy 3-univerzális számban. Csakhogy vagy van még egy a a számjegyek között, vagy ha nincs, akkor a előtt több, mint kilenc számjegynek kell szerepelnie. Ha ugyanis csak egy a van, és előtte minden számjegy csak egyszer szerepel, akkor legyen az első két számjegy u és v. Ekkor az uva számot megkaphatjuk letörléssel, de az vua számot nem, hiszen a előtt csak egyetlen u van és az megelőzi v-t. Tehát egy 3-univerzális számban legalább 28 számjegy van.

Megmutatjuk, hogy van 28 számjegyű 3-univerzális szám van is: ilyen például a 0123456789876543210123456789 szám. Egy tetszőleges abc számot akarunk „kiolvasni” belőle. a-t az első 0123456789 sorozatból választhatjuk. Ha $a \neq 9$, akkor b-t választhatjuk a 9876543210 jegysorozatból. Ha $a=9$, akkor is! Ugyanígy c-t választhatjuk az utolsó 0123456789 sorozatból (akkor is, ha $b=9$).

12. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt! Gráfelmélet

12.1. Vegyük azt a versenyzőt – ha több van, akkor az egyiket –, aki a legtöbb győzelmet aratta. Tegyük fel, hogy lenne olyan V versenyző, akit nem sorol fel. Ez azt jelentené, hogy V mind őt, mint az összes általa legyőzött versenyzőt legyőzte, tehát V több győzelmet aratott volna.

Megjegyzés. További megoldásokat olvashatunk Hajós-Neukomm-Surányi: *Matematikai versenytételek*, II. rész [10] 164-165. oldalán.

12.2. Végtelen tournamentben az állítás nyilván nem igaz: ha egy megszámlálhatóan végtelen gráf pontjait sorba rendezzük és minden élt úgy irányítunk, hogy a későbbiből a korábbiba mutasson, akkor minden pontból csak véges sok pont érhető el egy vagy két élből álló úttal.

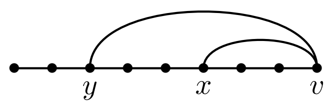
12.3. b) Vegyük a leghosszabb irányított utat a tournamentben. Belátjuk, hogy ez minden pontot tartalmaz. Legyen tehát a leghosszabb irányított út $x_1x_2\dots x_k$, az él mindig a kisebb indexűből mutat a nagyobb indexűbe. Tegyük fel, hogy egy y pont nem szerepel ezen az úton. Ha y-ból az x_1-be mutatna az él, akkor y-t az út elé téve hosszabb irányított utat kapnánk. Tehát az x_1y él y-ba mutat. Vegyük a legnagyobb j indexet, amelyre az x_jy él y-ba mutat. Ekkor az y pont beszúrható volna x_j és x_{j+1} közé, s egy hosszabb irányított utat kapnánk. Ugyanis az yx_{j+1} él már y-ból indul és x_{j+1}-be mutat. Ha pedig történetesen $j=k$, akkor y-t a „sor végére” „szúrhatjuk be”. Mindenképp kapnánk egy hosszabb irányított utat.

Beláttuk tehát, hogy a tournament leghosszabb irányított útja tartalmazza a gráf minden pontját.

Az a) feladat ezt az állítást mondja ki tízpontú gráfokra.

12.1. Vegyük a gráf (egyik) leghosszabb útját, legyen ez $P = x_1x_2 \dots x_m$, $(m \geq 3)$. Az x_m pontból csak P pontjaiba indulhat él, különben nem P volna a(z egyik) leghosszabb út. Másrészt x_m foka legalább kettő, tehát indul belőle él az x_{m-1} ponttól különböző pontba is, s ezzel kört zár be: ha ez a pont valamelyik x_j pont, ahol $1 \leq j \leq m-2$, akkor $x_jx_{j+1} \dots x_mx_j$ egy kör.

12.2. A bizonyításhoz próbáljuk ki, mit ad a 12.1. feladat megoldása ebben az esetben. Vegyünk egy leghosszabb utat, ennek v végpontjából legalább két él indul vissza az út v-vel nem szomszédos pontjaiba. Fusson vy a távolabbiba, vx a közelebbibe. Ekkor a vy olyan kört zár be, aminek vx átlója. Lásd az 1. ábrát.



12.2M.1. ábra.

12.3. Megmutatjuk, hogy ez következik a 12.2. feladat állításából. Ha ugyanis van egy kör és egy átló, és a kör páros hosszú, akkor kész vagyunk. Ha páratlan hosszú, akkor az átló egy páros és egy páratlan ívre bontja, s a páratlant az átló egy páros körré egészíti ki. Lásd az ábrát a 12.2. feladat megoldásánál.

12.4. A 12.2. feladat szerint van kör átlóval. Nézzük most a két „kis” kört, amire a nagyobb kört az átlója bontja. Ha mindkettő hossza osztható k-val, akkor a nagy kör hossza e két kör hosszának összege mínusz kettő, tehát -2 maradékot ad k-val osztva.

12.5. A 12.2. feladat szerint van a gráfban kör átlóval. Ha a kör m pontú, akkor az átló által bezárt két kör összhossza $m+2$, tehát az átló a kört egy k és egy $m+2-k$ hosszú körre bontja. E három kör hosszának legnagyobb közös osztója osztja az utóbbi kettő összegét, tehát $m+2$-t és m-et, tehát e két szám különbségét, a kettőt is. A közös osztó tehát valóban csak 1 vagy 2 lehet. Egy teljes páros gráf, amelynek mindkét osztályában 3-3 pont van („három-ház-három-kút”) a példa arra, hogy lehet a közös osztó kettő. Egy négy pontú teljes gráf a példa arra, hogy egy is lehet.

12.7. Megint alkalmazzuk az előző (13.1.) feladat megoldását. Ismét vesszük a gráf egyik leghosszabb útját. Ennek x végpontjából visszainduló élek közül pedig azzal zárjuk le a kört, amelyik a „legtávolabbra” megy vissza. Ez a kör nyilván tartalmazza x minden szomszédját.

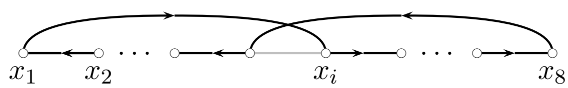
12.1.

1. megoldás. Először belátjuk, hogy van Hamilton-út a gráfban.

A 12.6. feladat szerint van egy legalább ötpontú kör a gráfban. A gráf összefüggő – különben volna egy legfeljebb négypontú komponense, s ebben minden pont foka legfeljebb három volna –, tehát ennek a körnek valamelyik pontjából indul ki él, s így ezzel az éllel együtt van egy legalább hatpontú út a gráfban. Legyen P a gráf (egyik) leghosszabb útja. Ha P tartalmazza mind a nyolc pontot, akkor kész vagyunk. Ha csak hét pontot tartalmaz, akkor a maradó x pontból legalább négy él indul P pontjaiba. Ha valamelyik végpontba fut él, akkor P nem volt a leghosszabb út, mert x-et utána „tűzhetjük”. Ha egyik végpontba sem megy él, akkor az öt belső pont közül négybe meg él, így megy két szomszédosba is, legyenek ezek u és v. Ha a P útból kihagyjuk az uv élt, és helyette beillesztjük az uxv utat, akkor ismét P-nél hosszabb utat kapunk (egy Hamilton-utat).

Maradt az az eset, ha P-nek csak hat pontja van. Legyen x az egyik, P-n nem szereplő pont. x legalább negyedfokú, tehát össze van kötve P-nek legalább három pontjával. Ha ezek egyike P valamelyik végpontja, akkor x hetedik pontként az úthoz illeszthető, és P nem leghosszabb út. Ha pedig nincs összekötve egyik végponttal sem, akkor össze van kötve két szomszédos belső ponttal, s ebben az esetben ugyanúgy bővíthető vele a P út, mint a hétpontú esetben.

Beláttuk tehát, hogy a gráfban van Hamilton-út, legyen ez $x_1x_2\dots x_8$. Vegyük észre a következőt: ha x_1 össze van kötve egy x_i ponttal és x_8 az előtte álló x_{i-1} ponttal, akkor van Hamilton-kör: $x_1x_2\dots x_{i-1}x_8x_7\dots x_ix_1$. L. 1. ábrát.



12.1M1.1. ábra.

Ez igaz akkor is, ha $i = 2$, hiszen ekkor a feltétel az, hogy x_8 össze van kötve x_1-gyel, vagyis a Hamilton-út egyszerűen körbe zárul.

Azt kaptuk, hogy x_1 minden szomszédja kizárja az előtte álló pontot x_8 szomszédai közül. Vagyis az $x_1, x_2, \dots, x_7$ pontjai közül négyet. Ebből viszont az következik, hogy x_8 legfeljebb három ponttal lehet összekötve, ami ellentmondás.

A feladat bizonyítását ezzel befejeztük.

2. megoldás. A feladat megoldásához elég az előző megoldás befejező lépése is, ha kicsit módosítunk rajta. Vegyük a gráf (egyik) leghosszabb útját. Ezek egyikéből sem indul "kifelé" él, különben P nem leghosszabb út. Az előző megoldás gondolatmenetével beláthatjuk, hogy ebben az esetben van olyan C kör, amely P összes pontját tartalmazza. Ha viszont van a gráfnak olyan pontja, amely nem szerepel ebben a körben, akkor van olyan él is, amely P valamelyik pontját, tehát C valamelyik x pontját köti össze egy C-n nem szereplő y ponttal. Mivel C kör, van olyan, C pontjait tartalmazó út, amely x-ben végződik, ehhez hozzácsatolva az xy élt kapnánk egy P-nél hosszabb utat. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy C a gráf minden pontját tartalmazza, azaz Hamilton-kör.

A bizonyítás egyik pontján (HOL?) most is felhaszáltuk, hogy a gráf összefüggő.

12.2. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, amelyben minden pont foka legalább n, és tegyük fel, hogy van Hamilton-útja, azaz van a gráfban $P = x_1x_2\dots x_{2n-1}x_{2n}$ út. Nézzük x_1 szomszédjait a gráfban, legyenek ezek $x_2 = x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_m}$. A feladat feltétele szerint $m \geq n$. Nézzük azokat a pontokat P-n, amelyek közvetlenül megelőzik ezeket a pontokat. Ha x_{2n} össze van kötve közülük valamelyikkel, tehát valamelyik x_{i_j-1}-gyel, akkor a következő Hamilton-körhöz jutunk:

$$x_1\dots x_{i_j-1}x_{2n}x_{2n-1}\dots x_{i_j}x_1.$$

(Amennyiben $i_j = 2$, akkor egyszerűen a P út záródik körré az x_1x_{2n} éllel.)

Ha viszont x_{2n} ezek egyikével sem volna összekötve, akkor a gráfból legalább n ponttal nem volna összekötve, így legfeljebb $n-1$ szomszédja volna, ami ellentmond a feladat feltételének.

Ezzel beláttuk, hogy ha a G gráfra teljesül a feladat feltétele és van benne Hamilton-út, akkor van benne Hamilton-kör is.

Tegyük fel ezután, hogy egy $2n$ pontú gráfban minden pont foka legalább n, de nincs benne Hamilton-kör. Ha van olyan él a komplementer gráfban, amely nem zár be Hamilton-kört a gráfunkban, akkor vegyük hozzá a gráfunkhoz. Ezzel a feladat feltételét nem sértjük meg, hiszen egyetlen pont foka sem csökken. Ismételjük ezt az eljárást addig, amíg már egy olyan, úgynevezett „kritikus” G gráfhoz érünk, amelyben minden pont foka továbbra is legalább n, s amelyre már igaz a következő:

A G gráfban nincs Hamilton-kör, de bármely még nem szereplő élt behúzva a gráfban már keletkezik Hamilton-kör.

Nyilvánvaló, hogy egy ilyen kritikus gráfban kell lennie Hamilton-útnak (bármely két, be nem húzott pontja között). Ez viszont ellentmond a korábban bizonyított állításunknak, hogy akkor van benne Hamilton-út is.

Megjegyzés. Ez a bizonyítás mintegy „folytatása”, vagy finomítása a 12.6. bizonyításának. Másrészt itt a „vegyük a legnagyobbat” gondolatnak egy újabb felhasználását látjuk: a(z egyik) „legnagyobb” olyan gráfot vesszük, amely tartalmazza eredeti gráfunkat, és teljesít egy bizonyos tulajdonságot (esetünkben: nem tartalmaz Hamilton-kört). Az ilyen, megadott tulajdonságra „kritikus” gráfok vizsgálata sokszor segít gráfelméleti problémák megoldásánál. Mi is használjuk, pl. a 14.9. feladat bizonyításában.

Ebben a bizonyításban tehát használtuk a skatulyaelv és a „vegyük a legnagyobbat” elv egy-egy finomabb formáját.

12.4. A 12.2.) feladat bizonyítása szinte változatlan formában átvihető erre az állításra is.

12.1. Vegyük azt a csapatot, amelyik a legtöbb mérkőzést játszotta az adott időpillanatig. Ha több ilyen van, akkor az egyiket közülük. Legyen ez az a csapat, az eddig lejátszott mérkőzéseinek száma legyen d. Tudjuk, hogy $d > 4$, mert ha minden csapat csak legfeljebb négy mérkőzést játszott volna, akkor összesen legfeljebb $9 \cdot 4/2 = 18$ mérkőzés lett volna. Jelöljük S-sel azoknak a csapatoknak a halmazát, akikkel a játszott.

Tegyük fel először, hogy S-ből senki nem játszott senkivel. Jelöljük T-vel a többi csapatot (ebbe beleértjük A-t is). Azt kapjuk, hogy minden egyes lejátszott mérkőzésnek legalább az egyik résztvevője T-beli csapat. Mármost T-ben $9 - d$ csapat van, és mivel d maximális, mindegyikük legfeljebb d mérkőzést játszott. Az összes lejátszott mérkőzés tehát legfeljebb $(9-d)d$. E szorzat két tényezőjének összege 9, független d-től, tehát legnagyobb akkor lesz, ha a két tényező a lehető legkevesebbel tér el egymástól, azaz ha egyikük 4, a másikuk 5. (A mi esetünkben csak a $d = 5$ eset jön szóba.) Vagyis e szorzat értéke legfeljebb 20, ami ellentmond a feladat feltételének.

Ellentmondásra vezet tehát annak feltételezése, hogy S-ből senki nem játszott senkivel. De ha valamelyik két S-beli csapat játszott egymással, akkor kész vagyunk: e két csapat valamint a egy megfelelő hármas.

12.2. Vegyük a(z egyik) legnagyobb fokú pontot, legyen ez az a pont, a fokszáma legyen d ($d \geq n/2$, mert ha minden pont foka $n/2$-nél kevesebb volna, akkor összesen legfeljebb $n(n - 1)/2 < n^2/4$ él lenne a gráfban). Jelöljük S-sel azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekkel a össze van kötve.

Tegyük fel először, hogy S-ben nem fut él. Jelöljük T-vel a gráf többi pontját(ebbe beleértjük a-t is). Azt kapjuk, hogy a gráf minden egyes élének legalább az egyik végpontja T-beli pont. Mármost T-ben $n - d$ pont van, és mivel d maximális, mindegyikük legfeljebb d-ed fokú. Az összes él száma tehát legfeljebb $(n - d)d$. (És ennyi is csak akkor lehet, ha minden él S és T pontjai között fut és T minden pontja d-ed fokú, azaz minden pontja össze van kötve T minden pontjával.) A szorzat két tényezőjének összege n, független d-től, tehát legnagyobb akkor lesz, ha a két tényező a lehető legkevesebbel tér el egymástól, azaz páros n esetén, ha mindkettő $n/2$, páratlan n esetén, ha egyikük $(n + 1)/2$, a másikuk $(n - 1)/2$. (A mi esetünkben csak a $d = (n + 1)/2$ eset jön szóba.) Vagyis e szorzat értéke legfeljebb $n^2/4$, ami ellentmond a feladat feltételének.

Ellentmondásra vezet tehát annak feltételezése, hogy S-ben nem fut él. De ha valamelyik két S-beli pont között fut él, akkor kész vagyunk: e két pont valamint a egy megfelelő hármas.

A megoldást végignézve azt is kapjuk, hogy páros n esetén az egyetlen n pontú és $n^2/4$ élű gráf, amelyben nincs háromszög egy olyan teljes páros gráf, amelynek mindkét osztályában $n/2$ pont van. Páratlan n esetén pedig egy olyan teljes páros gráf, amelynek egyik osztályában $(n+1)/2$, másik osztályában $(n-1)/2$ pont van.

Megjegyzés. Érdemes a fenti bizonyítást összevetni a „Szimmetria és aszimmetria” című fejezetben adott megoldással (lásd a GR.II.6.1. feladat megoldását): az ottani megoldás szemléletesebbé teszi az ittenit.

12.3. Azt nézzük meg, hogy ha egy n pontú gráfban nincs teljes négyes, legfeljebb hány éle lehet.

Vegyünk ismét egy legnagyobb fokú pontot, legyen ez az x pont, és legyen d a fokszáma. A vele össze nem kötött $n-d-1$ darab pont mindegyike legfeljebb d-ed fokú. Ez eddig legfeljebb $d(n-d)$ él.

Másrészt az x-szel összekötött pontok V halmaza által alkotott d pontú gráfban nem lehet három pontú teljes gráf (ha volna, x-szel egy négy pontú teljes gráfot alkotnának). Tehát V pontjai között legfeljebb $d^2/4$ él futhat. Ez azt jelenti, hogy a gráfban összesen legfeljebb

$$d(n-d+d/4)=d(4n-3d)/4$$

él. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint
$3d(4n-3d)\le(3d+4n-3d)^2/4=4n^2$.

Ezt összehasonlítva előző eredményünkkel azt kapjuk, hogy a gráfnak legfeljebb $n^2/3$ éle lehet.

A most kapott eredmény csak hárommal osztható n-ekre pontos. Ha $n=3k$, akkor egy olyan gráf a példa, amelyben a pontokat három, egyenként k pontú osztályba soroltuk és a különböző osztályba tartozó pontokat kötjük össze. A bizonyításból az is kiolvasható, hogy ez az egyetlen példa n pontú, $n^2/3$ élű gráfra, amelyben nincs négypontú teljes gráf.

Ha $n=3k+1$, akkor az egyik osztályba $k+1$ pontot kell tennünk, hogy a maximális élszámú gráfot megkapjuk, ha pedig $n=3k+2$, akkor két osztályba kell $k+1$ pontot tennünk. A bizonyításból ez is „kigyötörhető” lenne, de másutt (l. a GR.II.2.12. feladatot) adunk rá olyan bizonyítást, amelyből e két eset kevesebb számolással is kijön.

Megjegyzés. Az állítás úgy is fogalmazható, hogy a legtöbb él úgy helyezhető el egy teljes négyest nem tartalmazó n pontú gráfban, ha a pontokat a lehető legegyenletesebben három osztályba soroljuk és a különböző osztályokba tartozó pontokat összekötjük.

12.1.

1. megoldás. Vegyünk ki minden színből egyet. Így kapunk egy n pontú gráfot, amelynek legalább n éle van. A 7.4. feladat szerint e gráfban van kör. Tehát van egy olyan kör, amelyben minden él különböző színű. Az ilyen kört tarkának nevezzük. Vegyük a *legkisebb* tarka kört. Ha ez nem háromszög, akkor tekintsük egy tetszőleges átlóját. Ez két kisebb körre osztja a kört, s az egyik biztosan tarka lesz, hiszen különben mindkét sokszögben volna egy-egy vele azonos színű él, s akkor nem volna tarka.

Azt kaptuk, hogy a legkisebb tarka sokszög csakis háromszög lehet, s ezt akartuk bizonyítani.

2. megoldás. A feladat bebizonyítható n-re vonatkozó teljes indukcióval is. $n=3$-ra triviálisan igaz az állítás. Ha $n=m-1$-re már tudjuk és adva van az m pontú teljes gráf egy színezése legalább m színnel, akkor vegyünk egy x pontot és hagyjuk el. Ha a maradó $m-1$ pontú teljes gráf élein legalább $m-1$ szín megtalálható, akkor az indukciós feltevés szerint készen vagyunk. Ha a maradó $m-1$ pontú teljes gráfon csak legfeljebb $m-2$ szín szerepel, akkor x-ből legalább két olyan él indul, amelyeknek a színe egymástól is, a többi $m-1$ pont között futó élek színétől is különbözik. Legyen ez a két él xy és xz. Ezek színe nem szerepel a maradó gráfban, tehát yz él színe biztosan különbözik mindkettő színétől. Így megtaláltuk a keresett tarka háromszöget.

12.2. Legyen P a fa egy leghosszabb útja és képzeljük úgy a fát, hogy P egyik végpontja a gyökere. A 8.8. feladat szerint bármely két leghosszabb útnak van közös része (legalább egy pont). Ez a közös rész csak egy (legalább egy pontból álló) út lehet. Ha ugyanis egy másik út metszené P-t, majd elhagyná, majd újra metszené, akkor ezzel egy kört zárna be, ami fában lehetetlen. Nézzünk most egy Q és egy Q' leghosszabb utat. Ezek is metszik egymást és metszik egy-egy útban P-t is. Tegyük fel, hogy Q metszi előbb P-t, és legyen az utolsó közös pontja P-vel x. Ha Q' csak x fölött metszené P-t, akkor x valamely utódjából induló ágon volna, s így egyáltalán nem metszhetné Q-t, hiszen az x-nél elválik ettől az ágtól.

Azt kaptuk, hogy bármely két leghosszabb útnak a P-vel közös része egy-egy út, és ezek az utak páronként metszik egymást. De akkor alkalmazható a 11.1. feladat (az egydimenziós Helly-tétel): ezeknek az utaknak van közös pontjuk. (Vesszük például azt a leghosszabb utat, amelyiknek első metszéspontja a „legmagasabban” van.)

13. Vegyük a legnagyobbat, a legszélsőt!

13.5. Legyen az

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$$

egyenlet egy racionális megoldása az $x = p/s, y = q/s, z = r/s$ számhármas, ahol p, q, r egészek, s pozitív egész. Ezt beírva az egyenletbe, majd s^3-nel végigszorozva azt kapjuk, hogy a p, q, r egészekre is teljesül a

$$p^3 + 3q^3 + 9r^3 - 9pqr = 0$$

egyenlőség. Nyilvánvaló, hogy itt p^3, s így maga p is osztható hárommal, tehát $p = 3P$ helyettesítéssel, majd hárommal való osztás után azt kapjuk, hogy

$$q^3 + 3r^3 + 9P^3 - 9Pqr = 0$$

is teljesül, tehát a (q, r, P) számhármas is teljesíti a feladat egyenletét. De akkor ugyanígy azt is kapjuk, hogy q is osztható hárommal, és $q = 3Q$ helyettesítéssel az (r, P, Q) egészekből álló számhármas is teljesíti a feladat egyenletét, s végül $r = 3R$ helyettesítéssel a (P, Q, R) egészekből álló számharmas is.

Tegyük fel ezután, hogy van az egyenletnek egy, a (0,0,0) számhármastól különböző, egész számhármasból álló megoldása. Legyen ezek közül (p, q, r) ezek közül az egyik olyan, amelyre az $|p|+|q|+|r|$ összeg a legkisebb. Ilyen van, mert pozitív egészek között van legkisebb és $|p|+|q|+|r|$ pozitív egész. A fenti gondolatmenet szerint ekkor a $(p/3, q/3, r/3) = (P, Q, R)$ számhármas is (egészekből álló) megoldása az egyenletnek, és az abszolútértékek összege ebben a megoldásban kisebb, mint a (p, q, r) esetében. Ez az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását.

Megjegyzés. A gondolatmenet befejezhető volna úgy is, hogy beláttuk, hogy tetszőleges egész $p.q.r$ megoldás esetén mindhárom szám osztható hárommal és a harmadukból alkotott számhármas is megoldás. Ezért a harmaduk is osztható hárommal és ez az eljárás vég nélkül folytatható. Azt kapjuk, hogy mindhárom szám osztható három bármilyen nagy hatványával, márpedig ez csak a nullára teljesül.

További megoldások és észrevételek találhatók Surányi János: *Matematikai versenytételek, III. rész* c. könyvének [11] 268-270. oldalán.

13.7. Most is igaz, hogy elég egész megoldásokat keresni. Most azt tudjuk, hogy x^3 osztható kilenccel, de ebből is csak annyi következik, hogy x osztható hárommal: $x = 3X$ valamely X egész számra. Ezt beírva és kilenccel(!) végigosztva az

$$y^3 + 9z^3 + 3X^3 - 27Xyz = 0$$

egyenlethez jutunk. A 13.6. feladat szerint ennek az egyenletnek nincs megoldása az $x = y = z = 0$ megoldáson kívül.

13.8. Ha léteznek, akkor a közös nevezőjükkel végigszorozva azt kapjuk, hogy léteznek olyan p, q, r, s pozitív egészek, amelyekre
$p^2 + q^2 + r^2 = 7s^2$.

Felhasználjuk, hogy egy négyzetszám nyolccal osztva 0,1 vagy 4 maradékot adhat. Ezért a bal oldal nyolccal osztva nem adhat 7 maradékot, s így a jobb oldal nem lehet páratlan. Tehát s páros és a jobb oldal vagy 0 vagy 4 maradékot ad nyolccal osztva. Ekkor a bal oldalon vagy két páratlan szám áll, vagy egy se. Előbbi esetben a bal oldal vagy 2 vagy 6 maradékot ad nyolccal osztva, ami lehetetlen. Tehát a bal oldalon minden szám páros. Innen azt kapjuk, hogy $p' = 2p$, $q' = 2q$, $r' = 2r$ és $s' = 2s$ helyettesítéssel és néggyel osztva azt kapjuk, hogy a vesszős számok is kielégítik a fenti egyenletet. Ha tehát azt feltételezzük, hogy p, q, r és s a fenti egyenlet legkisebb összegű pozitív megoldása, akkor ellentmondást kapunk. Ebből következik, az egyenletnek nincs a csupa nullától különböző megoldása, s így a feladat egyenletének sincs.

Megjegyzés. A megoldást befejezhettük volna úgy is, hogy az egyenletünk bal oldalán a kettő mindegyik számban páros kitevőn szerepel, s ezért a kettő a bal oldalon álló összeg törzstényezős felbontásában is páros kitevővel szerepel, míg a jobb oldalon páratlan kitevőn szerepel.

13.9. A nyolccal való osztási maradékokból azonnal adódik, hogy egyetlen $8n + 7$ alakú szám sem áll elő három négyzetszám összegeként. Tehát $k = 0$-ra igaz a feladat állítása.

Legyen most K a legkisebb olyan k érték, amelyre van olyan n, hogy $4^k(8n + 7)$ előállítható három négyzetszám összegeként. 13.8. megoldásában beláttuk, hogy három négyzetszám összege csak úgy lehet néggyel osztható, ha mindhárom szám páros. Ekkor azonban mindegyik felét véve kapunk három négyzetszámot, amelyek összege $4^{K-1}(8n + 7)$, ami ellentmond K minimalitásának.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

13.10. Tegyük fel, hogy az

$$x^4 + y^4 = z^2$$

egyenletnek van megoldása pozitív egészekben és vegyük ezek közül azt, amelyben $x + y$ a legkisebb. Ilyen van, mert pozitív egészek minden részhalmazában van legkisebb szám. Most megmutatjuk, hogy van egy olyan – szintén pozitív egészekből álló – megoldása is, amelyben $x + y$ kisebb és pozitív. Ez az ellentmondás bizonyítani fogja állításunkat.

Ha $(x, y) = d > 1$, akkor az egyenlet bal oldal osztható d^4-nel, tehát z osztható d^2-tel. Ezért $x' = x/d$, $y' = y/d$, $z' = z/d^2$ is (pozitív egészekből) álló megoldása az egyenletnek, ahol $x' + y' < x + y$.

Az is világos, hogy ha z-nek akár x-szel, akár y-nal van közös prímosztója, az a másikat is kell, hogy ossza.

A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy x, y, z páronként relatív prímek. Vagyis x^2, y^2, z úgynevezett „primitív” pitagoraszi számhármas. Ezeknek viszont ismeretes az előállítási képletük. Van olyan relatív prím $u > 0$ és $v > 0$ (egyikük páros), amelyekre (x és y szerepét esetleg felcserélve)

$$x^2 = u^2 - v^2,$$
$$y^2 = 2uv,$$
$$z^2 = u^2 + v^2.$$

Itt u és v közül pontosan az egyik páros, ezért az első egyenletből következik, hogy x páratlan. Mivel két páratlan szám négyzetösszege nem lehet négyzetszám, ezért az első egyenlet szerint v páros. A második egyenletből pedig következik, hogy y is páros. Tehát $v = 2V$, $y = 2Y$ és az első két egyenlet így írható:

$$x^2 = U^2 - 4V^2$$
$$Y^2 = uV.$$

Másrészt u és v relatív prímek, így u és V is, tehát mindkettő négyzetszám: $u = U^2$ és $V = W^2$. (Nyilván választhatjuk úgy, hogy U és V pozitív legyen.) Most fennáll az

$$x^2 + 4W^4 = U^4$$

egyenlőség. Itt x, W, U továbbra is páronként relatív prímek. Tehát $x, 2W^2, U^2$ primitív pitagoraszi számhármast alkot. Ezért van olyan s, t pozitív, relatív prím számpár, amelyre teljesül:

$$x = s^2 - t^2,$$
$$2W^2 = 2st,$$
$$U^2 = s^2 + t^2.$$

Mivel s és t relatív prímek, a második egyenletből következik, hogy mindkettő négyzetszám, $s = S^2$ és $t = T^2$. (Megint választhatjuk S-et és T-t pozitívnak.) Ezt az utolsó egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$U^2 = S^4 + T^4.$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy itt $S + T$ kisebb $x + y$-nál. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

13.1. Vegyük a sokszög konvex burkát. Ennek minden csúcsa a sokszögnek is csúcsa és minden ilyen csúcsnál konvex szög van.

13.4. Legyen XY a sokszög egy oldala, állítsunk merőlegest erre az oldalra a két végpontjában. Így kapunk egy XY-ra merőleges mindkét irányban végtelen párhuzamos sávot. Ha P pont ebbe a sávba esik, akkor kész vagyunk. Ha most a sokszög minden oldalára felrajzoljuk ezt a sávot, akkor szemléletesen rögtön látszik, hogy ezek a sávok együttesen lefedik a sokszöget, tehát ha P a sokszög belső pontja, akkor az egyik ilyen sávnak tartalmaznia kell, s ezzel be is láttuk volna, hogy a feladat kérdésére igenlő a válasz. Csakhogy sajnos maga az az állítás, hogy ezek a sávok lefedik az egész sokszöget, korántsem olyan egyszerűen bizonyítható. A következő feladat mutatja, hogy használni kell hozzá a sokszög konvexitását.

Megpróbálhatjuk tehát ezt az állítást bebizonyítani, de egyszerűbbnek tűnik a következő észrevételre építeni a bizonyítást.

Legyen a sokszög egy oldala AB, és legyen a sokszögön belüli P pontnak az AB egyenesen való merőleges vetülete P_{AB}, és tegyük fel, hogy ez a vetület az AB oldal B-n túli meghosszabbítására esik. Legyen a B csúcs másik szomszédja a C csúcs. A C pont a sokszög konvexitása miatt az AB egyenesnek P-vel azonos partján van. Másrészt BC metszi a PP_{AB} szakaszt, különben P kívül volna a sokszögön. Ezért a P pont közelebb van a BC egyeneshez, mint az AB egyenesnhez.

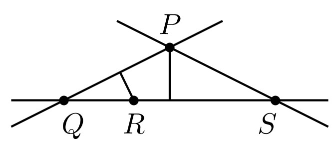
Ezt az eljárást folytathatjuk. Tegyük fel, hogy egyetlen vetületpont sem esik a megfelelő oldalra. Ekkor a P_{BC} vetület sem esik a BC oldalra. De akkor csakis C-n túli meghosszabbítására eshet, s ekkor D-vel jelölve a következő csúcsot azt kapjuk, hogy a CD egyenes közelebb van P-hez, mint a BC egyenes, az pedig közelebb van, mint az AB egyenes. Az eljárást folytatva a sokszög soron következő oldalának egyenese mindig közelebb lesz P-hez, mint az előző, míg végül visszajutunk az AB oldalhoz és azt kapjuk, hogy az AB oldal egyenese közelebb van P-hez, mint az AB oldal egyenese, ami ellentmondás.

Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy van olyan oldal, amelyre ráesik P merőleges vetülete.

Megjegyzés: A második bekezdés gondolatát elmondhatjuk úgy is, hogy vegyük azt az AB oldalegyenest (ha több van, akkor bármelyiket közülük), amelyhez P a legközelebb van. Az első bekezdésben bizonyítottak szerint P_{AB} az AB oldalra kell, hogy essen.

13.6. Vegyük a két sokszögnek egy-egy olyan P illetve Q pontját, amelyre a PQ távolság minimális. (Felhasználjuk, hogy korlátos zárt ponthalmazok esetén van ilyen P és Q.) Vegyük a PQ szakasz felezőmerőlegesét. Azt állítjuk, hogy ez az egyenes szétválasztja a két sokszöget. Ellenkező esetben (legalább) az egyik alakzatnak volna egy R pontja a felezőmerőlegesen. Betűzhetünk úgy, hogy R és P legyen azonos sokszög pontja. Ez a sokszög konvex, tehát tartalmazza az egész PR szakaszt. Márpedig a PR szakasznak van olyan pontja, amely P-nél közelebb van Q-hoz (ilyen pont például a Q pontból PR-re bocsátott merőleges talppontja). Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

13.8. Némi próbálgatás után kialakul az a benyomásunk, hogy a feladat kérdésére nemleges a válasz. Ezt a következő egyszerű módon igazolhatjuk.



13.8M.1. ábra.

Tekintsük minden megadott pont távolságát minden olyan jó egyenestől, amelyre nem illeszkedik. Legyen d az előforduló távolságok közül a legkisebb és legyen P egy olyan pont, amely egy rajta át nem menő e jó egyenestől d távolságra van. Ilyen pont van, mert véges sok távolság van. Azt állítjuk, hogy e-n nem lehet három pont. Ha ugyanis Q, R, S három megadott pont lenne az e egyenesen ebben a sorrendben (tehát R a középső pont, l. az 1. ábrát), akkor R vagy a PS vagy a PQ egyeneshez d-nél közelebb volna. (Legyen ugyanis P vetülete e-n P'. Szimmetria okokból feltehetjük, hogy R a QP' szakasz pontja, s ekkor R távolsága PQ egyenestől legfeljebb akkora, mint P'-é, s ez biztosan kisebb a PP' szakasz d hosszánál.)

Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

13.9. Ez a feladat a 13.8. feladat duális feladata, elmondható lenne úgy, hogy az ottani szövegben csak a pont és az egyenes szavakat cseréljük fel. A megoldás is szinte ugyanaz, új ábrát sem kell rajzolni hozzá! Most a metszéspontok és a rajtuk át nem menő egyenesek távolságai közül vesszük a legkisebbet, és P egy olyan metszéspontot jelöl, amely ilyen minimális távolságra van valamelyik, rajta át nem menő (adott) egyeneshez. Feltételezzük, hogy P-n legalább három egyenes megy keresztül. Ekkor az R metszéspont közelebb lesz a PQ és PS adott egyenesek közül valamelyikhez, mint P az RQS egyeneshez, ami ellentmondás.

13.10.

1. megoldás. Vegyük a **H** ponthalmaz egy átmérőjét, vagyis két olyan pontját, amelyek PQ távolságánál nem lép fel nagyobb a ponthalmaz pontjai között. Ilyen PQ szakasz van. Vegyünk egy tetszőleges, PQ-t tartalmazó síkot. A **H** ponthalmaznak ezzel a síkkal való metszete is kör. Másrészt ezen a síkmetszeten is a PQ a(z egyik) leghosszabb szakasz, tehát a síkmetszet egy PQ átmérőjű kör.

Ezzel beláttuk, hogy a **H** ponthalmaz tartalmazza az egész, PQ átmérőjű gömböt. Továbbá bármely térbeli, a PQ egyenesre nem illeszkedő X pontra igaz, hogy az X, P, Q által meghatározott síknak **H**-val csak az ebbe a gömbbe tartozó rész a síkmetszete. Ha tehát X nem tartozik a gömbhöz, akkor nem tartozik **H**-hoz.

2. megoldás. Ha nem akarjuk használni azt a tételt, hogy „korlátos zárt ponthalmaznak van átmérője”, akkor a következőképpen okoskodhatunk:

Vegyünk egy tetszőleges síkot, ez messe a ponthalmazt egy olyan K körben, amelynek középpontja C. Állítsunk merőlegest a síkra a C pontban, legyen ez az egyenes e és fektessünk egy tetszőleges S síkot az e egyenesen keresztül. Ez is egy K_1 körben metszi a ponthalmazt, tehát az e egyenes egy szakaszban metszi a ponthalmazt, legyen ez a szakasz az AB szakasz. Az S sík tartalmazza a K kör két átellenes pontját, P-t és Q-t és az is igaz, hogy a PQ egyenes és a ponthalmaz metszete éppen a PQ szakasz. Tehát a PQ szakasz a K_1 körnek is húrja. E húr felezőmerőlegese a K_1 kör AB húrja, tehát utóbbi a K_1 kör átmérője. Azt kaptuk, hogy *bármelyik*, az e egyenesen át fektetett sík egy AB átmérőjű körben metszi a ponthalmazt. Ebből következik, hogy a ponthalmaz az AB átmérőjű kör.

13.12. Vegyük a ponthalmaz egy átmérőjét, azaz két olyan pontját, P-t és Q-t, amelyekre teljesül, hogy a ponthalmaz bármely két pontjának a távolsága legfeljebb PQ. Állítsunk merőlegest PQ-ra a szakasz két végpontjában. A H halmaz minden pontja e két egyenes alkotta sáv belsejében van, különben a szakasz valamelyik végpontjától vett távolsága nagyobb volna, mint PQ. Ez azt jelenti, hogy H halmaz bármely további R pontjára igaz, hogy $RPQ\measuredangle$ és $RQP\measuredangle$ hegyesszög. A feladat feltétele szerint van olyan R, amelyre $PRQ\measuredangle$ is hegyesszög, és erre az R pontra igaz, hogy a PQR háromszög hegyesszögű.

13.13. Vegyük a legnagyobb sugarú kört (vagy ha több ilyen van, akkor az egyiket közülük). Ilyen van, mert véges sok kör van. Legyen ennek a körnek a sugara R, középpontja O. Tegyük ezt a kört a kiválasztandó körök V halmazába. Ha egy másik, adott kör belemetsz ebbe a körbe, akkor legfeljebb R a sugara és középpontja legfeljebb $2R$ távolságra van O-tól, tehát az O körüli $3R$ sugarú kör teljesen lefedi. Hagyjuk el tehát az összes olyan kört, amelyet az O körüli $3R$ sugarú kör teljesen lefed, és „dobjuk a kukába” őket, azaz tegyük a K halmazba őket. A megmaradó körök közül megint válasszunk ki egy legnagyobb sugarút (lehet, hogy ennek a sugara már $< R$), és tegyük V-be, és a középpontja körüli háromszor akkora sugarú kör által lefedett többi kört megint dobjuk a K kukába. Az eljárást addig folytatjuk, amíg minden kör be nem kerül vagy V-be vagy K-ba.

Eljárásunk szerint a V-ben levő körök páronként diszjunktak. Másrészt ha ezeket háromszorosára nyújtjuk, akkor az így kapott nagyobb körök lefedik az *összes*, eredetileg adott kört. Tehát a megnyújtott körök összterülete legfeljebb T, másrészt kilencszerese a V-ben levő körök összterületének. Tehát valóban találtunk diszjunkt köröket, amelyek együttesen T-nek legalább a kilencedét lefedik.

Megjegyzés. Ha veszünk egy fix P ponton átmenő egységköröket, akkor ezek közül csak egy választható ki. Ennek területe π, másrészt a körök által lefedett terület akármilyen közel kerülhet 4π-hez. A feladatban szereplő kilences konstans tehát legfeljebb négyesre javítható. Érdekes kérdés, hogy hol van az igazság négy és kilenc között.

13.14. Rácsnégyzet van.

Ismeretes, hogy nincs szabályos rácsháromszög. Ebből következik, hogy szabályos rácshatszög sincsen. Az ötszöggel majd külön foglalkozunk. Legyen tehát a következőkben $n > 6$, és tegyük fel, hogy találunk egy $P_1P_2\dots P_n$ szabályos rács-n-szöget. Tükrözzünk minden csúcsot a két szomszédja által meghatározott átlóra, így kapjuk a P_i pontból a Q_i pontot. Azt állítjuk, hogy a Q_i pontok egy kisebb szabályos rács-n-szöget határoznak meg.

Nyilvánvaló, hogy a Q_i pontok is rendelkeznek a P_i sokszög O középpontja körüli $360°/n$ szögű forgásszimmetriával, tehát szabályos n-szöget alkotnak.

Könnyen ellenőrizhető szögszámolással, hogy $n > 6$ esetén a Q_i pontok különbözők és az eredeti sokszög belsejében vannak, sőt, ha O-val jelöljük a sokszög középpontját, akkor P_i az $OP_{i-1}P_{i+1}$ háromszög belsejében van. Ugyanis

$$P_{i-1}P_iP_{i+1}\angle = P_{i-1}P_iP_{i+1}\angle > 120° > P_{i-1}OP_{i+1}\angle.$$

Ebből következik, hogy a Q_i pontok egy *kisebb* (konvex) szabályos n-szöget alkotnak.

Végül az, hogy Q_i rácspont, abból következik, hogy ha egy paralelogramma három csúcsa rácspont, akkor a negyedik is. Márpedig a $P_{i-1}P_iP_{i+1}Q_i$ paralelogrammában az első három csúcs rácspont.

Beláttuk tehát, hogy az eredeti szabályos rács-n-szögből kaptunk egy kisebb területű szabályos rács-n-szöget.

Az eljárást folytathatjuk, s így mindig kisebb szabályos rács-n-szöget kapunk, amelynek csúcsai azonban a korábbi rács-n-szögünk belsejében vannak. De az eredeti $P_1P_2\dots P_n$ sokszög belsejében csak véges sok rácspont lehet. Az eljárás tehát nem folytatódhat vég nélkül. Ám amikor a legkisebbhez érünk, ellentmondáshoz jutunk.

Tehát $n > 6$ esetén nincs szabályos rács-n-szög.

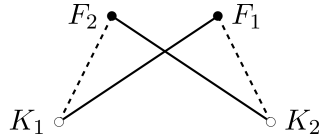
Maradt még az $n = 5$ eset. Ez a fenti esettől csak abban különbözik, hogy a Q_i pontok átkerülnek az O-val szemközti oldalra, de továbbra is az eredeti sokszög belsejében maradnak és különböznek egymástól. Tehát itt is kapunk egy, az eredeti sokszögnél kisebb rácsötszöget. A bizonyítás ezután ugyanúgy fejezhető be, mint az $n > 6$ esetben.

Ezzel beláttuk, hogy $n = 4$ kivételével nincs szabályos rács-n-sokszög a síkon.

13.15. Vegyünk egy olyan e egyenest, amelynek az összes egyenes az egyik partjára esik. Ilyen van, hiszen véges sok pont van, ezek belefoglalhatók egy körbe, s annak bármely érintője jó lesz. Olyan érintőt is vehetünk, amely semelyik két olyan szakasszal nem párhuzamos, amelyet két adott pont határoz meg.

Kezdjük el e-t mozgatni a pontok felé önmagával párhuzamosan. Amikor elér az első adott ponthoz, akkor ez a pont lesz a törött vonal első pontja. Ezután mozgatjuk tovább, s mindig, amikor elér egy következő ponthoz, akkor az elért pontot választjuk a törött vonal következő pontjának. Világos, hogy ha ilyen sorrendben kötjük össze a pontokat, akkor semelyik két összekötő szakasz nem metszheti egymást, hiszen mindegyik ilyen szakasz az e egyenessel párhuzamos sávban van, s bármely két ilyen sáv különböző.

13.16. Húzzunk be egy tetszőleges párosítást a fehér és a kék pontok között. A fehér pontokat F_i-vel, a kékeket K_i-vel jelöljük. Tegyük fel, hogy például a behúzott F_1K_1 és F_2K_2 élek metszik egymást. Cseréljük ki ezeket az F_1K_2 és az F_2K_1 élekre, ahogy az 1. ábrán látható.



13.16M.1. ábra.

Segít-e ez rajtunk? Könnyen látható, hogy a metszéspontok számát nem feltétlenül sikerült csökkentenünk, számtalan további behúzott él belenyúlhat például az F_1K_2 élbe, ami az F_1K_1 és az F_2K_2 éleket nem metszette. (Rajzoljunk ilyen helyzetet!)

Természetesen az eljárást megismételhetjük most is két metsző élre, de mi garantálja, hogy véget ér az eljárásunk és nem kerülünk ciklusba?

Az az észrevétel segít, hogy ha az F_1K_1 és az F_2K_2 élek metszik egymást, akkor az újonnan behúzott F_1K_2 és az F_2K_1 élek együttes hossza kisebb az elhagyott F_1K_1 és F_2K_2 élek együttes hosszánál. (Azt használjuk, hogy a háromszögegyenlőtlenség szerint egy konvex négyszög átlóinak együttes hossza nagyobb két szemközti oldala hosszának összegénél.)

A párosítás összhossza tehát minden egyes cserénél csökken. Véges sok párosítási lehetőségünk van (mert véges sok pontunk van), tehát van (legalább) egy olyan párosítás, ahol a párosító szakaszok összhosszú minimális. Ebben a párosításban nem lehet metsző élpár, mert akkor találnánk rövidebb összhosszúságú párosítást.

A feladat állítását ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A megoldás több tanulsággal is jár. Egyrészt azt mutatja, hogy az, ahogyan a „vegyük a legkisebbet” segítségével ellentmondásra jutunk, egyben egy *eljárást* is ad a legkisebb megkeresésére, tehát a feladatban keresett tulajdonságú párosítás megtalálására is.

Másrészt azt is mutatja, hogy nem mindig célszerű hagyni magunkat befolyásolni a feladat követelményétől, amikor azt keressük, hogy *mire* nézve vegyük a minimálisat. Ha ugyanis a minimális metszéspontú párosítást kerestük volna, azzal a jelen esetben „helyben jártunk” volna. Sokszor áll elő az a helyzet, hogy leleményre van szükség ahhoz, hogy megtaláljuk: mire is érdemes minimalizálni (vagy maximalizálni). A mi esetünkben az összhossz volt a jó választás.

Mindez, mint említettük, már átvezet az „állapotfüggvény” fogalmához.

14. Tetszőlegesen sok és végtelen sok

14.4. Indirekt okoskodással belátjuk, hogy a prímszámok sorozatában nincs végtelen hosszú számtani sorozat. Tegyük fel, hogy lenne, és legyen ennek első eleme p, különbsége $d > 0$. Itt p prím, tehát legalább 2. Tekintsük ennek a számtani sorozatnak a $p+1$-edik elemét. Ez $p+dp = p(d+1)$, tehát összetett szám, ami ellentmondás.

Nemcsak azt láttuk be, hogy a prímek között nincs végtelen hosszú számtani sorozat, hanem azt is, hogy bármelyik, p-ből induló, csupa prímből álló számtani sorozatnak legfeljebb p eleme lehet.

14.5. Nyilván elég tetszőleges pozitív egész n-re mutatni n egymás utáni pozitív egész számot, amelyek mindegyike összetett. Tekintsük e célból az

$$(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+n, (n+1)!+n+1$$

számokat. Ezek közül az első páros, a második (ha van) osztható hárommal, és általában $1 \le i \le n$-re az i-edik (tehát $(n+1)!+i+1$) osztható $(i+1)$-gyel és nagyobb $(i+1)$-nél, tehát összetett szám.

Találtunk tehát n egymás utáni számot, amelyek mindegyike összetett szám. Ezek közül az első előtti legnagyobb prímszám és a rákövetkező prím között legalább n a különbség.

Megjegyzés. Érdekes kérdés, hogy mekkora „hézag” lehet két egymás utáni prímszám között. A feladat megoldása mutatja, hogy tetszőlegesen nagy. De megkérdezhető a következő: milyen $h(n)$ függvényre igaz, hogy minden elég nagy n természetes szám esetén az n-nél nagyobb, de $n+h(n)$-nél kisebb számok között található prímszám. Erről a $h(n)$ függvényről elég keveset tudnak, l. például [4] 183. oldalát.

14.6. a) Megpróbálhatjuk a 14.5. feladat gondolatmenetét alkalmazni. Most azonban n egymás után következő pozitív egészt kell találnunk, amelyek közül mindegyik egy-egy szám négyzetével is osztható. Tehát kell találnunk egy x pozitív egész számot, továbbá n tetszőleges (egynél nagyobb) számot úgy, hogy $x+i$ osztható legyen közülük az i-edik négyzetével. Ha ez az n keresett szám

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots \quad q_n,$$

akkor olyan q_i számokat keresünk, amelyre a következő kongruenciáknak van szimultán megoldása:

$$\begin{aligned} x+1 &\equiv 0 \pmod{q_1^2}, \\ x+2 &\equiv 0 \pmod{q_2^2}, \\ &\vdots \\ x+n &\equiv 0 \pmod{q_n^2}, \end{aligned}$$

vagy kicsit másképp felírva:

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{q_1^2}, \\ x &\equiv -2 \pmod{q_2^2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv -n \pmod{q_n^2}. \end{aligned}$$

A kínai maradéktétel szerint ennek a kongruencairendszernek van megoldása, ha a modulusok páronként relatív prímek, tehát ha a q_i-k páronként relatív prímek. Ezt könnyen elérhetjük, például ha q_i-t az i-edik prímnek választjuk.

Bebizonyítottuk tehát, hogy tetszőleges n egészre van egymás utáni n darab egész szám, amelyek mindegyike osztható egy-egy egynél nagyobb szám négyzetével, tehát amelyek egyike sem négyzetmentes. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

b) Nyilvánvaló viszont, hogy nem lehet akárhány négyzetmentes szám egymás után, hiszen minden negyedik szám osztható 4-gyel, azaz egy négyzetszámmal. Hármat könnyű találni: például az 5,6,7 vagy a 21, 22, 23, stb.

14.7. Megpróbálhatjuk az előző (14.6.) feladat gondolatmenetét alkalmazni. Most olyan x egész számot kell találnunk, amelyre $x+i$ az i-edik prímszámnak, q_i-nak csak az első hatványával osztható. Ezt úgy érjük el, hogy megkeressük az

$$\begin{aligned} x+1 &\equiv q_1 \pmod{q_1^2}, \\ x+2 &\equiv q_2 \pmod{q_2^2}, \\ &\vdots \\ x+n &\equiv q_n \pmod{q_n^2}, \end{aligned}$$

egyenlet egy megoldását. A kínai maradéktétel megint biztosítja, hogy ilyen x szám van.

14.8. Olyan n számot keresünk, amelynek lehetőleg sok osztója van. Ha n-nek az első k prímszám szorzatát választjuk, akkor $d(n)=2^k$, hiszen n összes osztóját úgy kapjuk, hogy e k darab prímszám közül bizonyosakat összeszorzunk. Ha n-et így választjuk, annak megvan az az előnye is, hogy az utána következő szám prímosztói mind nagyobbak a k-adik prímnél, p_k-nál, hiszen $n+1$ relatív prím n-hez. Ennek alapján könnyen beláthatjuk, hogy $n+1$ legfeljebb $k-1$ prímszám szorzata lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy $n+1$ legalább k prím szorzata. Ezek mindegyike nagyobb p_k-nál, tehát

$$n+1 \ge (p_k+1)^k + 1 \ge p_k^k + 2 \ge n+2$$

volna, ami ellentmondás. (Az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy n az első k prímszám szorzata, tehát k darab olyan prím szorzata, amelyek mindegyike legfeljebb p_k.)

Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $n+1$ legfeljebb $k-1$ prímszám szorzata, így osztóinak száma is legfeljebb 2^{k-1}. (Egyenlőség csak akkor van, ha csupa különböző prím szorzata. Ha a prímek között azonosak is vannak, akkor még kevesebb.) Azt kaptuk, hogy

$$d(n) - d(n+1) = 2^k - d(n+1) \geq 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}.$$

Ha tehát k-t úgy választjuk, hogy 2^{k-1} nagyobb legyen az előre adott K-nál, akkor $d(n)$ és $d(n+1)$ különbsége nagyobb lesz K-nál.

14.9. A k és az n számot most is úgy választjuk, mint az előző – 14.8. – feladatban. Már csak azt kell bizonyítanunk, hogy $d(n)$ legalább K-val nagyobb $d(n-1)$-nél is. Ennek bizonyítása lényegében ugyanúgy megy, mint az előző feladatban a megfelelő állítás bizonyítása $d(n+1)$-re.

Hasonlóan bizonyítható ugyanis az is, hogy $n-1$ is legfeljebb $k-1$ prímszám szorzata, tehát $n-1$-nek is legfeljebb 2^{k-1} osztója van. Ha ugyanis legalább k prímszám szorzata volna, akkor az (1)-ben alkalmazott becsléshez egészen hasonlóan jutunk ellentmondásra:

$$n-1 \geq (p_k+1)^k - 1 \geq p_k^k + 1 - 1 \geq n$$

Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $d(n-1)$ is legalább 2^{k-1}-gyel kisebb $d(n)$-nél, így a feladat állítását teljesen bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Igaz az is, hogy $d(n)$ grafikonjában tetszőlegesen nagy „völgy” is van, azaz igaz a

Völgy-tétel. Tetszőleges K számhoz található olyan n szám, amelyre $d(n-1)$ is, $d(n+1)$ is legalább K-val nagyobb $d(n)$-nél.

A bizonyítást csak vázoljuk: az n számot olyan prímszámnak kell választani, amelyre igaz, hogy $n-1$ osztható 2^k-val, $n+1$ pedig osztható 3^k-val. Ekkor n-nek két osztója van, a szomszédainak legalább $k+1$. A kínai maradéktétel szerint van olyan maradékosztály mod 6^k, amelynek tetszőleges n elemére e két oszthatósági feltétel teljesül, másrészt e maradékosztály elemei relatív prímek 6^k-hoz, ezért Dirichlet tétele szerint ebben a maradékosztályban van (végtelen sok) prímszám. (Dirichlet tételének bizonyítása magyarul megtalálható Szalay Mihály *Számelmélet* c. gimnáziumi tankönyvében [14], a 165-183. oldalakon.)

A Völgy-tétel természetesen új bizonyítás az előző feladat állítására is. Még azt is mondhatjuk, hogy egyszerűbb, ám sokkal többet használ.

14.1. Az igenlő választ a következő egyszerű konstrukció bizonyítja. Vegyünk minden pozitív egész n-re egy n pontú teljes gráfot, G_n-et, éspedig úgy, hogy a G_n gráfok csúcshalmazai páronként diszjunktak legyenek. A végtelen G gráf legyen ezeknek a G_n gráfoknak az uniója. Ez a gráf nyilvánvalóan teljesíti a feladat feltételeit.

14.2. Ha az A_n halmazok közül mindegyik valódi része az előzőnek ($A_n \subsetneq A_{n-1}$), akkor bármely véges sok metszete a legnagyobb indexű, bármely végtelen sok metszete megegyzeik az összes metszetével. Ha tehát az A_n halmazok metszete például üres, akkor máris találtunk egy megfelelő halmazrendszert. Ilyen halmazrendszer például az a halmazrendszer, ahol A_n az n-nél nagyobb egész számok halmaza.

14.3. A feladat látszatra ugyanúgy a 14.3. feladat analogonja, ahogy a 14.1. feladat a 14.1. feladat analogonja, s ennek megfelelően(?) azt várjuk, hogy erre a kérdésre is igenlő a válasz. Sajnos, a várakozás csalóka. Gondoljunk ugyanis a „végtelen Ramsey-tételre”. Ez, mint az GR.II.1.5. feladatban láthatjuk, a következőt mondja ki (leggyengébb formájában):

Bármely egyszerű végtelen gráfra igaz, hogy vagy maga a gráf, vagy a komplementere tartalmaz végtelen teljes részgráfot. Vagy másképp fogalmazva: bármely egyszerű végtelen gráf tartalmaz vagy teljes, vagy üres végtelen részgráfot.

Nincs tehát a feladat feltételének megfelelő gráf, mert ha a rgáfban nincs végtelen teljes részgráf, akkor a komplementerben biztosan van.

14.4. Képzeljük el, hogy van végtelen sok szál egyenes fenyőfánk, olyan egyenes, hogy egyáltalán nincs rajta elágazás, az első 1 méter magas, a második 2 méter magas és általában az n-edik n méter magas. Ezt a végtelen erdőt gráfelméletre is átültethejük, akkor kapunk végtelen sok (páronként pontdiszkunkt) utat, az n-edik éppen n pontból áll. Most már nem kell mást csinálnunk, mint az utak egy-egy végpontját összekötni egy közös gyökérrel. Így már egy végtelen fát kapunk. Ha Tigris ezen elindul a gyökértől, akkor bármilyen magasra feljuthat, csak megfelelően hosszú utat kell választania, amelyen elindul. De miután nem tud visszafordulni, bármelyik úton is indul, véges sok lépés után meg fog kelleni állnia, nem tud végtelen magasra feljutni.

14.5. A feladat kérdésére nemleges a válasz. Ezt a következő egyszerű gráf mutatja. Legyenek a gráf pontjai az egész számok és kössünk össze két egész számot, ha a különbségük egy. Így minden szám fokszáma pontosan kettő (a két szomszédjával van összekötve), viszont a gráfban egyáltalán nincs kör, egyetlen végtelen útból áll.

14.7. Itt látszólag kihasználhatnánk, hogy ha minden kör hossza páros, akkor a gráf minden véges részgráfja két színnel jól színezhető, és elkezdhetnénk ennek alapján színezni a pontokat. Csakhogy elképzelhető, hogy ennek során egy pont színét állandóan váltogatnunk kell, s akkor bajban vagyunk. Ezért más utat választunk: Végignézzük a véges gráfokra szóló bizonyítás lépéseit. (L. a ALG.II.3.16. a feladatot.)

1. A bizonyítás első lépése az volt, hogy elég az állítást összefüggő gráfokra bizonyítani. Az 5.10. feladat szerint az összefüggőség végtelen gráfnál is ugyanúgy definiálható és ott is igaz, hogy két pont pontosan akkor van egy összefüggő komponensben, ha összeköti őket út. Az is világos, hogy ha két pont között nem vezet út a gráfban, akkor a két pont színezése egyáltalán nem befolyásolja egymást, tehát az állítást most is elég összefüggő gráfokra bizonyítani.

2. Összefüggő gráfok esetén a gráf egy tetszőleges x_0 pontjából mint gyökérből elindítottunk egy szélességi keresést, vagyis első lépésben megkerestük a gyökér szomszédait, ezek alkották az első emeletet. Ha már az i-edik emelet pontjait megtaláltuk, a következő emeletre azokat a pontokat tettük, amelyek az eddig még egyetlen emeleten szereplő sem pontok közül össze vannak kötve az i-edik emeletnek legalább egy pontjával. Vagyis az i-edik emelet pontjai azok a pontok, amelyek a gyökértől i élből álló úttal elérhetőek, rövidebbel nem.

Véges gráf esetén az összefüggőség pontosan azt jelenti, hogy így minden ponthoz eljutunk. Azt kell csak meggondolnunk, hogy végtelen gráf esetén is pontosan ezt jelenti az összefüggőség, csak most az eljárás végtelen hosszú is lehet. Valóban, minthogy az *út végtelen gráfban is véges utat jelent*, ezért az eljárás most is eljut minden, x_0-ból úttal elérhető ponthoz, tehát összefüggő gráfról lévén szó, eljut a gráf minden pontjához.

3. Beláttuk, hogy a szélességi keresés esetén az i-edik emelet pontjai csakis egymással és a két szomszédos emelet pontjaival lehetnek összekötve. Ez az eljárás definíciójából következik most is. Ha találunk valamelyik emeleten két pontot, amelyeket él köt össze, akkor ezek most is ugyanúgy, mint a véges esetben egy páratlan kört zárnak be a gráfban. Ha viszont nincs ilyen pont, akkor a gráf párosadik emeleteinek pontjait feketére, páratlan emeleteinek pontjait fehérre színezve éppen a gráf egy jó színezését kapjuk két színnel.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy végtelen gráfra is igaz, hogy vagy van benne páratlan kör, vagy páros gráf.

14.8. A feladatra több megoldást is mutatunk. Előbb próbáljuk megérteni, mi okozza a nehézséget.

Most is megpróbálhatnánk venni sorban minden n-re az első n pont jólszínezését, de megint abba a nehézségbe ütköznénk, hogy az egyes pontok színezését esetleg végtelen sokszor is változtatni kényszerülnénk. Egy olyan bizonyítást, amely kifejezetten az említett nehézség kiküszöbölésén alapszik, a 14.4. feladat megoldása mutat.

De megpróbálhatjuk a feladatot a „végtelen Ramsey-tétel" bizonyításában használt gondolatmenet felhasználásával is bizonyítani. Ezt a megoldást a 14.10. feladat részletezi.

Egy harmadik, meglepőnek tűnő utat a következő (=14.9.) feladat mutatja.

14.9. A megoldás során a jólszínezés három színnel való jólszínezést jelent.

Az (i) állítás bizonyítása: Két pont, x és y között pontosan akkor nem fut él, ha van egy olyan véges $G_{x,y}$ részgráf, amely tartalmazza mindkét pontot, és minden jólszínezésében x és y azonos színű. (Ellenkező esetben ugyanis ez az él még behúzható volna a gráfba, továbbra is minden véges részgráf jólszínezhető volna három színnel.)

(i) azt állítja egyrészt, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció, másrészt hogy az ekvivalenciaosztályok száma (legfeljebb) három.

Az, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció, azt jelenti, hogy ha x és y között nem fut él, és y és z között sem fut él, akkor x és z között sem fut él. A feltétel szerint van egy $G_{x,y}$ és egy $G_{y,z}$ véges részgráf, amelynek minden jólszínezésében x és y azonos színű, továbbá egy olyan $G_{y,z}$ részgráf, amelynek minden jólszínezésében y és z azonos színű. Vegyük most e két gráf egyesítését, jelölje ezt H. Ha xz él volna a gráfban, akkor H-ban szerepelne. Másrészt H véges részgráf, tehát van jólszínezése. Ebben a jólszínezésben x és z nem lehet azonos színű. Másrészt H jólszínezése megadja $G_{x,y}$ és $G_{y,z}$ egy-egy jólszínezését is. Az előbbiben azonban x és y színének kell megegyeznie, az utóbbiban y és z színének. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

Másrészt nyilvánvaló, hogy nem lehet négy vagy több ekvivalenciaosztály, mert ezekből egy-egy pontot véve egy négy (vagy több) pontú teljes gráfot kapnánk, és ez három színnel nem jólszínezhető véges részgráf volna.

Most már rátérhetünk a 14.8. feladat bizonyítására. Legyen tehát G egy tetszőleges olyan megszámlálhatóan végtelen gráf, amelynek minden véges részgráfja három színnel jólszínezhető. Mivel a gráf megszámlálhatóan végtelen, a csúcsaiból képzett teljes gráf élhalmaza is megszámlálhatóan végtelen, s így G komplementerének élhalmaza is. Rendezzük sorozatba tehát a komplementer gráf összes élét, és vegyük sorra az éleket. Ha valamelyik él behúzható a gráfba úgy, hogy a gráf minden részgráfja továbbra is jólszínezhető három színnel, akkor húzzuk be. Ezt az eljárást a sorozat minden élére végrehajtva végül egy az (i)-ban szereplő értelemben „kritikus" gráfot kapunk, arról viszont (i)-ben beláttuk, hogy három színnel színezhető. (Az ott szereplő három osztály épp a három színt adja meg.)

Megjegyzés: Ez a bizonyítás átvihető tetszőleges, tehát megszámlálhatónál nagyobb végtelen gráfokra is, „csak" transzfinit rekurziót kell használni az eljárás során.

14.10. A színeket az 1, 2, 3 számmal fogjuk jelölni.

A) állítás bizonyítása:

Vegyünk minden n pozitív egész számra egy olyan (egyébként tetszőleges) n csúcsú részgráfot, amely tartalmazza az x pontot. Minden ilyen részgráf jól színezhető három színnel. Az x pont minden esetben vagy az 1, vagy a 2, vagy a 3 színt kapja. Minthogy végtelen sok részgráfot vettünk, a végtelen skatulyaelv szerint (l. az GR.II.1.1. feladatot) az egyik szín végtelen sok részgráf színezésénél fel fog lépni. Vegyük ezt a végtelen sok részgráfot, ezek pontszáma minden határon túl nő.

Az A) állítást ezzel bebizonyítottuk.

B): Egy nagyon egyszerű példa a következő: vegyünk végtelen sok pontdiszjunkt háromszöget, vagy másképp: legyenek a gráf pontjai a pozitív egész számok és minden k-re kössük össze egymással az $3k+1, 3k+2, 3k+3$ pontokat. Az első n pont által feszített részgráf jólszínezései közül válasszuk azt, amelyben az m-edik pont színe $m - n \bmod 3$, azaz az első pontból álló részgráfban az 1-es pont színe 3, az első két pontból álló részgráf színezésében az 1-es pont színe 1, a 2-es pont színe 0, az első három pontból álló részgráf jólszínezésében az 1-es pont színe 2, a 2-es ponté 1, a 3-as ponté 3, stb. Így minden pont színe felváltva lesz (hármas periódusban) $1, 2, 3$. Azaz minden pont minden színt végtelen sokszor fog felvenni, így könnyen előfordulhat, hogy az A)-ban mutatott eljárás *minden* ponthoz például az 1-es színt fogja rendelni.

Könnyen meggondolható, hogy *bármely*, a feltételeknek megfelelő gráfnál előfordulhat, hogy minden ponthoz ugyanazt a színt rendeljük, hiszen egy jólszínezésben akárhogy permutáljuk a három színt, megint jólszínezést kapunk.

C): Ha a $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ halmazok olyan láncot alkotnak, ahol mindegyik részhalmaza az utána következőknek, akkor bárhogy választunk ki közülük végtelen sokat, azok uniója továbbra is megegyezik az eredeti halmazok uniójával. Ha ugyanis egy elem szerepel a G_n halmazok uniójában, akkor valamelyik n-re szerepel G_n-ben, s ezért az összes nagyobb indexűben is. Tehát véges sok kivétellel mindegyik G_n-ben szerepel. Ha tehát végtelen sok részhalmazt választunk, akkor ezek egyikében (sőt: véges sok kivétellel mindegyikben) szerepelnie kell.

D): Megmutatjuk, hogy a 14.8. feladatban szereplő állítás igaz, azaz *ha egy (megszámlálhatóan) végtelen gráf minden véges részgráfja három színnel jólszínezhető, akkor az egész gráf is három színnel jólszínezhető.*

Megszámlálhatóan végtelen a gráf, tehát a gráf pontjait megszámozhatjuk a pozitív egész számokkal. Válasszuk ki az első pontot, ezt jelöljük x-szel. Az első n csúcs által feszített részgráfot pedig jelöljük G_n-nel. Az A) állítást alkalmazva e végtelen sok G_n részgráfra azt kapjuk, hogy kiválasztható közülük végtelen sok, amelyek jólszínezésében x színe azonos. Színezzük ki az első pontot ezzel a fix színnel. A „csel" az, amit a feladat C) részében bizonyítottunk, tehát hogy ezek a részgráfok

a) olyan láncot alkotnak, ahol mindegyik részgráfja az összes utána következőnek, ezért

b) összeségükben lefedik a gráf összes pontját.

c) a)-ból következik az is, hogy a kiválasztott végtelen sok részgráf közül az n-edik tartalmazza G_n-et.

Most válasszuk ki a második pontot. A már kiválasztott végtelen sok részgráf között megint van végtelen sok, amelynek jólszínezésében e második pont színe azonos. Így már találtunk végtelen sok részgráfot, amelynek jólszínezésében az első két pont színe nem változik. A második pontot színezzük ki ezzel a fix színnel. E végtelen sok részgráfra megint teljesül a), b) és c) is. Az eljárást folytathatjuk, s ha már az első k csúcs színét ilymódon rögzítettük, akkor kiválasztottunk hozzájuk végtelen sok G_n részgráfot, amelyek jólszínezésében e k szín színezése mindig ugyanaz, másrészt e végtelen sok részgráfra teljesül a), b) és c). Az eljárás folytatható, s ugyanez igaz lesz az első $k+1$ csúcsra is.

Így teljes indukcióval a gráf összes pontját kiszíneztük. Azt állítjuk, hogy ez a színezés az egész gráf egy jólszínezése. Ehhez elég annyit belátni, hogy ha az i-edik és a j-edik pont színe megegyezik, akkor nem lehetnek összekötve. Feltehetjük, hogy $i < j$. Amikor az i-edik pont színét rögzítettük, akkor csak azt a végtelen sok részgráfot hagytuk meg, amelyeknek jólszínezésében az i-edik pont színe épp ez a rögzített szín. Ha az i-edik pont össze van kötve a j-edikkel, akkor e színezések egyikében sem kaphatta i színét. Minthogy j színét csak ez után rögzítettük, csak olyan színt kaphatott, amelyet e részgráfok jólszínezésében kapott, tehát i színét valóban nem kaphatta.

Ezzel D) bizonyítását is befejeztük.

14.1. Képzeletben adjunk Tigrisnek egy végtelen messzire ellátó távcsövet és utána adjuk neki a következő utasítást, amíg a földön, azaz a fa gyökerénél áll:

Eljárás: Mielőtt fellépnél a következő emeletre arról a pontról, ahol éppen állsz, előbb vizsgáld meg sorra a felső szomszédait, hogy van-e fölöttük még végtelen sok pont. Amint találsz egy ilyen pontot, arra lépj tovább.

Minthogy a fa minden emeletén csak véges sok pont van, ezért annak az x pontnak is csak véges sok szomszédja van, amelyiken Tigris éppen tartózkodik. Ha x fölött végtelen sok pont van, akkor ez a végtelen skatulyaelv szerint (l. az GR.II.1.1. feladatot) öröklődik valamely felső szomszédjára is.

Ha tehát Tigris az általunk adott utasítás szerint jár el, minden emeletről tovább tud lépni. Tehát sikerül „végtelen magasra felmásznia”.

14.2. Sajnos nem tudunk, s ez nem a mi hibánk: nincs ilyen eljárás. Tigrisnek az n-edik emeleten meg kell állapítania, melyik ágon van még végtelen sok pont. Ez az eljárás csak akkor ér véget véges időben, ha egy idő után csak egy ág marad, a többiről kiderül, hogy véges sok pont van rajta. Amíg ugyanis legalább két ágról még nem derült ez ki, addig szegény Tigris nem tudhatja, melyik ágon mehet tovább! Márpedig nem nehéz olyan fát mutatni, ahol *minden* ág végtelen. Ilyen például az úgynevezett *bináris fa.* Ennek minden pontjából pontosan két él indul a következő emeletre, tehát minden pontnak két „közvetlen utódja” van.

14.3. A 14.1. feladat lényegében ugyanezt mondja ki. Az az út, amelyen Tigris mindig felfelé megy a fában, éppen egy végtelen utat ad meg.

14.4. A feladat megoldása során a színezés három színnel való színezést jelent.

Említettük már a 14.7. feladat megoldásának elején, hogy mi okozza a nehézséget, ha „mohó algoritmussal” elkezdjük kiszínezni a gráf pontjait. Most ezt részletesebben is megnézzük, mert ez kulcsot ad a megoldáshoz. Tegyük fel, hogy eljutottunk oda, hogy az első n pontot jól színezzük három színnel. (Minthogy a gráf megszámlálható, feltehetjük, hogy a pontjait sorozatba rendeztük.) Sajnos nem lehetünk biztosak benne, hogy ez a jól színezés az első $n+1$ pontra is folytatható! Persze, kicserélhetjük az első n pont színét úgy, hogy az „illeszkedjen” az első $n+1$ pont valamelyik jólszínezéséhez. De melyikhez? Lehet ugyanis, hogy később ez a színezés sem lesz folytatható. És ha mindig kicseréljük az első n pont színét úgy, hogy az „illeszkedjen” a későbbi, nagyobb részgráf színezéséhez, akkor elképzelhető, hogy például az első pont színét végtelen sokszor cserélgetjük oda-vissza, s ekkor nem fogjuk tudni, hogy „végül” az eljásárunk milyen színt is rendel az első ponthoz. (Ugyanez persze elmondható a többi pontra is.)

Akkor nem lesz ilyen problémánk, ha találunk jólszínezéseknek egy olyan

$$S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}, \dots$$

sorozatát, amelyekre a következők igazak:

a) S_n az első n pont jól színezése három színnel,
b) S_{n+1} az S_n színezés kiterjesztése, vagyis S_{n+1}-ben az első n pont színe megegyezik az S_n-ben kapott színével.

Ha találunk ilyen színezés-sorozatot, ez a G gráf minden pontjához egyértelműen rendel egy színt, amelyen később sem kell változtatnunk, tehát megkapjuk a gráf egy jólszínezését három színnel. (Másrészt az is világos, hogy ha van a gráfnak jólszínezése, akkor kell is találnunk ilyen S_n sorozatot.)

Mármost egy ilyen színezés-sorozat megtalálásához segít a König-lemma. Ehhez definiáljunk egy olyan fát, amelynek n-edik emeletén éppen a G gráf első n pontja által feszített részgráfjának három színű jószínezései lesznek. (Tehát a fa egy pontja az eredeti gráf egy véges részgráfjának jólszínezése!) A megoldás bevezetőjében mondottaknak megfelelően az első n pont egy jólszínezését akkor kötjük össze az első $n+1$ pont egy jólszínezésével, ha az utóbbi az előbbi kiterjesztése. Az így kapott fa minden emeletén véges sok pont van, hiszen egy véges gráfnak csak véges sok jólszínezése van.

Alkalmazhatjuk tehát a König-lemmát: ebben a fában van egy végtelen út. Márpedig ennek a végtelen útnak a pontjai éppen jólszínezéseknek egy olyan sorozatát adja meg, amelyre teljesül a) és b).

Ezzel a 14.1. feladat állítását igazoltuk:

Ha egy (megszámlálhatóan) végtelen gráf minden véges részgráfja három színnel jólszínezhető, akkor az egész gráf is három színnel jólszínezhető.

Megjegyzés. Gondoljuk meg, hogy ez a bizonyítás lényegében *azonos* a 14.10. feladat D) részére adott megoldással.

14.5.

1. megoldás. Az előző (=14.4.) feladat megoldást végignézve azt látjuk, hogy csakis annyit használtunk, hogy egy véges gráfnak véges sok jólszínezése van. Ez pedig nemcsak három színre, hanem bármilyen k esetén k színre is igaz.

2. megoldás. A 14.9. feladat megoldása is változtatás nélkül átvihető három helyett k színre.

15. Kombinatorikus geometria

15.1. Az olyan egyenesek nem megfelelőek, amelyeken van S- és T-beli pont is. Ha tehát meghúzzuk az összes olyan egyenest, amelyek S-beli és T-beli pontot kötnek össze, akkor az ezekkel az irányokkal párhuzamos irányok vannak kizárva. De ilyen egyenes, és így ilyen irány is csak véges sok van. Tehát végtelen sok megfelelő irány van. Megoldást kapunk, ha választunk egy ilyen, megfelelő irányt és S minden pontjára egy ilyen irányú egyenest illesztünk.

15.4. Vegyük a fehér pontok konvex burkát és a fekete pontok konvex burkát. Bebizonyítjuk, hogy például a fehérek konvex burka nem tartalmazhat fekete pontot a belsejében. Ha ugyanis volna ennek belsejében egy fekete pont, akkor bontsuk a konvex burkot egy csúcsából induló átlókkal háromszögekre. (Itt használjuk, hogy legalább három fehér pont van.) A fekete pont valamelyik háromszög belsejében volna, tehát nem volna elválasztható a három fehér ponttól. Ugyanígy kapjuk, hogy a fekete pontok konvex burka sem tartalmazhat fehér pontot a belsejében.

Ebből azonban még nem következik, hogy a két konvex burok nem metszheti egymást! (Mutassunk erre példát!) Ám ha a két sokszögvonal metszené egymást, akkor volna egy-egy oldal, amelynek mindkét vége fehér, illetve mindkét vége fekete volna. E négy pont viszont nem volna elválasztható egymástól egy egyenessel, hiszen a metszéspontjuknak az egyenes mindkét partján kellene lennie.

Ennyi viszont már elég annak bizonyításához, hogy a két konvex buroknak nincs közös pontja. De ekkor a 13.6. feladat szerint van olyan egyenes, amely elválasztja őket.

15.5. Vegyük a pontok konvex burkát, és vegyünk két párhuzamos támaszegyenest, amelyek iránya nem párhuzamos az adott pontok által meghatározott szakaszok egyikével sem. A két támaszegyenesen a konvex buroknak egy-egy pontja lesz, legyenek ezek A és B. A legyen a törött vonal első pontja, majd A-ból indulva kezdjünk el tolni AB-ra merőleges egyenest, amikor AB pozitív oldalán eléri egy adott pontot, ez lesz a második pont, összekötjük A-val. Tovább toljuk a merőleges egyenest, s mindahányszor elér egy következő ponthoz AB pozitív oldalán, azt össze tudjuk kötni a megelőzővel anélkül, hogy a korábbi összekötő szakaszokat metszené. Véges sok lépés után elérünk B-be. Most elkezdjük visszafelé tolni B-ből a merőleges egyenest és ugyanezt csináljuk az AB egyenes másik oldalán fekvő pontokkal. Az összekötő szakaszokat a másik oldalon fekvő szakaszoktól elválasztja az AB egyenes, tehát továbbra sem keletkezik egy korábbi szakaszt metsző szakasz. Véges sok lépésben visszaérünk A-ba.

15.6.

1. megoldás. Először b)-t bizonyítjuk.

Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a ponthalmaz pontjai és élei az átmérők. Ha ebben a gráfban minden pont foka legfeljebb kettő, akkor összesen legfeljebb n éle van, tehát a feladat állítása teljesül.

Tegyük fel, hogy egy P pont foka nagyobb kettőnél. Legyenek a P-ből induló átmérők PQ_1, PQ_2, $\ldots$, PQ_k, $k > 2$. A Q_i pontok rajta vannak a P közepű d sugarú kör egy 60-os ívén. Ugyanis bármely két PQ_i szakasz által bezárt szög legfeljebb $60°$-os, különben a két végpont távolsága nagyobb volna d-nél. Ebből az már következik, hogy az összes Q_i pont rajta van egy $120°$-os köríven, s akkor a két szélső közötti szög sem lehet nagyobb $60°$-nál. Feltehetjük, hogy úgy számoztuk a Q_i pontokat, hogy a számozás sorrendjében jönnek a köríven.

Tegyük fel, hogy valamelyik Q_i-ből indul ki még egy átmérő (a PQ_i-n kívül) egy S pontba. Ez nem lehet a PQ_1Q_k háromszög belsejében, sőt, annak a körcikknek a belsejében sem, amelyet PQ_1 és PQ_k határol. Feltehetjük, hogy S-et a PQ_1 szakasz elválasztja Q_k-tól. Tekintsük a PS szakasz f felező merőlegesét! f-en rajta van a Q_i pont, mert P-től is, Q_i-től is d távolságra van. Ezért f-nek azonos oldalán van P és Q_k.[1] Tehát Q_k távolabb van S-től, mint P. Ebből $SQ_k > SP = d$ következik, ami ellentmondás.

Ez azt jelenti, hogy minden $k > 2$-ed fokú ponthoz tartozik $k-2$ darab elsőfokú pont a gráfban, s nyilván különböző pontokhoz különböző elsőfokú pontok tartoznak. Hagyjuk el a gráfból az elsőfokú pontokat a hozzájuk tartozó éllel. Azt láttuk be, hogy így csupa legfeljebb másodfokú pont marad. Ha tehát m darab elsőfokú pont volt, akkor maradt $n-m$ pont, s legfeljebb ugyanennyi él. Viszont összesen m élt hagytunk el, tehát valóban legfeljebb n él volt eredetileg.

A bizonyításból a)-ra a példa már leolvasható: vegyünk egy ABC egységoldalú ABC szabályos háromszöget, és az A középpontú egységsugarú kör $\widehat{BC}$ ívén $n-3$ további pontot.

Megjegyzés. Páratlan n-re jó a szabályos n-szög n csúcsa, hiszen ennek a ponthalmaznak a leghosszabb átlók az átmérői, s ezekből páratlan n esetén pontosan n van.

2. megoldás. Nyilvánvaló, hogy egy átmérő mindkét végpontja az n pont konvex burkán van. Ha ugyanis AB egy tetszőleges szakasz a konvex burkon belül, amely a konvex burok kerületét A' és B' pontban metszi, akkor vagy A' és B' is csúcsa a konvex buroknak, vagy ha például B' nem csúcs, akkor van olyan C csúcs a konvex burkon, amely B'-nél távolabb van A'-től.

Az is nyilvánvaló, hogy két átmérő biztosan metszi egymást. Ha ugyanis nem metszenék egymást, akkor a végpontjaik paralelogrammát alkotnának, amelynek a két átmérő volna az egyik oldalpárja. De a paralelogramma valamelyik két átellenes pontja távolabb van egymástól, mint az oldal.

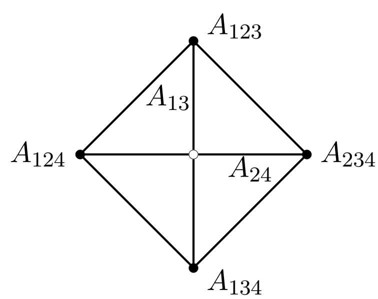
Ezzel a feladatot visszavezettük a 16.6. feladatra: ott láthatjuk, hogy a konvex buroknak legfeljebb annyi átlója húzható meg úgy, hogy bármely kettő messe egymást, ahány csúcsa van.

15.5. A 15.4. feladat szerint legalább $\frac{\binom{n}{4}}{5}$ ilyen négyes van. Azt kell tehát belátnunk, hogy ez nem kisebb $\binom{n-3}{2}$-nél, vagyis hogy $n(n-1)(n-2) \geq 60(n-4)$. Ezt teljes indukcióval bizonyíthatjuk. $n = 5$-re egyenlőség van, utána n-ről $n+1$-re a bal oldal $\frac{n+1}{n-2}$-szeresére nő, a jobb oldal $\frac{n-3}{n-4}$-szeresére. Utóbbi $n > 4$-re kisebb.

[1] Ha nem akarunk a szemléletre hivatkozni, akkor ezt a következőképpen igazolhatjuk. SQ_k szakasz metszi PQ_1 szakaszt, a metszéspont legyen M. MQ_k szakaszt metszi PQ_i szakasz, a metszéspont legyen L. Végül f metszi az ML szakaszt.

15.3. A konvex halmazoknak azt a tulajdonságát fogjuk használni (ami definiáló tulajdonságuknak is vehető), hogy ha egy konvex alakzat tartalmazza az A és a B pontot, akkor tartalmazza az egész AB szakaszt. Ebből következik az is, hogy ha egy konvex alakzat tartalmazza az A, B és C pontot, akkor tartalmazza az egész ABC háromszöget is.

Számozzuk meg a négy halmazt, és az i, j és k-adik egy tetszőlegesen választott közös pontját jelöljük A_{ijk}-val. Kapunk négy pontot. Ha ezek egy konvex négyszöget alkotnak, akkor vegyük a két átló metszéspontját. Nyilván számozhatjuk úgy a csúcsokat, hogy az egyik átló végpontjai az A_{123} és az A_{124} pontok. Vagyis mindkét csúcs benne van az első két halmaz metszetében. De akkor a halmazok konvexitása miatt az egész átló is benne van e két halmaz metszetében. Ugyanígy a másik átló benne van a másik két halmaz metszetében. A metszéspontjuk tehát mind a négy halmaznak közös pontja. Lásd az 1. ábrát.



15.3M.1. ábra.

Ha a konvex burkuk egy háromszög, akkor a négy halmaz közül valamelyik tartalmazza mind a három csúcsot. A halmaz konvexitásából következik, hogy akkor tartalmazza az egész háromszöget is, így a belső pontját is, amely viszont a három másik halmaz közös pontja. Ez a pont tehát mind a négy halmazban benne van.

15.4. Négy halmazra a 15.3. feladatnál bizonyítottuk az állítást.

Ezután $k > 4$ halmazra teljes indukcióval bizonyíthatunk. Tegyük fel, hogy $k-1$-re már tudjuk az állítást és legyen k halmazunk, amelyek közül bármely három metszi egymást. Legyenek a halmazok az $A_1, A_2, \dots, A_k$ halmazok. Fontos megállapítás, hogy a 15.3. feladatban bizonyítottak szerint e halmazok közül bármely négynek is van közös pontja.

Tekintsük a $B_i = A_i \cap A_k$ halmazokat. Ezek konvexek, mert konvex halmazok metszete is konvex. Azt állítjuk, hogy a B_i halmazok közül is bármely három metszetének van közös pontja. Ez ugyanis annyit jelent, hogy bármely négy A_i-nek is van közös pontja, amit viszont már tudunk.

Tehát a B_i halmazoknak van közös pontjuk, s ez nyilván közös pontja az A_i halmazoknak is.

16. Az egyszerű skatulyaelv

16.1. Valamelyik színből legalább 17 tehén van. Ha nincs öt különböző korú ebből a színből, akkor csak négyféle életkoruk lehet. Tehát van öt azonos életkorú és azonos színű tehén. Az egyik faluba tehát legalább három tartozik közülük.

16.2. Nevezzük a sorozat első, második, stb. elemét a sorozat első, második, stb. „koordinátájának”. a) Ha k darab bumfordi sorozatot veszünk, akkor ezeket összeadva az egyes koordinákat kell összeadni. Minden ilyen összeg k darab összadandóból áll és minden összadandó két-két szám valamelyike lehet. Tehát összesen legfeljebb 2^k különböző értéket kaphatunk. Minthogy kilenc különböző értéket kell kapnunk, k legalább négy.

Ha azt nézzük, hogyan tudjuk négy bumfordi sorozat összegeként előállítani $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ számsorozatot, akkor a kettes számrendszer van segítsétünkre. Azt használjuk, hogy az 1,2,4,8 számok összegeként mindegyik szám előáll. A négy bumfordi sorozat közül ennek megfelelően az első az 0-ás és 1-es, a második 0-ás és 2-es, a harmadik 0-ás és 4-es, a negyedik 0-ás és 8-as számokból áll. A sorozatok a következők:

$$\begin{gathered}(1,0,1,0,1,0,1,0,1)\\(0,2,2,0,0,2,2,0,0)\\(0,0,0,4,4,4,4,0,0)\\(0,0,0,0,0,0,0,8,8)\end{gathered}$$

b) Ugyanígy bizonyítható, hogy az első 1994 számot elállító sorozathoz legalább 11 sorozat kell és a kettes számrendszer felhasználásával ugyanígy meg is adható 11 megfelelő bumfordi sorozat: az i-edik sorozat a 0 és a 2_{i-1} számokból áll, $i = 1, 2, \dots, 11$.

16.3. Legyen $n = 2k + 1$ alakú. Az első n szám között $k + 1$ páratlan szám van, tehát a kifejezésben szereplő $2n$ szám közül $2k + 2$ páratlan. De a szorzatnak csak $2k + 1$ tényezője van, tehát valamelyik tényezőben mindkét tag páratlan, így különbségük páros.

16.4. A sakktábla mezőit 18 egyenes szakasz határolja (kilenc-kilenc egymásra merőleges szakasz). A szelő egyenes ezeket legfeljebb egyszer-egyszer metszheti, és a sakktábla négy oldalegyenese közül csak kettőt metszhet. Tehát legfeljebb 16 metszéspontja keletkezhet ezekkel a szakaszokkal. Ez viszont azt jelenti, hogy legfeljebb 15 mezőt metszhet.

Ennyit metszhet is, ehhez a sakktábla átlóját „egy kicsivel” kell arrébb tolni.

16.5. Három egymás utáni, kettőnél nagyobb szám közül nem tartalmazhat hármat a sorozat. Ha ugyanis a-t tartalmazza és $a > 2$, akkor nem tartalmazhatja $a + 1$-et és $a + 2$-t. Ha a-t nem tartalmazza, $a + 1$ és $a + 2$ közül legfeljebb az egyiket tartalmazhatja.

Vegyük az összes $3k + 1$ alakú számot és a 2-t. Ezek egy olyan sorozatot alkotnak, amelyben semelyik két különböző tag összege nem szerepel. Ennek a sorozatnak n-ig $\lfloor (n+5)/3 \rfloor$ tagja van. Több pedig a fentebb mondottak szerint nem lehet.

16.6. a) Ha minden szám különböző volna, akkor volna két (nem feltétlenül szomszédos mezőn álló) szám, amelyek különbsége legalább 15 volna. Az egy sorban álló számok különbsége a feltétel szerint legfeljebb 6, s ugyanígy az egy oszlopban állóké is. Ebből viszont az következik, hogy két *tetszőleges* mezőn álló szám különbségének abszolútértéke legfeljebb 12 lehet. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy van két egyforma szám.

Három egyforma viszont nem feltétlenül van. Ez világos a következő elrendezésből:

1	1	2	2
3	3	4	4
5	5	6	6
7	7	8	8

b) A feltétel szerint mind az egy sorban, mind az egy oszlopban álló számok különbsége legfeljebb 33 lehet. Két tetszőleges szám különbsége tehát legfeljebb 66 lehet, így összesen legfeljebb 67-féle szám szerepelhet a táblán. Ha minden szám legfeljebb kétszer szerepelne, akkor nem tudnánk velük kitölteni 144 mezőt.

16.7. Az egy sorban álló számok között maximálisan $n(n^2-1)$ lehet a különbség, s ugyanez igaz az egy oszlopban álló számokra is. Tehát a sakktáblára írt számok között a maximális különbség $2n(n^2-1)$ lehet. Vagyis maximálisan ennél eggyel több, $2n^3-2n+1$ szám lehet felírva. Másrészt összesen n^4 számot írtunk fel, tehát van olyan szám, amely legalább $n^4/(2n^3-2n+1) > n/2$-szor szerepel. Ezt kellett bizonyítani.

16.8. Azt kell belátnunk, hogy az adott számok közül kiválasztható néhány, amelyek összegének tört része legfeljebb $\frac{1}{n}$ vagy legalább $\frac{n-1}{n}$.

Számozzuk meg valahogy az adott számokat és jelöljük s_k-val az első k szám összegét, $1 \leq$ $\leq k \leq n-1$. Ha e közül az $n-1$ összeg közül valamelyik legfeljebb $\frac{1}{n}$-nel tér el akár az alsó, akár a felső egész részétől, akkor máris kész vagyunk. Ha viszont egyik eset sem áll fenn, akkor mind az $n-1$ összeg tört része a $(\frac{2}{n}, \frac{n-1}{n})$ intervallumba esik. Ezt az intervallumot feloszthatjuk $n-2$ darab $\frac{1}{n}$ hosszú intervallumra. A skatulyaelv szerint van olyan ezek között az intervallumok között, amelyikbe legalább két összeg esik, legyenek ezek s_i és s_j, ahol $i < j$. Ekkor az $s_j - s_i$ összeg tört része vagy $\leq \frac{1}{n}$, vagy $\geq \frac{n-1}{n}$. Mivel $s_j - s_i$ a $j+1$-ediktől az i-edik számok összege, a feladat állítását beláttuk.

16.9. Nyilván elég a sorozat elemeit mod 10^{1000} nézni. Belátjuk, hogy ez a sorozat valahonnan periodikus. Tekintsük a sorozat egymás után következő tagjaiból alkotott párok maradékait mod 10^{1000}. Ezek összesen 10^{2000} félék lehetnek, tehát lesz olyan n és m, amelyre $f_n \equiv f_m$ és $f_{n+1} \equiv$ $\equiv f_{m+1}$ mod 10^{1000}. Ebből a sorozat képzési szabálya szerint következik, hogy $f_{n+2} \equiv f_{m+2}$ is teljesül mod 10^{1000}, s így az is igaz, hogy minden i-re is $f_{n+i} \equiv f_{m+i}$ mod 10^{1000}. Ebből már következik állításunk, hogy a sorozat valahonnan periodikus. De az is igaz, hogy $f_{n-1} = f_{n+1} -$ $- f_n \equiv f_{m+1} - f_m = f_{m-1}$ mod 10^{1000}. Ebből viszont az is következik, hogy minden szóbajövő i-re $f_{n-i} \equiv f_{m-i}$ mod 10^{1000}. Tehát a sorozat tisztán periodikus.

Most már csak egyetlen kis „cselre” van szükségünk: fel kell vennünk a sorozat -1-edik és -2-edik tagját is! Az egész bizonyítás során nem használtuk a kezdőértékeket, csakis a képzési szabályt. Tehát ha a sorozatot a $g_0 = -1$, $g_1 = 1$ értékekkel indítjuk, és képzési szabálya ugyanaz marad, akkor $f_n = g_{n+2}$, tehát csak annyit tettünk, hogy kettővel „elcsúsztattuk” az eredeti Fibonacci-sorozatot. Erről a g_n sorozatról is beláttuk tehát, hogy tisztán periodikus. De akkor végtelen sok olyan eleme van, amely $g_0 = -1$-et ad maradékul mod 10^{1000}, s ezek az első kivételével f_n sorozatnak is elemei. Ezt kellett bizonyítanunk.

16.1. Egy ember mellé hat másik ember ülhet, és minden nap ketten ülnek mellé, ezért a kirándulás nem lehet több három naposnál. Az igazi kérdés az, hogy egy három napos kirándulás ülésrendjét meg tudják-e jól tervezni, azaz úgy, hogy minden pár csak egyszer kerüljön egymás mellé?

Az első napi sorrend szerint számozzuk a társaság tagjait: 1234567(1) sorrendben ülnek az asztalnál. A második napon az 1357246(1), a harmadik napon az 1473625(1) sorrendet választhatják, s ekkor mindenki mindenki mellett pontosan egyszer fog ülni. (Ezt elég egyetlen emberre és a társaira ellenőrízni, mert az elrendezés teljesen szimmetrikus.)

16.2. Nyilván az az ember első ötlete, hogy skatulyaelvet kellene használni. Mindegyik dominó pontosan egy vonalat metsz, és minden dominót pontosan egy vonal vág ketté. 18 dominó kell a „sakktáblánk” lefedéséhez, így ezek összesen 18-szor metszik a vonalakat. Ez még nem vezet ellentmondásra. De ha igaz volna, hogy minden vonalat legalább két dominó metsz, akkor már kész is volnánk, hiszen ebben az esetben 20 dominó kellene ahhoz, hogy az összes vonalat átmessék, márpedig csak 18 van.

Szerencsére igaz, hogy minden vonalat legalább két dominó metsz. Egy vonal ugyanis két olyan részre osztja a „sakktáblát”, amelynek mindkét oldalán páros sok mező van. Ha egy dominó lefed egy vonalat, akkor ennek a vonalnak mindkét oldalán páratlan sok mező marad, ezek nem fedhetők le külön-külön átfedés nélkül, tehát biztos van még egy dominó, amely ugyanezt a vonalat metszi.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. [3]. 435sk. oldalán részletesen elemzi, hogy milyen $u \times v$-es „sakktáblák” esetében igaz az állítás. Kiderül, hogy például az 5×6-os és 7×6-os „sakktábla” is lefedhető kettes dominókkal úgy, hogy minden vonal át legyen metszve.

16.3.

1. megoldás. Kiválasztunk egy tetszőleges cédulát, ezen az N szám szerepel. A feltétel szerint minden más cédulán szereplő szám $N - 10^6$ és $N + 10^6$ közé esik. Minden cédulán egész szám áll, tehát legfeljebb 2000001 különböző szám állhat a cédulákon. Ha mindegyik szám csak véges sok cédulán állna, akkor összesen is csak véges sok cédula volna.

2. megoldás. Ha minden szám csak véges sok cédulán szerepelne, akkor végtelen sok különböző szám szerepelne a cédulákon, s végtelen sok egész szám között van kettő, amelyik különbsége nagyobb, mint egymillió.

16.4. A „bennfoglalásnál” meg kell engedni azt is, hogy legyen közös határuk, különben az állítás nem igaz: vesszük azokat a tégalalapokat, amelyek egyik oldala a (0,0) és (0,1) rácspontok által határolt szakasz, ezek teljesítik a feladat feltételét, és bármely kettőnek van közös határa.

Jelöljük $T_{n,m}$-mel azt a téglalapot, amelynek az origóval szemközti csúcsa az (n, m) koordinátájú pont. Azaz $T_{n,m}$ csúcsai a (0,0), $(0, m)$, $(n, 0)$ és (n, m) koordinátájú pontok.

Rögzítsünk egy tetszőlegeset a kijelölt négyszögek közül, legyen ez $T_{N,M}$. Ha van olyan $T_{n,m}$ téglalap a kijelöltek között, amelyre $n \le N$ és $m \le M$, akkor $T_{N,M}$ teljes egészében tartalmazza $T_{n,m}$-et. A fordított tartalmazás igaz, ha $n \ge N$ és $m \ge M$ teljesül. Marad az az eset, amikor minden kijelölt téglalapnak vagy az abszcisszája kisebb N-nél, vagy az ordinátája kisebb M-nél. Vagyis az origóval szemben levő csúcsa csak az $x = 0$, $x = 1$, $\cdots, x = N - 1$ vagy $y = 0$, $y = 1$, $\cdots, y = M - 1$ egyenletű egyeneseken lehet. Ez összesen $N + M$, azaz véges sok egyenes, tehát valamelyiken végtelen sok csúcs lesz. Márpedig elég, ha két olyan téglalap van, amelynek az origóval szemközti csúcsa egy, a koordinátatengelyek valamelyikével párhuzamos egyenesen van, s akkor a távolabbi csúcsú teljes egészében tartalmazza a közelebbi csúcsút.

16.5. Kilenc különböző kétjegyű számból képzett összeg maximális értéke $91 + 92 + \cdots + 99 = 855$, minimális értéke $10 + 11 + \cdots 18 = 126$. Ha tehát az adott halmazból képezzük az összes lehetséges, legalább egy, legalább kilenc tagú lehetséges összeget, legfeljebb 730 különböző értéket kaphatunk. Minthogy $2^{10} - 2$ ilyen összeg van, biztosan lesz közöttük két egyenlő. Hagyjuk el mindkét összegből az egyenlő tagokat, továbbra is egyenlők maradnak. Nem lehet, hogy így valamelyik összeg üres összeggé válna, mert akkor a másikkal is ez történne, holott a két összeg nem ugyanazokból a tagokból állt.

16.6. Kicsit többet bizonyítunk, az oldalakat is az átlók közé számítjuk és azt bizonyítjuk, hogy még így sem lehet n-nél több metsző „átlót” kiválasztani.

A bizonyításnál *tetszőleges* konvex sokszögre szorítkozhatunk, hiszen az, hogy két átló metszi-e egymást vagy sem, csakis azon múlik, hogy milyen sorrendben jönnek a kerületen az átlók végpontjai. Tehát *nyugodtan szorítkozhatunk a szabályos n szögre.*

Most csoportokba osztjuk az átlókat irányuk szerint. Két azonos irányú, vagyis párhuzamos átló nem metszheti egymást. Márpedig ismeretes, hogy a szabályos sokszög oldalai és átlói irányuk szerint pont n osztályba sorolhatók. Ez azt jelenti, hogy akárhogyan is választunk ki n-nél több átlót, lesz két párhuzamos közöttük.

Megjegyzések. 1. A feladatra további szép bizonyítások olvashatók [10]. 213-216. oldalán.

2. A szabályos n-szögről felhasznált állítást bizonyíthatjuk úgy is, hogy sorba számozzuk a csúcsokat 1-től n-ig. Két átló (illetve oldal) akkor azonos irányú, ha a végpontjaik sorszámának összege mod n megegyezik. Ez összesen n maradékosztályt jelent. Ezt felhasználva viszont az *eredeti*, nem feltétlenül szabályos n-szögre is elmondhatjuk a bizonyítást. Számozzuk sorba a sokszög csúcsait és két átlót/oldalt tegyük egy osztályba, ha végpontjain a sorszámok összege mod n megegyezik. Két azonos osztályba tett átlónak/oldalnak nem lehet közös belső pontja a konvexitás miatt. Tehát minden osztályból csak legfeljebb egyet választhattunk.

16.7. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1{,}2$-re az állítás igaz. Tegyük fel, hogy minden N-nél kisebb pozitív egész n-re már tudjuk az állítást. Nézzük, hány N-nél nem nagyobb számot tudunk kiválasztani úgy, hogy ne legyen köztük kettő, amelyek összege kettőhatvány. Legyen 2^l a legnagyobb, N-nél kisebb kettőhatvány. (Ha N kettőhatvány, akkor $2^l = N/2$.) Minden $2^l < t \le N$ számhoz rendeljük hozzá a $t' = 2^{l+1} - t$ számot. Ha N kettőhatvány ($N = 2^{l+1}$), akkor hozzá nem rendelünk semmit, őt biztos nem választhatjuk ki. Minden más 2^l-nél nagyobb, N-nél nem nagyobb t számhoz hozzárendeltünk egy 2^l-nél kisebb és $2^{l+1} - N$-nél nem kisebb t' pozitív egész számot úgy, hogy t és t' közül legfeljebb az egyiket választhatjuk ki és minden $2^{l+1} - N$-nél nem kisebb, 2^l-nél kisebb pozitív egészt hozzá is rendeltünk valamelyik t-hez. Ez azt jelenti, hogy a $2^{l+1} - N$-nél nem kisebb, N-nél nem nagyobb pozitív egész számoknak legfeljebb a felét választhatjuk ki. (Valójában ennél eggyel kevesebbet, mert 2^l-t nem választhatjuk ki.) A $2^{l+1} - N$-nél kisebb pozitív számok közül viszont az indukciós feltevés szerint kevesebb, mint a felét választhatjuk csak ki, így összesen is csak az N-nél nem nagyobb számoknak kevesebb, mint a felét választhatjuk ki, és ezt kellett bizonyítani.

Az állítás nem javítható. Ha például $n = 2^m$ kettőhatvány, akkor $2^{m-1} + 1$ és $2^m - 1$ közötti $2^{m-1} - 1$ számot kiválasztva ezek közül bármely kettő összege nagyobb 2^m-nél, de kisebb 2^{m+1}-nél. Érdemes meggondolni, hogy nem csak kettőhatványokra pontos az állítás.

16.8. Vegyünk egy, az illető által kitöltött lottószelvényt, legyen ez L_1. A többi $5^5 - 1$ szelvény mindegyikén be van ikszelve az L_1-en szereplő öt szám valamelyike. Ezért a skatulyaelv alapján van 5^4 szelvény, amelyiken ugyanaz az, L_1-en is szereplő szám van beikszelve. Legyen ez a szám a (lehet, hogy több ilyen szám is van, akkor az egyiket találomra kiválasztjuk). Jegyezzük meg: az a szám több, mint 5^4 szelvényen van beikszelve.

Ha az a szám mind az 5^5 kitöltött lottószelvényen be van ikszelve, akkor kész vagyunk. Ellenkező esetben van egy L_2 szelvény, amelyen a nincs beikszelve. Az a-t tartalmazó több, mint 5^4 szelvény mindegyikén be kell ikszelve lennie (legalább) egy L_2-n beikszelt számnak. Valamelyik az L_2-n szereplő szám több, mint 5^3 darab, a-t is tartalmazó szelvényen van beikszelve. Most tehát van több, mint 5^3 olyan szelvényünk, amelyen a és b is be van ikszelve.

Megint kész vagyunk, ha minden kitöltött szelvényen be van ikszelve a és b közül legalább az egyik. Ellenkező esetben található egy L_3 szelvény, amelyen sem a, sem b nincs beikszelve. Viszont a rajta szereplő öt szám közül legalább az egyik olyan, hogy az a-t és b-t is tartalmazó több, mint 5^3 szelvény közül több, mint 5^2 tartalmazza. Ha ezt az elemet c-vel jelöljük, akkor találtunk több, mint 5^2 szelvényt, amelyen a, b és c is be van ikszelve.

Az eljárást folytatva vagy minden szelvényen be van ikszelve a, b és c közül valamelyik, vagy találunk több, mint öt szelvényt, amelyen a, b, c és még egy d is be van ikszelve.

Vagyis az az eset maradt, hogy legalább hat szelvényen be van ikszelve a, b, c és d. Azt állítjuk, hogy ez a négy szám megfelel a feladat feltételének. Ha ugyanis volna egy olyan L' szelvény, amelyen egyikük sem szerepelne, akkor a rajta szereplő öt szám közül valamelyiknek – jelöljük ezt e-vel – a hat szelvény közül legalább kettőn kell szerepelnie. Ez viszont azt jelentené, hogy két olyan szelvény van, amin az a, b, c, d, e számok vannak beikszelve, tehát nem különbözők.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A feladat bizonyításában nem használtuk, hogy az ötös lottón 90 szám van. A bizonyítás ötös helyett „n-es lottóra” is működik, és a következő állítást adja:

Ha van n^n darab különböző n elemű halmaz (n legalább kettő) úgy, hogy bármely kettőnek van közös eleme, akkor található $n-1$ darab elem úgy, hogy bármely halmaz tartalmaz az $n-1$ elem közül legalább egyet.

Az állítással kapcsolatban számos érdekes, részben még megoldatlan kérdés merül fel. Ezekről olvashatunk Surányi János: *Matematikai versenytételek III.* c. könyvében ([11] 165-168. oldal).

16.9. Legyen A és B tagszáma n. Tekintsük A összes nem üres részhalmazát; ezek száma $2^n - 1$. Minden ilyen részhalmazhoz rendeljünk hozzá egy n hosszúságú 0-1 sorozatot: ennek i-edik eleme 0, ha a B delegáció i-edik tagja a részhalmazból páros sokat ismer, és 1, ha páratlan sokat. Ha az így kapott n hosszú 0-1 sorozatok között előfordul a csupa-0 vagy a csupa-1, akkor kész vagyunk. Ellenkező esetben van a sorozatok között két egyforma. Tartozzon a két egyforma sorozat a C és a D részhalmazhoz. Vegyük C és D szimmetrikus differenciáját, legyen ez az E részhalmaz. E nem üres, mert C és D különböző. Megmutatjuk, hogy E megfelelő részhalmaz.

Azt fogjuk megmutatni, hogy a B delegáció minden tagja páros sok E-beli embert ismer.

Ha a B delegáció i-edig tagja C-ből $c(i)$, D-ből $d(i)$ embert ismer, s ebből $k(i)$ van C és D közös részében, akkor E-ből $c(i) + d(i) - 2k(i)$ embert ismer. De $c(i)$ és $d(i)$ paritása azonos, hiszen a C-hez és a D-hez tartozó 0-1 sorozat megegyezik. Ezért a B delegáció i-edik tagja E-ből páros sok embert ismer. Ezt akartuk bizonyítani.

16.1. A sorozat minden tagja mellé képzeletben odaírjuk, hogy mekkora a leghosszabb, vele kezdődő szigorúan monoton növekvő sorozat.

Nyilvánvaló, hogy ha a sorozat két tagja mellé ugyanaz a szám kerül, akkor közülük a korábbi nem kisebb a későbbinél. Másrészt az is nyilvánvaló, hogy ha valamelyik tag mellé az $n+1$ (vagy annál nagyobb) szám kerül, akkor kész vagyunk: van $n+1$ tagú szigorúan monotonan növekvő sorozat. Ha viszont minden szám mellé az $1, 2, \ldots, n$ számok valamelyik kerül, akkor van a sorozatnak $k+1$ tagja, amelyek mellé ugyanaz a szám kerül. Ezek viszont az előbb mondottak szerint egy monoton csökkenő sorozatot alkotnak.

17. A skatulyaelv a kombinatorikus geometriában

17.1. Azt kell bizonyítani, hogy van két pont, amelyek távolsága legfeljebb az átló fele. Osszuk az egységnégyzetet oldalfelezőivel négy darab 1/2 oldalú négyzetre. A skatulyaelv szerint e négy négyzet közül legalább az egyikbe két adott pont esik. Ezek távolsága legfeljebb akkora, mint e kisebb négyzet átlója, vagyis a nagy négyzet átlójának fele.

17.2.

1. megoldás. A kört a következő módon bontjuk hét tartományra.

A kör kerületén vegyük fel egy szabályos hatszög csúcsait, majd kicsinyítsük a hatszöget a kör O középpontjából a felére. Ez az $ABCDEF$ hatszög lesz az első tartomány. Ha az eredeti kör sugara r, akkor ennek körül írt köre egy r átmérőjű kör, tehát a hatszög bármely két belső pontja r-nél közelebb van egymáshoz.

Legyen az OA félegyenes és a kör kerületének metszéspontja A'. Hasonlóan kapjuk a B', C', D', E', F' pontokat. Tekintsük az $A'A$, AB, BB' szakaszok és az AA' (rövidebb) körív által határolt tartományt, ez lesz a második tartomány. Az $AA'B'B$ négyszög egybevágó az $ABCDEF$ hatszög felével. Ha tükrözzük az $A'B'$ egyenesre, akkor a tükörképével együtt egyrészt magában foglalja az AA' körívet, így az egész tartományt, másrészt egybevágó az $ABCDEF$ hatszöggel, tehát erre a tartományra is igaz, hogy bármely két belső pontja r-nél közelebb van egymáshoz. Ugyanez igaz a $B'B$, BC, CC' szakaszok és a $B'C'$ körív által határolt tartományra, és a további négy, hasonlóan definiálható tartományra.

Így a kört hét olyan tartományra osztottuk, amelyek mindegyikére igaz, hogy bármely két belső pontja r-nél közelebb van egymáshoz. Ennél kicsit több is igaz: minden ilyen tartományra igaz, hogy a tartományt határoló szakaszok és körívek metszéspontjait („csúcsait”) kivéve bármely két pontjuk távolsága kisebb, mint r.

Nyilvánvaló, hogy a hét tartományt az O középpont körül elforgathatjuk úgy, hogy a 8 adott pont egyike se essen ilyen „csúcspontba”. Másrészt a skatulyaelv szerint valamelyik tartományba legalább két pont esik. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

2. megoldás. A nyolc pont közül legalább hét a kör középpontjától különböző. Kössük ezeket össze a kör középpontjával és a kapott szakaszt egészítsük ki (ha kell) a kör egy-egy sugarává. Két eset van: van két pont, amelyekhez ugyanaz a sugár tartozik, akkor e két pont távolsága kisebb a sugárnál. (!Kisebb: egyik sem lehet a kör középpontja.) A másik eset az, hogy mind a hét sugár különböző. Ekkor a középpont körül teljes szöget hét szögtartományra osztják, és ezek közül legalább egy kisebb $60°$-nál. E két pont tehát egy olyan egyenlőszárú háromszögnek a szárcsúcsától különböző pontja, amelynek szárszöge kisebb $60°$-nál. Egy ilyen háromszögben a legnagyobb távolság a két szár hossza, ami a mi esetünkben a sugár. Mivel egyik pont sem a kör középpontja, vagyis nem a szárak metszéspontja, ezért távolságuk biztosan kisebb a sugárnál.

Megjegyzés. A feladat további két megoldása és több hozzákapcsolódó érdekes megjegyzés olvasható Surányi János: *Matematikai versenytételek, III.* c. könyvében ([11], 36-40. old.) Itt olvashatjuk például, hogy az is igaz, hogy a nyolc pont között mindig van kettő, amelyek távolsága legfeljebb akkora, mint a körbe írható szabályos (konvex) hétszög oldalának hossza.

17.3. Ha a négyzetet sikerül felbontanunk 25 darab olyan kisebb egybevágó négyzetre, amelyek átlója kisebb kettőnél, akkor kész vagyunk. Ugyanis egy négyzet lefedhető egy olyan körrel, amelynek sugara az átló fele. Másrészt a 25 négyzet közül valamelyikbe legalább három pontnak kell esnie.

De ha a négyzetet felbontjuk 25 kisebb négyzetre (minden oldalát 5-5 egyenlő részre osztva), akkor egy ilyen kisebb négyzet oldala $7/5$, tehát az átlója $7\sqrt{2}/5$, s ennek négyzete $98/25 < 4$, tehát a kis négyzet átlójának hossza kisebb kettőnél. Ezt akartuk bizonyítani.

17.4. Ha sikerül a háromszöget felbontanunk 12 olyan alakzatra, amelyek mindegyike lefedhető egy-egy $1/\sqrt{3}$ átmérőjű körlappal, akkor a skatulyaelv szerint az egyikben van három az adott pontok közül és kész vagyunk.

Olyan egybevágó háromszögeket keresünk, amelyekből 12 lefedi a háromszöget és amelyek mindegyike lefedhető $1/\sqrt{3}$ átmérőjű körlappal. Megpróbálunk derékszögű háromszöget keresni, amelynek az átfogója $1/\sqrt{3}$. Ehhez a $\sqrt{3}$ hosszú befogót elnevezzük AC-nek (C-nél van a derékszög) és három egyenlő hosszú részre osztjuk, az átfogót pedig négy egyenlő hosszú részre osztjuk. A harmadoló pontok legyenek H_1 és H_2, a negyedelő pontok legyenek N_1, N_2, N_3. Úgy számozunk, hogy H_1 és N_1 kerüljön A-hoz közelebb. Könnyen kiszámolható, hogy N_1H_1A derékszögű háromszög és N_1-nél van a derékszög. Az átfogó hossza $1/\sqrt{3}$, a befogók hossza $1/2$ és $1/2\sqrt{3}$. E háromszöget háromszorosra nagyítva A-ból azt kapjuk, hogy a CN_3A háromszög is derékszögű és a negyedelő pontnál van a derékszög. Az utóbbi tehát felbontható 9 darab $1/2$, $1/2\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$ oldalú derékszögű háromszögre. Azt kell még megmutatnunk, hogy a maradó ABN_3 háromszög is felbontható három ilyen háromszögre. Ehhez vegyük fel a BC befogó F felezőpontját és a CN_3 magasság átfogóhoz közelebbi X harmadolópontját. A BXN_3, BXF és AXF háromszögek valóban ilyen háromszögek, mint erről számolással (és a hasonlóság figyelembe vételével) hamar meggyőződhetünk.

Megjegyzés. Egészítsük ki a háromszöget egy 1 és $\sqrt{3}$ oldalú téglalappá, osszuk ennek kisebb oldalát három, nagyobbat öt egyenlő részre, és osszuk az osztópontok alapján a téglalapot 15 kisebb ($1/3$, $\sqrt{3}/5$ oldalú) téglalapra. Ezek átlója kisebb, mint $1/\sqrt{3}$, így mindössze azt kell bebizonyítanunk, hogy van három kis téglalap, ami nem metsz bele az eredeti háromszögbe. Ez a nagy téglalapnak az eredeti háromszöggel „szemközti” csúcsát tartalmazó és a két szomszédos téglalapra könnyen belátható.

17.1. A lefedendő háromszög oldalát választjuk egységnek.

Felhasználjuk azt az ismert állítást, hogy egy zárt háromszöglemez bármely két pontját összekötő szakasz legfeljebb akkora, mint a legnagyobb oldala, vagyis *a háromszög átmérője/i a legnagyobb oldala(i)*.

Egy a oldalú szabályos háromszög nem tud lefedni egy a-nál hosszabb szakaszt. Tehát egynél kisebb oldalú szabályos háromszögből legalább három kell, hiszen egy ilyen csak egy csúcsot tud lefedni.

Három szabályos háromszög viszont elég is: ha a háromszöget mindhárom csúcsából 2/3-ára kicsinyítünk, az így kapott kisebb háromszögek lefedik az egész nagy háromszöget.

17.3. Legyen az ABC háromszög BC oldala egységnyi. Először tegyük fel, hogy másik két oldala kisebb egynél. Legyen F a BC oldal felezőpontja. Az AF szakasz legfeljebb akkora, mint az AB és AC oldalak közül a nagyobb, tehát még mindig rövidebb az egységnél. Ezért az AFB és az AFC háromszögek mindhárom oldala kisebb egységnél, tehát egynél kisebb az átmérőjük. Együtt lefedik az egész háromszöget.

Most tegyük fel, hogy az ABC háromszög AC oldala is egységnyi. Ekkor a harmadik oldala kisebb egységnél, hiszen a háromszög nem szabályos. Az AB átmérőjű kör a háromszög két szárát (a Thálész-tétel szerint) a magasságtalppontokban metszi, tehát lefedi az $ATT'B$ négyszöget, ahol T és T' az A-ból, illetve B-ből induló magasság talppontjai. (A-nál van a legkisebb szög, ezért a két talppont a háromszög oldalaira esik.) Ez a kör egységnél kisebb átmérőjű. A maradó CTT' háromszög átmérője pedig szintén kisebb egynél, hiszen az egységnyi átmérőjű ABC háromszög kicsinyített képe.

Azt kaptuk, hogy a háromszögek közül csak a szabályos nem fedhető le két kisebb átmérőjű alakzattal. Megjegyezzük, hogy minden nem szabályos háromszög két kisebb átmérőjű háromszöggel is lefedhető.

17.4. a) Azt nézzük, hogy az adott K kör kerületét hogyan fedik le a körök. Mivel a lefedő körök sugara kisebb K sugaránál, ezért csak egy félkörnél kisebb ívet tudnak lefedni. Két kisebb sugarú körlemez tehát nem fedheti le K kerületét sem. A lefedéshez kell tehát legalább három körlemez.

Három körlemez viszont elég is. Vegyünk a K kör kerületén egy ABC szabályos háromszöget. Az AB, BC és AC átmérőjű körök lefedik az egész kerületet. Például az AB átmérőjű kör tartalmazza az OAB háromszöget (O a K kör középpontja), mert $AOB\angle = 120°$, és tartalmazza az AB és a kör között elterülő (C-t nem tartalmazó) körszeletet. A három körlemez tehát lefedi az egész ABC háromszöget és a három levágott körszeletet.

Természetesen akárhány, háromnál több kisebb körlemezzel is lefedhető a kör.

b) Az a) rész megoldása azt is mutatja, hogy három *egybevágó* körlemezzel is lefedhető az egységkör, s e körlemezek sugara az egységkörbe írt szabályos háromszög oldalának fele, azaz $\sqrt{3}/2$. Kisebb körökkel nem lehet lefedni már a kör kerületét sem, mert kisebb körök a kör kerületének csak 120°-nál kisebb ívét tudják lefedni.

17.5. Hat körlappal nem lehet lefedni. Egy ilyen körlap ugyanis a kerületnek legfeljebb a hatodát fedi le, és azt is csak akkor, ha átmérője a kör egy – a körbe írható szabályos hatszög oldalával egyező - átmérője. Egy ilyen kör viszont nem tartalmazhatja a kör középpontját.

Hét körlap viszont elég, ezt tulajdonképpen már a 17.2. feladat megoldásánál láttuk. Vegyünk egy, a körbe írható szabályos hatszöget, és azt a hat kört, amelynek átmérője e hatszög egy-egy oldala. A hetedik körlap középpontja legyen a kör középpontja, O (sugara pedig az eredeti kör r

sugarának a fele). Belátjuk, hogy e hét kör a körlemez minden pontját lefedi. A hatszög kerülete és a kör kerülete közé eső pontokra ez világos. Másrészt legyen a hatszög egy oldala $\overline{AB}$, az OAB szabályos háromszög $\overline{OA}$ oldalának felezőpontja C, az $\overline{OB}$ oldalé D. Ekkor az $ACDB$ trapézt (melynek $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ oldala a kör sugarának fele) lefedi az $\overline{AB}$ átmérőjű kör , az ACD háromszög pontjait pedig az O közepű $r/2$ sugarú kör.

17.1. Ha az adott négy pont konvex burka négyszög, akkor e konvex négyszögnek van egy legalább $90°$-os szöge, ez a csúcs és két szomszédja megfelel.

Ha a konvex burok egy ABC háromszög, akkor a negyedik pont, D az ABC háromszög belsejében van. Az $ADB\angle, BDC\angle, CDA\angle$ szögek összege $360°$, tehát legalább az egyikük legalább $120°$-os.

17.2. Ha az adott öt pont konvex burka ötszög, akkor e konvex ötszögnek van egy legalább $108°$ $\circ$-os szöge. Ha háromszög, akkor a 17.1. feladat megoldása szerint a maradó két pont bármelyike meghatároz egy legalább $120°$-os szöget a háromszög valamelyik két csúcsával. Ha a konvex burok négyszög, akkor egyik átlójával bontsuk két háromszögre, az ötödik pont valamelyik háromszög belsejében lesz, s e háromszögre és a benne levő pontra mondhatjuk el ugyanezt.

17.3. Ha az adott hat pont konvex burka hatszög, akkor e konvex hatszögnek van egy legalább $120°$-os szöge. Ha a konvex burok kevesebb, mint hat pontú, akkor tekintsük a konvex burok belsejébe eső (egyik) pontot, legyen ez A, és bontsuk a konvex burkot egymást nem metsző átlóival háromszögekre. Valamelyik ilyen háromszögbe beleesik A, s most erre a háromszögre és az A pontra mondható el a 17.1. feladat megoldásánál használt gondolatmenet.

17.4. a) Ha az adott hét pont konvex burka hétszög, akkor e konvex hétszögnek van egy $120°$ $\circ$-osnál nagyobb szöge (van egy legalább $900°/7$-os szöge). Ha viszont a konvex burok hétnél kevesebb pontú, akkor ismét találunk egy ABC háromszöget, amelyet e konvex burok három pontja alkot, s amelynek a belsejében van egy adott pont, D. Ha a D pont nem az ABC háromszög izogonális pontja, akkor valamelyik oldal $120°$-osnál nagyobb szögben látszik belőle. Ha viszont D az ABC háromszög izogonális pontja, akkor vegyünk a megadott pontok közül egy ötödiket, E-t. A DE félegyenes a DA, DB, DC félegyenesek valamelyikével $120°$-osnál nagyobb konvex szöget zár be.

b) Vegyünk egy ABC szabályos háromszöget, a középpontját (mondjuk: az izogonális pontját), legyen ez K. Vágjunk le az ABC háromszög minden csúcsánál egy-egy „nagyon kis" háromszöget az $A'A'', B'B'', C'C''$ szakaszokkal. Ha e szakaszokat elég kicsire választjuk, akkor a hét pont által meghatározott minden szög csak nagyon kevéssel lesz több $120°$-nál.

17.5. Ha a négy pont közül három egy egyenesen van, akkor közülük a legközelebbi kettő legfeljebb fele olyan távol van egymástól, mint a legtávolabbi kettő.

Feltehető tehát, hogy a négy pont általános helyzetű. Ekkor a 17.1. feladat szerint van három pont, A, B, C, amelyekre a $BAC\angle$ legalább derékszög. Ismeretes, hogy ekkor $\overline{BC}^2 \geq \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. Ha az utóbbi kettő közül $\overline{AB}$ a kisebb, akkor $\overline{BC}^2 \geq 2\overline{AB}^2$. Ez éppen a feladat állítása.

A négyzet négy csúcsa mutatja, hogy a $\sqrt{2}$ nem javítható.

17.6. Nyilván feltehető, hogy a legkisebb távolság egységnyi. Másrészt most is, mint a 17.5. feladat megoldásában, feltehetjük, hogy az öt pont általános helyzetű. Ekkor a 17.2. feladat szerint van három pont, A, B, C, amelyekre a $BAC\angle$ szög legalább $108°$-os. A koszinusz-tétel szerint ekkor

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos BAC \geq 2 - 2\cos 108° = 4\sin^2 54°$$

.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

A szabályos ötszög öt csúcsa mutatja, hogy a $2\sin 54°$ nem javítható.

Megjegyzések. 1. A bizonyítást befejezhetjük úgy is, hogy az ABC háromszög legnagyobb és legkisebb oldalára felírjuk a színusz-tételt.

2. Ha hat pont van adva, akkor a 17.3. feladat állításából azt kapjuk, hogy van egy legalább 120° ∘-os szög. Ebből csak annyi jön ki, hogy a maximális és minimális távolság hányadosa legalább $\sqrt{3}$. Viszont most a szabályos hatszög hat csúcsa már meghatároz olyan távolságot is, amely kétszerese a legkisebbnek. Érdekes kérdés, hogy $\sqrt{3}$ és 2 között „hol az igazság”?

17.7. Akárhogy választunk négy pontot az ötből, azok meghatároznak egy nem-hegyesszögű háromszöget. Az öt pontból négyet ötféleképpen lehet kiválasztani, így öt nem-hegyesszögű háromszöget kapunk. Ám ezek között lehetnek azonosak: egy-egy nem-hegyesszögű ABC háromszöget két pontnégyesben (az $ABCD$ és az $ABCE$ pontnégyesben) is kiválaszthattunk. Ez azt jelenti, hogy legalább 5/2 nem-hegyesszögű háromszöget kapunk. De csak egész számú háromszöget kaphatunk, így legalább három nem-hegyesszögű háromszöget kapunk. (Utóbbi gondolatot úgy is elmondhatnánk, hogy ha csak két nem-hegyesszögű háromszög volna, mindegyiket csak két pontnégyesnél „találhattuk” volna, tehát csak négy nem-hegyesszögű háromszöget találhattunk volna, de ötöt találtunk.)

17.8. A 17.7. feladat szerint bármely pontötös meghatároz legalább három nem-hegyesszögű háromszöget. Ez – multiplicitással számolva – összesen legalább 18 háromszög. Egy háromszöget annyiszor „találtunk meg”, ahány ötösben benne van, vagyis háromban. Tehát legalább hat különböző háromszöget találtunk.

17.9. Vegyünk ki a hét adott pontból minden lehetséges módon ötöt, ez 21 lehetőség. a 17.8. feladat szerint minden ilyen ötös meghatároz legalább három-három nem-hegyesszögű háromszöget, ez összesen – persze multiplicitással számolva – legalább 63 nem-hegyesszögú háromszög. Nézzük, hogy egy-egy háromszöget hányszor „találtunk meg”. Legfeljebb annyiszor, ahány pontötösben ez a három pont benne van, vagyis ahányféleképpen a maradó négy pontból kettőt ki tudunk választani, ez összesen hat lehetőség. Vagyis legalább 63/6 különböző nem-hegyesszögű háromszöget „találtunk”. De egész számnyit kellett találnunk, ez legalább 11-et jelent.

17.10. Az n pontból akárhogyan választunk ki ötöt, azok a 17.8. feladat szerint legalább három nem-hegyesszögű háromszöget határoznak meg. Ez összesen legalább $3\binom{n}{5}$ háromszög. Egy ilyen háromszöget annyiszor „találhatunk meg”, ahány pontötösben benne van, ahányféleképpen tehát a maradó $n-3$ pontból kettőt kiválaszthatunk; ez $\binom{n-3}{2}$ lehetőség. Ez azt jelenti, hogy legalább annyi *különböző* nem-hegyesszögű háromszöget találunk, amennyi e két szám hányadosa, $n(n-$ $-1)(n-2)/20$, s ez az összes, $\binom{n}{3}$ háromszögnek a 30 százalékát jelenti.

Megjegyzés. Ha $n > 6$, akkor ugyanezzel a gondolatmenettel az is belátható, hogy a háromszögeknek legalább a 11/35-öd része nem-hegyesszögű.

17.11. a) Négy pont a síkon mindenképp meghatároz egy A, B, C ponthármast, amelyre $BAC\angle$ legalább 90°. Ha van közöttük három, amelyik egy egyenesen van, akkor közülük a középső legyen A, a másik kettő B és C. Ha általános helyzetűek, akkor ez a 17.1. feladat. Ismeretes, hogy ha $BAC\angle \geq 90°$, akkor $\overline{BA}^2+\overline{CA}^2 \leq \overline{BC}^2$, s ez utóbbi legfeljebb 1. Van tehát két távolság, amelyek négyzetösszege legfeljebb 1. A többi négy távolság mindegyike legfeljebb 1, így négyzete is legfeljebb 1. Ez összesen legfeljebb 5. Ha a négy pont közül három egy egységoldalú szabályos háromszög három csúcsa és a negyediket e csúcsok valamelyikének választjuk, akkor e négy pont által alkotott hat távolság négyzetösszege pontosan 5. Ha kikötjük, hogy mind a négy pont különböző legyen, akkor is a negyediket akármilyen közel tehetjük az egyik csúcshoz, s így öthöz akármilyen közel lehet a távolságok négyzetösszege.

b) Az a) részben láttunk, hogy ha találunk egy $BAC\angle$ szöget, amely legalább derékszög, akkor az A csúcsból induló két távolság négyzetösszege legfeljebb 1. Így e csúcsból induló távolságok négyzetösszege legfeljebb 3. Hagyjuk el ezt a pontot. Így kapunk négy pontot, ahol a) szerint a távolságok négyzetösszege legfeljebb 5. Ez összesen legfeljebb 8. A 8 el is érhető: ismét egy egységoldalú szabályos háromszög három csúcsát választjuk és a maradó két pontot egy-egy (*különböző*!) csúcsba tesszük, akkor nyolc távolság egységnyi lesz, kettő pedig nulla. (Megint elmondható, hogy ha kikötjük, hogy a pontok különbözőek legyenek, akkor 8-hoz tetszőlegesen közel lesz a távolságok négyzetösszege.)

Ugyanez a gondolat hat pontra azt adja, hogy a távolságok négyzetösszege legfeljebb 12, és ha egy egységnyi oldalú szabályos háromszög minden csúcsába két-két pontot teszünk, akkor pontosan 12 lesz a távolságok négyzetösszege: ennyi távolság egységnyi, a többi három nulla.

Megjegyzés. Hét pontra már nem megy ilyen egyszerűen. Ott ugyanis már azt kellene bizonyítani, hogy van két olyan nem-hegyesszögű háromszög, amelyeknek csak a nagyszögű csúcsuk közös.

17.12. Négy általános helyzetű pont a síkon meghatároz egy nem-hegyesszögű háromszöget (l. a 17.1. feladatot). Legyen ez a háromszög az ABC háromszög, és legyen C-nél a 90°-os vagy annál nagyobb szög. Ekkor AB hossza legfeljebb egy. Másrészt ha a C-nél levő szöget γ jelöli, akkor a beírt kör középpontja egy AB fölötti, $90° + \gamma/2$ szögű látóköríven van. Adott γ esetén nyilván akkor a legnagyobb a beírt kör sugara, ha e körív „legmagasabb” pontján van a középpontja, tehát ha a háromszög egyenlőszárű. Másrészt annál nagyobb a beírt kör sugara, minél messzebb van ez az ívközéppont az oldaltól, vagyis ha minél kisebb a γ szög. Tudjuk, hogy γ legalább 90°-os, tehát a beírt kör akkor maximális, ha az ABC háromszög derékszögű egyenlőszárú háromszög. Eddig rögzítve volt az AB oldal, most növeljük addig, amíg el nem éri az 1 hosszúságot. Ekkor azt kapjuk, hogy a beírt kör sugara legfeljebb akkora, amekkora az egység átfogójú, derékszögű egyenlőszárú háromszög beírt körének sugara. Ismeretes, hogy az derékszögű háromszögben megegyezik $s - c$-vel, ami a mi esetünkben épp a feladat állítását adja.

Ez a minimum valóban el is érhető, például ha a négy pont egy egységoldalú négyzetet alkot.

17.1. Azt állítjuk, hogy legalább három különböző távolságot határoznak meg.

Tegyük fel, hogy csak két távolságot határoznak meg. Legyen a hatpontú gráf hat csúcsa a hat pont, és az élek azok a pontpárok között futnak, amelyek közt a kisebbik távolság lép fel. Vagy ez a gráf, vagy a komplementere tartalmaz négy hosszú kört a GR.II.3.1. feladat szerint. Ez a négy pont tehát egy rombuszt határoz meg. Két eset van: vagy a másik két átlója egyenlő hosszú, s akkor egy négyzetről van szó, vagy az egyik átlója egyenlő az oldallal, s ekkor egy 60°-os rombuszról van szó. Könnyen ellenőrízhető, hogy egyik alakzat sem egészíthető ki (már további egy ponttal sem!) úgy, hogy csak azok a távolságok lépjenek fel, amelyek ebben az alakzatban fellépnek.

A hat pont tehát meghatároz legalább három távolságot. A szabályos hatszög hat csúcsa, vagy a szabályos ötszög öt csúcsa és középpontja mutatja, hogy van olyan elrendezés, amikor a hat pont csak három távolságot határoz meg.

17.2. Vegyünk fel az öt pontnak egy olyan elrendezését, amelyben a pontok között csak két távolság lép fel, d és d'.

Tekintsük azt a gráfot, amelynek ez az öt pont a csúcsa és két pontot akkor köt össze él, ha d távolságra vannak egymástól. A GR.II.3.2. feladat szerint két eset van: ez a gráf vagy egy ötszög, vagy a gráf és a komplementere közül az egyikben van háromszög.

Ha a gráf egy ötszög, akkor a komplementere is az, tehát egy olyan ötszögről van szó, amelynek oldalai is, átlói is egyenlők. Vagyis szabályos ötszögről van szó.

Ha a gráfban vagy a komplementerében van egy háromszög, akkor az öt pont között van három, amelyek egy ABC szabályos háromszöget alkotnak. Legyen D egy további pont. Ez a háromszög három csúcsa közül kettőtől egyenlő távolságra van, mondjuk az A és B csúcsoktól. Tehát rajta van AB oldalfelező merőlegesén. Nézzük, az oldalfelező merőlegesnek melyik pontjai jönnek szóba. Szóba jön az a pont, amely a C pont tükörképe AB-re. A másik eset az, amikor A-tól és B-től egyenlő, d' távolságra van. Ha C-től is d' távolságra van, akkor az ABC háromszög köré írt középpontjáról van szó. Ha C-től d távolságra van, akkor pedig csak két különböző helyzete lehet az AB oldalfelező merőlegesén. Ez összesen négy lehetőség, a d távolság mindegyik esetben egyértelműen meghatározott. Könnyen ellenőrízhető, hogy semelyik két esetet nem lehet úgy „összeilleszteni”, hogy az öt pont között továbbra is csak ez a két távolság lépjen fel.

Megjegyzés. A feladat megoldható a következő, 17.3. feladat segítségével is.

17.3. Vegyünk fel egy olyan elrendezést, amely megfelel a feltételnek, tehát csak kétféle távolság lép fel a pontok között. Négy síkbeli pont meghatároz legalább két távolságot, legyenek ezek d és d', legyen d az a távolság, amelyik többször lép fel. Ha mindkettő háromszor lép fel, akkor mindegy, melyiket választjuk. Tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjai e négy pont, és kössünk össze éllel két pontot, ha d távolságra vannak egymástól. Ez a gráf legalább három élt tartalmaz és legfeljebb ötöt.

Ha a gráfnak öt éle van, ez csak egyféleképp lehetséges (négyszög és egy átló). A négyszög azt jelenti, hogy rombuszról van szó, és ha az egyik átlója is ugyanilyen hosszú, akkor egy 60°-os rombuszról van szó.

Ha a gráfnak négy éle van, akkor két eset van:

– Egy négyszögről van szó, ami azt jelenti, hogy a négyszög egy rombusz. A két átlója azonos – d' – hosszúságú, tehát egy négyzetről van szó.

– Egy ABC háromszögről és az egyik, például az A csúcsából kiinduló egy további élről van szó. Tehát A-tól a másik három pont (B, C és az eddig nem említett D) egyforma távol van. Az A köré írt d sugarú körön van tehát a másik három pont. Másrészt ABC egy d oldalú szabályos háromszöget alkot. Az A-tól d távolságra levő D pont két helyen lehet BC felezőmerőlegesén.

A négyélű gráfok tehát három elrendezést adnak.

Ha a gráfnak három éle van, akkor három eset van:

– A gráf egy csillag, ez azt jelenti, hogy az egyik ponttól a másik három egyenlő d távolságra van. Viszont a másik három pont egymástól egyenlő d' távolságra van, tehát szabályos háromszöget alkot. Vagyis a d közepű kör középpontjáról és a körbe írható szabályos háromszög három csúcsáról van szó, ez az elrendezés hasonlóság erejéig egyértelmű.

– A gráf egy háromszög és egy izolált pont. Ez a gráf az előző (a csillag) komplementere, tehát nem ad új elrendezést.

– A gráf egy három hosszú út. Ez azt jelenti, hogy a négy pont úgy helyezkedik el, hogy $AB = BC = CD$ és $AC = BD = AD$. Ebből már következik, hogy egyenlőszárú trapézról van szó, amelynek átlói és a nagyobbik alapja egyenlők. Szögszámolással könnyen kiszámolható, hogy a trapéz szögei 108° és 72°, tehát egy olyan trapézról van szó, amelyet úgy kapunk, hogy a szabályos ötszög egyik csúcsát elhagyjuk.

A háromélű gráfok tehát két elrendezést adnak.

Összesen tehát hatféle elrendezést találtunk.

17.1. A 2 egység oldalú négyzet területe 4, míg az öt elhelyezendő egységnégyzet összterülete 5, tehát átfedés nélkül nem helyezhetők el. (Átfedésen itt csak azt értjük, ha a közös rész területe pozitív, s ekkor közös belső pont is van.)

17.2. A 3 egység oldalú kocka térfogata 27 térfogategység, míg a 28 elhelyezendő egységkocka össztérfogata 28, tehát átfedés nélkül nem helyezhetők el. (Átfedésen itt csak azt értjük, ha a közös rész térfogata pozitív, s ekkor közös belső pont is van.)

17.3. A négy 1/2 oldalú négyzet területének összege négy területegység, ami nagyobb a kör területénél. Tehát valamelyik két körnek a közös területe pozitív területű, s így van belső pontja.

17.5. A 2 egység oldalú szabályos hatszög területe $6\sqrt{3} = \sqrt{108} < 11$, míg a 11 elhelyezendő egységnégyzet összterülete 11, tehát átfedés nélkül nem helyezhetők el. (Átfedésen itt csak azt értjük, ha közös belső pont is van.)

Megjegyzés. Természetesen a 11 „durva” becslés, valójában még 9 egységnégyzet sem helyezhető el átfedés nélkül.

17.6. Ha egy Q belső pontot eltolunk az A_1A_i vektorral, akkor a kapott Q' képet úgy is megkaphatjuk, hogy az A_iQ szakasz C felezőpontjára tükrözzük A_1-et, vagy másképp: a C pontra A_1 középpontú kétszeres nagyítást alkalmazunk. Az ötszög konvex, ezért az A_1Q szakasz felezőpontja az ötszög belső pontja.

Az eltolással keletkező ötszögek mindegyike benne van tehát abban az ötszögben, amit P_1-nek A_1 középpontból való kétszeresre nagyításával kapunk. Ha a P_1 (és a vele egybevágó másik négy) ötszög területe T, akkor a nagyított ötszögé $4T$. Ezen a területen kell elhelyezkednie összesen $5T$ területű ötszögnek, ami csak úgy lehetséges, ha valamelyik kettőnek van közös belső pontja.

17.7. Ha egy Q belső pontot eltolunk az A_1A_i vektorral, akkor a kapott Q' képet úgy is megkaphatjuk, hogy az A_iQ szakasz C felezőpontjára tükrözzük A_1-et, vagy másképp: a C pontra A_1 középpontú kétszeres nagyítást alkalmazunk. A poliéder konvex, ezért az A_1Q szakasz felezőpontja a P_1 poliéder belső pontja.

Az eltolással keletkező poliéderek mindegyike benne van tehát abban a poliéderben, amit P_1-nek A_1 középpontból való kétszeresre nagyításával kapunk. Ha a P_1 (és a vele egybevágó másik nyolc) poliéder térfogata V, akkor a nagyított poliéder térfogata $8V$. Ezen a területen kell elhelyezkednie összesen $9V$ területű ötszögnek, ami csak úgy lehetséges, ha valamelyik kettőnek van közös belső pontja.

Megjegyzés. Kockára nyilván nem igaz az állítás, tehát 8-csúcsú poliéderekre általában még nem igaz az állítás. Bármilyen legalább 9-csúcsú poliéderre viszont az állítás ugyanígy igazolható.

18. Skatulyaelv a kombinatorikus számelméletben

18.1. Azt kell belátni, hogy van két rácspont, amelyek első koordinátái is, második koordinátái is egyforma számjegyre végződnek. Ha a rácspontokat aszerint csoportosítjuk („skatulyázzuk”), hogy mi az első koordinátájuk utolsó számjegye, ez tíz csoportot jelent, tehát valamelyikben lesz legalább 11 rácspont. Mivel a másdoik koordináta utolsó számjegye is csak tízféle lehet, lesz közöttük kettő, amelynek a második koordinátája is ugyanarra végződik.

100 rácspont esetén már nem igaz az állítás, hiszen ha vesszük az összes $(i|j)$ rácspontot, ahol i is j is nullától kilencig fut, ez száz olyan rácspont, amelyek között nincs két megfelelő.

18.3. Az (0,0), (1,0), (1,1). (0,1) rácsnégyzet semelyik oldalának és átlójának a felezőpontja nem rácspont. Tehát négy rácspontot meg lehet adni. Ha viszont öt rácspont van megadva, azok között már van kettő, amelynek abszcisszája és ordinátája is azonos paritású (az (a, b) pár paritására négy lehetőség van), s ekkor az őket összekötő szakasz felezőpontja rácspont.

18.4. Ha n páratlan, és minden versenyző helyezési száma megegyezik a rajtszámával, akkor a kapott összegek $2, 4, 6, \ldots, 2n$, s mivel $(2, n) = 1$, ezért ez egy teljes maradékrendszer mod n. Páratlan n-ekre tehát lehetséges, hogy minden rajtszám+helyezési szám különbözik mod n.

Ha viszont n páros, akkor a rajtszámok és helyezési számok összegének összege $n(n+1)$ osztható n-nel. Viszont a mod n maradékok összege $n(n-1)/2$-vel kongruens, ami páros n-re biztosan nem osztható n-nel, mert $n-1$ relatív prím n-hez, és $n/2$ nem osztható n-nel.

18.5. Nyilván nem változtat a feladaton, ha mind a 102 szám helyett a kétszázzal való legkisebb pozitív osztási maradékát vesszük. Most tehát adott 102 darab, nem feltétlenül különböző egész szám 0 és 199 között (a 0 és a 199 is közöttük lehet). Ha van közöttük két egyforma, akkor ezek különbsége nulla, tehát osztható kétszázzal, s így az eredeti két szám különbsége is osztható kétszázzal. Ha viszont nincs közöttük két egyforma, akkor a következőképpen alkotunk belőlük 101 csoportot. A 0 és a 100 egy-egy csoport önmagában. A többi számot párosítjuk: az 1-et a 199-cel, a 2-t a 198-cal, és általában az i-t a $200 - i$-vel. Ha ugyanis az i és a $200 - i$ szerepel a számok között, akkor találtunk két számot, amelyek összege osztható kétszázzal. Ha viszont minden i-re az i és a $200 - i$ közül csak az egyik szerepel, akkor a 99 párból csak egy-egy szerepelhet, és ha a 0 és a 100 is szerepel, még mindig csak 101 számunk van, ami ellentmondás.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk. Nyilván nem használtuk, hogy a számok pozitívak, csak azt használtuk, hogy egészek.

Ha viszont a $0,1,2, \ldots, 99, 100$ számokat tekintjük, ezek közül semelyik kettő különbsége nem osztható kétszázzal, és semelyik kettő összege sem, a legkisebb összeg ugyanis az 1, a legnagyobb a 199. 101 számra tehát nem igaz az állítás.

Nyilván ugyanígy bizonyítható a feladat következő általánosítása:

Bárhogyan adunk meg $n + 2$ egész számot, mindig van közöttük kettő, amelyeknek vagy az összege, vagy a különbsége osztható $2n$-nel. Ugyanez az állítás $n+1$ szám esetén már nem mindig igaz.

18.7. A (2,3,4,6) számok közül akárhogyan választunk ki hármat, valamelyik kettőnek van egynél nagyobb közös osztója. Válasszuk ki tehát az összes $6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 6$ alakú (60-nál nem nagyobb pozitív egész) számot, vagyis azokat az $i \leq 60$ egész számokat, amelyekre $i \equiv 2, 3, 4$ vagy 0 mod 6. Ez összesen negyven szám. Azt állítjuk, hogy ezekre is igaz, hogy bárhogyan választva közülük hármat, valamelyik kettőnek lesz egynél nagyobb közös osztója. Ehhez mindössze azt kell észrevennünk, hogy a 2-es, 4-es, 6-os maradékosztályba tartozó számok oszthatók kettővel, a 3-as és 6-os maradékosztályba esők oszthatók hárommal. Márpedig valamelyik fajtából legalább kettőt választunk.

18.8. Rögtön általánosan oldjuk meg a feladatot. Tehát arra a kérdésre keresünk választ, hogy az első $6n$ pozitív egész szám közül hányat lehet úgy kiválasztani, hogy ne legyen közöttük három olyan szám, amelyek páronként relatív prímek egymáshoz? A feladatban $n = 331$. Megmutatjuk, hogy $4n$ szám megadható, de $4n + 1$ szám nem adható meg úgy, hogy ne legyen közöttük három egymáshoz páronként relatív prím szám.

Az előző (=18.7.) feladat megoldását általánosítva válasszuk ki megint a mod 6 maradékosztályok közül a $0, 2, 3, 4$ maradékosztályokat. (Belőlük a $6n$-nél nem nagyobb pozitív egészeket.) Ez $4n$ szám. Most is ugyanúgy megy annak a bizonyítása, hogy ezek közül bármely hármat választva valamelyik kettő legnagyobb közös osztója egynél nagyobb.

Most megmutatjuk, hogy $4n + 1$ számot választva már mindig lesz három, amelyek közül bármely kettő relatív prím. A bizonyítás teljes indukcióval történik. A kezdő lépés $n = 1$-re próbálgatással ellenőrízhető. Vagy mondhatjuk azt, hogy ha az első hat számból ötöt választunk, akkor vagy az 1, vagy az 5 szerepel közöttük. Ezen kívül szerepelnie kell két egymás melletti számnak is. E három szám megfelel.

Ezután tegyük fel, hogy n-re már tudjuk az állítást és nézzük, hány számot választhatunk ki az első $6n+6$ számból úgy, hogy bármely három között legyen kettő, amelyek nem relatív prímek. Az első $6n$-ből az indukciós feltevés szerint legfeljebb $4n$-et. Azt állítjuk, hogy a $6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5, 6n+6$ számok közül nem választhatunk ki négynél többet.

Tegyük fel, hogy mégis sikerült kiválasztanunk ötöt. A $6n+1, 6n+2, 6n+3$ számok páronként relatív prímek, így közülük legfeljebb kettőt választhattunk ki. Tehát kiválasztottuk a $6n+4, 6n+5, 6n+6$ számokat. De a $6n+1, 6n+5, 6n+6$ számhármas tagjai is páronként relatív prímek, tehát a $6n+1$-et nem választhattuk ki. Végül a $6n+2, 6n+3, 6n+5$ számhármas tagjai is relatív prímek, tehát a $6n+2$ és $6n+3$ számok közül is csak egyet választhattunk ki. Ez összesen négy szám, ami ellentmond kiinduló feltételünknek.

Beláttuk tehát, hogy az utolsó hat számból csak négy választható ki, az előttük álló $6n$ számból pedig az indukciós feltevés szerint legfeljebb $4n$. Így összesen legfeljebb $4(n+1)$ szám választható ki úgy, hogy ne legyen köztük három, páronként relatív prím szám.

Ezzel a teljes indukciós lépést is befejeztük.

18.10. Az 1,2,4,8,16 számok közül csak egy szerepelhet. Az 3,6,12 számok közül is. Az 5,10,20 számok közül is, végül a 7,14 és a 9,18 számok közül is. Ez eddig legfeljebb öt szám. Maradnak még a tíznél nagyobb páratlan számok: 11,13,15, 17, 19, ez további öt szám. Összesen tehát legfeljebb tíz számot tudunk kiválasztani.

Ennyit viszont lehet is: a tíznél nagyobb és húsznál nem nagyobb egész számok megfelelnek a feladat feltételének.

18.11. Ha csak az n-nél nagyobb számokat választjuk ki, ezek közül egyik sem osztója a másiknak. Ez n darab szám. Most megmutatjuk, hogy akárhogyan is választunk $n+1$ számot az első $2n$ közül, van közöttük kettő, amelyek közül egyik osztója a másiknak.

Minden egész szám egyértelműen írható fel egy kettőhatvány és egy páratlan szám szorzataként. Az utóbbit hívjuk a szám *páratlan részének*. Az első $2n$ szám között ez a páratlan rész csak az első n darab páratlan szám lehet. Tehát van két szám a kiválasztottak között, amelyeknek ugyanaz a páratlan részük. Ezek közül az, amelyiknek a kettőhatvány-része kisebb, osztója a másiknak.

Ha az első $2n+1$ számból választhatunk, akkor kiválaszthatjuk az n-nél nagyobb számokat, ezek közül a legnagyobb és legkisebb hányadosa még mindig kisebb kettőnél, tehát egyik sem lehet osztója a másiknak. Viszont ha $n+2$-t választunk, akkor egyben az első $2(n+1)$ számból is választottuk őket, tehát van közöttük olyan, amelyik osztója egy másik kiválasztott számnak.

18.12. Vegyük az $n+1, n+2, \ldots, 2n$ számokat. Ezek közül bármely kettőnek $2n$-nél nagyobb a legkisebb közös többszöröse. Legyen ugyanis két szám $n+i, n+k$, $k>i$. Legyen a legnagyobb közös osztójuk d. Ekkor $n+i=md$, $n+i+k=m'd$, és $m'>m$. Ezért $m'\geq 2$. A legkisebb közös többszörösük pedig

$$mm'd \geq 2md = 2(n+i) > 2n$$

.

Viszont ha akárhogyan adunk meg $n+1$ különböző, $2n$-nél nem nagyobb számot, a 18.11. feladat szerint van közöttük kettő, amelyek közül egyik osztója a másiknak, tehát a legkisebb közös többszörösük a nagyobbik szám kettejük közül, s ez legfeljebb $2n$.

18.13. Ha $m \leq n$, akkor a nyílt intervallum nem tartalmazhat két különböző, m nevezőjű törtet, mert ezek különbsége legalább $1/n$. Tehát a szóba jövő törtek mindegyikének különböző a nevezője.

A lényeges megállapítás a következő: egyik nevező sem lehet osztója a másiknak. Ha ugyanis $m|m'$, akkor az m nevezőjű tört bővíthető volna m' nevezőjűvé, és megint kapnánk két különböző, $m' \leq n$ nevezőjű törtet az $1/n$ hosszú nyílt intervallumban.

A 18.11. feladat szerint legfeljebb $\lceil n/2 \rceil$ darab, n-nél nem nagyobb nevező adható meg, hogy egyik se ossza a másikat.

18.14. Egy szám akkor négyzetszám, ha prímfelbontásában minden prímszám kitevője páros szám. Ezért elég azt vizsgálni, hogy egy adott számban a prímszámok páros vagy páratlan hatványon szerepelnek-e. Rendeljünk tehát hozzá minden adott számhoz egy négytagú 0-1 sorozatot. Az első tag annak megfelelően nulla vagy egy, hogy a kettő a szám prímfelbontásában páros vagy páratlan hatványon szerepel. Ugyanígy a második tag a 3, a harmadik tag az 5, a negyedik tag a 7 kitevőjének paritását mutatja. Tehát például a $2^3 3^4 5^2 7^5$ számhoz az (1,0,0,1) sorozatot rendeljük.

Most már elég annyit észrevenni, hogy ha két számhoz ugyanazt a sorozatot rendeljük, akkor a szorzatukban mind a négy prímszám kitevője páros lesz, azaz négyzetszám lesz. A feladat állítása tehát 20 helyett már 17 számra is igaz, 16-ra viszont még nem.

18.15. A 18.14. feladat megoldásában szereplő meggondolást általánosítva azt kapjuk, hogy ha adott $2^n + 1$ szám, amelyek mindegyike csak a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prímekkel osztható, akkor van közöttük kettő, amelyek szorzata négyzetszám.

A feladatban tehát 300 helyett már 257 számra is igaz az állítás, mert nyolc darab 20-nál nem nagyobb prímszám van.

18.16. A számok különbsége nem változik, ha mindegyikhez hozzáadunk ugyanannyit. Elérhető tehát, hogy a legnagyobb kiválasztott szám a $3n$ legyen. Ha az $n+1, n+2, ..., 2n-1$ számok valamelyikét szintén kiválasztottuk, akkor ez a szám és a $3n$ megfelel. Ha viszont ezek egyikét sem választottuk ki, akkor rakjuk párba a többi számot a következőképpen:

$$(1{,}2n), (2{,}2n+1), \ldots, (k, k-1+2n), \ldots, (n{,}3n-1).$$

Ha e számpárok közül valamelyikből mindkét elemet kiválasztottuk, akkor azok megfelelnek. Ha viszont minden párból csak egyet választottunk ki, akkor összesen csak $n+1$ számot választottunk ki.

A megoldásból az is látszik, hogy $n+1$ számot még ki lehet úgy választani, hogy a feladat feltétele ne teljesüljön: például, ha az $1{,}2, \ldots, n, 3n$ számokat választjuk.

Megjegyzés. További megoldásokat és érdekes megjegyzéseket olvashatunk Hajós-Neukomm-Surányi: *Matematikai versenytételek, II.* című könyvében, [10] 154-156.

18.17. Legyen az adott n szám $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tekintsük minden i-re az első i szám összegét, $s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$-t. Ez n darab különböző összeg. Ha van közöttük n-nel osztható, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor van egy s_i és egy s_j, amelyek ugyanazt a maradékot adják n-nel osztva, és $i \neq j$. Szimmetria okokból feltehetjük, hogy $i < j$, s ekkor az $s_j - s_i = a_{i+1} + \ldots + a_j$ különbség osztható n-nel. (Mivel $i \neq j$, ez az összeg nem üres.)

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Az állítás nyilván nem marad igaz, ha csak $n-1$ számunk van és például mindegyik ugyanazt a nem-nulla maradékot adja n-nel osztva.

18.18. A bizonyítandó állítás azt jelenti, hogy van három olyan rácspont, amelynek abszcisszáit összeadva hárommal osztható számot kapunk, és ordinátáit összeadva is hárommal osztható számot kapunk.

Megmutatjuk, hogy ez az állítás akkor is igaz, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy semelyik három pont nincs egy egyenesen.

Nyilvánvaló, hogy ha minden rácspont abszcisszájához ugyanazt az a számot, ordinátájához ugyanazt a b számot adjuk, a feladat állítása nem változik, hiszen a három rácspont abszcisszájának és ordinátájának összege egyaránt egy-egy hárommal osztható számmal változik.

Megengedtük, hogy három pont egy egyenesen legyen, de ez azzal az előnnyel jár, hogy bármely pont bármelyik koordinátájához hozzáadhatunk egy hárommal osztható számot, az állításon ez semmit nem változtat. Így viszont elérhetjük, hogy minden pont minden koordinátája 0, 1 vagy -1 legyen – ám ekkor több pontnak is lehet azonos mindkét koordinátája.

Most tehát a következő állításhoz jutunk: ha adva van kilenc – nem feltétlenül különböző – számpár, amelyek mindkét koordinátája 0, 1 vagy -1, akkor kiválasztható közülük három úgy, hogy mind az első, mint a második koordinátáik összege osztható legyen hárommal.

Ezt fogjuk bebizonyítani. Ha valamelyik számpár háromszor szerepel, akkor e három számpár megfelel. Ha minden számpár legfeljebb kétszer szerepel, akkor biztos, hogy valamelyik számpár pontosan egyszer szerepel, hiszen páratlan sok számpárunk van. A fenti gondolatmenet szerint elérhető az is a feladat állításának csorbítása nélkül, hogy ez a számpár a $(0,0)$ számpár legyen, azaz az origó. Vegyük észre hogy az origó a következő számpárokkal megfelelő hármast alkot:

$(0,1)$ és $(0,-1)$,
$(1,0)$ és $(-1,0)$,
$(1,1)$ és $(-1,-1)$,
$(1,-1)$ és $(-1,1)$.

Ez azt jelenti, hogy mind a négy számpár-párból csak az egyik számpár szerepelhet. Ezek mindegyikének kell is szerepelnie, különben nincs kilenc számpárunk. (Az origóból csak egy van és egyfajta számpárból csak kettő lehet.)

Szimmetria okokból feltehető, hogy az első számpárból is, a második számpárból is az első szerepel. Ugyanis az 1 és a -1 szerepét koordinátánként felcserélhetjük, a feladat érvényességén ezzel nem változtatunk. Ha a $(0,1)$ és az $(1,0)$ számpár szerepel, akkor nem szerepelhet a $(-1,-1)$ számpár, tehát az $(1,1)$ számpár szerepel. Ha a negyedik számpár-párból az $(1,-1)$ szerepel, az az $(1,1)$ és $(1,0)$ számpárokkal alkot megfelelő hármast. Ha a $(-1,1)$ számpár szerepel, az az $(1,1)$ és $(0,1)$ számpárokkal alkot megfelelő hármast.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

A megoldásból világos az is, hogyan lehet nyolc rácspontot úgy kiválasztani, hogy semelyik három súlypontja ne legyen rácspont. Ilyen pontok például a $(0{,}0), (0{,}1), (1{,}0), (1{,}1), (3{,}3)(3{,}4), (4{,}3), (4{,}4)$ pontok.

18.19. Először belátjuk, hogy a felírás, ha van, egyértelmű, azaz két formálisan különböző szám nem adhatja ugyanazt az értéket. Ha ugyanis egy szám kétféleképpen is felírható volna, akkor a két felírásban szereplő legmagasabb 3-hatvány kifejezhető volna kisebb háromhatványok 0, 1, vagy 2-szeresének előjeles összegeként. Azonban $2(1+3+3^2+\cdots+3^i+\cdots+3^{n-1)}) = 3^n-1 < 3^n$ miatt ez lehetetlen.

A legnagyobb, $2n$ jeggyel felírható szám a $2+2\cdot 9+2\cdot 81+\ldots+2\cdot 9^{n-1} = (9^n-1)/4$, a legkisebb, $2n$ jeggyel felírható szám a $(-6)\cdot(1+9+\ldots+9^{n-1}) = -3(9^n-1)/4$. E két szám között – őket is beleértve – pontosan 9^n szám van, annyi, ahány $2n$-jegyű, formálisan különböző szám. Ebből és az egyértelműségből következik, hogy minden, az $I_n = [-3(9^n-1)/4, (9^n-1)/4]$ intervallumba eső számot előállíthatunk. S mivel minden k egész számhoz van olyan n, amelyre k az I_n intervallumban van, a feladat bizonyítását befejeztük.

18.21. Legyenek Anna számainak osztási maradékai $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ha az $n-a_1, n-a_2, \ldots, n-a_k$ maradékok valamelyike fellép Barna maradékai között, akkor kész vagyunk. Ha viszont egyik sem lépne fel, akkor csak a maradó $n-k<l$ maradék léphetne fel nála, amit a feladat szövege kizár.

18.22.

1. megoldás. Az előző (=18.21.) feladatban Annánál is, Bélánál is lehetett végtelen sok szám, csak az volt a fontos, hogy hány különböző maradékot adnak n-nel osztva. Legyen most $n = p$ az adott prímszám és osszuk ki Annának a négyzetszámokat, Bélának a négyzetszámnál eggyel nagyobb számokat. Ismeretes, hogy a négyzetszámok p-vel osztva $(p+1)/2$ különböző maradékot adnak (ezek a „kvadratikus maradékok" $\pmod p$), így mind Annának, mind Bélának ennyi maradéka lesz. (Ha a négyzetszámoknak $(p+1)/2$ különböző maradéka van, akkor az ennél eggyel nagyobb számoknak is ugyanennyi van.) Ez összesen $p + 1$ szám, tehát több, mint p. Így teljesül az előző feladat feltétele, s ezért van egy négyzetszám és egy (másik) négyzetszámnál eggyel nagyobb szám, amelyek összege osztható p-vel. Ezt kellett bizonyítanunk.

2. megoldás. A megoldást elmondhatjuk egy kicsit másképp is, s akkor (látszólag) nincs szükségünk arra, hogy hány „kvadratikus maradék" van mod p.

Tekintsük a $0, 1, 2, \ldots, (p-1)/2$ számok négyzetét, ez $(p+1)/2$ szám. Másrészt tekintsük azokat a számokat, amelyeket úgy kapunk, hogy 1-ből levonjuk ezeket a számokat, tehát tekintsük az $-1-0^2, -1-1^2, -1-2^2, \ldots$ számokat. Ezek összesen $p+1$ számot jelentenek. Van tehát közöttük kettő, amelyek ugyanazt a maradékot adják p-vel osztva. Nem lehet mindkét szám például az elsőben, mert ez azt jelentené, hogy $i^2 - j^2 = (i - j)(i + j)$ osztható volna p-vel valamely $i <$ $< j$ nem-negatív számpárra, ahol mindkettő legfeljebb $(p - 1)/2$. De két ilyen számnak mind az összege, mind a különbsége kisebb p-nél, tehát $(i - j)(i + j)$ nem lehet osztható p-vel. Ugyanez az ellentmondás adódna akkor is, ha mindkét szám a második csoportban lenne. Tehát a két szám közül az egyik az első csoportban van, a másik a második csoportban van. Találtunk tehát két számot, x-et és y-t, amelyekre igaz, hogy x^2 és $-1 - y^2$ ugyanazt a maradékot adja p-vel osztva. Ekkor a különbségük, azaz $x^2 + y^2 + 1$ osztható p-vel, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

18.23. a) következik abból, hogy két négyzetszám szorzata is négyzetszám.

b) bizonyításához tegyük fel, hogy valamely x, y, z számokra igaz, hogy

$$x^2y \equiv z^2 \pmod p.$$

A teljes maradékrendszerre vonatkozó tétel szerint van olyan x', amelyre $xx' \equiv 1 \pmod p$ Ennek négyzetével megszorozva a kongruencia mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$y \equiv z^2x'^2 \pmod p,$$

tehát y kvadratikus maradék. Vagyis ha egy kvadratikus maradékot valamely y számmal szorozva kvadratikus maradékot kapunk, akkor y is kvadratikus maradék. Azaz kvadratikus maradékot kvadratikus nem-maradékkal szorozva nem kaphatunk kvadratikus maradékot.

c) bizonyításához vegyünk egy kvadratikus nem-maradékot és szorozzuk végig minden nullától különböző maradékkal mod p. Így $p-1$ különböző (és nullától is különböző) maradékot kapunk. Amikor kvadratikus maradékkal szoroztunk, akkor b) szerint kvadratikus nem-maradékot kaptunk, tehát az így kapott $(p - 1)/2$ szám az előző (18.22.) feladat megjegyzésében mondottak szerint *kimeríti* az összes kvadratikus nem-maradékot. Azokra az esetekre, amikor kvadratikus nem-maradékkal szoroztunk, épp a $(p-1)/2$ kvadratikus maradék maradt. Ezt akartuk bizonyítani: kvadratikus nem-maradékot kvadratikus nem-maradékkal szorozva kvadratikus maradékot kapunk.

18.24.

1. megoldás. A feladat állítása szerint olyan – n-nél nem nagyobb – pozitív egész b számot kell keresnünk, és hozzá egy a egészet, amelyre igaz, hogy

$$|b\alpha - a| < 1/n.$$

Ez a képlet „lefordítva” azt jelenti, hogy α valamely többszöröse (az első n többszöröse közül) a hozzá legközelebbi egésztől csak kevéssel tér el. Tekintsük tehát az

$$1\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots n\alpha$$

számok törtrészét. (Képzeljük úgy, hogy felrajzoltuk e számokat az egység kerületű körre.) Osszuk fel a [0,1] intervallumot diszkunkt $1/n$ hosszú intervallumokra. Ha valamelyik törtrész az első vagy az utolsó intervallumba esik, akkor kész vagyunk. (Ha ugyanis $k\alpha$ az első intervallumba esik, akkor az egész részétől tér el $1/n$-nél kevesebbel, ha az utolsóba, akkor a felső egész részétől.) Ha e két intervallum üres volna, akkor a maradó $n-2$ intervallumba n törtrész került, tehát valamelyikbe kettő is jutott. Ez azt jelenti, hogy van két különböző szám, k és l, amelyekre $k\alpha$ és $l\alpha$ törtrésze csak $1/n$-nél kevesebbel térnek el egymástól. Ez viszont azt jelenti, hogy a $k\alpha - l\alpha = (k-l)\alpha$ szám $1/n$-nél kevesebbel tér el az $\lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor l\alpha \rfloor$ egész számtól. Ha $k > l$, akkor már kész is vagyunk, hiszen $k-l$ biztosan nem nagyobb n-nél, tehát választható b-nek. Ha viszont $k < l$, akkor még végig kell szoroznunk eredményünket -1-gyel, azaz ekkor $l-k$ választható b-nek.

2. megoldás. A megoldás gondolatmenete emlékeztet a 16.8. feladat megoldásához. Ez nem véletlen. Ha abban a feladatban minden számot ugyanannak az α számnak választunk, akkor a 16.8. feladat állítása éppen az, hogy van néhány (b darab) α, amelyek összege a legközelebbi egésztől legfeljebb $1/n$-nel tér el. Az ottani bizonyítás pedig éppen a fenti bizonyítást adja.

18.25. A Dirichlet-féle approximációs tételt alkalmazzuk először egy tetszőlegesen kiválasztott n-re. Találunk egy olyan a/b törtet, amely $1/bn < 1/b^2$-nél kevesebbel tér el α-tól. Ezután válasszuk a tételben n-et olyan nagyra, hogy már $1/n$ is kisebb legyen a most talált $\alpha - a/b$ eltérésnél. Ekkor a tétel garantál egy új – b-nél nyilvánvalóan nagyobb nevezőjű – a'/b' törtet, amely $1/b'^2$-nél kevesebbel tér el α-tól. Az eljárást vég nélkül folytathatjuk, s ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy van olyan c pozitív valós szám, amelyre igaz, hogy például az aranymetszés aránya nem közelíthető meg a/b alakú törttel c/b^2-nél jobban. Erről részletesebben olvashatunk Szalay Mihály: *Számelmélet* c. könyvében ([14] 162. oldal).

18.26. A feladat lényegében ugyanazt állítja, mint az előző (=18.25) feladat: végtelen sok olyan k/n tört van, amelytől x kevesebb, mint $1/n^2$-tel tér el. Itt k az nx-hez legközelebbi egész.

18.27. Ha az összes a_i számnak van egynél nagyobb közös osztója, azzal az összes számokat végigoszthatjuk, az $a_i/(a_i, a_j)$ értékek nem fognak változni. Feltehetjük tehát, hogy az a_i számok összességükben relatív prímek. Van tehát közöttük olyan a_j, amely nem osztható p-vel. Ha van p-vel osztható is, akkor azt választva a_i-nek, az $a_i/(a_i, a_j)$ érték is osztható lesz p-vel, s miután pozitív, így legalább p. Ebben az esetben tehát kész vagyunk.

Marad az az eset, ha egyik a_i sem osztható p-vel. De ekkor a „számelméleti skatulyaelv” miatt van két a_i, amelyik azonos maradékot ad p-vel osztva. Legyenek ezek a_i és a_j, $a_i > a_j$. Ekkor van olyan m egész, amelyre $a_i = a_j + mp$. Tekintsük $(a_i, a_j) = d$ legnagyobb közös osztóját. Ez megegyezik $a_i - a_j$ és a_j legnagyobb közös osztójával, vagyis mp és a_j legnagyobb közös osztójával. De a_j nem osztható a p prímszámmal, így relatív prím hozzá. Tehát a legnagyobb közös osztó megegyezik $d = (m, a_j)$-vel. Vagyis $d \le m$. Így $a_i/(a_i, a_j) \ge (a_j + mp)/m > p$, és ezt akartuk bizonyítani.

18.28. Legyen a közös legkisebb közös többszörös az M szám. Tudjuk, hogy mind az 1997 szám osztója M-nek.

Tegyük fel, hogy van tíz, páronként relatív prím szám a megadottak között, legyenek ezek $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Ekkor M ezek szorzata. Legyen x egy tetszőleges további szám. Tudjuk, hogy

$a_1, a_2, \ldots, a_9, x$ legkisebb közös többszöröse is az összes a_i szorzata, s az első kilenc szorzata relatív prím a_{10}-hez, ezért x-nek oszthatónak kell lennie a_{10}-zel. Ugyanígy az összes a_i-vel is oszthatónak kell lennie. Vagyis oszthatónak kell lennie M-mel. Másrészt osztója M-nek, tehát egyenlő vele. Azt kaptuk, hogy ha van tíz, páronként relatív prím szám, akkor egyetlen további szám lehet csak, maga a szorzatuk. De nekünk 1997 számunk van.

Beláttuk tehát, hogy legfeljebb kilenc, páronként relatív prím szám lehet a megadott számok között. Most megmutatjuk, hogy ennyi lehet is. Azt mutatjuk meg, hogy megadható n darab szám úgy, hogy bármely tíz legkisebb közös többszöröse ugyanaz a szám legyen és legyen közöttük kilenc darab, páronként relatív prím szám közöttük.

Vegyünk fel n darab prímet, a szorzatuk legyen M. Ezek után a számokat a következőképpen választjuk. Vesszük az n szám közül bármely $n-1$ szorzatát. Ezek közül bármely kettő legkisebb közös többszöröse M, s így bárhogyan választunk közülük egynél többet, azok legkisebb többszöröse is M. De nincs még közöttük két relatív prím sem. Ezen úgy segítünk, hogy vesszük az első 8 prímet, ezeket külön-külön hozzávessszük a számokhoz és vesszük az összes többi $(n-8)$ szám szorzatát, azt is hozzávesszük a számokhoz. E kilenc szám páronként relatív prím. Azt kell csak belátnunk, hogy az így kapott $n+9$ szám közül bármely tíz legkisebb közös többszöröse M. Mindegyik szám osztója M-nek, tehát csak azt kell belátnunk, hogy az lk.k.t. nem lehet M-nél kisebb. Ha a kiválasztott tíz szám közül legalább kettő az elsőnek megadott n szám között van, akkor e kettő lk.k.t.-je már M, tehát kész vagyunk. Marad az az eset, ha az első n számból csak egyet választottunk. Akkor viszont ki kellett választanunk a végül megadott számok közül mind a kilencet, márpedig azok lk.k.t.-je is M. Ezzel beláttuk, hogy bármely tíz szám lk.k.t.-je M.

Megjegyzés. Általában is igaz, hogy ha megadunk $n > k+1$ különböző egész számot, amelyek közül bármely k szám lk.k.t.-je azonos, akkor legfeljebb $k-1$ páronként relatív prím szám lehet közöttük, és ez viszont a fenti konstrukció általánosításával el is érhető.

18.29. a) Az első 18 számból képzett kéttagú összegek közül a legkisebb 3, a legnagyobb 35. Ez összesen 33 szám. Viszont kilenc számból 36 kéttagú összeget képezhetünk, és ezeket kell tehát 33 sktatulyába sorolnunk. Nyilván lesz egy skatulya, amelybe legalább két kéttagú összeg jut.

b) Ha $n > 8$, akkor a) gondolatmenete alkalmazható: az összes kéttagú összeg közül a $4n - 1$ a legnagyobb, a 3 a legkisebb, ami összesen $4n-3$ különböző összeget ad. Másrészt az n kiválasztott számból képezhető összegek száma $n(n-1)/2 > 4n-3$, ha $n > 8$.

Megjegyzés. Az Arany Dániel-versenyen a feladott feladat $n = 8$-ra is megkövetelte az állítás bizonyítását. Ehhez nem elég a b)-ben és a)-ban alkalmazott becslés, mert a kéttagú összegek legkisebbje 3, legnagyobbja 31, ami összesen 29 összeg, míg nyolc szám kiválasztásánál csak 28 összeg van, tehát ennyi még nem elég az ellentmondáshoz. Viszont ha megnézzük a 3,4 és a 30,31 összegeket, ha ezek közül legalább kettő hiányzik a kiválasztott nyolc számból készitett kéttagú összegek közül, akkor már biztosan van két egyforma közöttük. Mármost például a 3,4-hez mindenképp szükség van az 1,2,3 számokra, s ha a 4-es is kiválasztottuk, akkor $2+3 = 1+4$ és kész vagyunk. Ha viszont a 4-est nem választottuk ki, akkor a hatot nem tudjuk előállítani kéttagú összegként. Ugyanezt elmondva a 30,31 számokra azt kapjuk, hogy vagy van két azonos összeg, vagy a 28-at nem tudjuk előállítani. De ha sem a hatot, sem a 28-at nem tudjuk előállítani, akkor már csak 27 összeget tudunk előállítani, tehát biztosan lesz a kéttagú összegek között két egyforma.

18.30.

1. megoldás. Számozzuk meg a 2001 szám szorzatának prímosztóit. A 2001 számot ezután jellemezhetjük egy-egy 2000 tagú 0-1 sorozattal. A sorozat i-edik helyére akkor írunk 0-t, ha az i-edik prím a megfelelő számban páros hatványon szerepel, és akkor írunk 1-et, ha e prím a számban páratlan hatványon szerepel. Ha csupa 0 sorozat szerepel az így képzett sorozatok között, akkor kész vagyunk, mert a hozzá tartozó szám négyzetszám. Ellenkező esetben van 2001 darab olyan 2000 tagú 0-1 sorozatunk, amelyek mindegyikében szerepel 1-es. Minden i-re van (legalább) egy olyan sorozat, amelyben az i-edik helyen 1-es áll.

Tekintsük két vagy több sorozat összegének (illetve különbségének) azt a szintén 2000 tagú sorozatot, amit úgy kapunk, hogy a koordinátákat mod 2 összeadjuk (illetve kivonjuk).

Vegyünk ki néhány számot. Ezek szorzata pontosan akkor lesz négyzetszám, ha a hozzájuk rendelt sorozatok összege csupa nulla lesz. Tekintsük azokat a sorozatokat, amiket úgy kapunk, hogy a 2001 közül néhányat – legalább egyet, esetleg mindet – összeadunk. Így $2^{2001}-1$ eredményt kapunk. Másrészt a lehetséges összegek száma 2^{2000}. Biztosan lesz tehát az összegül kapott sorozatok között két egyforma. Ha valamelyik számhoz rendelt sorozat mindkét összegben szerepelt, akkor az elhagyásával kapott összegek is egyenlők. Feltehetjük tehát, hogy a két összegben szereplő sorozatok között nincs azonos. E két összeget összeadva a csupa nulla sorozatot kapjuk, tehát a hozzájuk tartozó számokat összeszorozva négyzetszámot kapunk.

2. megoldás. Ismét tekintsük azt a 2001 darab 2000 hosszú 0-1 sorozatot, amelyek azt jelzik, hogy a megfelelő számban az i-edik prím páros vagy páratlan kitevőn szerepel-e (előbbi esetben az i-edik helyre 0-t írunk, utóbbi esetben 1-et). Így 2001 darab 0-1 sorozatot kapunk, s ha ezeket a mod 2 számtest fölötti 2000 hosszú sorozatnak tekintjük, akkor nem lehetnek lineárisan függetlenek mod 2. Vagyis van közöttük néhány, amely összege a csupa 0-ból álló sorozat. (Kihasználtuk, hogy mod 2 fölött az, hogy a vektorok lineárisan összefüggnek, azt jelenti, hogy a megfelelő vektorok összege a 0-vektor.)

18.31. A 16.1. feladat megoldásán alig kell valamit módosítani. Ott ugyanis lényegében azt bizonyítottuk, hogy ha egy $nk+1$ elemű részben rendezett halmazban nincs $n+1$ hosszú lánc, akkor van $k+1$, páronként összehasonlíthatatlan elem.

19. Leszámlálás

19.3. Az összes permutáció száma $n!$, az olyan permutációké, ahol az egyes a helyén áll, $(n-1)!$, az olyanoké is, ahol a kettes áll a helyén, és kétszer számoltuk azokat, ahol mindkettő a helyén áll, ilyenből $(n-2)!$ van.

19.6.

1. megoldás. Ha $a=b$, akkor végtelen sok ilyen számtani sorozat van. Feltesszük tehát, hogy $a \neq b$. Ha a a sorozat m-edik tagja, b a sorozat n-edik tagja, akkor $m \neq n$, és a sorozat differenciája $d=\frac{a-b}{m-n}$. Kezdőtagja $k_1=a-(m-1)d=a-\frac{(a-b)(m-1)}{m-n}$. Tehát minden $m \neq n$ számpárhoz pontosan egy megfelelő számtani sorozat tartozik. m és n értéke 0 és 100 között lehet, így az összes megfelelő számtani sorozat száma $100 \cdot 99 = 9900$.

2. megoldás. Okoskodhatunk a következőképpen is:

Nyilván feltehető, hogy $a<b$ és elég megszámolni azokat a sorozatokat, amelyek differenciája pozitív, hiszen a negatív differenciájuakat ezek megfordításaként kapjuk. Tehát megszámoljuk a pozitív differenciájuakat és a számukat megszorozzuk kettővel.

A sorozat *differenciáját* most már egyértelműen meghatározza az, hogy hány tagja esik a és b közé. Ha ezt rögzítettük, a *sorozatot* már egyértelműen meghatározza, hogy hány tagja kisebb a-nál. Jelölje k az a-nál kisebb, l az a és b közé eső, m a b-nél nagyobb elemek számát. Ekkor $k+l+m=98$.

A kérdésünk most úgy alakul át, hogy hány nem-negatív egészekből álló megoldása van a $k+l+m=98$ egyenletnek. Nyilván annyi, ahány pozitív megoldása van a $k'+l'+m'=101$

egyenletnek ($k' = k+1$, $l' = l+1$ és $m' = m+1$), ahol a sorrend is számít. Könnyen kiszámolható, hogy ennek $\binom{100}{2}$ megoldása van. Tehát a keresett megoldásszám 9900.

19.10. $\displaystyle\binom{(n-l)+(k+l)-1}{(k+l)-1} = \binom{n+k-1}{k+l-1}$

19.11. $\displaystyle\binom{kp+k-1}{k-1}$, ugyanis $k \cdot p$ pengő cserélt gazdát.

19.12.

1. megoldás. A kocka élei három csoportba sorolhatók aszerint, hogy milyen irányúak. Mindhárom csoportból kell szerepelnie legalább egy élnek. Tehát a lehetséges eloszlások: $\{4,2,1\}$, $\{3,3,1\}$, $\{3,2,2$
Az első esetben hat, a másik két esetben háromféleképp választhatjuk ki, hogy melyik csoporthoz melyik számot rendeljük. Az első esetben a négy él kiválasztásánál már nincs választási lehetőségünk, a második két élt csak négyféleképp választhatjuk, hogy ne zárjanak be kört. Ezek közül azonban csak abban a két esetben tudjuk az utat befejezni – mindkét esetben kétféleképp is –, ha egy lapon levő két élt választottunk. Ez tehát $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ lehetőség. A második esetben az első irány három élét négyféleképp választhatjuk, a következő irányhoz tartozó három élt viszont már nem választhatjuk szabadon, csak kétféleképpen. Ismét két szemközti oldallap lesz összefüggő, de most csak egyféleképp tudjuk úttá kiegészíteni a gráfot. Ez $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ lehetőség. A harmadik lehetőséget hasonlóan számolhatjuk ki: az első hármas élcsoportot még négyféleképpen választhatjuk, a következőt már csak kétféleképpen, és a maradó egy él mindkét esetben egyértelmű. Ez ismét 24 lehetőség.

Összesen 72-féleképp lehet a kocka éleit úgy kiválasztani, hogy Hamilton-utat alkossanak.

2. megoldás. Okoskodhatunk a következő, talán egyszerűbb módon is. A Hamilton-út első pontját 8-féleképpen választhatjuk ki és innen három irányban indulhatunk. A következő ponttól még kétféleképp haladhatunk tovább. Ez eddig 48 lehetőség.

Ha a harmadik csúcsból ugyanazon a lapon fordulunk vissza, akkor a negyedik él már egyértelmű és átjutunk a szemközti lapra, amit kétféleképp járhatunk be.

Ha a harmadik csúcsból a harmadik irányú élen haladunk tovább, akkor a negyedik élnek nem választhatjuk az elsővel párhuzamosat, csakis a másodikkal párhuzamosat, s innen már végig egyértelmű a befejezés.

Összesen 144 Hamilton-utat találtunk.

Megjegyzés. A két megoldás két különböző eredményt adott – vajon hogyan lehetséges ez?

19.3. Az összeg azt számolja meg, hogy hányféleképp tudunk kiválasztani k darab golyót n darab fehér és n darab fekete golyóból. Nyilván $\binom{2n}{k}$ féleképp. Tehát ennyi az összeg zárt alakja.

19.4. Ha az összeg minden tagjában a második tényezőben n helyett m-et írunk, akkor az összeg ugyanolyan meggondolás alapján $\binom{n+m}{k}$ lesz. Tehát

$$\sum \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

19.8. Vegyünk hozzá egy további Q pontot az n ponthoz és válasszunk ki négy pontot ebből az $n+1$ pontból tetszőlegesen. Ha egy (Q, A, B, C) típusú négyest választottunk, ennek feleltessük meg a következő három szakaszpárt: (AB, AC), (AC, BC) és (AB, BC). Ha egy (A, B, C, D) típusú négyest választottunk, ennek feleltessük meg a következő három szakaszpárt: (AB, CD),

(AC, BD) és (AD, BC). Így minden négyeshez három-három szakaszpárt rendeltünk, egy szakaszpárt sem rendeltünk két négyeshez és minden szakaszpárt hozzárendeltünk valamelyik négyeshez.

19.1. Minden pár legfeljebb egy kiválasztott hármasban szerepelhet, egy kiválasztott hármasban három elempár szerepel, és összesen 36 elempár van. Tehát legfeljebb 12 hármas választható ki.

Megmutatjuk, hogy ennyi ki is választható.

Veszünk egy $3x3$-as mátrixot, ennek elemei lesznek a kilencelemű halmaz elemei. A hármasokat a következőképp választjuk ki: vesszük a mátrix sorait és oszlopait, valamint azokat a hármasokat, amelyeknek szorzata a mátrix determinánsának egy-egy kifejtési tagja. Ez pontosan 12 megfelelő hármas.

19.2. Minden pár legfeljebb egy kiválasztott hármasban szerepelhet, egy kiválasztott hármasban három elempár szerepel, tehát l-lel jelölve a kiválasztott részhalmazok számát $3l \leq \binom{n}{2}$. Tehát legfeljebb $n(n-1)/6$ részhalmazt választhatunk ki.

19.5. A feltétel szerint a húszelemű halmaz bármely két eleme legfeljebb egy kiválasztott részhalmazban szerepelhet egyszerre. Egy kiválasztott részhalmaz (legalább) 10 ilyen elempárt „fed le”, tehát ha k részhalmazt választottunk ki, ezek együtt (legalább) $10k$ párt fednek le. A húszelemű halmaz elemeiből 190 pár képezhető, tehát k legfeljebb 19 lehet. (Az is csak akkor, ha minden halmaz pontosan ötelemű.) Ezzel a)-t is, b)-t is bebizonyítottuk.

c) Ha a 19 ötelemű halmaz közül semelyik kettőnek nincs egynél több közös pontja, akkor minden elempár legfeljebb egyszer szerepel. Ez viszont azt jelenti, hogy a húszelemű halmaz mind a 190 elempárja szerepel, mert egy ötelemű halmaz tíz elempárt „fed le”. Vegyünk ki egy tetszőleges x elemet. Nézzük, ez hány halmazban szerepel. Nem szerepelhet öt halmazban, mert akkor húsz elempárban szerepelne, márpedig csak 19 elempárban szerepel. Tehát legfeljebb négy halmazban szerepel. Ez bármely elemről elmondható, tehát bármely elem legfeljebb négy halmazban szerepel. Vagyis a kiválasztott ötelemű halmazok elemszámának összege legfeljebb 80 (minden elemet négyszer számolhatunk). Ez azt jelenti, hogy legfeljebb 16 ötelemű halmaz választható ki a megadott tulajdonsággal.

d) A bizonyítás ugyanúgy megy, mind a) esetében: Ha k darab részhalmazt választotttunk ki, ezek együtt $10k$ elempárt „fednek le”. Összesen a 16 elemű halmaz elemeiből 120 elempár készíthető, ezért $k \leq 12$.

19.6. Minden ötelemű részhalmaz tíz háromelemű részhalmazt fed le. Ha k darab ötelemű részhalmaz fedi le egyrétűen a háromelemű részhalmazokat, akkor $10k = \binom{n}{3}$. Tehát $n(n-1)(n-2)$ osztható 60-nal. Ez $n < 17$ esetén csak $n = 6, 10, 12, 16$-re teljesül.

Másrészt vegyünk egy tetszőleges x elemet. Ez $\binom{n-1}{2}$ darab háromelemű halmazban van benne. Egy-egy ötelemű részhalmaz ezek közül vagy hatot, vagy egyet sem fed le. Tehát $(n-1)(n-2)$ osztható 12-vel. Ez $n = 6, 10, 12, 16$ esetén nem teljesül. Vagyis a feladat állításánál kicsit több igaz: n legalább 17.

19.7. a) Egy l elemű részhalmaz $l(l-1)/2$ elempárt fed le. A feltétel szerint egyetlen elempár sem szerepel többször, tehát ha k részhalmazt választottunk ki, akkor

$$kl(l-1)/2 \leq n(n-1)/2$$

, azaz a kiválasztott halmazok száma legfeljebb $n(n-1)/k(k-1)$.

b) Minden x elem pontosan $n-1$ elempárban van benne, ezek közül egy-egy x-et tartalmazó halmaz $l-1$-et fed le (az x-et nem tartalmazó halmazok pedig egyet sem). Ha minden elempár pontosan egyszer van lefedve, akkor tehát x pontosan $(n-1)/(l-1)$ kiválasztott halmazban szerepel, így ez a szám egész szám. Másrészt a részhalmazok száma is pontosan $n(n-1)/l(l-1)$, tehát ez is egész szám.

19.2. A legnagyobb kéttagú összeg legfeljebb $2n-1$, legalább 3, tehát legfeljebb $2n-3$ különböző értéke lehet a kéttagú összegeknek. De minden kéttagú összeg értéke különböző (minden tag kétszeresét is kéttagú összegnek tekintjük), ezért $k(k+1)/2 < 2n-3$. Innen $k^2 < 4n$.

19.3. Ha a 19.2. feladat megoldásában nem az összegeket, hanem a különbségeket tekintjük, ezeknek is mind különbözőeknek kell lenniük. Hiszen ha $a-b=c-d$, akkor $a+d=c+b$. A különbségek viszont csak 1 és $n-1$ közötti számok lehetnek, innen $k(k-1)/2 \le n-1$. Innen $(k-1/2)^2 < 2n-1$.

19.1. Rögzítsük az egyik kört és forgassuk rajta a másik kört. 16 helyzete lesz, ebből 8 helyzetben lesz egy adott körcikk fölött vele azonos színű. Ez azt jelenti, hogy összesen $8 \cdot 16 = 128$ fedés lesz a forgatások során. Összesen 16 helyzet van, tehát *átlagosan* 8 fedés lesz. Ez csakis úgy lehet, ha legalább egyszer legalább 8 fedés lesz.

19.2. Tekintsük a társaság tagjaiból összeállítható összes „hármast". Ezek száma $\binom{3n+1}{3}$. Most számoljuk meg, hány „rossz" hármas lehet ezek között. „Rossz" hármasnak azt tekintjük, amelynek tagjai a három játék közül legfeljebb kettőt játszanak egymás között. Minden ilyen hármasban van legalább egy valaki, aki a két másikkal ugyanazt a játékot játssza, sőt, lehet, hogy mind a három játékos ilyen. Mindenesetre minden ilyen „rossz" hármashoz hozzárendelhetünk valakit, aki e hármas másik két tagjával ugyanazt játssza. Számoljuk meg, egy embert hány ilyen „rossz" hármashoz rendelhetünk hozzá. Nyilván $3\binom{n}{2}$-höz, hiszen csak olyan hármasokhoz rendelhettük hozzá, amelyeknek tagjaival ugyanazt játssza. Ármost ő például n emberrel sakkozik, tehát a sakk miatt csak olyan hármasokhoz rendelhettük, amelyeknek másik két tagja ebből az n emberből való. Ilyenből $\binom{n}{2}$ van. Ugyanez igaz a teniszre és a pingpongra is.

Egy embert tehát legfeljebb $3\binom{n}{2}$ „rossz" hármashoz rendelhettük hozzá. Összesen $3n+1$ ember van, tehát összesen legfeljebb $(3n+1)3\binom{n}{2}$ „rossz" hármas lehet. A „jó" hármasok száma tehát legalább

$$\binom{3n+1}{3} - (3n+1)3\binom{n}{2} = (3n+1)n(3n-1-3(n-1))/2 = (3n+1)n.$$

Ezzel beláttuk, hogy nemcsak hogy van egy olyan hármas, amely megfelel a feladat feltételének, hanem legalább $(3n+1)n$ van.

Megjegyzés. A talált jó hármasok száma bizonyos szempontból „nagy", bizonyos szempontból viszont „kicsi". Nagy annyiban, hogy n-nel együtt végtelenhez tart. Viszont az összes hármasok számához képest kicsi, vagyis az összes hármasnak csak $2/(3n-1)$-ed része, s ez nullához tart, ha n a végtelenhez tart. Vagyis az összes hármasoknak csak elenyésző részéről sikerült belátnunk, hogy jó. A kérdés az, hogy vajon igaz-e, hogy az összes hármas pozitív százaléka jó abban az értelemben, hogy van-e olyan c konstans, amelyre igaz, hogy az összes hármasoknak legalább a c-szerese jó, n-től függetlenül. Erről szól a GR.II.3.4. feladat.

19.3.

1. megoldás. Megmutatjuk, hogy 17 tagú sorozatra a kívánt feltételek nem teljesülhetnek. Tegyük fel ugyanis, hogy volna egy $a_1, a_2 \cdots, a_{17}$ sorozatunk, amelynek bármely hét egymás utáni tagját összeadva pozitív számot kapunk, bármely 11 egymás utáni tagját összeadva negatív számot kapunk. Írjuk fel a következő táblázatot:

$a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{10}, \quad a_{11}$

$a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_{11}, \quad a_{12}$

$\cdots$

$a_7 \quad a_8 \quad \cdots \quad a_{16}, \quad a_{17}$

Ebben a táblázatban minden sor összege negatív, amiből az következik, hogy a táblázat összes elemét összeadva negatív számot kapunk. Másrészt minden oszlop összege pozitív, amiből az következik, hogy a táblázat összes elemét összeadva pozitív számot kapunk. Ez az ellentmondás mutatja, hogy feltevésünk hibás, nem létezik 17 tagú sorozat a megfelelő tulajdonsággal.

Ez a bizonyítás igen elegáns, ám nehéz kiolvasni belőle, hogy hogyan csináljunk 16 tagú, a feltételeknek eleget tevő sorozatot. Ezért 19.3M2.-ben mutatunk egy göröngyösebb, ám az ellenpéldára jobban rávezető megoldást.

2. megoldás. Először belátjuk, hogy egy megfelelő sorozatban az első négy tag összege negatív, a következő háromé pozitív, az utána következő négyé ismét negatív. Ez utóbbi például abból következik, hogy az első hét tag összege pozitív, míg az első 11 tagé negatív, tehát olyan négy számot kellett az első héthez adnunk, amelyek összege negatív. Hasonlóan kapjuk a másik három állítást.

Az így kapott $4-3-4$ hosszú blokkot mindaddig eltolhatjuk, amíg „ki nem csúszunk a másik oldalon”, vagyis ha a sorozatnak 17 tagja volna, akkor eltolhatjuk eggyel, kettővel, $\cdots$, hattal. Ez többek közt azt jelenti, hogy a hetediktől a tizedikig összeadva a számokat negatív összeget kapunk. Másrészt a nyolcadiktól a tizedikig összeadva a számokat pozitív összeget kapunk, tehát a hetedik szám biztosan negatív. Ugyanígy megkapjuk azt is, hogy az ötödik és a hatodik szám is negatív, ami ellentmondás, hiszen az ötödik, hatodik és hetedik szám összegének pozitívnak kellene lennie.

Ha a gondolatmenetünket alaposan kielemezzük, megállapíthatjuk, hogy a 16 tagú sorozatból melyik számnak milyen előjelűnek kell lennie. Ezután már két egyenlőtlenséget kell csak felírni, hogy megkapjuk a megfelelő számokat:

$\langle -12, -12, 31, -12, -12, -12, 31, -12, -12, 31, -12, -12, -12, 31, -12, -12 \rangle$.

20. Vegyes feladatok

20.1. Nem. Két x_i pont távolsága továbbra is 2, két y_i közös szomszédja z, x_i és y_j közös szomszédja $i \neq j$ esetén x_i és x_j közös szomszédja, $i = j$ esetén pedig x_i bármely szomszédja.

20.2. Legyen A, B és C a három fívér, feleségeik legyenek rendre A', B' és C'. Az általánosítás megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a három hölgy ebben a sorrendben érkezett a betegágyhoz. B és C' találkoztak, tehát B nem távozhatott C' érkezése előtt. Így C' érkezése előtt érkezett is. Viszont Ha B nem találkozott a feleségével, B'-vel, akkor az ő távozása előtt nem érkezhetett. Tehát B' még C' érkezte előtt távozott. Másrészt C találkozott A'-vel is, tehát A'-nek még ott kellett lennie az ő érkeztekor, így A' egész látogatási ideje magában foglalja B' látogatási idejét. Mivel A találkozott B'-vel, így A-val is találkoznia kellett.

20.3. A társaságban összesen $1999k$ darab „szimpatizálást” számolhatunk össze. Másrészt nevezzük a-t és b-t jó párnak, ha vagy kölcsönösen szimpatizálnak egymással, vagy egyikük sem szimpatizál a másikkal. Ha nincs ilyen pár, az pontosan azt jelenti, hogy bárhogyan is választunk két embert, ezek közül pontosan az egyik szimpatizál a másikkal. Vagyis csak akkor nem lehetünk biztosak, hogy van egy jó pár, ha a társaságból képezhető párok száma pontosan $1999k$. De a párok száma $1999 \cdot 999$, tehát csak $k = 999$ esetén képzelhető el, hogy nincs jó pár.

Mutatnunk kell még példát arra, hogy van olyan 1999 tagú társaság, ahol mindenki pontosan 999 másikkal szimpatizál, de nincs jó pár. Ültessük az 1999 tagú társaságot egy kerek asztal köré, és jelöljünk ki egy körüljárási irányt. Világos, hogy itt minden a és b ember közül az adott irányban pontosan az egyik ül a másikhoz közelebb, hiszen nincs szemközt ülő. Tegyük fel, hogy mindenki a hozzá közelebb ülőkkel szimpatizál, azaz a tőle e körüljárási irány szerinti első, második, $\cdots$, 999-ik emberrel szimpatizál. Ebben az esetben a pontosan akkor fog szimpatizálni b-vel, ha b nem szimpatizál a-val. Vagyis ebben a társaságban tényleg nincs jó pár.

20.4. A feladat lényegében az egydimenziós Helly-tétel a 11.4. feladatbeli általánosításának az alkalmazása. Ha bármely hat intervallum között van kettő, amelyik metszi egymást, akkor van öt pont, amely az összeset lefogja. Ha e közül az öt pont közül mindegyik csak öt intervallumot fogna le, akkor nem foghatná le az összeset. Tehát az egyik legalább hat intervallumot fog le.

20.5. Vegyük sorra a pozitív egészeket. Az 1-es előállítására vegyük az $\{1{,}2\}$ számpárt. A 2-es előállításához vegyük az $\{3, 5\}$ számpárt. A hármas előállításához vegyük a $\{4, 7\}$ számpárt. Az eljárás tehát az, hogy ha az i-t akarjuk előállítani, vesszük a legkisebb, még fel nem használt számot és a nála i-vel nagyobbat, e kettő lesz az i-t előállító számpár. Azt kell csak meggondolnunk, hogy így nem lesz „ütközés”, vagyis ugyanazt a számot nem kényszerülünk két számpárba is beválasztani. Ehhez annyit kell meggondolnunk, hogy ha az i szám előállításához használt első szám k, akkor minden i-nél kisebb számhoz egy k-nál kisebb számot választottunk első számnak és ahhoz egy i-nél kisebb számot adtunk, tehát nem kaphattunk $k + i$-t. Az eljárásunk tehát minden i-hez kiválaszt egy megfelelő számpárt. Másrészt nyilvánvaló, hogy minden pozitív szám szerepelni fog valamelyik kiválasztott számpárunkban.

Ha az összes egész számot akarjuk felbontani, az eljárásunk csak annyiban fog különbözni, hogy felváltva választjuk az i előállításához szükséges kisebbik számot pozitívnak és negatívnak, tehát a páratlanokat pozitív számok különbségeként állítjuk elő, a párosakat negatív számok különbségeként állítjuk elő. Utóbbi esetben a második számot nem i hozzáadásával, hanem i levonásával kapjuk.

20.6. Vegyük azt a pillanatot, amikor először fordul elő, hogy egy bábu – nevezzük B-nek – visszaért a helyére és nézzük, mi volt a helyzet az ezt megelőző pillanatban. Eddigre B már minden mezőn megfordult, tehát minden bábunak ki kellett már mozdulnia a helyéről. Másrészt még egyetlen bábu sincs a helyén, hiszen a következő lesz az első olyan pillanat, amikor egy bábu visszaért a helyére.

20.7. Van: 6210001000.

20.8. Ha n legalább hét, akkor megfelel az a szám, amelynek első jegye $n - 4$, második jegye 2, harmadik 1, utána $n - 7$ darab 0 következik, majd egy egyes és az utolsó három jegye ismét nulla.

20.9. Kezdetben írjunk minden élre -1-et. Így azokkal a csúcsokkal már rendben is vagyunk, amelyekből páratlan sok él indul ki. Tegyük fel, hogy egy x csúcsból páros sok él indul ki. Ekkor van még egy y csúcs, amelyből szintén páros sok él indul, hiszen hurokél nélküli gráfban a páratlan fokú pontok száma páros. A poliéder konvex, tehát ha mint gráfot tekintjük, akkor összefüggő. Így van x és y-t összekötő út. Válasszunk ki egy ilyen utat és ennek élein változtassuk meg az élekre írt számok előjelét. Ezzel x-nél és y-nál páratlanra változik a -1-esek száma, a többi pontnál változatlanul marad. Az eljárást mindaddig folytathatjuk, amíg találunk két olyan pontot, amelyből páros sok -1-es él indul. Ha már egyet sem találunk, akkor nyilván kész vagyunk. Azt kell még belátnunk, hogy nem lehetséges, hogy egyetlen olyan pont marad, amelyből páros sok -1-es él indul. Ez nyilvánvaló: ha csak egy csúcsból indulna páros sok -1-es, akkor a többi 99-ből páratlan sok -1-es indulna, tehát a -1-es élek olyan gráfot alkotnának, amelyben páratlan sok páratlan fokú pont volna. Ilyen gráf nincs, tehát a bizonyítást befejeztük.
Megjegyzés. Bizonyításunk rögtön egy aránylag jól kezelhető algoritmust is adott *minden* páros pontszámú összefüggő, egyszerű gráf megfelelő színezésére. Természetesen az is elég, hogy minden összefüggő komponens pontszáma páros legyen. És azt is elég kikötni, hogy a gráfban ne legyen hurokél.

20.12. Vegyünk egy A tanulót, az ő két nagyapja legyen N_1 és N_2. Bármelyik másik tanulónak az egyik nagyapja e két nagyapó közül kerül ki. Legyen B egyik nagyapja N_1 és C egyik nagyapja N_2. (Ha nincs ilyen B és C, akkor máris kész vagyunk, hiszen A valamelyik nagyapja minden tanuló közös nagyapja.) B-nek és C-nek van közös nagyapja, legyen ez N_3. Írjuk le a létrejött helyzetet.

– A két nagyapja N_1 és N_2,
– B két nagyapja N_1 és N_3,
– C két nagyapja N_2 és N_3.

Minden további D tanulónak e három nagyapó közül kerül ki a két nagyapja, különben A, B és C valamelyikével nem lehetne közös nagyapja.

Ez viszont azt jelenti, hogy a három nagyapó valamelyikének legalább 14 unokája jár az osztályba. Ha ugyanis mindegyiknek kevesebb unokája járna az osztályba, akkor az osztályba járó tanulóknak összesen csak 39 nagyapja lehetne, márpedig 20 gyereknek pontosan 40 van.

Kivéve azt a – még a feladatban leírt esetek közül is – ritkán előforduló esetet, ha valakinek csak egy nagyapja van (vagyis szülei testvérek). Ekkor ez a nagyapa az összes tanuló közös nagyapja. Ezzel a bizonyítást minden esetben befejeztük.

Megjegyzés. A 20.12M. megoldás elmondható a következőképpen is. A nagyapók legyenek a páros gráf egyik osztályában, a tanulók a másik osztályban és két pont között akkor fut él, ha a megfelelő tanulónak a megfelelő nagyapó tényleg a nagyapja. A tanulóknak megfelelő pontok foka kettő, és tudjuk, hogy bármely két pontnak van közös szomszédja. Azt bizonyítottuk be, hogy ilyen feltételek mellett e pontok között vagy van egy, amely minden másik osztálybeli ponttal össze van kötve, vagy a másik osztályban legfeljebb három pont lehet. Ilyen megfogalmazásban a feladat nagyon hasonlít a 9.6. feladat állítására. Érdemes elgondolkodni, hogy mi közük van egymáshoz. Erről szól a 20.13. feladat.

20.13. Tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjai a nagyapók és két nagyapót kössünk össze annyi éllel, ahány tanulónak közös nagyapja. Ebben a gráfban nincsen hurokél, mert minden tanulónak két nagyapja van, és ugyanezért minden tanulót pontosan egy él képvisel.

Azt állítjuk, hogy ebben a gráfban nem lehet két független él. Ha ugyanis az N_1 és N_2 nagyapók között futna egy él, és az N_3 és N_4 nagyapók között is futna egy él, e két él által jelölt két tanulónak nem volna közös nagyapja.

20.15. A válasz: nem, feltéve, hogy elég sok idejük van a játékra. Xénia a következőképp nyerhet. Első „lépcsőként" az első 2^{999} lépésben letesz egymástól jó távol levő sorokba egy-egy X-et, összesen 2^{1000} darabot. Ezeknek legalább a fele teljesen szabad marad, tehát Olivér semmilyen irányban nem tudja őket elrontani. A következő 2^{998} lépésben mindegyik szabadon maradó mellé – ha tud – letesz egy-egy újabb X-et. Ha nem tud, akkor akár ki is hagyhatja a megfelelő lépést. Olivér most is legfeljebb a felét tudja elrontani az X-pároknak. Ezt az eljárást folytatva végül Xéniának marad egy ezer X-ből álló megfelelő sorozata.

20.16. Most igen a válasz. Olivérnek „csak" annyit kell elérnie, hogy minden oszlopban és minden sorban végtelen sok O-t rakjon. Ehhez először megszámozza a sorokat $(s_1, s_2, s_3 \cdots)$ és oszlopokat $(o_1, o_2, o_3 \cdots)$, majd a következő sorozatba rendezi a megszámozott sorokat és oszlopokat:

$s_1o_1 \quad s_1o_1s_2o_2 \quad s_1o_1s_2o_2s_3o_3 \quad s_1o_1s_2o_2s_3o_3s_4o_4 \cdots$

és mindig a sorozatában sorra jövő sorba vagy oszlopba egy üres helyre letesz egy-egy O-t. Így minden sorban és oszlopban végtelen sok O lesz. Egyetlen dologra kell még vigyáznia: hogy minden sorban és oszlopban felváltva rakjon jobbra és balra, illetve felfelé és lefelé.

20.17. A 20.18. feladat megoldásában (20.18M.) megmutatjuk, hogy kiválasztható végtelen sok általános helyzetű pont a síkon úgy, hogy bármely kettő távolsága racionális legyen.

Válasszunk ki e végtelen sok pont közül véges sokat, vegyük a köztük fellépő távolságokat. Ez véges sok racionális szám, tehát van olyan N egész szám, amellyel megszorozva őket mindegyikből egész számot kapunk. Ha tehát e véges sok kiválasztott pontot például a kör középpontjából N-szeresére nyújtjuk, olyan pontokat kapunk, amelyek közül bármely kettő távolsága egész szám. Mivel eredetileg végtelen sok pontunk volt, tetszőlegesen sokat kiválaszthattunk közülük.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

20.18. Többet mutatunk meg: megmutatjuk, hogy megadható végtelen sok általános helyzetű pont úgy, hogy bármely kettő távolsága racionális legyen. Egységkör helyett kényelmesebb lesz egység átmérőjű körrel dolgozni, ez nyilván nem változtat a feladat lényegén.

Az első ötlet az, hogy ha például az egység átmérőjű körön egy P és egy Q pont úgy helyezkedik el, hogy racionális távolságra van egy AB átmérő mindkét végpontjától, akkor a PQ távolság is racionális. Ez következik Ptolemaiosz tételéből, tehát abból, hogy az $ABPQ$ húrnégyszögben

$$AB \cdot PQ + BP \cdot AQ = AP \cdot BQ.$$

Itt a PQ szakasz kivételével minden szakaszról tudjuk, hogy hossza racionális, ezért PQ is racionális.

Itt $APB\angle$ és $AQB\angle$ derékszög, nincs tehát más dolgunk, mint találni végtelen sok olyan egység átfogójú derékszögű háromszöget, amelynek befogói is racionálisak. Hogy végtelen sok ilyen derékszögű háromszög van, az pedig következik abból, hogy végtelen sok primitív pitagoraszi számhármas van. Ha ugyanis a, b, c egy primitív pitagoraszi számhármas, ahol c az átfogó, akkor az $a/c, b/c, 1$ egy megfelelő (egységnyi átfogójú, racionális befogójú) háromszög. Az, hogy a, b, c primitív számhármas, pontosan azt jelenti, hogy a/c és b/c nem egyszerűsíthető, tehát két primitív pitagoraszi számhármas nem adhatja ugyanazt az egységnyi átfogójú derékszögű háromszöget.

Ezzel beláttuk, hogy megadható végtelen sok pont az egység átmérőjű körön úgy, hogy bármely két pont távolsága racionális legyen. S akkor nyilván a felére zsugorítva a kört ismét racionális távolságokat kapunk.

Megjegyzés. [6] 285sk. oldalán más szép megoldást is olvashatunk a feladat állítására.

20.19. *

A feladat a következőképpen bizonyítható. Legyen megadva valahány pont úgy, hogy bármely kettő távolsága egész és semelyik kettő nincs egy egyenesen. Válasszunk ki hármat közülük, legyenek ezek A, B, C. Az AB távolság egész, legyen $AB = k$. A háromszögegyenlőtlenség szerint bármely további P adott pontra igaz, hogy $|AP - PB| < k$. Másrészt AP, PB egész, tehát $|AP - PB|$ értéke csak $0, 1, 2, \ldots, k-1$ lehet. Ez azt jelenti, hogy bármely további adott pont vagy AB felezőmerőlegesén van, vagy $k-1$ darab A, B fókuszú hiperbolán.

Ugyanez természetesen elmondható B helyett C-vel is: bármely további adott pont vagy AC felezőmerőlegesén van, vagy $k-1$ darab A, C fókuszú hiperbolán.

Tehát minden további adott pont vagy két egyenes metszéspontja, vagy egy egyenes és egy hiperbola metszéspontja, vagy két hiperbola metszéspontja. Elsőből csak egy van, egy egyenesnek és egy hiperbolának maximum két metszéspontja lehet, két (közös fókuszú) hiperbolának pedig legfeljebb négy közös pontja lehet. Mivel csak véges sok hiperbolánk van, a metszéspontok száma is véges.

Ezzel a feladat állítását is bebizonyítottuk.

20.20. Először kiszínezzük az egész rácspontokat a kívánt módon. Tekintsük az $y = x$ és az $y = -x$ egyenest. E két egyenes a síkot két derékszögű szögtartományra bontja, az egyik tartalmazza az x-tengelyt, a másik tartalmazza az y-tengelyt. Ha az x-tengelyt tartalmazó tartomány rácspontjait pirossal színezzük, az y-tengelyt tartalmazó tartomány rácspontjait pedig kékkel, akkor a függőleges egyeneseken csak véges sok piros, a vízszintes egyeneseken csak véges sok kék pont lesz.

Az eredeti feladat megoldásához rendezzük sorozatba a racionális számokat, e sorozatban az i-edik racionális számot jelöljük r_i-vel. Rendeljük hozzá az (n, m) rácsponthoz az (r_n, r_m) racionális rácspontot. Ez egy-egyértelmű megfeleltetés a sík (egész) rácspontjai és racionális rácspontjai között. A függőleges egyenes e megfeleltetésnél függőleges egyenesbe, vízszintes egyenes vízszintes egyenesbe megy. (Függőleges egyenesen az első koordináta állandó, vízszintesen a második.) Így továbbra is igaz lesz, hogy függőleges egyenesen csak véges sok piros pont van, vízszintes egyenesen csak véges sok kék pont van. (Persze az egyszínű pontok már korántsem fognak egy „szép” tartományt kirajzolni.)

20.21. Három gömb nyilván nem elég: vegyük a három gömb középpontja által meghatározott síkot és rajta egy pontot, amelyet a három gömb nem fed le. Az ebben a pontban a síkra állított merőleges egyenest nem tudják eltakarni.

Négy gömb viszont elég. Először vegyünk fel egy tetraédert, amely belsejében tartalmazza a fényforrást. Minden lapját fedjük le egy-egy gömbbel, vagyis vegyünk négy olyan gömböt, amelyek mindegyike tartalmazza egy-egy lap köré írt körét, de nem tartalmazza a fényforrást. Ilyen gömb nyilván van és ez a négy gömb nyilván eltakarja a fényforrást. Egy baj van: hogy egymásba nyúlnak. De ha a fényforrásból bármelyiket kivetítjük, azzal a takarás ténye nem változik, ha jó messziről nézzük. Tehát nagyítsunk ki sorban három gömböt úgy, hogy se egymást, se a negyediket ne messék és kész vagyunk.

20.23. A feladatnak többféle megoldása is van, mi most a legkevesebb ismeretet követelőt ismertetjük.

Az összeg „gyanúsan” emlékeztet egy logikai szitaformulára. Azt kell kitalálnunk, vajon mit jelentenek az egyes tagok. Észrevesszük, hogy i^k éppen az olyan számok száma, amelyek felírásához adott i-féle különböző számjegyet használunk (nem feltétlenül mind az i-t). A binomiális együttható pedig azt jelöli, hogy hányféleképp választhatunk ki i jelet n jel közül. Ezzel máris megvan a megoldás kulcsa: a jobb oldalon azt számoljuk ki, hogy hány k-jegyű szám van az n-es számrendszerben, amelyik mind az n számjegyet használja. Ha $k < n$, akkor ilyen szám nincs, tehát az összeg valóban nulla. Ha $k = n$, akkor az összeg $n!$.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Hajnal András: *Gráfelmélet - a speciális matematikatagozatok számára írt tankönyv III. kötetének egy fejezete.* 2. kiad. Budapest, 1973, Tankönyvkiadó.

[2] Jaglom Boltyanszkij: *Konvex alakzatok.* Budapest, é.n., Bolyai János Matematikai Társulat. fordította Deák Péter, lekt. Márki László, szerk. Szikszai József.

[3] Molnár Emil (szerk.): *Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye (1947-1970).* Budapest, 1974, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 0091 7.

[4] Gyarmati Edit Freud Róbert: *Számelmélet.* Budapest, 2006, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[5] Friedl Katalin Recski András Simonyi Gábor: *Gráfelméleti feladatok.* 1. kiad. Budapest, 2006, Typotex. ISBN 963 9664 01 4.

[6] Reiman István: *Nemzetközi Matematikia Diákolimpiák 1959-1994.* 1. kiad. Budapest, 1998, Typotex. ISBN 963 7546 76 6.

[7] D. O. Sklarszkij N. N. Csencov I. M. Jaglom: *Geometria I. (Planimetria).* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből sorozat, 2/1. köt. Budapest, 1972, Tankönyvkiadó. Újabban a Typotex kiadó is megjelentette.

[8] Fried Ervin Lánczi Ivánné Surányi János: *„Ki miben tudós?”.* Budapest, 1968, Tankönyvkiadó.

[9] Hajós György-Neukomm Gyula-Surányi János: *Matematikia versenytételek, I. rész.* 1987-es, Surányi János által átdolgozott. kiad. Budapest, 1986, Tankönyvkiadó. ISBN 963 18 0426 7 összkiadás.

[10] Hajós György-Neukomm Gyula-Surányi János: *Matematikia versenytételek, II. rész.* 1986-os, Surányi János által átdolgozott. kiad. Budapest, 1986, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 4736 0.

[11] Surányi János: *Matematikai versenytételek III. rész.* 1. kiad. Budapest, 1992, Tankönyvkiadó. ISBN 963 18 4406 4.

[12] Középiskolai matematikai és fizikai lapok. A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata. URL `http://www.komal.hu`.

[13] Surányi László: *Játékok, algoritmusok.* 1996. gépelt jegyzet.

[14] Dr. Szalay Mihály: *Számelmélet.* A speciális matematika osztályok számára sorozat. Budapest, 1991, Tankönyvkiadó. Újabb kiadás a Typotex Kiadónál.

[15] E. Barbeau M. Klamkin W. Moser: *1001 Problems in High School Mathematics.* Preliminary version. kiad. nincs jelölve, Canadian Mathematical Society.

[16] Andreas Speiser: *Die geistige Arbeit.* 1. kiad. Basel, 1955, Birkhäuser AG.

[17] Surányi László: Gráfelmélet.
URL `http://home.fazekas.hu/~lsuranyi/Grafok/bevezeto.htm`.

[18] N. B. Vasziljeva (szerk.): *Kvant feladatgyűjtemény.* I. köt. 1997, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 002 3. A Kvant feladatai 1970-től 1980-ig.

[19] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár.* Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 31 4.

[20] Erdős Pál és Surányi János: *Válogatott fejezetek a számelméletből.* 2. átdolgozott. kiad. Szeged, 2004, Polygon. ISSN 1218–4071.

[21] Sárközy András és Surányi János: *Számelmélet feladatgyűjtemény.* Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar sorozat. 6. kiad. Budapest, 1978, Tankönyvkiadó. Kézirat.