

Kombinatorika

11–12. évfolyam

Szerkesztette:
Hraskó András, Surányi László

Technikai munkák

(MatKönyv project, T_EX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Tartalomjegyzék

Feladatok	3
1. Statisztika	3
2. A Pascal háromszög	7
3. Páros gráfok	9
3.1. Kutató munkák	9
4. Kombinatorikus geometria	11
5. Binomiális eloszlás	13
Segítség, útmutatás	17
1. Statisztika	17
2. A Pascal háromszög	17
3. Páros gráfok	17
4. Kombinatorikus geometria	17
5. Binomiális eloszlás	17
Megoldások	19
1. Statisztika	19
2. A Pascal háromszög	19
3. Páros gráfok	19
4. Kombinatorikus geometria	19
5. Binomiális eloszlás	20
Alkalmazott rövidítések	21
Könyvek neveinek rövidítései	21
Segítség és megoldás jelzése	21
Hivatkozás jelzése	21
Irodalomjegyzék	23

1. FEJEZET

Statisztika

1.1. a) Menjünk az ablakhoz és becsüljük meg valamely kiemelkedő tárgy (pl. templom) magasságát!

b) Képzeljük el, hogy az osztály minden tanulójának van egy tippe. A vizsgált tárgy viszont már nem elérhető, nem mérhető. Hogyan állapodhat meg az osztály egyetlen magasságértékben?

1.2. Adott a $H = \{x_1; x_2; \dots, x_n\}$ adatsokaság. (Nem halmaz, mert ugyanaz az elem többször is előfordulhat benne.)

Az x szám *átlagos abszolút eltérése* a H számsokaságtól a

$$\frac{|x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n|}{n} \quad (1)$$

kifejezés értéke, míg x -nek a H -tól való *átlagos négyzetes eltérése*t az alábbi képlet adja meg:

$$\frac{(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2}{n}. \quad (2)$$

Adott a $H = \{1; 3; 8\}$ számsokaság. Határozzuk meg azt az $x = 2$ számnak a H -tól való

a) átlagos négyzetes eltérése!

b) átlagos abszolút eltérése!

Határozzuk meg azt az x számot, amelynek a H számsokaságtól való

c) átlagos négyzetes eltérése;

d) átlagos abszolút eltérése

minimális!

1.3. (M) Adott az

$$\{1; 3; 8; 12\}, \quad \{x_1; x_2; x_3; \dots x_n\}$$

számsokaság.

Határozzuk meg azt az x számot, amelynek a számsokaságtól való

a) átlagos négyzetes eltérése;

b) átlagos abszolút eltérése

minimális!

1.4. Sára Tamás feladata

Adott egy H számsokaság. Azt mondjuk, hogy az a sárajobb b -nél (jelben: $a \triangleleft_s b$, ha a számsokaságban a és b átlagától a -felé több elem van, mint b -felé. Azt mondjuk, hogy az a szám a $\{x_1; x_2; x_3; \dots x_n\}$ számsokaságra vonatkozóan sáralejobb, ha nem létezik olyan $b \neq a$ szám, amelyre $b \triangleleft_s a$.

Adjuk meg a

a) $H_1 = \{3; 7; 8\}$, **b)** $H_2 = \{3; 7; 8; 15\}$

számsokaságok sáralejobb elemeit!

1.5. (M) Egy H számsokaság átlaga $\bar{x} = 3$, szórása $D = 5$. Meghatározható-e ezekből az adatokból az $y = 11$ számnak a H sokaságtól való átlagos négyzetes eltérése?

1.18. [2]

a) Bizonyítsuk be, hogy ha n szám összege 0, abszolút értékeik összege a , akkor a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége legalább $\frac{2a}{n}$.

b) Az $A_1A_2 \dots A_n$ konvex n -szög nelsejében úgy választottuk ki az O pontot, hogy az $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ vektorösszeg a nullvektor, míg a vektorok hosszának összege d . Igazoljuk, hogy az n -szög kerülete legalább $4d/n$.

c) Éles-e ez a korlát minden n esetén?

3. FEJEZET

Páros gráfok

3.1. Kutató munkák

A következő feladatokhoz érdemes átismételni a lefogó pontok, független élek, független pontok és lefedő élek fogalmát a ?? fejezetből. A fejezet témájához tartoznak az ott szereplő feladatok is, különösen a K.II.9.4., a ?? és a ?? feladat.

3.1. Keressünk minél több független élt és minél kevesebb, az éleket lefogó pontot az alábbi páros gráfokban.

4. FEJEZET

Kombinatorikus geometria

4.1. (MS) A K.II.11.8. feladat megoldásában rámutattunk, hogy a K.II.11.6. feladat megoldásában lényegesen használtuk, hogy véges sok pont van adva. Igaz marad-e a K.II.11.6. feladat állítása, ha végtelen sok pont van adva?

Igaz-e tehát végtelen sok pont esetén is, hogy ha bármely három által meghatározott háromszög területe legfeljebb egységnyi, akkor az összes pont lefedhető egy négy területű háromszöggel?

5.5. [1] *Oltóanyag vizsgálata*

Ha egészséges szarvasmarhákat valamely betegségnek tesziünk ki, akkor az állatok 25%-a betegszik meg. Egy újonnan felfedezett oltóanyag vizsgálata céljából n egészséges állatnak védőoltást adnak, majd fertőzésnek teszik ki őket. Hogyan lehet értékelni a kísérlet eredményét?

A vakcina hatásával nem számolva mennyi lenne az alábbi események valószínűsége? (Kiszámlálás előtt tippeljük meg a valószínűségek sorrendjét!)

- a) 10 beoltott állatból egy sem fertőződött meg;
- b) 17 beoltott állatból egy fertőződött meg;
- c) 23 beoltott állatból kettő fertőződött meg.

5.6. [1] *Energiaellátási feladat*

Tegyük fel, hogy $n = 10$ munkás időről időre valamilyen villamos készüléket használ. Meg akarjuk becsülni mennyi a teljes terhelés. Első közelítésként tegyük fel, hogy egymástól függetlenül dolgoznak és mindegyikük bármely időpillanatban egyforma p valószínűséggel igényel egységnyi villamos teljesítményt. Ha egy munkás óránként átlagosan 12 percen át használ áramot, akkor $p = \frac{1}{5}$. Ha a rendszer hat egységnyi energiát szolgáltat, akkor egy rögzített pillanatban mekkora valószínűséggel lép fel túlterhelés?

5.7. [3] *Repülőjegy foglalás*

Egy repülőársaság nyilvántartásában szereplő utolsó 16222 helyfoglalásból 2357-et lemondtak. Ezért a társaság kis rátartással több helyet enged lefoglalni, mint ahány elfoglalható hely van. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 125 ülőhelyre 135 helyfoglalás mellett lesz valaki, akinek nem jut hely?

5.8. Az $n = 7$, $p = 1/3$, $q = 2/3$ paraméterű binomiális eloszlás tagjai:

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= 0.05852766346593505503 & P(X = 1) &= 0.20484682213077270996 \\
 P(X = 2) &= 0.30727023319615909269 & P(X = 3) &= 0.25605852766346587357 \\
 P(X = 4) &= 0.12802926383173293678 & P(X = 5) &= 0.03840877914951988659 \\
 P(X = 6) &= 0.00640146319158664719 & P(X = 7) &= 0.00045724737082761762
 \end{aligned}$$

Tehát a legutóbbi szám annak valószínűségét adja meg, hogy hét kísérletből mind a hétszer a p valószínűségű esemény következik be.

Adjuk meg az $n = 8$, $p = 1/3$, $q = 2/3$ paraméterű binomiális eloszlást (6 tizedesjegy pontossággal)!

5.9. Legyen $0 \leq p \leq 1$ tetszőleges rögzített szám és $q = 1 - p$. Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

- a) $P_{n,p} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$; b) $E_{n,p} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
- c) $D_{n,p} = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

5.10. Határozzuk meg az (n, p, q) paraméterű binomiális eloszlás

- a) móduszát; b) várható értékét; c) szórását!

5.11. Dobjunk fel

- a) 10 b) 11 c) $n = 2k$ d) $n = 2k + 1$
- szabályos pénzérmét és adjuk meg a

$$\chi = |\text{fejek száma} - \text{írások száma}|$$

valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

- e) Igazoljuk, hogy $n = 2k$ esetén $\sqrt{n-1} > E(\chi) > \sqrt{\frac{n}{2}}$.

5.12. Feldobunk 100 szabályos érmét. A binomiális eloszlás várható értékének és szórásának ismeretében (5.9. fel.) a Csebisev tulajdonság (1.16. fel.) alapján adjunk meg olyan minél kisebb intervallumot, amelybe 90%-os valószínűséggel belesik a fejek száma!

5.13. Feldobunk n szabályos érmét. Legyen χ a fejek száma, így $\frac{\chi}{n}$ a fejek száma relatív gyakoriságának megfelelő érték.

a) Van-e olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $N < n$ -re

$$P\left(|\chi - \frac{n}{2}| < 100\right) > \frac{999}{1000}?$$

Ha igen, akkor adjunk meg ilyen N küszöbindexet!

b) Van-e olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $N < n$ -re

$$\lim_{\rightarrow\infty} P\left(\left|\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}\right) > \frac{999}{1000}?$$

Ha igen, akkor adjunk meg ilyen N küszöbindexet!

5.14. Feldobunk n szabályos érmét. Legyen χ a fejek száma. Igazoljuk, hogy bármely $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ számokhoz található olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $N < n$ -re

$$\lim_{\rightarrow\infty} P\left(\left|\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon\right) > 1 - \delta?$$

Ha igen, akkor adjunk meg ilyen N küszöbindexet!

Segítség, útmutatás

1. Statisztika

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

2. A Pascal háromszög

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Páros gráfok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

4. Kombinatorikus geometria

4.1. Garantálható-e, hogy egy végtelen ponthalmaz pontjaiból alkotott háromszögek között van maximális területű? Garantálható-e ez, ha a ponthalmaz zárt? Garantálható-e ez, ha a ponthalmaz korlátos és zárt?

5. Binomiális eloszlás

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

Megoldások

1. Statisztika

1.3. a) Az x szám átlagos négyzetes eltérése az $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ számsokaságtól:

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2}{n} &= x^2 - 2x \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \\ &= \left(x - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

Látható, hogy a kifejezés a minimumát az $x = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ számnál, a sokaság átlagánál veszi fel. Az átlag négyzetes eltérése a számsokaságtól a

$$D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2$$

szórásnégyzet.

b) Az x számnak a $H = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ adatsokaságtól való átlagos abszolút eltérése akkor minimális, ha x a H nagyságrendben középső eleme (ha H elemszáma páratlan), illetve ha H középső két eleme között lévő tetszőleges szám (H elemszáma páros).

1.5. Az 1.3. feladatból és annak megoldásából az y szám átlagos négyzetes eltérése a sokaságtól így írható: $(y - \bar{x})^2 + D^2$. Válasz erre a feladatra: igen megadható, $(11 - 3)^2 + D^2 = 64 + 25 = 89$.

1.11. Az 1.8. feladatban láttuk, hogy ha egy számsokaság minden eleméhez hozzáadunk a -t, akkor a számsokaság átlaga a -val nő, szórása változatlan, míg ha λ -val szorzunk minden elemet, akkor az átlag és a szórás is λ -val szorzódik. Ebből következik, hogy a $\frac{H - \bar{x}}{D}$ számsokaság átlaga 0, szórása 1.

A $\frac{H - \bar{x}}{D}$ számsokaságot a H számsokaság *standardizáltjának* nevezzük.

2. A Pascal háromszög

2.1. $b_n = 2^n$

$$c_n = n \cdot 2^{n-1}$$

$$d_n = n \cdot (n + 1) \cdot 2^{n-2}.$$

3. Páros gráfok

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

4. Kombinatorikus geometria

4.1. A ?? feladat megoldásában tehát ott használtuk, hogy véges sok pont van megadva, amikor vettük a legnagyobb területű háromszöget. Végtelen sok pont esetén nem feltétlenül van ilyen.

Próbálhatunk ezen úgy segíteni, hogy az adott ponthalmazt kibővítjük, vesszük a lezártját, vagyis hozzávesszük összes torlódási pontját. Az eredeti S ponthalmaz pontjaiból mint csúcsokból alkotott háromszögek területe felülről korlátos volt (legfeljebb egységnyi), tehát a területeknek volt egy legkisebb felső korlátja, jelöljük ezt T -vel. Nyilván $T \leq 1$. Azt állítjuk, hogy az S halmaz \overline{S} lezártjának pontjaiból alkotott háromszögek területének maximuma T . Tehát egyrészt hogy *van* maximuma, másrészt, hogy ez a maximum T . Ha viszont beláttuk, hogy *van* maximális területű háromszög, akkor már a ?? feladat megoldása változtatás nélkül alkalmazható.

Két dolgot kell tehát belátnunk. Az egyik az, hogy \overline{S} halmaz pontjaiból alkotott háromszögek területe legfeljebb T , és hogy van olyan háromszög, amelynek területe T . Az első állítás azonnal következik az alábbi lemmából:

Lemma. Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ pontsorozat tart A -hoz, a $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ pontsorozat tart B -hez és a pontsorozat tart C -hez, akkor az $A_n B_n C_n$ háromszög területe tart az ABC háromszög területéhez.

Tegyük fel, hogy a lemmát már tudjuk. Legyen A, B, C az \overline{S} halmaz három pontja. Ha A torlódási pontja S -nek, akkor van olyan $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ pontsorozata S -nek, amely A -hoz tart. De ha A nem torlódási pontja S -nek, akkor eleme S -nek, s akkor minden A_i -t választhatunk A -nak. Ugyanígy van egy B -hez tartó $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ pontsorozat és egy C -hez tartó $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ pontsorozat S -ben. Ha ezekre alkalmazzuk a lemmát, akkor tudjuk, hogy minden $A_n B_n C_n$ háromszög területe legfeljebb T . De akkor a határértékük is legfeljebb T , márpedig ez ABC háromszög területe.

Most bebizonyítjuk a lemmát. Legyen az AA_n, BB_n, CC_n távolságok közül a legnagyobb δ_n . Tudjuk, hogy δ_n nullához tart. Másrészt az AB, BC, CA oldal legfeljebb 2δ -nal nagyobb a neki megfelelő $A_n B_n, B_n C_n, C_n A_n$ oldalnál. Ebből viszont a Héron-képlettel számolva a területet rögtön láthatjuk, hogy az $A_n B_n C_n$ háromszög területe tart az ABC háromszög területéhez.

Hátra van még annak a bizonyítása, hogy \overline{S} pontjai között van három, amely T területű háromszöget alkot. Tudjuk, hogy minden n -re van olyan $A_n B_n C_n$ háromszög, amelynek csúcsai S -ben vannak és amelynek területe nagyobb $T - 1/n$ -nél. (Ez abból következik, hogy T a legkisebb felső korlát.) Az GR.II.1.6. feladat megoldásához fűzött megjegyzésben megmutattuk, hogy korlátos pontsorozatnak van konvergens részsorozata. Ha tehát belátjuk, hogy S korlátos, akkor ki tudunk választani egy A_{n_i} részsorozatot, amely konvergál egy A ponthoz, majd ennek egy olyan B_{n_j} részsorozatát, amelyre már ez utóbbi sorozat is konvergál egy B ponthoz, végül ennek egy olyan C_{n_k} részsorozatát, amelyre már ez utóbbi sorozat is konvergál egy C ponthoz. Az így kapott $A_{n_k} B_{n_k} C_{n_k}$ háromszögsorozat területe is T -hez konvergál, másrészt a lemma szerint ABC területéhez tart. Az \overline{S} halmaz pontjaiból képzett háromszögek területének tehát T a maximuma – feltéve, hogy belátjuk, hogy S korlátos.

Ezek szerint már csak annyit kell bizonyítanunk, hogy ha egy ponthalmaz semelyik három pontja nincs egy egyenesen, és bármely három pont által meghatározott háromszög területe legfeljebb egységnyi, akkor a ponthalmaz korlátos. Ez azonban világos. Legyen a ponthalmaz két pontja X és Y , legyen XY hossza h . Ekkor az XY -nal párhuzamos, XY -tól $2/h$ távolságra levő két egyenes által alkotott sávban kell lennie a ponthalmaz összes pontjának. Legyen Z a ponthalmaz egy tetszőleges további pontja, legyen ZX hossza l . Ekkor a ponthalmaz összes pontja a ZX -szel párhuzamos olyan sávban van, amelynek szélessége $2/l$. E két sáv metszete pedig egy paralelogramma, tehát véges tartomány.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a ?? feladat állítása végtelen ponthalmazra is igaz.

5. Binomiális eloszlás

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszámítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.

Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.

Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

- [1] W. Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*. Budapest, 1978, Műszaki Könyvkiadó. ISBN 963 10 2070 3.
- [2] N. B. Vasziljeva (szerk.): *Kvant feladatgyűjtemény*. I. köt. 1997, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 002 3. A Kvant feladatai 1970-től 1980-ig.
- [3] Nemetz Tibor és Wintsche Gergely: *Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek*. Polygon könyvtár sorozat sorozat. Szeged, 1999, Polygon.