Kombinatorika

11–12. évfolyam

Szerkesztette:
Hraskó András, Surányi László

2018. október 21.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2018

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET
Statisztika

1.1. **a)** Menjünk az ablakhoz és becsüljük meg valamely kiemelkedő tárgy (pl. templom) magasságát!

b) Képzeljük el, hogy az osztály minden tanulójának van egy tippe. A vizsgált tárgy viszont már nem elérhető, nem mérhető. Hogyan állapodhat meg az osztály egyetlen magasságértékben?

1.2. Adott a $H = \{x_1; x_2; \ldots, x_n\}$ adatsokaság. (Nem halmaz, mert ugyanaz az elem többször is előfordulhat benne.)

Az x szám *átlagos abszolút eltérése* a H számsokaságtól a

$$\frac{|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|}{n} \tag{1}$$

kifejezés értéke, míg x-nek a H-tól való *átlagos négyzetes eltérés*ét az alábbi képlet adja meg:

$$\frac{(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2}{n}. \tag{2}$$

Adott a $H = \{1; 3; 8\}$ számsokaság. Határozzuk meg azt az $x = 2$ számnak a H-tól való
a) átlagos négyzetes eltérését!
b) átlagos abszolút eltérését!
Határozzuk meg azt az x számot, amelynek a H számsokaságtól való
c) átlagos négyzetes eltérése;
d) átlagos abszolút eltérése
minimális!

1.3. (M) Adott az

$$\{1; 3; 8; 12\}, \qquad \{x_1; x_2; x_3; \ldots x_n\}$$

számsokaság.

Határozzuk meg azt az x számot, amelynek a számsokaságtól való
a) átlagos négyzetes eltérése;
b) átlagos abszolút eltérése
minimális!

1.4. *Sára Tamás feladata*

Adott egy H számsokaság. Azt mondjuk, hogy az a sárajobb b-nél (jelben: $a \triangleleft_s b$, ha a számsokaságban a és b átlagától a-felé több elem van, mint b-felé. Azt mondjuk, hogy az a szám a $\{x_1; x_2; x_3; \ldots x_n\}$ számsokaságra vonatkozóan sáralegjobb, ha nem létezik olyan $b \neq a$ szám, amelyre $b \triangleleft_s a$.

Adjuk meg a
a) $H_1 = \{3; 7; 8\}$, **b)** $H_2 = \{3; 7; 8; 15\}$
számsokaságok sáralegjobb elemeit!

1.5. (M) Egy H számsokaság átlaga $\overline{x} = 3$, szórása $D = 5$. Meghatározható-e ezekből az adatokból az $y = 11$ számnak a H sokaságtól való átlagos négyzetes eltérése?

1.6. **a)** Adottak a síkon az A, B, C pontok. Határozzuk meg a sík azon P pontjának koordinátáit, amelyre a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ kifejezés értéke minimális!

b) Adott még egy R pozitív szám is. Mi lehet P mértani helye, ha $PA^2 + PB^2 + PC^2 = R^2$?

1.7. Jelölje az $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ számsokaság átlagát $\overline{A}$, a $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_m\}$ számsokaság átlagát $\overline{B}$. A két számsokaság Minkowski összegén az

$$A + B = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; \ldots; a_1 + b_m; a_2 + b_1; a_2 + b_2; \ldots; a_2 + b_m; \ldots; a_n + b_m\}$$

adatsokaságot értjük. Fejezzük ki az $A + B$ sokaság átlagát $\overline{A}$ és $\overline{B}$ segítségével!

1.8. Tekintsünk egy számsokaságot. Hogyan változik a számsokaság mediánja, módusza, átlaga, terjedelme és szórása, ha a számsokaság minden elemét

a) 3-mal megnöveljük?

a) 3-mal megszorozzuk?

1.9. Mit mondhatunk arról a számsokaságról, amelynek szórása 0?

1.10. **a)** Határozzuk meg a $\{3; 7\}$ számsokaság szórását!

b) Az elemeket ötször vesszük, így kapjuk a $\{3; 3; 3; 3; 3; 7; 7; 7; 7; 7\}$ számsokaságot. Hogyan változik a szórás?

c) Veszünk még két hetest: $\{3; 3; 3; 3; 3; 7; 7; 7; 7; 7; 7; 7\}$. Hogyan változik a szórás? Nő, csökken, vagy változatlan marad? Előbb tippeljünk, azután számoljunk!

1.11. (M) Adott a $H = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ számsokaság, amelynek átlaga $\overline{x}$, szórása D. Határozzuk meg a

$$\{\frac{x_1 - \overline{x}}{D}; \frac{x_2 - \overline{x}}{D}; \ldots; \frac{x_n - \overline{x}}{D}\} = \frac{H - \overline{x}}{D}$$

számsokaság átlagát és szórását!

1.12. Határozzuk meg az alábbi számsokaságok standardizáltját:

a) $\{3; 7\}$;

b) $\{2; 3; 7\}$!;

1.13. Mi lehet egy két tagból álló adatsokaság standardizáltja?

1.14. Adott a $\{3; 7\}$ számsokaság. Bővítsük ki egy elemmel, hogy ne változzon a szórása! Először tippeljünk, utána számoljunk!

1.15. Legyen $\{a_n\}$ olyan szigorúan monoton növő sorozat, amelyre $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ és minden $n \geq 1$ egészre a $H_n = \{a_0; a_1; \ldots, a_n\}$ szórása mindig ugyanaz a szám. Határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} a_n$ határértéket!

1.16. *Csebisev tulajdonság*

Egy H számsokaság átlaga $\overline{x}$, szórása D. A számsokaság elemeinek legfeljebb hány százaléka lehet

a) az $[x - 2D; x + 2D]$

b) az $[x - 3D; x + 3D]$

intervallumon kívül?

c) Fogalmazzuk meg az a)-b) feladatrészeknek megfelelő állítások általánosítását!

1.17. *Az egyenletes eloszlás szórása*

Határozzuk meg a $H_n = \{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}; 1\}$ halmaz szórását és a szórás határértékét, ha n tart a végtelenhez!

1.18. [2]

a) Bizonyítsuk be, hogy ha n szám összege 0, abszolút értékeik összege a, akkor a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége legalább $\frac{2a}{n}$.

b) Az $A_1A_2\dots A_n$ konvex n-szög nelsejében úgy választottuk ki az O pontot, hogy az $\overrightarrow{OA_1}+$ $+\overrightarrow{OA_2}+\dots+\overrightarrow{OA_n}$ vektorösszeg a nullvektor, míg a vektorok hosszának összege d. Igazoljuk, hogy az n-szög kerülete legalább $4d/n$.

c) Éles-e ez a korlát minden n esetén?

2. FEJEZET

A Pascal háromszög

2.1. (M) **a)** Igazoljuk, hogy $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
Adjuk meg zárt alakban az alábbi összegeket!
b) A Pascal háromszög n-edik sorában álló elemek összege: $p_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Pl $n = 7$-re:

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$$

c) $e_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Pl $n = 7$-re:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 35 + 4 \cdot 35 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 1 = 448$$

d) $d_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$. Pl $n = 7$-re:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 21 + 9 \cdot 35 + 16 \cdot 35 + 25 \cdot 21 + 36 \cdot 7 + 49 \cdot 1 = 1792$$

2.2. Súlyozzuk a Pascal háromszög elemeit a háromszög feletti sorban megadott számokkal!

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{7}{2} & 4 \\
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

a) Számoljuk ki az első 7 sorban a súlyozott összeget!
b) Fogalmazzunk meg sejtést az $n = 2k$-adik és az $n = 2k+1$-edik sorra kiszámított súlyozott összegről!
c) Igazoljuk a sejtéseket!

3. FEJEZET

Páros gráfok

3.1. Kutató munkák

A következő feladatokhoz érdemes átismételni a lefogó pontok, független élek, független pontok és lefedő élek fogalmát a **??**. fejezetből. A fejezet témájához tartoznak az ott szereplő feladatok is, különösen a K.II.9.4., a **??**. és a **??**. feladat.

3.1. Keressünk minél több független élt és minél kevesebb, az éleket lefogó pontot az alábbi páros gráfokban.

4. FEJEZET

Kombinatorikus geometria

4.1. (MS) A K.II.11.8. feladat megoldásában rámutattunk, hogy a K.II.11.6. feladat megoldásában lényegesen használtuk, hogy véges sok pont van adva. Igaz marad-e a K.II.11.6. feladat állítása, ha végtelen sok pont van adva?

Igaz-e tehát végtelen sok pont esetén is, hogy ha bármely három által meghatározott háromszög területe legfeljebb egységnyi, akkor az összes pont lefedhető egy négy területű háromszöggel?

5. FEJEZET

Binomiális eloszlás

5.1. Egy korong kezdetben a négyzetrács origójában helyezkedik el. Feldobunk egy érmét és „fej” esetén a szomszédos jobb oldali rácspontra, „írás” esetén a felülről szomszédos rácspontra helyezzük át a korongot.

Összesen

a) egyszer **b)** kétszer **c)** háromszor **d)** négyszer **e)** ötször

dobunk. Írjuk fel az egyes rácspontokra, hogy mekkora valószínűséggel ér a korong épp oda!

f) Mennyi az esélye, hogy 20 dobás után épp a $P(11;9)$ pontba kerül a korong?

g) 20 dobás után hol lesz legnagyobb valószínűséggel a korong? Mekkora ez a valószínűség?

5.2. Egy korong kezdetben a négyzetrács origójában helyezkedik el. Feldobunk egy dobókockát és ötös valamint hatos dobás esetén a szomszédos jobb oldali rácspontra, kisebb dobás esetén a felülről szomszédos rácspontra helyezzük át a korongot.

Összesen

a) egyszer **b)** kétszer **c)** háromszor **d)** négyszer **e)** ötször

dobunk. Írjuk fel az egyes rácspontokra, hogy mekkora valószínűséggel ér a korong épp oda!

f) Mennyi az esélye, hogy 20 dobás után épp a $P(11;9)$ pontba kerül a korong?

g) 20 dobás után hol lesz legnagyobb valószínűséggel a korong? Mekkora ez a valószínűség?

5.3. Legyen A egy véletlen kísérlet p valószínűségű eseménye. Ha a kísérletet végrehajtjuk n-szer, mennyi az esélye, hogy az A esemény pontosan k-szor következik be?

5.4. Dobjunk fel 5 dobókockát és írjuk fel a hatosok számát. Ismételjük meg a kísérletet sokszor! Mielőtt nekifognánk tippeljük meg a kapott számok

a) átlagát; **b)** szórását;

illetve a

c) 0, 1, 2, 3, 4, 5 számok relatív gyakoriságait!

d) Most végezzük el a kísérletet hússzor, majd töltsük ki az alábbi táblázatot!

hatosok	diák sorszáma															
száma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	Σ
0																
1																
2																
3																
4																
5																

e) Összesítsük az osztály eredményeit és az így kapott nagy adathalmazt alapul véve értékeljük az a)-b)-c) feladatrészekre adott tippeket!

f) Számítsuk ki, hogy a *valószínűségeloszlás*t (rendre a 0, 1, 2, 3, 4, 5 hatos valószínűségét) és adjuk meg az így kapott elméleti értékekből kiszámolható átlagot (várható érték) és szórást!

5.5. [1] *Oltóanyag vizsgálata*

Ha egészséges szarvasmarhákat valamely betegségnek teszünk ki, akkor az állatok 25%-a betegszik meg. Egy újonnan felfedezett oltóanyag vizsgálata céljából n egészséges állatnak védőoltást adnak, majd fertőzésnek teszik ki őket. Hogyan lehet értékelni a kísérlet eredményét?

A vakcina hatásával nem számolva mennyi lenne az alábbi események valószínűsége? (Kiszámolás előtt tippeljük meg a valószínűségek sorrendjét!)

a) 10 beoltott állatból egy sem fertőződött meg;
b) 17 beoltott állatból egy fertőzödött meg;
c) 23 beoltott állatból kettő fertőzödött meg.

5.6. [1] *Energiaellátási feladat*

Tegyük fel, hogy $n = 10$ munkás időről időre valamilyen villamos készüléket használ. Meg akarjuk becsülni mennyi a teljes terhelés. Első közelítésként tegyük fel, hogy egymástól függetlenül dolgoznak és mindegyikük bármely időpillanatban egyforma p valószínűséggel igényel egységnyi villamos teljesítményt. Ha egy munkás óránként átlagosan 12 percen át használ áramot, akkor $p = \frac{1}{5}$. Ha a rendszer hat egységnyi energiát szolgáltat, akkor egy rögzített pillanatban mekkora valószínűséggel lép fel túlterhelés?

5.7. [3] *Repülőjegy foglalás*

Egy repülőtársaság nyilvántartásában szereplő utolsó 16222 helyfoglalásból 2357-et lemondtak. Ezért a társaság kis rátartással több helyet enged lefoglalni, mint ahány elfoglalható hely van. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 125 ülőhelyre 135 helyfoglalás mellett lesz valaki, akinek nem jut hely?

5.8. Az $n = 7$, $p = 1/3$, $q = 2/3$ paraméterű binomiális eloszlás tagjai:

$P(X = 0) = 0.05852766346593505503$ $\quad P(X = 1) = 0.20484682213077270996$
$P(X = 2) = 0.30727023319615909269$ $\quad P(X = 3) = 0.25605852766346587357$
$P(X = 4) = 0.12802926383173293678$ $\quad P(X = 5) = 0.03840877914951988659$
$P(X = 6) = 0.00640146319158664719$ $\quad P(X = 7) = 0.00045724737082761762$

Tehát a legutóbbi szám annak valószínűségét adja meg, hogy hét kísérletből mind a hétszer a p valószínűségű esemény következik be.

Adjuk meg az $n = 8$, $p = 1/3$, $q = 2/3$ paraméterű binomiális eloszlást (6 tizedesjegy pontossággal)!

5.9. Legyen $0 \le p \le 1$ tetszőleges rögzített szám és $q = 1 - p$. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $P_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$; **b)** $E_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
c) $D_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

5.10. Határozzuk meg az (n, p, q) paraméterű binomiális eloszlás

a) móduszát; **b)** várható értékét; **c)** szórását!

5.11. Dobjunk fel

a) 10 **b)** 11 **c)** $n = 2k$ **d)** $n = 2k + 1$

szabályos pénzérmét és adjuk meg a

$$\chi = |\text{fejek száma - írások száma}|$$

valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

e) Igazoljuk, hogy $n = 2k$ esetén $\sqrt{n-1} > E(\chi) > \sqrt{\frac{n}{2}}$.

5.12. Feldobunk 100 szabályos érmét. A binomiális eloszlás várható értékének és szórásának ismeretében (5.9. fel.) a Csebisev tulajdonság (1.16. fel.) alapján adjunk meg olyan minél kisebb intervallumot, amelybe 90%-os valószínűséggel beleesik a fejek száma!

5.13. Feldobunk n szabályos érmét. Legyen χ a fejek száma, így $\frac{\chi}{n}$ a fejek száma relatív gyakoriságának megfelelő érték.

a) Van-e olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $N < n$-re

$$P(|\chi - \frac{n}{2}| < 100) > \frac{999}{1000}?$$

Ha igen, akkor adjunk meg ilyen N küszöbindexet!

b) Van-e olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $N < n$-re

$$\lim_{\to\infty} P(|\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{100}) > \frac{999}{1000}?$$

Ha igen, akkor adjunk meg ilyen N küszöbindexet!

5.14. Feldobunk n szabályos érmét. Legyen χ a fejek száma. Igazoljuk, hogy bármely $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ számokhoz található olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $N < n$-re

$$\lim_{\to\infty} P(|\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2}| < \epsilon) > 1 - \delta?$$

Ha igen, akkor adjunk meg ilyen N küszöbindexet!

Segítség, útmutatás

1. Statisztika

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

2. A Pascal háromszög

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Páros gráfok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

4. Kombinatorikus geometria

4.1. Garantálható-e, hogy egy végtelen ponthalmaz pontjaiból alkotott háromszögek között van maximális területű? Garantálható-e ez, ha a ponthalmaz zárt? Garantálható-e ez, ha a ponthalmaz korlátos és zárt?

5. Binomiális eloszlás

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

Megoldások

1. Statisztika

1.3. a) Az x szám átlagos négyzetes eltérése az $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ számsokaságtól:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2}{n} = x^2 - 2x\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} =$$
$$= \left(x - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2.$$

Látható, hogy a kifejezés a minimumát az $x = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ számnál, a sokaság átlagánál veszi fel. Az átlag négyzetes eltérése a számsokaságtól a

$$D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

szórásnégyzet.

b) Az x számnak a $H = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ adatsokaságtól való átlagos abszolút eltérése akkor minimális, ha x a H nagyságrendben középső eleme (ha H elemszáma páratlan), illetve ha H középső két eleme között lévő tetszőleges szám (H elemszáma páros).

1.5. Az 1.3. feladatból és annak megoldásából az y szám átlagos négyzetes eltérése a sokaságtól így írható: $(y-\overline{x})^2 + D^2$. Válasz erre a feladatra: igen megadható, $(11-3)^2 + D^2 = 64 + 25 = 89$.

1.11. Az 1.8. feladatban láttuk, hogy ha egy számsokaság minden eleméhez hozzáadunk a-t, akkor a számsokaság átlaga a-val nő, szórása változatlan, míg ha λ-val szorzunk minden elemet, akkor az átlag és a szórás is λ-val szorzódik. Ebből következik, hogy a $\frac{H-\overline{x}}{D}$ számsokaság átlaga 0, szórása 1.

A $\frac{H-\overline{x}}{D}$ számsokaságot a H számsokaság *standardizált*jának nevezzük.

2. A Pascal háromszög

2.1. $b_n = 2^n$ $\qquad c_n = n \cdot 2^{n-1}$ $\qquad d_n = n \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2}$.

3. Páros gráfok

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

4. Kombinatorikus geometria

4.1. A **??**. feladat megoldásában tehát ott használtuk, hogy véges sok pont van megadva, amikor vettük a legnagyobb területű háromszöget. Végtelen sok pont esetén nem feltétlenül van ilyen.

Próbálhatunk ezen úgy segíteni, hogy az adott ponthalmazt kibővítjük, vesszük a lezártját, vagyis hozzávesszük összes torlódási pontját. Az eredeti S ponthalmaz pontjaiból mint csúcsokból alkotott háromszögek területe felülről korlátos volt (legfeljebb egységnyi), tehát a területeknek volt egy legkisebb felső korlátja, jelöljük ezt T-vel. Nyilván $T \leq 1$. Azt állítjuk, hogy az S halmaz $\overline{S}$ lezártjának pontjaiból alkotott háromszögek területének maximuma T. Tehát egyrészt hogy *van* maximuma, másrészt, hogy ez a maximum T. Ha viszont beláttuk, hogy *van* maximális területű háromszög, akkor már a **??**. feladat megoldása változtatás nélkül alkalmazható.

Két dolgot kell tehát belátnunk. Az egyik az, hogy $\overline{S}$ halmaz pontjaiból alkotott háromszögek területe legfeljebb T, és hogy van olyan háromszög, amelynek területe T. Az első állítás azonnal következik az alábbi lemmából:

Lemma. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ pontsorozat tart A-hoz, a $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ pontsorozat tart B-hez és a pontsorozat tart C-hez, akkor az $A_nB_nC_n$ háromszög területe tart az ABC háromszög területéhez.

Tegyük fel, hogy a lemmát már tudjuk. Legyen A, B, C az $\overline{S}$ halmaz három pontja. Ha A torlódási pontja S-nek, akkor van olyan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ pontsorozata S-nek, amely A-hoz tart. De ha A nem torlódási pontja S-nek, akkor eleme S-nek, s akkor minden A_i-t választhatunk A-nak. Ugyanígy van egy B-hez tartó $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ pontsorozat és egy C-hez tartó $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ pontsorozat S-ben. Ha ezekre alkalmazzuk a lemmát, akkor tudjuk, hogy minden $A_nB_nC_n$ háromszög területe legfeljebb T. De akkor a határértékük is legfeljebb T, márpedig ez ABC háromszög területe.

Most bebizonyítjuk a lemmát. Legyen az AA_n, BB_n, CC_n távolságok közül a legnagyobb δ_n. Tudjuk, hogy δ_n nullához tart. Másrészt az AB, BC, CA oldal legfeljebb 2δ-nal nagyobb a neki megfelelő A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n oldalnál. Ebből viszont a Héron-képlettel számolva a területet rögtön láthatjuk, hogy az $A_nB_nC_n$ háromszög területe tart az ABC háromszög területéhez.

Hátra van még annak a bizonyítása, hogy $\overline{S}$ pontjai között van három, amely T területű háromszöget alkot. Tudjuk, hogy minden n-re van olyan $A_nB_nC_n$ háromszög, amelynek csúcsai S-ben vannak és amelynek területe nagyobb $T - 1/n$-nél. (Ez abból következik, hogy T a legkisebb felső korlát.) Az GR.II.1.6. feladat megoldásához fűzött megjegyzésben megmutattuk, hogy korlátos pontsorozatnak van konvergens részsorozata. Ha tehát belátjuk, hogy S korlátos, akkor ki tudunk választani egy A_{n_i} részsorozatot, amely konvergál egy A ponthoz, majd ennek egy olyan B_{n_j} részsorozatát, amelyre már ez utóbbi sorozat is konvergál egy B ponthoz, végül ennek egy olyan C_{n_k} részsorozatát, amelyre már ez utóbbi sorozat is konvergál egy C ponthoz. Az így kapott $A_{n_k}B_{n_k}C_{n_k}$ háromszögsorozat területe is T-hez konvergál, másrészt a lemma szerint ABC területéhez tart. Az $\overline{S}$ halmaz pontjaiból képzett háromszögek területének tehát T a maximuma – feltéve, hogy belátjuk, hogy S korlátos.

Ezek szerint már csak annyit kell bizonyítanunk, hogy ha egy ponthalmaz semelyik három pontja nincs egy egyenesen, és bármely három pont által meghatározott háromszög területe legfeljebb egységnyi, akkor a ponthalmaz korlátos. Ez azonban világos. Legyen a ponthalmaz két pontja X és Y, legyen XY hossza h. Ekkor az XY-nal párhuzamos, XY-tól $2/h$ távolságra levő két egyenes által alkotott sávban kell lennie a ponthalmaz összes pontjának. Legyen Z a ponthalmaz egy tetszőleges további pontja, legyen ZX hossza l. Ekkor a ponthalmaz összes pontja a ZX-szel párhuzamos olyan sávban van, amelynek szélessége $2/l$. E két sáv metszete pedig egy paralelogramma, tehát véges tartomány.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a **??**. feladat állítása végtelen ponthalmazra is igaz.

5. Binomiális eloszlás

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] W. Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*. Budapest, 1978, Műszaki Könyvkiadó. ISBN 963 10 2070 3.

[2] N. B. Vasziljeva (szerk.): *Kvant feladatgyűjtemény*. I. köt. 1997, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 002 3. A Kvant feladatai 1970-től 1980-ig.

[3] Nemetz Tibor és Wintsche Gergely: *Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek*. Polygon könyvtár sorozat sorozat. Szeged, 1999, Polygon.