Számelmélet

7–8. évfolyam

Szerkesztette:
Blénessy Gabriella, Dobos Sándor, Fazakas Tünde,
Hraskó András, Rubóczky György

2018. december 9.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2018

Tartalomjegyzék

Bevezetés

E feladatgyűjtemény megírásához Gábos Adél és Halmos Mária „Számelmélet” munkafüzetét[19] vettük alapul, annak majdnem minden példáját átvettük. Mivel az a könyv nem kifejezetten a 7-8. évfolyam tanulóinak készült, így írtunk egy „Bemelegítő feladatok” című fejezetet. Másrészt a speciális matematika szakos osztályok diákjaira gondolva bővítettük a feladatanyagot. A „Számjegyek”, „Diofantikus egyenletek”, „Prímek eloszlása”, „Racionális és irracionális számok” fejezetek teljesen újak, a „Maradékos osztás”, „Számrendszerek” és a „Vegyes feladatok” fejezetek jelentősen mások, mint a [19] könyv megfelelő részei ás újdonságot jelentenek a témához kapcsolódó számítástehnikai feladatok.

Gábos Adél és Halmos Mária remek könyvéből, sajnos, a jelen verzióból kimaradt még néhány fontos magyarázó, összefoglaló valamint történeti rész, amely az említett forrásmunkában hasznos.

1. FEJEZET

Bemelegítő feladatok

1.1. Hányféleképpen írhatunk be egyet-egyet a 10, 13, 30, 39, 100, 110, 330 számok közül a $\square$, $\triangle$ jelek helyére úgy, hogy teljesüljön a $\frac{\square}{\triangle} = \frac{1}{3}$ összefüggés?

1.2. Írjunk a $\square$, $\triangle$ jelek helyére egy-egy számot többféleképpen is úgy, hogy teljesüljön az alább megadott összefüggés!
a) $\frac{\square}{8} = \frac{\triangle}{6}$ **b)** $\frac{\square}{5} = \frac{\triangle}{10}$ **c)** $\frac{\square}{3} = \frac{4}{\triangle}$ **d)** $\frac{15}{\square} = \frac{21}{\triangle}$ **e)** $\frac{340}{\square} = \frac{240}{\triangle}$

1.3. (M) Egyszerűsítsük az alábbi törteket! Adjuk meg a tovább nem egyszerűsíthető alakot!

a) $\dfrac{486}{48}$ **b)** $\dfrac{108}{144}$ **c)** $\dfrac{169}{182}$ **d)** $\dfrac{340}{85}$ **e)** $\dfrac{121}{1001}$

1.4. (M) Végezzük el az alábbi műveleteket számológép használata nélkül! Az eredményt tovább nem egyszerűsíthető tört alakjában adjuk meg!

a) $\dfrac{7}{36} + \dfrac{11}{45}$ **b)** $\dfrac{3}{98} + \dfrac{11}{21}$ **c)** $\dfrac{5}{22} - \dfrac{8}{33}$
d) $\dfrac{2}{21} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{3}{28}$ **e)** $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{42}{1260}$ **f)** $\dfrac{50}{91} - \dfrac{35}{49} + \dfrac{3}{26}$
g) $\dfrac{50}{91} - \left(\dfrac{35}{49} + \dfrac{3}{26}\right)$

1.5. (M) Végezzük el az alábbi műveleteket számológép használata nélkül! Az eredményt tovább nem egyszerűsíthető tört alakjában adjuk meg!

a) $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3}{5}$ **b)** $\dfrac{2}{98} \cdot 7$ **c)** $\dfrac{2}{98} : 7$
d) $\dfrac{24}{121} \cdot \dfrac{77}{63}$ **e)** $\dfrac{36}{175} \cdot \dfrac{125}{81}$ **f)** $\dfrac{38}{45} : \dfrac{18}{5}$
g) $\dfrac{24}{72} + \dfrac{4}{17} \cdot \dfrac{51}{6}$ **h)** $\left(\dfrac{24}{72} + \dfrac{4}{17}\right) \cdot \dfrac{51}{6}$ **i)** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{162}{1001} \cdot \dfrac{143}{45}$
j) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{162}{1001}\right) \cdot \dfrac{143}{45}$ **k)** $\dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{35}{10} \cdot \dfrac{19}{4} \cdot \dfrac{72}{121} \cdot \dfrac{143}{57}$

1.6. (M) [13] A $MALOM$ szó egy ötjegyű számot helyettesít. Azonos betűk azonos számokat különböző betűk különböző számokat jelentenek. A betűknek megfelelő számok mindegyike prímszám, az öt szám összege is prímszám. Prímszám továbbá a MA és a MLO két ill. háromjegyű szám. Melyik lehet ez az öt szám?

1.7. (M) [13] Marci három dobókockával játszott. Egyik dobása után örömmel mondta nővérének, Sáriak: „Képzeld, sikerült mindhárom kockával prímet dobnom, s ezek összege is prím, mégpedig 10-nél nagyobb!” Sári ezt válaszolta: „Akkor biztosan van köztük kettő, amelyiken ugyanazt dobtad!”

Igaza volt-e Sárinak, s miket dobhatott Marci, ha állítása igaz volt?

1.8. (M) Adjunk meg két olyan szomszédos pozitív egész számot, amelyek egyike sem osztható 15-tel, de a szorzatuk osztható 15-tel!

1.9. (M) A nyilak egy-egy számmal való szorzást jelölnek. Az egyforma nyilak ugyanazzal a számmal szoroznak. Írjuk be a hiányzó számokat!

$$3 \Longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow \ldots\ldots \Longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow \ldots\ldots \Longrightarrow 600$$

1.10. Gyűjtsük össze az alábbi számok osztóit és mindegyik osztóhoz írjuk fel, hogy hányszor van meg a számban!
a) 36 **b)** 64 **c)** 65 **d)** 108 **e)** 130

1.11. (M) A 36, 64, 65, 108, 130 számok hányféleképpen írhatók fel két tényező szorzatára, ha a tényezők
a) pozitív egészek és számít a sorrendjük?
b) tetszőleges egészek és számít a sorrendjük?
c) pozitív egészek és nem számít a sorrendjük?
d) tetszőleges egészek és nem számít a sorrendjük?

1.12. Rajzoljunk minél többféle
a) 28 **b)** 36
egybevágó kis négyzetből álló téglalapot!

1.13. Hány különböző téglatest készíthető
a) 28 **b)** 36
egybevágó kis kockából?

1.14. (M) Mely 1-nél nagyobb számnak van
a) a legtöbb **b)** pontosan 3
100-nál nem nagyobb pozitív többszöröse?

1.15. Mely kétjegyű számoknak van a
a) legtöbb **b)** legkevesebb
osztója?

1.16. (M) Fel lehet-e írni a
a) 210-et, **b)** 300-at
két szomszédos egész szám szorzataként?

1.17. [5] Egy háromjegyű páratlan számról meg kell állapítani, hogy prímszám-e vagy összetett. Okos Berci 3-tól 31-ig nem talált osztót. Ezek után azt mondta, hogy a szám biztosan prímszám. Igaza volt? Miért?

1.18. (M) [9] Igaz-e, hogy a 330-at fel lehet bontani
a) Két páros szám összegére? **b)**szorzatára?
c) Két páratlan szám összegére? **d)**szorzatára?
e) Két 3-mal osztható szám összegére? **f)**szorzatára?
g) Két 3-mal nem osztható szám összegére? **h)**szorzatára?
i) Egy hárommal osztható és egy hárommal nem osztható szám összegére? **j)**szorzatára?

1.19. (M) [15] Meg lehet-e adni négy egész számot úgy, hogy összegük és szorzatuk is páratlan legyen?

1.20. (MS) Három egész szám összege

a) 2002; **b)** 2003.

Lehet-e 1 a három szám szorzatának utolsó jegye?

1.21. (MS) [13] Van-e három olyan egymást követő, 0-tól különböző természetes szám, amelyek összege prím?

1.22. (M) [13] Van-e négy egymást követő prímszám, amelyek összege is prím?

1.23. (S) Rendezzük két csoportba az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat úgy, hogy az egy csoportban levő számok

a) összege **b)** szorzata

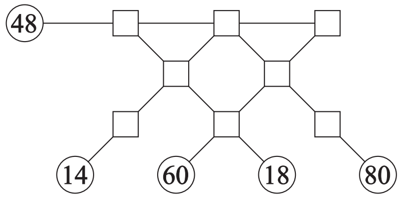
egyenlő legyen!

1.24. (S) Keressünk 7 olyan egymást követő pozitív egész számot, amelyek két csoportba oszthatók úgy, hogy az egyik csoportba tartozó számok

a) összege **b)** szorzata

ugyanannyi, mint a másik csoportba tartozóké!

1.25. [6] Töltsük ki az az 1.0.1. ábrán látható négyzeteket az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokkal úgy, hogy egy-egy egyenes mentén a számok szorzata a kis körben levő számmal legyen egyenlő!



1.25.1. ábra.

1.26. (M) [13] Melyek azok a háromjegyű prímek, amelyek számjegyeit összeszorozva 10-et kapunk?

1.27. (M) Jóska köralakú futópályán edz. A pálya hossza $390m$.

a) Hétfőn 9 teljes kört és még 120 métert futott. Összesen hány m-t futott?

b) Kedden 11 teljes körhöz még 120 méter hiányzott, de ott elfogyott a szufla. Így hány m-t futott?

c) Szerdán pontosan $5km$-ig bírta. Hány teljes kört tett meg? Ha a leggyorsabban akar eljutni kiindulási helyére, akkor melyik irányba kell mennie és hány métert kell megtennie?

d) Csütörtökön már a verseny helyszínén edzett, ahol csak $380m$ hosszú a pálya. Itt is épp $5km$-t futott. Ez hány teljes kört jelentett? Most melyik irányban sétáljon a pályán, hogy a legrövidebben visszajusson a rajtvonalhoz? Hány métert kell megtennie?

e) Pénteken csak az edzőpálya volt szabad. Ezen Jóska $6km$-t futott majd ugyanabban az irányban még $150m$ sétált, mert így jutott a pályán a leghamarabb a starthoz. Milyen hosszú lehetett a pálya? (Feltehetjük, hogy m-ben 450-nél kisebb 10-zel osztható szám.)

1.28. *Számlétra*

Két játékos felváltva mond pozitív egész számokat. 1-gyel, 2-vel vagy 3-mal lehet kezdeni és minden további lépésben is az ellenfél által kimondott számnál 1-gyel, 2-vel vagy 3-mal nagyobb számot lehet csak mondani. Az nyer, aki kimondja a 21-et.

A kezdőnek vagy a másodiknak szóló játékosnak kedvező-e a játék? Mi a nyerő stratégia?

1.29. *Szorzójáték*

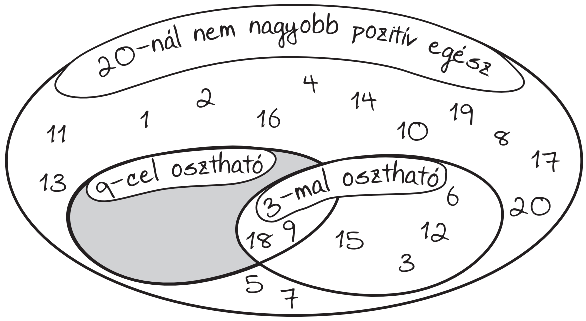
Két játékos felváltva mond 24-nél nem nagyobb pozitív egész számokat. Korábban már kimondott számot egyikük sem mondhat. Az a játékos nyer, aki olyan számot mond, amelynek szorzata az előzőleg elhangzottal épp 24.

A kezdőnek vagy a másodiknak szóló játékosnak kedvező-e a játék? Mi a nyerő stratégia?

1.30. (M) Készítsünk algoritmust, ami előállít egy 20×20-as szorzótáblát!

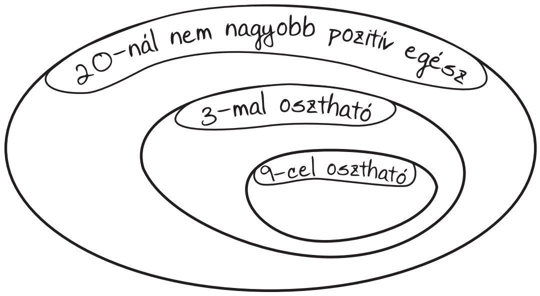
2. FEJEZET
Osztók

2.1. [19] Az első húsz pozitív egész számot osztályoztuk a 2.0.1. ábrán. A szürkével színezett részbe egyetlen szám sem került. Ez érthető is, mert nincs olyan szám, amely 9-cel osztható, de 3-mal nem.



2.1.1. ábra.

A 9-cel osztható számok a 3-mal oszthatók közül valók. Ezt a kapcsolatot jól kiemeli a 2.0.2. ábra. Írjuk be ide is az első húsz pozitív egész számot!



2.1.2. ábra.

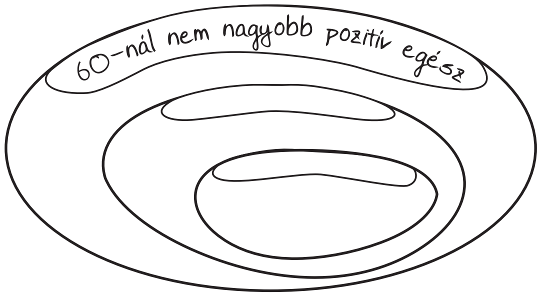
2.2. Rajzoljunk számegyenest és jelöljük be rajta az egész számokat 0-tól 30-ig! Jelöljünk meg minden hárommal osztható számot nagy piros karikával, minden néggyel oszthatót kis tömör kék körrel, a néggyel nem osztható párosakat kis zöld tömör körrel.

2.3. [19] Írjuk be a 2.0.1. ábra megfelelő helyeire az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 16, 21, 24, 30, 36 számokat! Maradt-e rész üresen? Van-e olyan egész szám, amelynek ott lenne a helye?

2.4. [19] A rajzok címkéiről hiányzik a felirat. El lehet-e helyezni a 2.0.1. ábrán a címkékre a „12-vel osztható”, „4-gyel osztható” feliratokat úgy, hogy minden 60-nál nem nagyobb pozitív egész számot be lehessen írni valahova?

2.5. [19] A 2.0.1. és a 2.0.2. ábrán is a „12-vel osztható”, „10-zel osztható” kifejezéseket kell a címkékre írni.

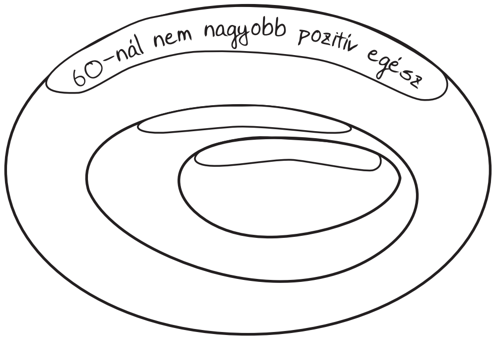
2.3.1. ábra.



2.4.1. ábra.

Csak az egyik ábrába lehet beírni az összes 60-nál nem nagyobb pozitív egész számot. Írjuk is be őket!

A másik ábrába milyen tulajdonságú számokat nem lehet elhelyezni?



2.5.1. ábra.

2.6. [19] Ábrázoljuk egy halmazábrán a 60-nál nem nagyobb pozitív egész számok közt

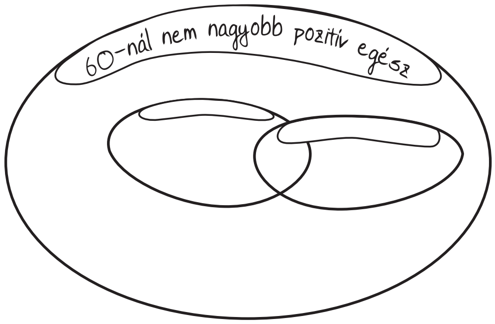
a) a 12-vel osztható számokat és a 8-cal osztható számokat;

b) az 5-tel osztható számokat és a 15-tel osztható számokat!

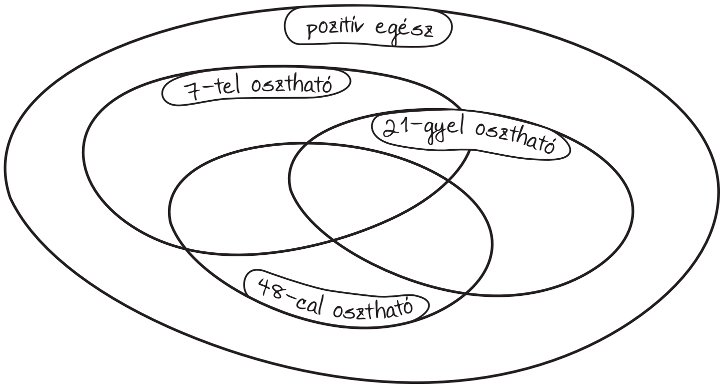
2.7. [19] Színezzük be a 2.0.1. ábrának azokat a részeit, ahova egy szám sem kerülhet! Az ábra többi részeibe írjunk számokat!

Lehet-e itt is olyan ábrát rajzolni, ahol egy rész sem marad üresen?

2.8. [19] Helyezzünk el 3-3 pozitív egész számot a 2.0.1-2.0.4. halmazábrák egyes részeibe, ahová lehet! Színezzük be az üresen maradó részeket!



2.5.2. ábra.



2.7.1. ábra.

2.9. [19] Címkézzük meg a halmazábrákat a megadott feliratokkal!

2.0.1. ábra:	5-tel osztható	10-zel osztható	20-szal osztható
2.0.2. ábra:	2-vel osztható	3-mal osztható	12-vel osztható
2.0.3. ábra:	2-vel osztható	3-mal osztható	5-tel osztható
2.0.4. ábra:	3-mal osztható	5-tel osztható	6-tal osztható

2.10. [19] Párosítsuk az alábbi címkehármasokat a 2.0.1-2.0.3. ábrákkal! Címkézzük is meg az ábrákat, és írjunk mindegyik részbe néhány számot!

a) 4-gyel osztható   12-vel osztható   60-nal osztható
b) 4-gyel osztható   11-gyel osztható   12-vel osztható
c) 4-gyel osztható   11-gyel osztható   13-mal osztható

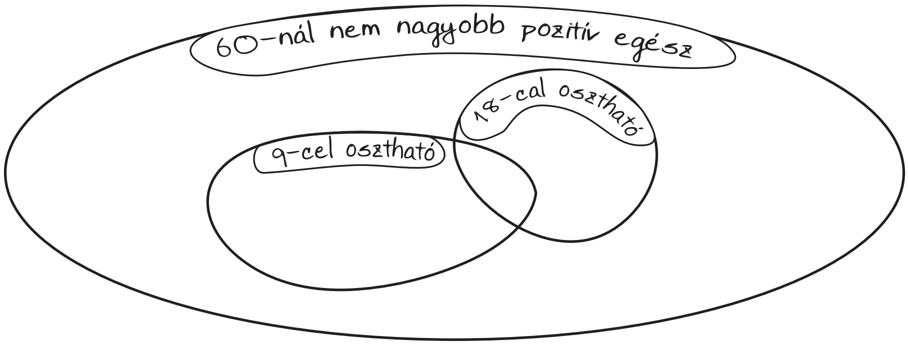
2.11. [19] Színezzük be a 2.0.1-2.0.3 ábrák üresen maradó részeit! Készítsünk olyan „gazdaságos” ábrákat, ahol egy rész sem marad üresen!

2.12. [19] Színezzük be a 2.0.1-2.0.3 ábrák üresen maradó részeit! Készítsünk olyan „gazdaságos” ábrákat, ahol egy rész sem marad üresen!

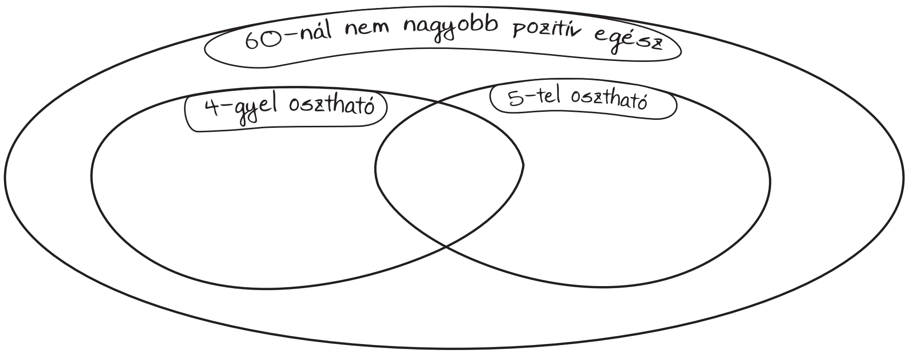
2.13. Milyen oszthatósági feltétellel megadott halmazok láthatók a 2.0.1 ábrán látható két „gazdaságos” Venn-diagrammon?

2.14. [19] Igazak-e a következő állítások? Írjunk az **i**gazak mellé **i** betűt, a **n**em igazak mellé **n** betűt!

(1) A 3-mal osztható számok mind oszthatók 6-tal.
(2) A 6-tal osztható számok mind oszthatók 3-mal.
(3) Van olyan 6-tal osztható szám, amelyik osztható 3-mal.



2.8.1. ábra.



2.8.2. ábra.

(4) Van olyan 3-mal osztható szám, amelyik osztható 6-tal.
(5) Van olyan 6-tal osztható szám, amelyik nem osztható 3-mal.
(6) Van olyan 3-mal osztható szám, amelyik nem osztható 6-tal.
(7) Van olyan 3-mal osztható szám, amelyik páratlan.
(8) Van olyan 6-tal osztható szám, amelyik páratlan.
(9) Minden 3-mal osztható szám páros.
(10) Minden 6-tal osztható szám páros.
(11) Minden 6-tal osztható szám jegyeinek az összege osztható 3-mal.
(12) Nincs olyan 6-tal osztható szám, amely jegyeinek összege ne lenne osztható 3-mal.
(13) Minden 6-tal osztható szám jegyeinek az összege osztható 6-tal.
(14) Van olyan négyzetszám, amely 3-mal osztható, de 9-cel nem.
(15) Nincs olyan négyzetszám, amely 3-mal osztható, de 9-cel nem.
(16) Minden 3-mal osztható négyzetszám 9-cel is osztható.

2.15. Tegyük fel, hogy x olyan szám, amelyre az alábbi hat állítás közül pontosan három teljesül:

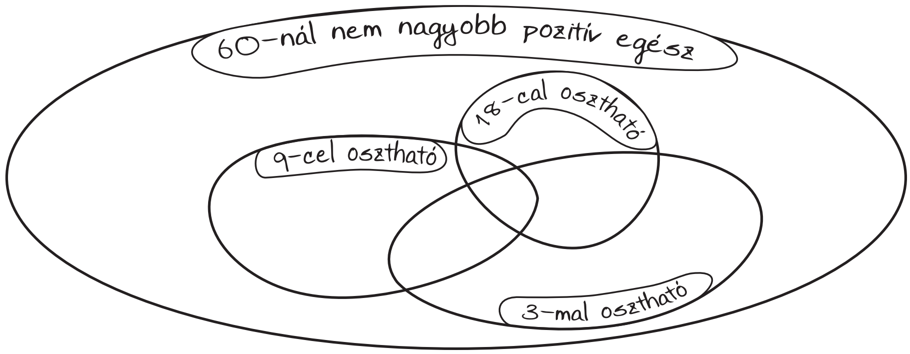
a) páros; b) osztható 3-mal; c) osztható 12-vel;

d) osztható 15-tel; e) osztható 30-cal; f) osztható 60-nal.

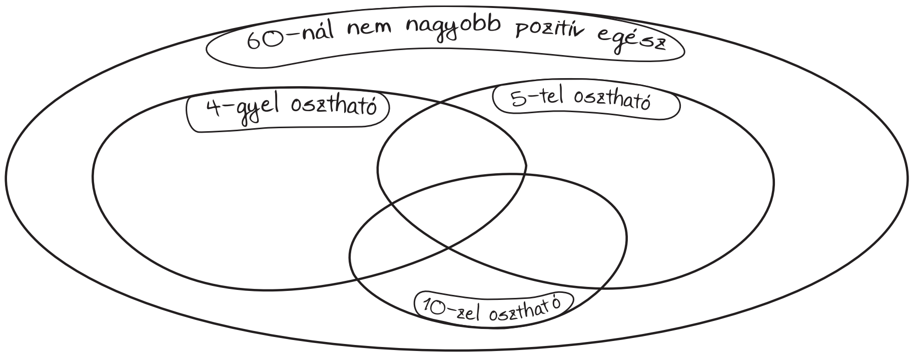
Meg lehet-e teljes bizonyossággal állapítani, hogy melyik az a 3 állítás, amelyik nem igaz x-re?

2.16. (M) Készítsünk algoritmust, ami beolvas két számot és eldönti, hogy az egyik osztója-e a másiknak!

2.17. (M) Készítsünk algoritmust, ami kiválogatja egy vektorból a hárommal osztható számokat!

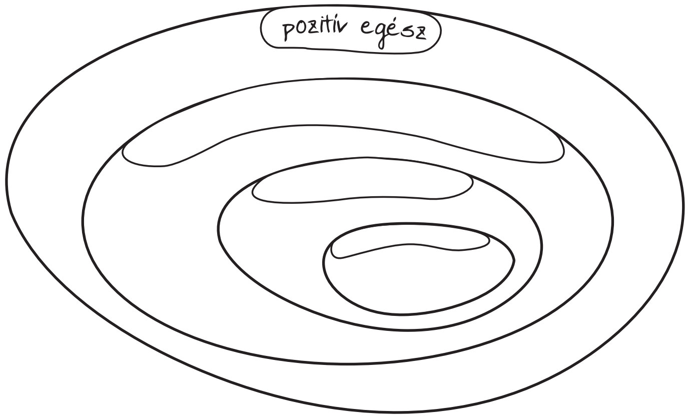


2.8.3. ábra.

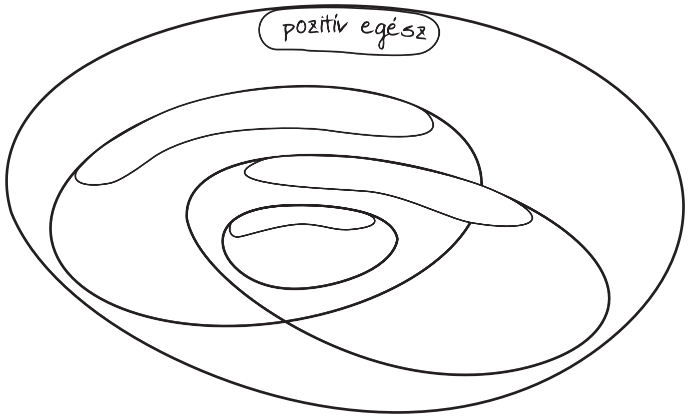


2.8.4. ábra.

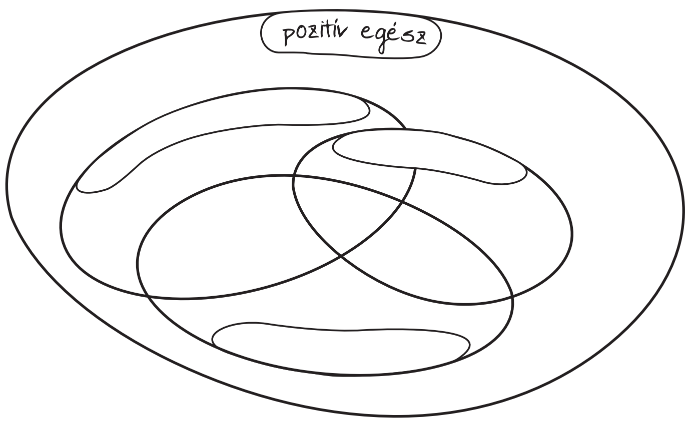
2.18. (M) Készítsünk algoritmust, ami megszámolja egy vektorban az adott (beolvasott) számmal osztható számokat.



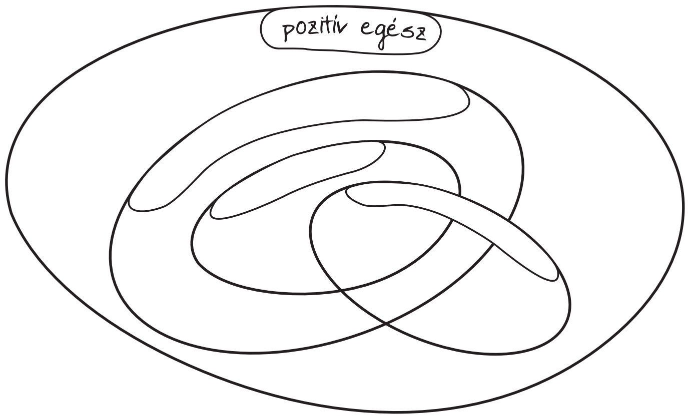
2.9.1. ábra.



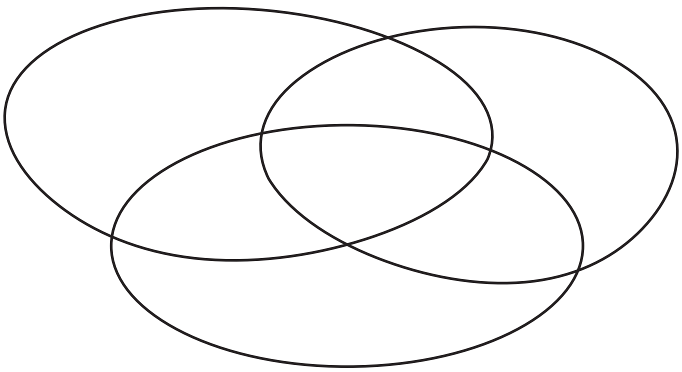
2.9.2. ábra.



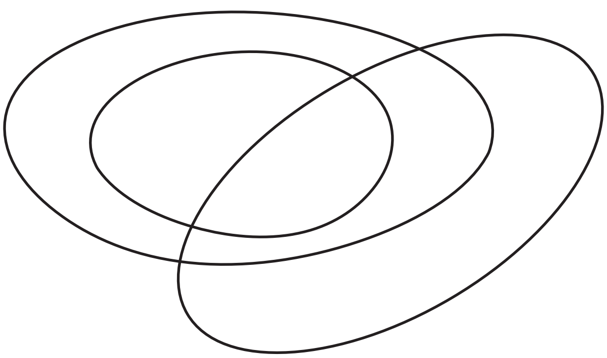
2.9.3. ábra.



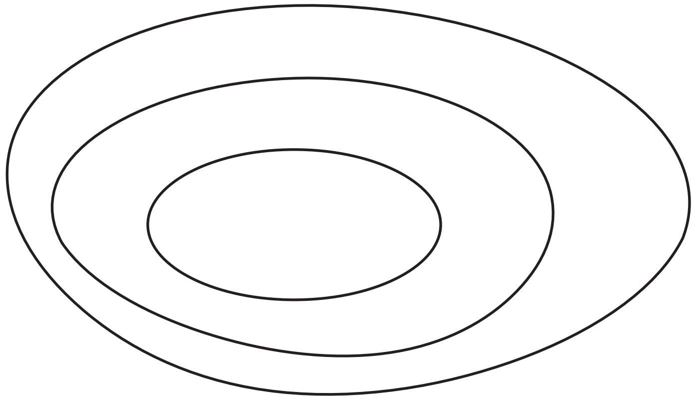
2.9.4. ábra.



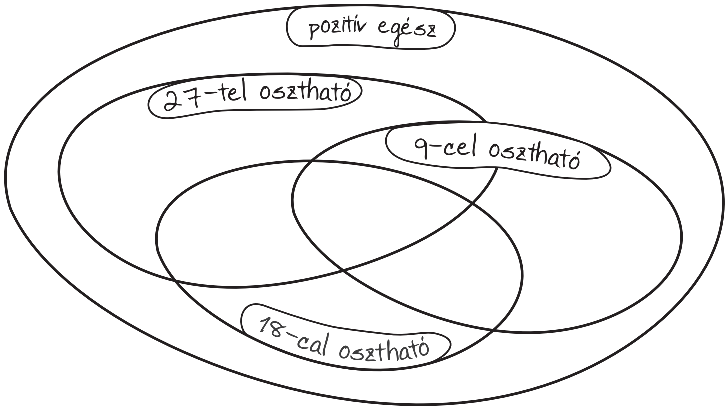
2.10.1. ábra.



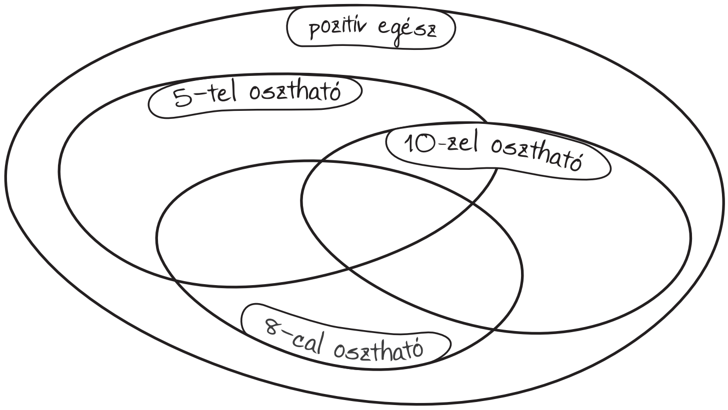
2.10.2. ábra.



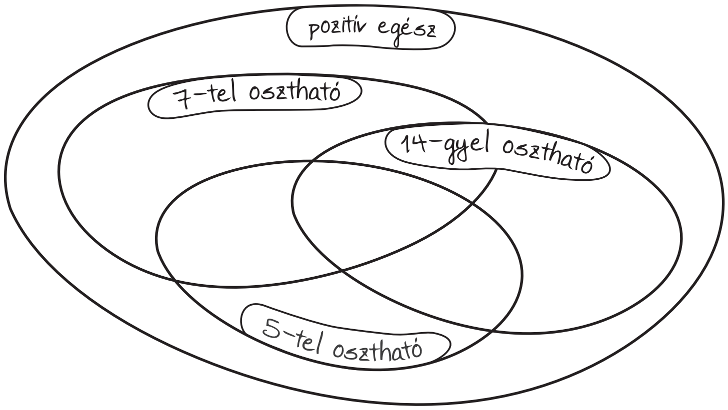
2.10.3. ábra.



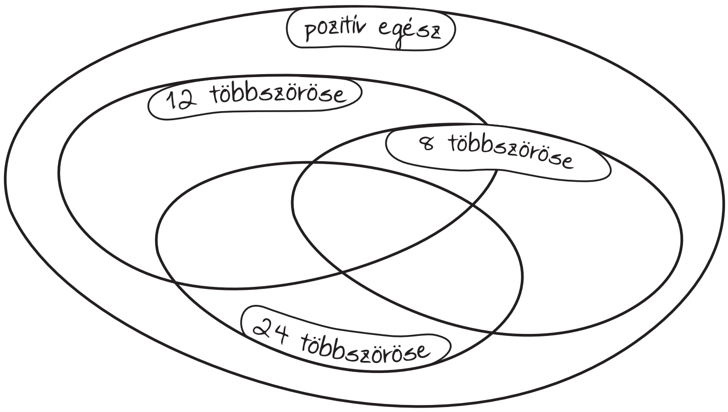
2.11.1. ábra.



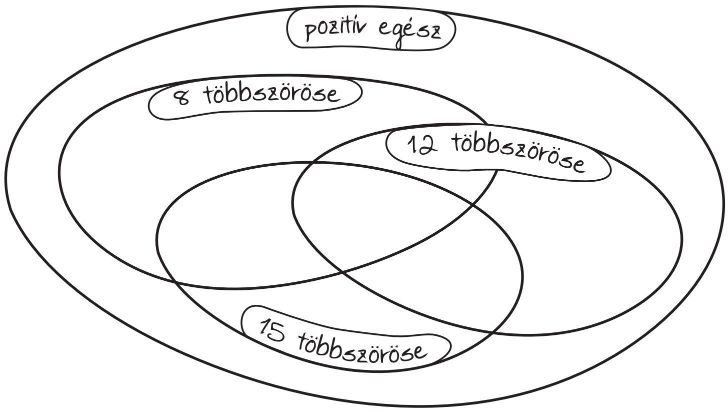
2.11.2. ábra.



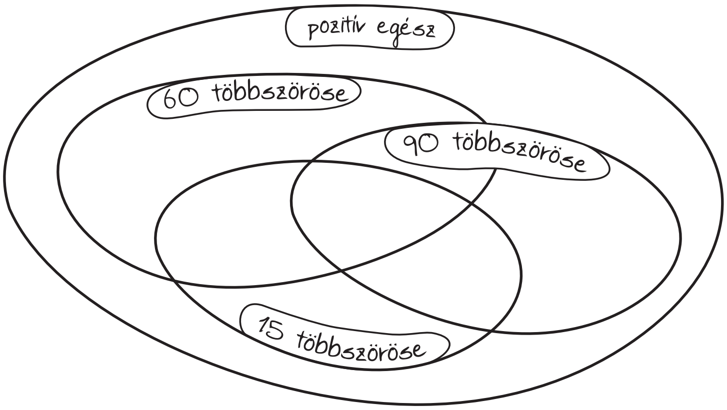
2.11.3. ábra.



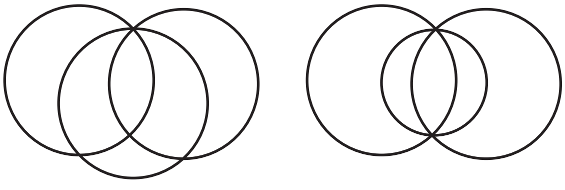
2.12.1. ábra.



2.12.2. ábra.



2.12.3. ábra.



2.13.1. ábra.

3. FEJEZET
Osztók (teszt)

3.1. (M)

Legyen $H = \{1,2,3,...,99,100\}$. Legyen a H halmaz azon részhalmaza A, amelyben a páros számok vannak, B amelyben a 4-gyel osztható számok. Melyik lesz üres halmaz?

A) $H \setminus A$ **B)** $H \setminus B$

C) $B \setminus A$ **D)** $A \setminus B$

E) Az előző négy egyike sem.

3.2. (M) Rajzoljunk számegyenest és jelöljük be rajta az egész számokat 59-től 100-ig! Jelöljünk meg minden hárommal osztható számot nagy piros karikával, minden néggyel oszthatót kis tömör kék körrel, a néggyel nem osztható párosakat kis zöld tömör körrel. Ezek számát jelölje sorra p, k és z. Melyik igaz?

A) $z < k < p$ **B)** $k < z < p$ **C)** $z < p < k$ **D)** $k < p < z$

E) $p < z < k$

3.3. (M) Legyen $H = \{1,2,3,...,99,100\}$. Legyen a H halmaz azon részhalmaza A, amelyben a 18-cal osztható számok vannak, B amelyben a 9-cel osztható számok. Melyik igaz?

A) $A \subseteq B$ **B)** $B \subseteq A$

C) $A \cap B = B$ **D)** $A \cup B = A$

E) Az előző négy egyike sem.

3.4. (M) Legyen $H = \{1,2,3,...,99,100\}$. Legyen a H halmaz azon részhalmaza A, amelyben a 15-tel osztható számok vannak, B amelyben a 18-cal osztható számok. Melyik a legnagyobb elemszámú halmaz az alábbiak közül?

A) $A \cap B$ **B)** $A \setminus B$ **C)** $B \setminus A$ **D)** $H \setminus (A \cup B)$

E) $A \cup B$

3.5. (M) Kifejező halmazábrát készítettünk a következő halmazokkal: hatvannál nem nagyobb számok; a 12-vel osztható számok; és a 8-cal osztható számok. Mikor igaz, hogy 12 és 8 helyett n és m esetén is ugyanígy néz ki a kifejező halmazábra Venn diagrammja?

A) $n = 12$, $m = 6$ **B)** $n = 17$, $m = 5$ **C)** $n = 9$, $m = 6$

D) $n = 15$, $m = 21$ **E)** $n = 23$, $m = 15$

3.6. (M) Kifejező halmazábrát készítettünk a következő halmazokkal: hatvannál nem nagyobb számok; a 5-tel osztható számok; és a 15-tel osztható számok. Mikor igaz, hogy 5 és 15 helyett n és m esetén is ugyanígy néz ki a kifejező halmazábra Venn diagrammja?

A) $n = 12$, $m = 6$ **B)** $n = 6$, $m = 16$ **C)** $n = 4$, $m = 14$ **D)** $n = 5$, $m = 6$

E) $n = 12$, $m = 8$

3.7. (M) Melyik következtetés igaz az alábbi három állításra?

– A: x osztható 4-gyel;

- B: x osztható 12-vel
- C: x osztható 18-cal.

A) $A \Rightarrow B$ **B)** $B \Rightarrow A$ **C)** $A \Rightarrow C$ **D)** $C \Rightarrow A$ **E)** $B \Rightarrow C$

3.8. (M) Hány igaz állítás van az alábbi 4 között?

- A 2-vel osztható számok mind oszthatók 6-tal.
- A 6-tal osztható számok mind oszthatók 2-vel.
- Van olyan 6-tal osztható szám, amelyik osztható 2-vel.
- Van olyan 2-vel osztható szám, amelyik osztható 6-tal.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

3.9. (M) Hány igaz állítás van az alábbi 4 között?

- Van olyan 8-cal osztható szám, amelyik osztható 4-gyel.
- Van olyan 4-gyel osztható szám, amelyik osztható 8-cal.
- Van olyan 8-cal osztható szám, amelyik nem osztható 4-gyel.
- Van olyan 4-gyel osztható szám, amelyik nem osztható 8-cal.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

3.10. (M) Mely x, y és z esetén igaz: Ha egy szám osztható x-szel és y-nal, akkor z-vel is.
A) $x = 8,\ y = 6,\ z = 4$ **B)** $x = 8,\ y = 7,\ z = 6$ **C)** $x = 2,\ y = 9,\ z = 12$
D) $x = 12,\ y = 10,\ z = 40$ **E)** $x = 11,\ y = 22,\ z = 33$

4. FEJEZET
Prímtényezők

4.1. Milyen számjegyre végződik öt szomszédos egész szám szorzata?

4.2. [19] Keressünk öt-öt olyan számot, amelynek

a) nincs valódi osztója! **b)** csak egy osztója van!

c) csak két osztója van! **d)** csak három osztója van!

4.3. [19] Bontsuk fel a 120-at két 1-nél nagyobb egész szám szorzatára! A tényezőket, ha lehet bontsuk még tovább tényezők szorzatára! Haladjunk tovább egészen addig, amíg lehet! Így a 120-at tovább nem bontható számok szorzatára bontjuk.

Végezzük el a felbontást a 120 más két tényezős szorzataiból kiindulva is! Mit tapasztalunk?

4.4. [19] Bontsuk fel minél több tényező szorzatára és minél többféleképpen a 60-at, a 96-ot, a 360-at és a 420-at! Mit tapasztalunk?

4.5. [19] Igazak-e a következő állítások?

a) Minden 6-tal osztható szám páros.
b) Minden 4-gyel osztható szám 4-gyel osztható számjegyre végződik.
c) Van olyan páratlan szám, amely osztható 18-cal.
d) Van olyan 7-tel osztható szám, amely osztható 5-tel.
e) Van olyan 10-zel osztható szám, amely páros.

4.6. [19] 20 is osztható 4-gyel, és 28 is. Igaz-e, hogy osztható 4-gyel

a) az összegük is? **b)** a pozitív különbségük is?

c) a szorzatuk is?

A szorzatukról többet is mondhatunk. Mit?

4.7. [19] Keressünk két olyan 4-gyel osztható számot, amelyek hányadosa

a) 4-gyel nem osztható természetes szám!
b) 4-gyel osztható természetes szám!

4.8. [19] Keressünk olyan számokat, amelyek

a) 2-vel és 4-gyel is oszthatók, de 2 és 4 szorzatával nem oszthatók!
b) 2-vel és 4-gyel is oszthatók, és 2-nek és 4-nek a szorzatával is oszthatók!
c) 2-vel és 3-mal is oszthatók, de 2 és 3 szorzatával nem oszthatók!

4.9. [19] A 36 960-at és a 4225-öt bontsuk törzstényezőkre!

4.10. [19] Határozzuk meg a következő számok prímtényezős felbontását!

12^{100} $75^{10} \cdot 45^{20}$

4.11. [19] Van-e 2-nek olyan hatványa, amelyik osztható 7-tel?

4.12. [19] Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $2^{17} \cdot 3^{17} = x^{17}$ **b)** $4^{17} = 2^x$ **c)** $3^{60} = 9^x$ **d)** $4^{60} = 8^x$

e) $x^2 = 2^{61}$ **f)** $x^3 = 3^{27}$

4.13. [19] Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

a) $2^4 \cdot 3^5 \mid 2^6 \cdot 3^7$ **b)** $3^8 \cdot 11^3 \mid 2^4 \cdot 3^9 \cdot 11^4$ **c)** $2^6 \cdot 7^4 \mid 2^8 \cdot 7^3 \cdot 5$

d) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \mid 2^6 \cdot 5^4 \cdot 7^3$

4.14. [19] Igaz-e, hogy pozitív egész x, y értékekre

a) $7 \mid xy \Rightarrow 7 \mid x$ vagy $7 \mid y$ **b)** $15 \mid xy \Rightarrow 15 \mid x$ vagy $15 \mid y$

c) $23 \mid xy \Rightarrow 23 \mid x$ vagy $23 \mid y$ **d)** $91 \mid xy \Rightarrow 91 \mid x$ vagy $91 \mid y$

4.15. Az n egész számra teljesül, hogy minden olyan esetben, amikor oszt egy szorzatot, akkor a szorzatnak legalább az egyik tényezőjét is osztja. Melyek az ilyen tulajdonságú n egészek?

4.16. [19] Igaz-e, hogy pozitív egész x értékekre

a) $2 \mid x$ és $3 \mid x \Rightarrow 6 \mid x$ **b)** $2 \mid x$ és $10 \mid x \Rightarrow 20 \mid x$ **c)** $2 \mid x$ és $10 \mid x \Rightarrow 5 \mid x$

d) $2 \mid x$ és $6 \mid x \Rightarrow 12 \mid x$

4.17. [19] Igaz-e, hogy pozitív egész x értékekre

a) $21 \mid x^2 \Rightarrow 21 \mid x$ **b)** $12 \mid x^2 \Rightarrow 12 \mid x$ **c)** $12 \mid x^2 \Rightarrow 36 \mid x^2$ **d)** $13 \mid 7x \Rightarrow 13 \mid x$

4.18. [19] Egy x pozitív egész szám négyzete osztható 280-nal. Mire lehet ebből következtetni?

4.19. [19] Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek az 1260-szorosa egy egész szám harmadik hatványa?

4.20. [19] Válasszunk ki három egymást követő pozitív egész számot! Szorozzuk össze őket, és nézzük meg, milyen számokkal osztható a szorzat!

4.21. [19] Igaz-e az, hogy bárhogy is választunk ki három egymást követő pozitív egész számot, a szorzatuk biztosan osztható 6-tal?

4.22. [19] Mivel osztható biztosan 4 szomszédos pozitív egész szám szorzata?

4.23. [19] Mivel osztható biztosan 7 szomszédos pozitív egész szám szorzata?

4.24. [19] A 4.0.1. rajzokról három-három címke hiányzik. Keressük meg, hogy melyik rajzhoz melyik címkehármas tartozik!

a) $\boxed{\text{60 valódi osztói}}$ $\boxed{\text{63 valódi osztói}}$ $\boxed{\text{20 valódi osztói}}$

b) $\boxed{\text{343 valódi osztói}}$ $\boxed{\text{243 valódi osztói}}$ $\boxed{\text{42 valódi osztói}}$

c) $\boxed{\text{6 valódi osztói}}$ $\boxed{\text{60 valódi osztói}}$ $\boxed{\text{90 valódi osztói}}$

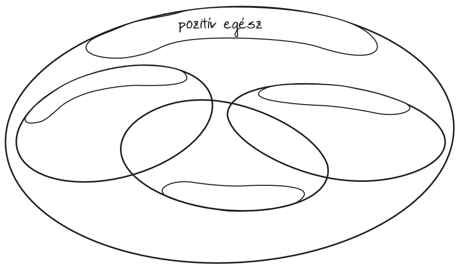
d) $\boxed{\text{60 valódi osztói}}$ $\boxed{\text{30 valódi osztói}}$ $\boxed{\text{48 valódi osztói}}$

e) $\boxed{2^2 \cdot 7^3 \text{ valódi osztói}}$ $\boxed{2^5 \cdot 7^5 \text{ valódi osztói}}$ $\boxed{2^7 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \text{ valódi osztói}}$

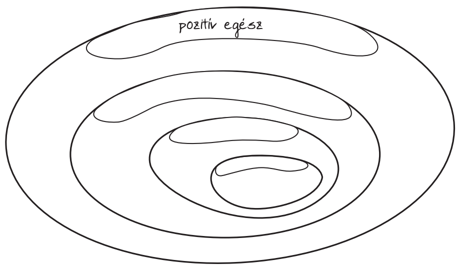
4.25. [19] Összeszorozzuk 1-től kezdve az első 100 pozitív egész számot:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ \ldots \ \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$$

Hány nulla van a kapott szorzat végén?



4.24.1. ábra.



4.24.2. ábra.

4.26. [9] Ebben a feladatban prímkártyákkal dolgozunk, tehát olyan kis lapokkal, amelyekre egy-egy prímszám van írva. Hét számot — ezeket A, B, C, D, E, F és G jelöli — előállítottunk prímtényezős alakban. A számok betűjele mellé helyeztük prímkártyáikat, de néhány kártyát lefordítva tettünk az asztalra, ezekből csak a hátoldalukra rajzolt x látható.

A: $\boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{x}\ \boxed{x}$ D: $\boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{3}$

B: $\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{x}$ E: $\boxed{5}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{x}$

C: $\boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}$ F: $\boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{x}$

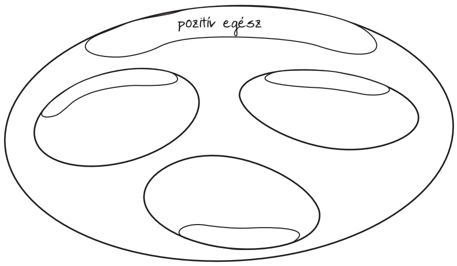
G: $\boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{x}$

Az A, B, C, D, E, F, G számok közül melyikre igaz?

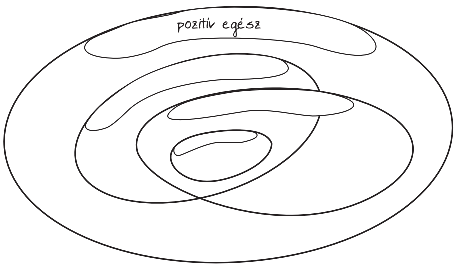
a) Lehet, hogy négyzetszám; **b)** Biztosan páros;
c) Biztos, hogy nem négyzetszám; **d)** Biztos, hogy osztható 9-cel;
e) Biztosan nem köbszám (azaz nem harmadik hatvány);
f) Biztos, hogy nem osztható 35-tel; **g)** Biztosan 0-ra végződik;
h) Lehet, hogy osztható 12-vel; **i)** Biztos, hogy nem 0-ra végződik;
j) Biztos, hogy nem osztható 8-cal.

Alább elárulunk még egy-egy információt az A, B, C, D, E, F, G számokról. Így ki lehet találni a letakart prímeket?

k)
A: négyzetszám.
B: 8 többszöröse.
C: 0-ra végződik és osztható 7-tel.



4.24.3. ábra.



4.24.4. ábra.

D: páros négyzetszám.
E: 15 többszöröse.
F: ha még egy hármas prímkártyát hozzátennénk, négyzetszám lenne.
G: A kilencedrésze köbszám.

4.27. [16] *Osztójáték*
a) Két játékos felváltva mondhatja a 24 pozitív osztóit, de a 24-et, és már kimondott osztó osztóját nem lehet mondani. Az veszt, akinek már nem marad osztó.
A kezdőnek vagy a másodiknak szóló játékosnak kedvező-e a játék? Mi a nyerő stratégia?
b) Mi a helyzet, ha a 24 helyett a 36 osztóival játszunk?

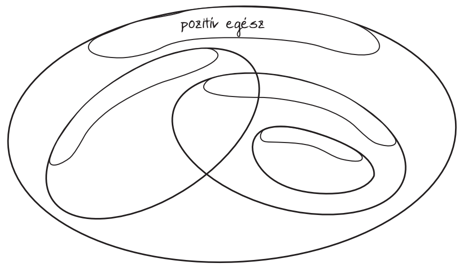
4.28. [16] Rajzoljuk le
a) 32, **b)** 30, **c)** 60
osztóit és tegyünk közéjük piros, kék és zöld nyilakat úgy, hogy bármely osztótól a kétszereséhez piros, a háromszorosához kék, az ötszöröséhet zöld nyíl mutasson. Próbáljuk úgy elrendezni az osztókat, hogy az egyforma színű nyilak egymással párhuzamosak legyenek!

4.29. [19] Egyetlen olyan szám van, amelynek pontosan egy osztója van. Melyik az? Pontosan két osztója a prímszámoknak van. Soroljunk fel néhányat!
- Keressünk olyan számokat, amelyeknek pontosan három osztójuk van. Melyek ezek a számok?
- Keressünk olyan számokat, amelyeknek négy osztójuk van!

4.30. [19] Ha próbálgatással keressük egy szám osztóit, meddig kell elmenni a próbálgatással?

4.31. [19] Hány osztója van a következő számoknak:
160 366 1991?

4.32. [19] Egy n pozitív egész szám összes osztójának a számát $d(n)$-nel jelöljük. Az $n \mapsto d(n)$ függvény úgynevezett számelméleti függvény. Folytassuk a táblázat kitöltését!



4.24.5. ábra.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2					

n	13	14	15	16	17	18	20	21	24	30	31	32
$d(n)$												

4.33. [19] Határozzuk meg $d(n)$ értékét (k tetszőleges pozitív egész számot, p tetszőleges prímszámot jelent)!

n	$d(n)$	n	$d(n)$	n	$d(n)$	n	$d(n)$	n	$d(n)$
3		5		11		13		p	
3^2		5^2		11^2		13^2		p^2	
3^3		5^3		11^3		13^3		p^3	
3^4		5^4		11^4		13^4		p^4	
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
3^k		5^k		11^k		13^k		p^k	

4.34. [19] Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!
$d(2^3 \cdot 3^2) =$ $d(2^3 \cdot 5^2) =$ $d(19 \cdot 23) =$ $d(19 \cdot 23 \cdot 31) =$
$d(2 \cdot 5^3 \cdot 7^2) =$

4.35. [19] Próbáljuk megfogalmazni és képlettel leírni, hogy ha ismeretes egy szám prímtényezős felbontása, miként állapítható meg, hogy összesen hány osztója van!

4.36. [19] Hány osztója van a következő számoknak:
720 960 30 000?

4.37. [19] Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek
a) 9 osztója van **b)** 10 osztója van?

4.38. [19] Keressünk olyan számokat, amelyeknek pontosan
a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6
osztója van!

4.39. [19] Van-e olyan 1000-nél kisebb szám, amelynek
a) pontosan 30 **b)** több mint 30
osztója van?

4.40. [19] 6 melyik hatványának van pontosan
a) 24 **b)** 49 **c)** 100
osztója?

4.41. [19] Van-e olyan 33-mal osztható szám, amelynek pontosan 33 osztója van?

4.42. **a)** Keressünk olyan pozitív egész számot, amely osztható 3-mal is és 4-gyel is, és 6 különböző pozitív osztója van!

b) Van-e olyan 3-mal is és 4-gyel is osztható pozitív egész, amelynek 7 különböző osztója van?

4.43. Hány olyan osztója van 3600-nak, amely

a) osztható 2-vel?

b) osztható 6-tal?

c) négyzetszám?

d) ha osztható 2-vel, akkor 3-mal is?

4.44. A 14 osztói nagyság szerinti sorrendben: 1, 2, 7, 14. Alább megadjuk néhány pozitív egész szám osztóinak hiányos listáját. Találjuk ki mely számok osztói vannak nagyság szerint felsorolva!

a) 1, 3, A, B, 15, C.

b) 1, D, E, 8, F, G.

c) 1, H, I, J, 22, K.

d) 1, L, M, 9, N, O.

4.45. Egy számnak tíz osztója van. Mi lehet ez a szám, ha az osztók közt van a

a) 32?

b) 6?

c) 9 és a 11?

4.46. [8] Egy törtszámról a következőket tudjuk:

- egyszerűsített alakja $\frac{2}{5}$;
- számlálójának és nevezőjének összege kétjegyű négyzetszám.

Melyik ez a törtszám?

4.47. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelyiknek a 245 szöröse négyzetszám?

4.48. Lehet-e két négyzetszám szorzata és hányadosa is négyzetszám?

4.49. **a)** Keressünk olyan pozitív egész számot, amelyet 2-vel szorozva négyzetszámot, 3-mal szorozva köbszámot kapunk!

b) Adjunk meg olyan számot, amelyre a fentiek mellett még az is igaz, hogy ötszöröse teljes ötödik hatvány!

4.50. (M) Készítsünk algoritmust, ami megadja egy szám prímtényezős felbontását.

4.51. (M) Készítsünk algoritmust, ami a prímtényezős alakból előállítja az eredeti számot!

5. FEJEZET
Közös osztó, közös többszörös

5.1. [19] Egy kikötőben 2000. január 2-án együtt volt 4 hajó. Tudjuk, hogy az első hajó 4 hetenként, a második 8 hetenként, a harmadik 12 hetenként, a negyedik 16 hetenként fordul meg a kikötőben. Mikor találkoznak legközelebb ebben a kikötőben?

5.2. [19] Matrózok, akik jó barátok voltak, egy szigeten kincset találtak: 48 egyforma ezüst tálkát, 72 egyforma ezüst hamutartót és 100 egyforma igazgyöngyöt. Nagy szerencséjük volt, mert éppen annyian voltak, hogy mind a háromféle ajándékon igazságosan tudtak osztozni. Hányan lehettek?

5.3. [19] Nézzük a 240-et és a 108-at!

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad$ $108 = 2^2 \cdot 3^3$.

Keressünk

a) közös osztókat! $\quad$ **b)** közös többszörösöket!

Van-e olyan közös osztójuk, amely

c) 10-zel osztható? $\quad$ **d)** 7-tel osztható? $\quad$ **e)** páratlan?

Van-e olyan közös többszörösük, amely

f) 10-zel osztható? $\quad$ **g)** 7-tel osztható? $\quad$ **h)** páratlan?

5.4. [19] 240 és 108 közös osztói között van-e

a) legkisebb? $\quad$ **b)** legnagyobb?

240 és 108 közös többszörösei között van-e

c) legkisebb? $\quad$ **d)** legnagyobb?

5.5. [19] A prímtényezős alak segítségével megadjuk néhány szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, köztük néhányat hibásan. Keressük meg a jókat, a hibásakat pedig javítsuk ki!

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$

$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$ $\quad$ $108 = 2^2 \cdot 3^3$

$(60,\ 72) = 2 \cdot 3 = 6$ $\quad$ $(60,\ 72) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

$(60,\ 72) = 2^2 \cdot 3 = 12$ $\quad$ $[60,\ 72] = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$[60,\ 72] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ $\quad$ $(60,\ 396) = 2^2 \cdot 3 = 12$

$(60,\ 396) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ $\quad$ $[60,\ 396] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$

$[60,\ 396] = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 5940$ $\quad$ $(60,\ 108) = 2^2 \cdot 3 = 12$

$(60,\ 108) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ $\quad$ $[60,\ 108] = 2^2 \cdot 3^3 = 108$

$[60,\ 108] = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$

5.6. [19] Határozzuk meg a következő számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

a) $2^3 \cdot 3^2$ és $2^5 \cdot 3$ $\quad$ **b)** $2^4 \cdot 3^5$ és $3^3 \cdot 7$

c) $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^6$ és $3^5 \cdot 5^3 \cdot 13^2$.

5.7. [19] Számítsuk ki a következőket!

$(72, 396) =$	$[72, 396] =$	$(72, 108) =$
$[72, 108] =$	$(396, 108) =$	$[396, 108] =$
$(60, 72, 108) =$	$[60,\ 72,\ 108] =$	$(60, 72, 108, 396) =$
$[60,\ 72,\ 108,\ 396] =$		

5.8. [19] Milyen x-re igazak a következő egyenlőségek?
$[x,\ 2 \cdot 3] = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\quad [x,\ 2^4] = 2^4 \cdot 3$ $\quad (x,\ 2^4 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3$ $\quad (x,\ 3 \cdot 5) = 1$

5.9. [19] Keressünk olyan a és b számokat, amelyeknek nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk, vagyis relatív prímek!

a	
b	

5.10. [19] Keressünk olyan számokat, amelyek a 300-hoz képest relatív prímek!

5.11. [19] 35, 76 és 28 három olyan szám, melyre $(35, 76, 28) = 1$, vagyis relatív prímek. Keressünk még ilyen számhármasokat!

a	
b	
c	

5.12. [19] Keressünk olyan számokat, melyekre $(a, b, c) = 1$, és

a) $(a, b) = 2$	$(a, c) = 3$	$(b, c) = 5$
b) $(a, b) = 1$	$(a, c) = 1$	$(b, c) = 1$
c) $(a, b) = 2$	$(a, c) = 2$	$(b, c) = 3$
d) $(a, b) = 2$	$(a, c) = 7$	$(b, c) = 3$
e) $(a, b) = 2$	$(a, c) = 3$	$(b, c) = 3$

5.13. [19] Keressünk olyan számokat, melyekre

a) $(a, b, c) = 1$	és	$[a, b, c] = 30$
b) $(a, b, c) = 1$	és	$[a, b, c] = 60$
c) $(a, b, c) = 2$	és	$[a, b, c] = 20$
d) $(a, b, c) = 2$	és	$[a, b, c] = 40$
e) $(a, b, c) = 3$	és	$[a, b, c] = 180$

5.14. [19] Milyen x-re igazak a következő egyenlőségek?

a) $(x, 1503) = 2 \cdot 3^2 = 18$ **b)** $(x, 1503) = 3^2 = 9$

c) $[x, 1503] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 167 = 6012$ **d)** $(x, 1503, 6012) = 167$

e) $[x, 12] = 12 \cdot x$

5.15. (M) [19] Írjuk le, hogy a prímtényezős alakok ismeretében hogyan állítható elő véges sok szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse!

5.16. [19] Prímtényezős alakok segítségével határozzuk meg 120, 280 és 1000 legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!

5.17. [19] Tudjuk, hogy a 12 közös osztója 600-nak és 480-nak.

a) Igaz-e, hogy $12|(600, 480)$?

b) Keressünk még közös osztókat, és figyeljük meg, milyen kapcsolat van a közös osztók és a legnagyobb közös osztó között!

5.18. [19] **a)** Tudjuk, hogy a 960 közös többszöröse 240-nek és 160-nak. Igaz-e, hogy $[240, 160] \mid$ $\mid 960$?

b) Keressünk még közös többszörösöket, és figyeljük meg, milyen kapcsolat van a közös többszörösök és a legkisebb közös többszörös között!

5.19. [19] Keressünk két olyan számot, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 1 (relatív prímek)! Számítsuk ki a legkisebb közös többszörösüket!

a) Mit tapasztalunk?

b) Keressünk még relatív prím számpárokat, és ellenőrizzük a sejtést!

5.20. [19] Vizsgáljuk meg a következő szorzatokat! Milyen érdekességet tapasztalunk?

$(12, 35) \cdot [12, 35] =$ $\quad$ $(12, 15) \cdot [12, 15] =$ $\quad$ $(8, 9) \cdot [8, 9] =$ $\quad$ $(8, 12) \cdot [8, 12]$

$(8, 24) \cdot [8, 24] =$

Fogalmazzuk meg általánosan, milyen kapcsolat van $(a, b), a \cdot b$ és $[a, b]$ között! Indokoljuk az állítást!

5.21. [19] Keressünk olyan x számokat, amelyekre igazak a következő egyenlőségek!

a) $(2^x \cdot 3^2, 2^5 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3$ $\quad$ **b)** $(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2, x) = 3$ $\quad$ **c)** $(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2, x) = 20$

d) $[3 \cdot 5^2 \cdot 7, x] = 1050$ $\quad$ **e)** $[3^x \cdot 5^3, 2 \cdot 3^3] = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ $\quad$ **f)** $[3 \cdot 5^2 \cdot 7, x] = 725$

5.22. [19] Igaz-e, hogy

a) ha egy szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor 24-gyel is osztható;

b) ha egy szám osztható 3-mal és 8-cal, akkor 24-gyel is osztható;

c) ha egy szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor 12-vel is osztható?

5.23. [19] Keressünk példát arra, hogy egy szám osztható 3-mal és 15-tel, de nem osztható 45-tel!

Ha egy szám osztható 3-mal és 15-tel, mivel osztható még biztosan?

5.24. [19] Keressünk olyan a és b számokat, amelyekre igaz az, hogy minden szám, amely osztható a-val is és b-vel is, osztható $a \cdot b$-vel is!

Keressünk olyan számpárokat is, amelyekről már ránézésre látszik, hogy nem igaz rájuk az állítás!

Próbáljuk megfogalmazni, hogy milyen a-ra és b-re igaz az állítás!

5.25. [19] Egy szám osztható a-val és b-vel. Milyen számokkal való oszthatóságra következtethetünk még ebből?

5.26. [19] Igaz-e mindig, hogy ha egy szám osztható a-val és b-vel, akkor osztható a és b legkisebb közös többszörösével, vagyis $[a, b]$-vel is? Nézzük meg még néhány példán!

5.27. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amely az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok mindegyikével osztható?

5.28. Három szám legnagyobb közös osztója 1. Igaz-e, hogy a számok páronként relatív prímek?

5.29. Határozzuk meg mindazokat az a és b természetes számokat, amelyekre igaz, hogy $a \cdot b =$ $= 360$ és a és b legnagyobb közös osztója 15.

5.30. Két pozitív egész szám közül az egyik a 100. Mi lehet a másik szám, ha a két szám legkisebb közös többszöröse tízszer nagyobb, mint a két szám legnagyobb közös osztója?

5.31. Határozzuk meg $A = 2001^{2000} + 2000^{2001}$ és $B = 2000 \cdot 2001$ legnagyobb közös osztóját.

5.32. Hány olyan a, b számpár van, amelyre $[a, b] = 60$?

5.33. Igaz-e az alábbi állítás vagy annak megfordítása?
Ha két pozitív egész összegéhez hozzáadva a legnagyobb közös osztójukat a legkisebb közös többszörösüket kapjuk, akkor a két eredeti szám aránya 2:3.

5.34. (M) Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját számológép használata nélkül!

a) 12345678 és 12345679 **b)** 12345678 és 12345680 **c)** 12345677 és 12345679

d) 12345678 és 12345681 **e)** 12345677 és 12345680 **f)** 12345678 és 12345714

5.35. (M) Készítsünk algoritmust, ami beolvas két számot és meghatározza a legnagyobb közös osztójukat.

5.36. (M) Készítsünk algoritmust, ami beolvas két számot és meghatározza a legkisebb közös többszörösüket.

5.37. (M) Készítsünk algoritmust, amely megvalósítja a hatványozás műveletét. Beolvassa az a (alapot) és a b (kitevőt) és eredményképpen kiírja a^b-t.

6. FEJEZET

Közös osztó, közös többszörös (teszt)

A 6.1-6.10. feladatok a „közép” szintnek, a 6.11-6.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

6.1. (M)
Mennyi a 96 és a 210 legnagyobb közös osztója?
A) 2 **B)** 3 **C)** 16 **D)** 6 **E)** 7

6.2. (M)
Mennyi a $2^3 \cdot 5^6 \cdot 7^8$ és a $2^7 \cdot 5^3 \cdot 7^6$ legnagyobb közös osztója?
A) $2 \cdot 3 \cdot 5$ **B)** $3^2 \cdot 6^5 \cdot 8^7$ **C)** $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^6$ **D)** $2^7 \cdot 5^6 \cdot 7^8$ **E)** $2^5 \cdot 5^7 \cdot 7^2$

6.3. (M)
Mennyi a 8! és a $\binom{8}{3}$ legnagyobb közös osztója?
A) 24 **B)** 56 **C)** 120 **D)** 336 **E)** 8

6.4. (M)
Mennyi a 450, a 300 és a 180 legnagyobb közös osztója?
A) 30 **B)** 36 **C)** 45 **D)** 60 **E)** 90

6.5. (M)
Melyik n-re igaz, hogy $(n,72) = 18$?
A) $n = 144$ **B)** $n = 108$ **C)** $n = 180$ **D)** $n = 126$ **E)** $n = 84$

6.6. (M)
Mennyi a 96 és a 210 legkisebb közös többese?
A) 3360 **B)** 2196 **C)** $96 \cdot 210$ **D)** 43210 **E)** 840

6.7. (M)
Mennyi a $2^3 \cdot 5^6 \cdot 7^8$ és a $2^7 \cdot 5^3 \cdot 7^6$ legkisebb közös többese?
A) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^6$ **B)** $2^7 \cdot 5^6 \cdot 7^8$ **C)** $2^6 \cdot 5^6 \cdot 7^6$ **D)** $3^7 \cdot 7^6 \cdot 5^8$ **E)** $2^8 \cdot 5^7 \cdot 7^6$

6.8. (M)
Mennyi a 8! és a 9! legkisebb közös többese?
A) 72! **B)** 72
C) 9! **D)** 8!
E) Az előző négy egyike sem.

6.9. (M)
Mennyi a 450, a 300 és a 180 legkisebb közös többese?
A) 1800 **B)** 1350 **C)** 3000 **D)** 900 **E)** 720

6.10. (M)
Melyik n-re igaz, hogy $[n,180] = 720$?
A) 36 **B)** 270 **C)** 210 **D)** 16 **E)** 40

6.11. (M)
Mennyi a $6^6 \cdot 10^{10}$ és a $10^6 \cdot 6^{10}$ legnagyobb közös osztója?
A) $60^6 \cdot 2^{10}$ **B)** 60^6 **C)** $6^6 \cdot 2^{10}$ **D)** $60^6 \cdot 2^4$ **E)** $6^16 \cdot 5^6$

6.12. (M)
Határozzuk meg következő számok legnagyobb közös osztóját: 4!, 6!, 12!, 18!.
A) 24 **B)** 36
C) 18! **D)** 2
E) Az előző négy egyike sem.

6.13. (M)
Mennyi a 1000234000567 és a 1000234000576 legnagyobb közös osztója?
A) 319 **B)** 7 **C)** 1 **D)** 3 **E)** 38

6.14. (M)
Mennyi a $12345678 \cdot 12345676$ és az 12345677^2 legnagyobb közös osztója?
A) 1234567 **B)** 2
C) 3 **D)** 11
E) Az előző négy egyike sem.

6.15. (M)
Mennyi a $19^4 - 1$ és az $21^4 - 1$ legnagyobb közös osztója?
A) 1 **B)** 20 **C)** 9 **D)** 40 **E)** 360

6.16. (M)
Mennyi a $6^6 \cdot 10^{10}$ és a $10^6 \cdot 6^{10}$ legkisebb közös többese?
A) $36 \cdot 100$ **B)** 60^16 **C)** $2^6 \cdot 30^{10}$ **D)** $60^6 \cdot 2^4$ **E)** $6^16 \cdot 5^10$

6.17. (M)
Határozzuk meg a következő számok legkisebb közös többesét: $(4!)^{2!}$, $(6!)!$, $120!$, $(18^2)!$.
A) $16 \cdot 720 \cdot 120 \cdot 324$ **B)** $720!$ **C)** $(12!)!$
D) $(4^2)!$ **E)** $180!$

6.18. (M)
Mennyi a 999 999 999 és az $10^9 + 1$ legkisebb közös többese?
A) $999 \cdot 30^2$ **B)** 999 999 999 999 999
C) $999 \cdot 1001001001001001$ **D)** $(27 \cdot 37)^9$
E) $10^{18} + 1$

6.19. (M)
Hány olyan $a;b$ számpár van, amelyre $(a, b) = 12$ és $[a, b] = 360$? (a és b pozitív egészek.)
A) 8 **B)** 12
C) 4 **D)** 36
E) Az előző négy egyike sem.

6.20. (M)

Hány olyan a, b számpár van, amelyre $[a, b] = 360$? (a és b pozitív egészek. A rendezett számpárok számára vagyunk kíváncsiak, így pl. az [1,360] és [360,1] különbözőnek számít.)

A) 105 **B)** 90

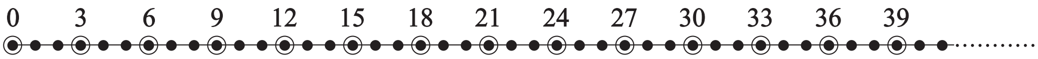
C) 24 **D)** 48

E) Az előző négy egyike sem.

7. FEJEZET
Maradékos osztás

7.1. Soroljuk fel az alábbi halmazok elemeit!
$H = \{4k + 1 | k$ egyjegyű pozitív egész$\}$ $\qquad G = \{3n - 1 | n \in \mathbb{Z}, n^2 < 30\}$

7.2. [19] A számsorban a 0-tól kezdve minden harmadik szám osztható 3-mal. Ezt a 7.0.1. számegyenesen is ábrázoltuk.



7.2.1. ábra.

Egyetlen kifejezéssel is felírhatjuk az összes 3-mal osztható számot: $3k$, ahol k természetes szám.

a.1) A $3k$ kifejezés melyik 3-mal osztható számot adja meg, ha
$k = 0$; $\qquad k = 3$; $\qquad 4k = 123$?

a.2) Milyen k-t kell választani ahhoz, hogy megadjuk a 9000-et?

b.1) A 7.0.1. számvonalon jelöljünk meg x-szel néhány olyan számot, amely 3-mal osztva 1-et ad maradékul! Adjuk meg ezeket a számokat egyetlen kifejezéssel!

b.2) Hányadik helyen áll a most megjelölt számok sorozatában az 511 és a 9010?

b.3) Melyik szám áll a 128. helyen?

c.1) Milyen tulajdonságúak az eddig meg nem jelölt számok? Adjuk meg ezeket a számokat is egyetlen kifejezéssel!

c.2) Ebben a sorozatban hányadik helyen áll az 512?

c.3) Melyik szám áll az 529. helyen?

7.3. a) Tudjuk, hogy az x szám néggyel osztva 1 maradékot ad. Következik-e ebből, hogy kettővel osztva is 1 a maradék?

b) Tudjuk, hogy az x szám kettővel osztva 1 maradékot ad. Következik-e ebből, hogy néggyel osztva is 1 a maradék?

7.4. [19]

a) Egy szám 10-zel osztva 0 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 5-tel osztva?
b) Egy szám 5-tel osztva 0 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 10-zel osztva?
c) Egy szám 10-zel osztva 1 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 5-tel osztva?
d) Egy szám 5-tel osztva 1 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 10-zel osztva?
e) Egy szám 3-mal osztva 0 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 9-cel osztva?
f) Egy szám 9-cel osztva 0 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 3-mal osztva?
g) Egy szám 3-mal osztva 1 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 9-cel osztva?
h) Egy szám 9-cel osztva 1 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 3-mal osztva?
i) Egy szám 9-cel osztva 2 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 3-mal osztva?
j) Egy szám 3-mal osztva 2 maradékot ad. Mekkora maradékot ad 9-cel osztva?

7.5. [13] Igaz-e, hogy „bármely” hét egymást követő természetes szám összege osztható héttel?

7.6. [19] Próbáljuk meg felbontani a 60-at és a 63-at is két szám összegére úgy, hogy
a) mindkettő osztható legyen 6-tal;
b) csak az egyik legyen 6-tal osztható!

7.7. [19] Keressünk két olyan
a) 17-tel nem osztható számot, amelynek az összege osztható 17-tel;
b) 11-gyel nem osztható számot, amelynek az összege osztható 11-gyel;
c) számot, amelynek az összege osztható 7-tel! Milyen esetek lehetségesek?

7.8. [19] Ebben a feladatban egész számokról van szó. Az alábbi A, B oszlopban levő állításokról tudjuk, hogy igazak. Döntsük el, hogy a C oszlopban található állítás biztosan **i**gaz, **l**ehet igaz vagy biztosan **h**amis. Írjuk a megfelelő betűt a C oszlop mellé!

A	B	C	
x ötös maradéka 2	y ötös maradéka 1	$x+y$ ötös maradéka 3	
$x+y$ ötös maradéka 3	x ötös maradéka 2	y ötös maradéka 1	
x ötös maradéka 2	y ötös maradéka 1	$x+y$ tízes maradéka 3	
x osztható 7-tel	y osztható 7-tel	$x+y$ osztható 7-tel	
x nem osztható 7-tel	y nem osztható 7-tel	$x+y$ nem osztható 7-tel	

7.9. [19] Keressünk két olyan számot, amelynek a különbsége
a) osztható 7-tel; **b)** osztható 8-cal; **c)** osztható 9-cel!

7.10. [19] Legföljebb hány olyan számot tudsz fölírni, amelyek közül semelyik kettő különbsége sem osztható 9-cel?

7.11. Pistike nem tud 40-nél nagyobb számokkal számolni. Azt a feladatot kapta, hogy számolja ki, milyen maradékot ad a $17+38+9+21+35$ összeg 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal osztva!
Javasoljunk módszert Pistikének! Fogalmazzunk meg általános érvényű állítást!

7.12. Ebben a feladatban egész számokról van szó. Az alábbi A, B oszlopban levő állításokról tudjuk, hogy igazak. Döntsük el, hogy a C oszlopban található állítás biztosan **i**gaz, **l**ehet igaz vagy biztosan **h**amis. Írjuk a megfelelő betűt a C oszlop mellé!

A	B	C	
x hármas maradéka 1	y hármas maradéka 2	$x \cdot y$ hármas maradéka 2	
x négyes maradéka 2	y négyes maradéka 2	$x \cdot y$ négyes maradéka 2	
x ötös maradéka 2	y ötös maradéka 3	$x \cdot y$ ötös maradéka 1	
$x \cdot y$ hármas maradéka 2	y hármas maradéka 2	x hármas maradéka 1	
$x \cdot y$ négyes maradéka 2	y négyes maradéka 2	x négyes maradéka 1	
$x \cdot y$ ötös maradéka 1	y ötös maradéka 3	x ötös maradéka 2	

7.13. [19] Fogalmazzuk meg, hogy ha két számot összeszorzunk, a szorzat osztási maradéka milyen kapcsolatban van a tényezők osztási maradékával!

7.14. Igaz-e, hogy minden 3-nál nagyobb prímszámnak van 6-tal osztható szomszédja?

7.15. Bontsuk föl a 190-et négy olyan különböző pozitív egész szám összegére, amelyek 13-as maradéka azonos!

7.16. Előbb a 100-at, majd a 90-et elosztottuk ugyanazzal a számmal. Az első esetben 4 volt az osztás maradéka, a másodikban 18. Mi lehetett az osztó?

7.17. Melyik az a négyjegyű szám, amellyel a 21949-et elosztva 37-et, 25949-et elosztva pedig 53-at kapunk maradékul?

7.18. Egy iskola diákjai azt tapasztalták, hogy akár kettesével, akár hármasával, akár négyesével, akár ötösével, akár hatosával, akár hetesével, akár nyolcasával állnak sorba, mindenképpen egy diák magára marad az utolsó sorban. Hány tanulója van az iskolának, ha tudjuk, hogy ezernél nincs több?

7.19. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amely 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at és 6-tal osztva 4-et ad maradékul?

7.20. Adjunk meg minél több egész számot úgy, hogy
a) semelyik kettő különbsége se; **b)** semelyik kettő összege se;
legyen osztható 5-tel!

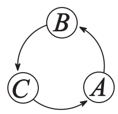
7.21. Igaz-e, hogy öt egész szám között mindig van három, amelyek összege osztható 3-mal?

7.22. (MS) Milyen p prímekre lesz $2p+1$, $3p+2$, $4p+3$ és $6p+1$ mindegyike prím?

7.23. Egy A pozitív egész 3-mal osztva 1 maradékot, 37-tel osztva 33 maradékot ad. Mennyi maradékot ad A, ha 111-gyel osztjuk?

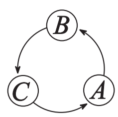
7.24. Adjunk meg minél több egész számot úgy hogy semelyik
a) kettő különbsége, **b)** négyzetének különbsége
se legyen osztható 10-zel!

7.25. Három gyermek – A, B és C – el szeretné dönteni, hogy melyikük kapja az utolsó darab cukrot.



7.25.1. ábra.

a) A felrajzol egy táblát (lásd a 7.0.1. ábrát) és a következőt javasolja: „Tegyünk egy bábút az A mezőre, valamelyikünk dobjon (szabályos) dobókockával és nézzük meg, hogy ha lelépjük a dobott számot a bábúval, akkor melyikünk mezőjére jut. Legyen azé a cukorka!”
b) B módosítást javasol: „Így unalmas, vegyük inkább a dobott szám négyzetét és annyit lépjünk a bábúval A-ból!”



7.25.2. ábra.

c) Közben megjön D is, ezért C új táblát rajzol (lásd a 7.0.2. ábrát) és így szól: „Játsszunk ezen a pályán és lépjük le a dobott számot A-ból indulva!”
d) „Szerintem inkább a dobott szám négyzetét lépjük le itt” – javasolja D!
A négy sorsolási variáció közül melyek igazságosak és a nem igazságosak kinek kedveznek?

7.26. Adjunk meg minél több egész számot úgy, hogy
a) semelyik kettő összege és különbsége se;
b) semelyik kettő négyzetének különbsége se
legyen osztható 5-tel!

7.27. Milyen számjegyre végződik 2^{1997}?

7.28. Határozzuk meg $2002^{2005} + 2009^{2005}$ utolsó számjegyét

7.29. A $2, 2^2, 2^3, \ldots$ sorozatban található-e két olyan különböző szám, amelyek különbsége osztható 100-zal?

7.30. Osztható-e 100-zal a $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{18} + 7^{19} + 7^{20}$ összeg?

7.31. [19] Van-e a következő sorozatokban négyzetszám?
a) $2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, \ldots$ **b)** $11, 21, 31, 41, 51, 61, \ldots$
c) $12, 22, 32, 42, 52, 62, \ldots$

7.32. Vizsgáljuk meg az 1, 14, 144, 1444, 14444, ... számokat! Közülük melyek négyzetszámok?

7.33. [19] Milyen x és y pozitív egész számok lehetnek megoldásai a következő egyenletnek?
a) $x^2 = 4y + 1$ **b)** $x^2 = 4y + 2$ **c)** $x^2 = 4y + 3$

7.34. [19] Milyen maradékot adhatnak 8-cal osztva a négyzetszámok?

7.35. [19] Milyen p prímszámra lehet a $p^2 + 8$ prímszám?

7.36. [19] 2^{100} milyen maradékot ad 10-zel osztva?

7.37. [19] 3^{100} milyen maradékot ad 7-tel osztva?

7.38. [19] Mi a maradék, ha 2^{1988}-at elosztjuk 7-tel?
A 2^n szám 7-tel való osztási maradéka n melyik tulajdonságától függ?

7.39. [19] **a)** Határozzuk meg a 3^{207} hatvány 5-tel való osztási maradékát!
b) Mitől függ a 3^n hatvány 5-tel való osztási maradéka?

7.40. Bizonyítsuk be, hogy
a) $10^{20} + 8$ osztható 72-vel! **b)** $10^{33} + 8$ osztható 9-cel! **c)** $10^{10} + 14$ osztható 6-tal!

7.41. [19] Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $3n^2 + 2n + 1$ nem osztható 5-tel!

7.42. Lehet-e négy egymást követő pozitív egész összege négyzetszám?

7.43. [19] Bizonyítsuk be, hogy ha x pozitív egész szám, akkor
a) $5 \mid x^5 - x$; **b)** $30 \mid x^5 - x$;

7.44. (M) Készítsünk algoritmust, ami az osztás művelete nélkül megvalósítja
a) a *mod* **b)** a *div*
funkciót.

8. FEJEZET

Maradékos osztás (teszt)

A 8.1-8.10. feladatok a „közép” szintnek, a 8.11-8.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

8.1. (M)

Jelölje x a $H = \{4k-1 | k \quad \text{egyjegyű pozitív egész}\}$ halmaz elemszámát, h pedig H egy elemét. Mi lehet x és h?

A) $x = 10$, $h = 4$ **B)** $x = 9$, $h = 5$ **C)** $x = 10$, $h = 3$ **D)** $x = 9$, $h = 19$ **E)** $x = 9$, $h = 39$

8.2. (M)

Legyen a $G = \{3n+1 | n \in \mathsf{Z}, n^2 < 30\}$ halmaz legnagyobb eleme x, g pedig G egy további eleme. Mi lehet x és g?

A) $x = 25$, $g = 4$ **B)** $x = 100$, $g = 76$ **C)** $x = 76$, $g = 31$ **D)** $x = 74$, $g = 16$ **E)** $x = 76$, $g = 9$

8.3. (M)

Melyik x-re igaz, hogy „bármely" x egymást követő természetes szám összege osztható hattal?

A) $x = 6$ **B)** $x = 3$ **C)** $x = 12$ **D)** $x = 9$ **E)** $x = 18$

8.4. (M)

Milyen alakú lehet x és y, ha $58 = x + y$?

A) $x = 4k+1$, $y = 4k+3$ **B)** $x = 3k+1$, $y = 3n+1$ **C)** $x = 5k+2$, $y = 5n-1$ **D)** $x = 4k+1$, $y = 4n-3$ **E)** $x = 4n+2$, $y = 4k+3$

8.5. (M)

Tudjuk, hogy x osztható 7-tel, y pedig nem osztható 7-tel. Melyik állítás lesz biztosan igaz?

A) $x + y$ osztható 7-tel **B)** xy osztható 7-tel **C)** $7x + y$ osztható 7-tel **D)** $\frac{xy}{7}$ osztható 7-tel **E)** $x - y$ osztható 7-tel

8.6. (M)

Legföljebb hány olyan számot tudsz fölírni, amelyek közül semelyik kettő különbsége sem osztható 13-mal?

A) 6 **B)** 7 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

8.7. (M)

x hetes maradéka 3, y hetes maradéka 5. Mi lehet xy 7-es maradéka? **A)** Lehet 1,3 vagy 5. **B)** Csak 4 lehet. **C)** Bármilyen lehet, csak 0 nem. **D)** Attól függ, pozitív, vagy negatív az x és az y. **E)** Csak 1 lehet.

8.8. (M)

Előbb a 200-at, majd a 190-et elosztottuk ugyanazzal a számmal. Az első esetben 4 volt az osztás maradéka, a másodikban 22. Mi lehetett az osztó?

A) 14 **B)** 28

C) 49 **D)** Nincs ilyen szám.

E) Több ilyen osztó is van.

8.9. (M)

Melyik az a legkisebb pozitív egész, amely 3-mal osztva 2-őt, 4-gyel osztva 3-at, 5-tel osztva 4-et és 6-tal osztva 5-öt ad maradékul?

A) 29 **B)** 49 **C)** 59 **D)** 119 **E)** 89

8.10. (M)

Mi a 6-os maradéka a következő számnak: $1000^{1001} + 1001^{1000}$?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

8.11. (M)

Egy A pozitív egész 9-cel osztva 4 maradékot, 11-gyel osztva 6 maradékot ad. Mennyi maradékot ad A, ha 99-cel osztjuk?

A) Ennyi adatból nem határozható meg. **B)** 40

C) 50 **D)** 67

E) 94

8.12. (M)

Melyik a legnagyobb n, amire megadhatunk n egész számot úgy, hogy semelyik kettő összege és különbsége se legyen osztható 7-tel!

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

8.13. (M)

Határozzuk meg $2007^{2002} + 2003^{2008}$ utolsó számjegyét.

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

8.14. (M)

Mely n-re nem lesz igaz: A $2, 2^2, 2^3, \ldots$ sorozatban található két olyan különböző szám, amelyek különbsége osztható n-nel? **A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** Az előző négy szám egyike sem jó válasz.

8.15. (M)

Mely n-re osztható 20-szal a $13 + 13^2 + 13^3 + \ldots + 13^n$ összeg?

A) 13 **B)** 78

C) 76 **D)** 1001

E) Az előző négy egyike sem.

8.16. (M)

Milyen p prímszámra lehet a $p^4 + 4$ prímszám?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5

D) 7 **E)** Nincs ilyen prím.

8.17. (M)
Milyen maradékot adhatnak 9-cel osztva a négyzetszámok?

A) 0,1 és 4 **B)** 0, 1 és 7
C) 3 és 6 kivételével bármi lehet **D)** 0, 1, 4 és 7
E) Az előző négy egyike sem pontos válasz.

8.18. (M)
Melyik n esetén teljesül, hogy $n|10^{24}-22$?
A) 28 **B)** 21 **C)** 12 **D)** 63 **E)** 18

8.19. (M)
Mi a maradék, ha 3^1848-t elosztjuk 7-tel?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

8.20. (M)
Melyik a legnagyobb n, amelyikre igaz, hogy minden pozitív egész x esetén $n|x^7-x$?
A) 126 **B)** 42 **C)** 63 **D)** 18 **E)** 21

9. FEJEZET

Oszthatósági szabályok

9.1. [19] Ez a példa két lényegesen különböző részből áll.

a) Mindegyik állításnak meg kell fogalmazni a megfordítását. A $\boxed{\text{ha } A\text{, akkor } B}$ állítás megfordításán a $\boxed{\text{ha } B\text{, akkor } A}$ állítást értjük.

b) Mindegyik állításról — és megfordításáról — el kell dönteni, hogy igaz-e, és a választ indokolni kell.

Állítás	**Megfordítása**
Ha egy szám osztható 2-vel, akkor utolsó számjegye 2.	Ha egy szám utolsó számjegye 2, akkor osztható 2-vel.
Ha egy szám osztható 2-vel, akkor utolsó számjegye páros.	
Ha egy szám osztható 3-mal, akkor utolsó számjegye is osztható 3-mal.	
Ha egy szám osztható 5-tel, akkor számjegyeinek az összege is osztható 5-tel.	
Ha egy szám osztható 5-tel, akkor utolsó számjegye is osztható 5-tel.	
Ha egy szám osztható 5-tel, akkor utolsó számjegye 5.	
Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor utolsó számjegye is osztható 4-gyel.	
Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor utolsó számjegye is és utolsó előtti számjegye is osztható 4-gyel.	
Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor a szám végén álló kétjegyű szám osztható 4-gyel.	

9.2. [19] Mi a trükk nyitja?

a) A gondolatolvasó ezt mondja: Gondoljon egy számot, szorozza meg 9-cel, adjon hozzá 27-et! A kapott szám jegyeit adja össze, majd az így kapott szám jegyeit is adja össze, és ezt mindaddig folytassa, amíg egyjegyű számhoz nem jut! Ezt az egyjegyű számot szorozza meg 4-gyel, és adjon hozzá 13-at! Kész van a számolással? Ugye 49-et kapott?

b) A gondolatolvasó hét emberhez, az első sorban az 1-es, a 2-es, a 3-as, a 4-es, az 5-ös, a 6-os és a 7-es széken ülőkhöz így szól: Gondoljon egy számot szorozza meg 9-cel, és adja hozzá a székének a sorszámát. Az így kapott számot írja fel egy papírdarabra, és dobja be a cilinderembe! Rendben van? Mindenkié itt van? Akkor én most egyenként kihúzom a számokat, és megmondom, hogy melyiket ki dobta be.

9.3. [19] Miről ismerhetők fel
a) a 2-vel, 5-tel, 10-zel; **b)** a 4-gyel, 25-tel, 100-zal; **c)** a 8-cal, 125-tel, 1000-rel
osztható számok? Indokoljuk az állításokat!

9.4. [19] **a)** Hogyan dönthető el könnyen, hogy osztható-e 3-mal
777 777 654; 888 888 888?
b) Hogyan dönthető el, hogy oszthatók-e 9-cel?
c) Általánosan, hogyan dönthető el, hogy egy szám osztható-e 3-mal vagy 9-cel?
Indokoljuk az állításokat!
d) Adjunk meg az eddig megfogalmazott oszthatósági feltételek felhasználásával még néhány más oszthatósági feltételt is!

9.5. [19] Pótoljuk a következő számok hiányzó jegyeit úgy, hogy oszthatók legyenek
a) 2-vel! **b)** 4-gyel! **c)** 8-cal! **d)** 3-mal! **e)** 6-tal!
f) 9-cel! **g)** 5-tel! **h)** 10-zel!
8_8_10 **12_ _56** **1234_ _ _** **777_ _5** **_ _ _224**
_ _ _123 **1_1_3_** **_ _ _222**

9.6. [19] Keressünk feltételt a 12-vel, 18-cal, 36-tal, 45-tel, 75-tel való oszthatóságra!
Adjunk magyarázatot is!

9.7. [19] Állapítsuk meg a következő (tízes számrendszerben felírt) számok hiányzó jegyeit úgy, hogy a megadott oszthatóságok teljesüljenek!
a) $45 \mid \overline{76x3123y}$ **b)** $72 \mid \overline{x6797y}$ **c)** $12 \mid \overline{5x27x6}$

9.8. [19] Oszthatók-e 11-gyel a következő számok?
35 959 68 574 12 480 3718 123 321
Próbáljunk feltételt adni a 11-gyel való oszthatóságra! Indokoljunk is!

9.9. [19] Melyik az a 21-gyel osztható háromjegyű szám, melynek jegyei egymást követő pozitív egész számok?

9.10. [19] Adjunk meg olyan számot, amelynek mindegyik számjegye 2-es, és osztható
a) 3-mal; **b)** 4-gyel; **c)** 5-tel; **d)** 6-tal; **e)** 8-cal;
f) 9-cel; **g)** 10-zel; **h)** 12-vel; **i)** 16-tal!

9.11. [19] Az alábbi sorok közül melyikre igaz, hogy a bal oldali állításból következik a jobb oldali?

a) x osztható 4-gyel.	x páros szám.
b) x osztható 3-mal.	x osztható 9-cel.
c) x osztható 3-mal és páros.	x osztható 6-tal.
d) x osztható 6-tal.	x jegyeinek összege osztható 6-tal.
e) x osztható 12-vel.	x osztható 18-cal.

9.12. [19] Egy háromjegyű szám középső jegye egyenlő a két szélső jegy összegével. Bizonyítsuk be, hogy ez a szám osztható 11-gyel! Igaz-e az állítás megfordítása?

9.13. [19] Melyik az a legnagyobb 36-tal osztható szám, amelynek jegyei mind különbözők, és a számjegyek összege kisebb 25-nél?

9.14. [5] Mely számjegyek írhatók a Δ és a $\bigcirc$ jelek helyébe úgy, hogy $12\Delta\bigcirc 56$ osztható legyen
a) 2-vel; **b)** 3-mal; **c)** 4-gyel; **d)** 6-tal; **e)** 8-cal;
f) 24-gyel?

9.15. Határozzuk meg az $523abc$ hatjegyű szám hiányzó három számjegyét úgy, hogy a szám osztható legyen 7-tel, 8-cal és 9-cel is!

9.16. Írjuk fel a lehető legnagyobb ötjegyű, 12-vel osztható számot az 1, 3, 4, 5 számjegyek és még egy szabadon választható számjegy felhasználásával!

9.17. Határozzuk meg 22227777 legnagyobb kétjegyű osztóját!

9.18. Melyik az a legkisebb 9-jegyű szám, melyben az első két jegyből álló szám osztható 2-vel, az első három jegyből álló osztható 3-mal, ..., az első nyolc jegyből álló osztható 8-cal, és maga a szám osztható 9-cel?

9.19. Adjuk meg 45 legkisebb pozitív többszörösét, melyben csak a 0 és a 8 számjegyek vannak!

9.20. (M) Készítsünk algoritmust, ami beolvas egy számot és eldönti, hogy osztható-e
a) 10-tel **b)** 5-tel **c)** 2-vel **d)** 25-tel **e)** 3-mal
f) 9-cel **g)** 11-gyel **h)** n-nel **i)** 6-tal
úgy, hogy nem áll rendelkezésünkre az osztás művelet.

10. FEJEZET

Oszthatósági szabályok (teszt)

A 10.1-10.10. feladatok a „közép” szintnek, a 10.11-10.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

10.1. (M) Egy pozitív egész szám utolsó jegye 4. Mivel lesz biztosan osztható?
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 3

10.2. (M) El szeretnénk dönteni egy számról, hogy osztható-e 25-tel. Az utolsó hány jegyét kell ehhez ismernünk?
A) 1 **B)** 2
C) 3 **D)** 25
E) Az egész számot ismerni kell.

10.3. (M) Melyik osztható 3-mal?
A) 1234567 **B)** 2345678 **C)** 3456789 **D)** 1357975 **E)** 2468246

10.4. (M) Melyik osztható 9-cel?
A) 111222444 **B)** 111333999 **C)** 222444888 **D)** 555666777
E) 444666999

10.5. (M) Mi az utolsó jegye a 12345_ számnak, ha osztható 6-tal?
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 0

10.6. (M) Mi a 2468_9753 szám hiányzó jegye, ha osztható 9-cel?
A) 1 **B)** 2
C) 0 **D)** 7
E) Az előző négy egyike sem.

10.7. (M) Állapítsuk meg a $\overline{23y45x}$ szám hiányzó jegyeit, ha osztható 45-tel.
A) $x = 0$, $y = 9$ **B)** $x = 4$, $y = 0$ **C)** $x = 5$, $y = 4$ **D)** $x = 8$, $y = 5$
E) $x = 5$, $y = 8$

10.8. (M) Állapítsuk meg a $\overline{23y45x}$ szám hiányzó jegyeit, ha osztható 24-gyel.
A) $x = 8$, $y = 2$ **B)** $x = 6$, $y = 1$ **C)** $x = 4$, $y = 0$ **D)** $x = 2$, $y = 5$
E) $x = 0$, $y = 7$

10.9. (M) Melyik szám osztható 11-gyel?
A) 123123123 **B)** 234234234 **C)** 242363484 **D)** 343454565
E) 1223344556

10.10. (M) Hogyan fejezzük be a mondatot úgy, hogy igaz állítás legyen? Van olyan szám, amelynek minden jegye 2-es és osztható

A) 12-vel. **B)** 7-tel és 9-cel. **C)** 3-mal és 5-tel. **D)** 32-vel.
E) 36-tal.

10.11. (M) Egy pozitív egész n szám utolsó jegye 4. Az egyjegyű pozitív egészek közül hány van, amelyről el tudjuk ezek alapján dönteni, osztója-e n-nek?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

10.12. (M) Egy szám utolsó jegye alapján el tudtuk dönteni, hogy nem osztható k-val. Mi lehetett k?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

10.13. (M) Egy páros szám utolsó két jegyét megtudtuk és ebből biztosan megállapíthattuk, hogy nem osztható d-vel. Mi lehetett d?

A) 33 **B)** 24 **C)** 11 **D)** 21 **E)** 18

10.14. (M) Hogy fejezzük be a mondatot, hogy igaz legyen? Egy szám két jegyének megváltoztatásával mindig elérhető, hogy osztható legyen

A) 125-tel. **B)** 200-zal. **C)** 875-tel. **D)** 97-tel. **E)** 700-zal.

10.15. (M) Állapítsuk meg a $\overline{23y45x}$ szám hiányzó jegyeit, ha osztható 72-vel.

A) $x = 8$, $y = 5$ **B)** $x = 2$, $y = 1$ **C)** $x = 6$, $y = 7$ **D)** $x = 6$, $y = 8$
E) $x = 8$, $y = 7$

10.16. (M) 7 osztója $4a + 5b$-nek. Melyiket osztja biztosan a 7?

A) $a + 3b$ **B)** $a + 5b$ **C)** $a + 2b$ **D)** $5a + 4b$ **E)** $2a + 3b$

10.17. (M) Tudjuk, hogy 37 osztja $\overline{abc}$-t. Melyik számot oszta a 37?

A) $\overline{cba}$ **B)** $\overline{bca}$ **C)** $\overline{bac}$ **D)** $\overline{cabacb}$ **E)** $\overline{bacbca}$

10.18. (M) 11 osztja $3a + 8b$-t. Melyiket osztja biztosan a 11?

A) $a + 3b$ **B)** $4a + 7b$ **C)** $2a + 4b$ **D)** $5a + 9b$ **E)** $a + 6b$

10.19. (M) Határozzuk meg 12345666654321 legnagyobb kétjegyű osztóját.

A) 73 **B)** 93
C) 57 **D)** 81
E) Az előző négy egyike sem helyes.

10.20. (M) Adjuk meg 45 legkisebb pozitív többszörösét, melyben csak az 5 és a 6 számjegyek vannak! Hányjegyű ez a szám?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6
E) 6-nál több.

11. FEJEZET
Számjegyek

A témakörrel való ismerkedéshez ajánljuk a [1] könyv IV. fejezetének 115-121 példáit.

11.1. Három egymást követő páratlan számot összeszoroztunk, majd a kapott eredményt megszoroztuk 5-tel. Így a következő alakú hatjegyű számot kaptuk: $\overline{ABABAB}$, ahol A és B számjegyek. Mi volt az eredeti három páratlan szám?

11.2. Egy tetszőleges kétjegyű szám után írjunk egy 0-t majd újból a kétjegyű számot. Mutassuk meg, hogy az így kapott ötjegyű szám mindig osztható 11-gyel és 13-mal is!

11.3. Egy tízes számrendszerben felírt szám egyenlő a számjegyei összegének 17-szeresével. Melyik lehet ez a szám?

11.4. Pisti azt tapasztalta, hogy ha egy négyjegyű számhoz hozzáadja a fordítottját, (azaz azt a számot, amelyet az eredeti szám jegyeinek fordított sorrendbe írásával kapunk), akkor az összeg mindig osztható lesz 11-gyel. A két szám különbségéről azt találta, hogy mindig osztható 9-cel. Igaza van-e? Magyarázzuk meg a tapasztalatot! Mit tapasztalunk, ha ötjegyű számokkal próbálkozunk?

11.5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromjegyű számot kétszer egymás után írunk, akkor az így keletkező hatjegyű szám mindig osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal!

11.6. [3] Jancsinak a 37-et kellett volna megszoroznia egy kétjegyű számmal, amelyben a tízesek helyén álló számjegy kétszer akkora, mint az egyesek helyén álló számjegy. A példa leírásakor véletlenül felcserélte a szorzó két számjegyét, és így a szorzat a keresettnél 666-tal kisebb lett. Melyik számmal kellett volna szoroznia?

11.7. [18] A, B és C különböző számjegyek. Lehet-e, hogy az $\overline{ABC}$ és a $\overline{CBA}$ háromjegyű számok mindketten oszthatók héttel?

11.8. [18] Egy háromszög belső szögeinek fokokban mért mérőszámai egészek. Egyik szöge háromjegyű, a másik két szög mérőszámát úgy kapjuk ebből, hogy elhagyjuk a középső, illetve az utolsó számjegyet. Mekkorák a háromszög szögei?

11.9. Két háromjegyű szám összege osztható 37-tel. Ha a két számot egymás mellé írjuk, egy hatjegyű számot kapunk. Igazoljuk, hogy ez a hatjegyű szám is osztható 37-tel!

11.10. Egy négyjegyű számról ezt tudjuk: első jegye azonos a másodikkal, a harmadik jegye a negyedikkel, és maga a szám négyzetszám. Mi lehet ez a szám?

11.11. Van-e olyan négyjegyű palindrom szám, ami teljes négyzet? (Palindromszám: jegyei szimmetrikusak, azaz hátulról olvasva sorban ugyanazokat a jegyeket kapjuk, mintha elölről olvasnánk.)

11.12. [15, 505.] Van-e olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, melyre $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008$?

11.13. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyek egyenlők négyzetük utolsó két jegyével?

11.14. Keressünk olyan természetes számot, amelyben a számjegyek összege osztható 13-mal és a rákövetkező szám jegyeinek összege is osztható 13-mal.

11.15. Van-e olyan négyzetszám, ami 30 db 1-est és néhány 0-ást tartalmaz?

11.16. (M) Készítsünk algoritmust, amely megszámolja, hogy a beadott számnak hány hetes számjegye van!

12. FEJEZET
Számjegyek (teszt)

A 12.1-12.10. feladatok a „közép” szintnek, a 12.11-12.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

12.1. (M) Melyik algebrai kifejezés írja le azt, hogy $\overline{ABC}$ egy tízes számrendszerbeli háromjegyű szám?

A) $A \cdot B \cdot C = 111$
B) $100C + 10B + A = \overline{ABC}$
C) $\overline{ABC} = (AB)C = A(BC)$
D) $\overline{ABC} = 100A + 10B + C$
E) $\overline{ABC} = A + B + C$

12.2. (M) Három egymást követő páratlan számot összeszoroztunk, majd a kapott eredményt megszoroztuk 11-gyel. Így a következő alakú négyjegyű számot kaptuk: $\overline{AABB}$, ahol A és B számjegyek. Mi volt az eredeti három páratlan szám összege?

A) 9 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 21 **E)** 25

12.3. (M) Melyik n-re igaz, hogy $\overline{AB0AB}$ mindig osztható n-nel?

A) 2 **B)** 3 **C)** 22 **D)** 143 **E)** 43

12.4. (M) Egy háromjegyű számot kétszer egymás után írunk. Melyik nem igaz az így keletkező hatjegyű számra?

A) Mindig osztható 77-tel.
B) Mindig osztható 91-gyel.
C) Mindig osztható 33-cal.
D) Mindig osztható 143-mal.
E) Ha 4-gyel osztható, akkor 154-gyel is.

12.5. (M) Két háromjegyű szám összege osztható n-nel. Ha a két számot egymás mellé írjuk, egy hatjegyű számot kapunk. Mely n esetén igaz, hogy ez a hatjegyű szám is osztható n-nel!

A) 27 **B)** 25 **C)** 36 **D)** 18 **E)** 11

12.6. (M) Egy négyjegyű számról ezt tudjuk: első jegye azonos a harmadikkal, a második jegye a negyedikkel, és maga a szám két szomszédos páratlan szám szorzata. Mi lehet ez a szám?

A) 2121 **B)** 4343 **C)** 9999 **D)** 5555 **E)** 8181

12.7. (M) Hány olyan négyjegyű pozitív palindrom szám van, amely osztható 9-cel?

A) 9 **B)** 10 **C)** 27 **D)** 3 **E)** 99

12.8. (M) Mely n-re van olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, melyre $\overline{abcd} - \overline{dcba} = n$?

A) 1717 **B)** 2727 **C)** 3737 **D)** 4646 **E)** 5151

12.9. (M) Hány olyan háromjegyű természetes szám van, amelyben a számjegyek összege osztható 5-tel és a rákövetkező szám jegyeinek összege is osztható 5-tel.

A) Nincs ilyen háromjegyű szám.
B) 12
C) 3
D) 6
E) Az előző négy válasz egyike sem helyes.

12.10. (M) Melyik n számra igaz, hogy van olyan négyzetszám, ami n db 1-est és néhány 0-ást tartalmaz?

A) 2 **B)** 5
C) 8 **D)** 11
E) Az előző négy egyike sem.

12.11. (M) Egy kétjegyű számot háromszor egymás után írunk. Melyik nem igaz az így keletkező hatjegyű számra?

A) Mindig osztható 7-tel. **B)** Mindig osztható 37-gyel.
C) Mindig osztható 21-gyel. **D)** Mindig osztható 39-cel.
E) Ha 2-vel osztható, akkor 364-gyel is.

12.12. (M) Mi lehet egy $\overline{ABABAB}$ alakú 4-gyel osztható szám legnagyobb prímosztója?

A) 23 **B)** 37 **C)** 97 **D)** 101 **E)** 7

12.13. (M) Egy háromjegyű számot kétszer egymás után írunk. Melyik az az állítás, ami igaz és hamis is lehet az így keletkező hatjegyű számra?

A) Osztható 77-tel. **B)** Osztható egy négyjegyű prímmel.
C) Osztható két háromjegyű prímmel. **D)** Osztható három kétjegyű prímmel.
E) Osztható 143-mal.

12.14. (M) A, B és C különböző számjegyek. Az $\overline{ABC}$ és a $\overline{CBA}$ háromjegyű számok mindketten oszthatók néggyel. Mennyi lehet $A \cdot C$?

A) 8 vagy 24 **B)** 12 vagy 32
C) 24 vagy 12 **D)** 32 vagy 8
E) Az előző négy egyike sem helyes válasz.

12.15. (M) Két k-jegyű szám összege osztható 33-mal. Ha a két számot egymás mellé írjuk, egy $2k$-jegyű számot kapunk. Mely k esetén igaz, hogy ez a $2k$-jegyű szám is osztható 33-mal!

A) 2 **B)** 3 **C)** 11 **D)** 33
E) Nincs ilyen k.

12.16. (M) Két háromjegyű szám összege osztható 37-tel. Ha a két számot egymás mellé írjuk, egy hatjegyű számot kapunk. Melyik nem lehet igaz? **A)** A hatjegyű szám osztható 37-tel. **B)** A hatjegyű számnak van 3 jegyű prímosztója. **C)** A hatjegyű számnak minden jegye páros. **D)** A hatjegyű szám prím. **E)** A hatjegyű szám minden jegye azonos.

12.17. (M) Hány olyan négyjegyű palindrom szám van, ami teljes köb? (Palindromszám: jegyei szimmetrikusak, azaz hátulról olvasva sorban ugyanazokat a jegyeket kapjuk, mintha elölről olvasnánk.)

A) 3 **B)** Nincs ilyen. **C)** 11 **D)** 8
E) 1

12.18. (M) Mely n-re van olyan $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, melyre $\overline{abcd} - \overline{bcda} = n$.

A) 1234 **B)** 2345 **C)** 3456 **D)** 4567 **E)** 5
678

12.19. (M) Tekintsük azokat a háromjegyű számokat, amelyek egyenlők négyzetük utolsó három jegyével. Melyik igaz?

A) A legkisebb ilyen a 376.

B) Három ilyen szám van.

C) A legnagyobb ilyen szám a 376.

D) Van köztük 1-re végződő.

E) Nincs köztük 5-re végződő.

12.20. (M) Hány olyan négyzetszám van, ami 15 db 1-est és néhány 9-est tartalmaz?

A) 9

B) 15

C) Nincs egy se.

D) Végtelen sok ilyen van.

E) Az előző négy válasz egyike sem helyes.

13. FEJEZET
Számrendszerek

Bemelegítésül ajánljuk a [1] könyv II. fejezetének 309., 313., 314. feladatát, a témakör feldolgozásához az alábbi példákkal párhuzamosan a [1][II. fej.] 310-322. feladatokat, a számrendszerekben való oszthatóság témájában a [1][II. fej.] 339-356. gyakorlatokat.

13.1. M, A, R, O, K.

a) Hány ötbetűs „szó” (értelmes vagy értelmetlen betűsorozat) képezhető ezekből a betűkből, ha mindegyik betűt *egyszer* használhatjuk?

b) Leírjuk az összes ilyen szót „abc”-sorrendben. Az első néhány: $AKMOR$, $AKMRO$, $AKOMR$. Melyik szó lesz a listában a 85-ödik?

13.2. M, A, R, O, K.

a) Hány ötbetűs „szó” (értelmes vagy értelmetlen betűsorozat) képezhető ezekből a betűkből, ha mindegyik betűt *akárhányszor* felhasználhatjuk?

b) Leírjuk az összes ilyen szót „abc”-sorrendben. Az első néhány: $AAAAA$, $AAAAK$, $AAAAM$. Melyik szó lesz a listában a 85-ödik?

c) A tanár a következő órán villámkérdést tervez feltenni. Mond egy számot és rá kell vágni, hogy a listában mi az annyiadik szó *utolsó* betűje. Találjunk ki gyors módszert a helyes válasz megtalálására!

d)) Hogyan található ki az *utolsó előtti* betű, az első három meghatározása nélkül?

13.3. Írjuk fel 1-től 20-ig a számokat

a) 2-es **b)** 3-as **c)** 4-es **d)** 5-ös

számrendszerben!

13.4. Az alábbi táblázatban soronként ugyanaz a szám szerepel csak különböző számrendszerekben. Töltsük ki a táblázatot!

10-es	2-es	3-as	4-es	5-ös	8-as
2005					
	100110011				
		2120221			
			130223		
				14230	
					5617

13.5. [19] A kettes számrendszerben melyik a

a) legkisebb kétjegyű **b)** legnagyobb kétjegyű **c)** legnagyobb 3-jegyű

szám? Írjuk föl ezeket tízes számrendszerben! A kettes számrendszerben hány

d) kétjegyű **e)** háromjegyű **f)** négyjegyű

szám van?

13.6. [19] Az ötös számrendszerben melyik a

a) legkisebb kétjegyű **b)** legnagyobb kétjegyű
c) legkisebb háromjegyű **d)** legnagyobb háromjegyű

szám? Írjuk föl ezeket tízes számrendszerben!
Az ötös számrendszerben hány

e) kétjegyű **f)** háromjegyű **g)** négyjegyű

szám van?

13.7. [19] Írjuk be a hiányzó számjegyeket!

$$\begin{array}{r} 2\,2\,\_{}_7 \\ +\_\_\,5_7 \\ \hline 1\,0\,4\,3_7 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1\,2\,3_4 & \cdot\ \_\_\_{}_4 \\ 3\,1\,2_4 & \\ 1\,1\,0\,1_4 & \\ \hline \_\_\_\_\_{}_4 & \end{array}$$

13.8. [19] Találjuk ki, hány éves az apa, ha ezeket mondja: „113 éves vagyok. Három fiam van, 35, 34 és 32 évesek, és 34 éves voltam, amikor a legidősebb fiam született.”

a) Állapítsuk meg, milyen számrendszerben adta meg az apa a számokat!

b) Milyen számrendszerben adta meg a számokat, és hány éves az apa, és hány évesek a fiai, ha az utolsó feltétel így változik:

- „45 éves voltam, amikor a legidősebb fiam született”?

c) Milyen számrendszerben adta meg a számokat, és hány éves az apa, és hány évesek a fiai, ha az utolsó feltétel így változik:

- „56 éves voltam, amikor a legidősebb fiam született”?

13.9. [19] Milyen alapú számrendszerben igazak a következő egyenlőségek?

a) $3+4=11$ **b)** $30+40=110$ **c)** $100+100=1000$
d) $200+200=2000$ **e)** $62+16=100$ **f)** $50\cdot 10=500$
g) $50\cdot 5=410$ **h)** $50\cdot 5=310$

13.10. A 2004 egy másik számrendszerben 13140. Melyik ez a számrendszer?

13.11. [5] Írjunk az üres keretekbe egy-egy számjegyet úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen:

$$3\,\boxed{}\,1_4 = 1\,\boxed{}\,\boxed{}\,2_3!$$

13.12. [19] Találjuk ki, milyen számrendszerben számoltunk, és mit jelentenek a betűk! (Egy feladaton belül az egyforma betűk ugyanazt a számjegyet jelentik, a különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek.)

$$\begin{array}{ccccc} & A & B & B & A \\ + & A & A & A & A \\ \hline A & A & B & B & B \end{array} \qquad ABCD\cdot DC = ABCDC \qquad \begin{array}{cccc} & 5 & B & C \\ + & 4 & C & A \\ \hline A & B & B & A \end{array}$$

13.13. [19] Pótoljuk a következő számok hiányzó jegyeit úgy, hogy 2-vel osztható (páros) számokat kapjunk!

$$\begin{array}{lll} 7\,3\,\_\,6_8 & 1\,0\,1\,\_\,1_3 & 7\,3\,\_\,6_9 \\ 2\,3\,\_\,3_4 & 1\,0\,1\,\_\,1_2 & 2\,3\,\_\,3_5 \end{array}$$

13.14. [19] Miről ismerhetők fel a 2-vel osztható számok a
a) kettes **b)** hármas **c)** ötös **d)** hatos
számrendszerben?
e) Általánosan is gondoljuk végig, hogy a különböző számrendszerekben miről lehet felismerni a 2-vel osztható számokat!

13.15. [19] Írjunk olyan négyjegyű számokat

	az 5-ös	a 6-os	a 9-es
	számrendszerben, amelyek oszthatók		
2-vel			
3-mal			
4-gyel			
5-tel			
6-tal			
8-cal			
9-cel			

13.16. [19] Próbáljuk megfogalmazni a 3-mal való oszthatóság feltételét néhány számrendszerben, például a hármasban, a négyesben, az ötösben, a hatosban, a kilencesben!

13.17. [19] Keressünk más számokkal való oszthatósági feltételeket is különböző számrendszerekben!

13.18. [19] Milyen feltétel adható meg az egyes számrendszerekben az alapszám osztóival való oszthatóságra? Indokoljuk az állításokat!

13.19. [19] Keressünk feltételt az alapszám négyzetének, köbének osztóival való oszthatóságra! Indokoljuk az állításokat!

13.20. [19] Milyen feltétel adható meg az alapszámnál eggyel kisebb számmal való oszthatóságra és az alapszámnál eggyel kisebb szám osztóival való oszthatóságra?

13.21. (M) [13] Van 8 db ötös alapú számrendszerben felírt számunk: 321, 342, 424, 410, 403, 444, 340, 301. Ebből a nyolc számból négy olyan számpár képezhető, amelyeknek az összege tízes számrendszerbe átírva: 200. Melyek ezek a számpárok?

13.22. [13] Alább két bohókás matektagozatos kisgyerek levelezését olvashatjuk.
A: „Összesen 11 évig voltam bölcsödés és óvodás, általános iskolába eddig már 12 évig jártam, de még 10 év van vissza annak befejezéséig.”
B: „Én ugyancsak 102 éves vagyok, mint te!”
Hány éves a két gyerek?

13.23. [13] A 30213 ötjegyű számról az osztás elvégzése nélkül meg lehet állapítani, hogy osztható-e hárommal. Milyen számrendszerben írhattuk ezt a számot, ha a számrendszer alapszáma 12-nél nem nagyobb?

13.24. [12] Írjuk fel tízes számrendszerben azokat a számokat, amelyek tizenegyes számrendszerben $a0b$, a kilences számrendszerben pedig $b0a$ alakúak!

13.25. [12] A 740-et a t alapú számrendszerbe átszámítva olyan négyjegyű számot kapunk, amelynek utolsó jegye 5. Határozzuk meg t értékét és a hiányzó jegyeket!

13.26. [12] Melyik az a számrendszer, amelyben 4634-et 555-tel osztva hányadosul 5-t, maradékul 530-at kapunk?

13.27. (M) Készítsünk algoritmust, ami beolvas egy 8 jegyű kettes számrendszerbeli számot, és átváltja tízes számrendszerbe.

13.28. (M) Készítsünk algoritmust, ami beolvas egy tetszőleges számú (de maximum 30) jegyből álló kettes számrendszerbeli számot, és átváltja tízes számrendszerbe.

13.29. (M) Készítsünk algoritmust, ami beolvas egy tízes számrendszerbeli számot (maximum 60 000), és átváltja kettes számrendszerbe.

13.30. (M) Készítsünk algoritmust, ami kettes számrendszerből (maximum 8 jegyű számot) tizenhatosba tud átváltani egy számot.

13.31. (M) Készítsünk algoritmust, ami tetszőleges számrendszerből tetszőleges számrendszerbe tud átváltani.

14. FEJEZET

Számrendszerek (teszt)

A 14.1-14.10. feladatok a „közép” szintnek, a 14.11-14.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

14.1. (M) Melyik a 23 kettes számrendszerbeli alakja?
A) 10111 **B)** 11011 **C)** 1011 **D)** 11101 **E)** 101111

14.2. (M) Melyik számnak a hármas számrendszerbeli alakja a 21012?
A) 68 **B)** 194 **C)** 113 **D)** 176 **E)** 175

14.3. (M) Melyik a legkisebb szám, amelyik hármas számrendszerben négyjegyű?
A) 9 **B)** 10 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 81

14.4. (M) Melyik a legnagyobb szám, amelyik 4-es számrendszerben 3 jegyű?
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 63 **E)** 255

14.5. (M) Hány olyan pozitív egész van, amely a 2-es számrendszerben 4 jegyű?
A) 4 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 7 **E)** 15

14.6. (M) Felírtuk nagyság szerint növekvő sorrendben azokat a pozitív egészeket, amelyek 5-ös számrendszerben 3 jegyűek. Melyik ezek közt a hetedik?
A) 31 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 131 **E)** 132

14.7. (M) Milyen alapú számrendszerben igaz, hogy $4+5=12$?
A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 12 **E)** 8

14.8. (M) A 441 egy másik számrendszerben 12321. Melyik ez a számrendszer?
A) 3 **B)** 4
C) 5 **D)** 6
E) Az előző négy egyike se jó.

14.9. (M) Milyen szám az x, ha a hetes számrendszerbeli $\overline{43x10}$ szám osztható 3-mal?
A) 4 **B)** 0 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 6

14.10. (M) A 161-et a t alapú számrendszerbe átszámítva olyan háromjegyű számot kapunk, amelynek utolsó jegye 5. Határozzuk meg t lehetséges értékeit!
A) 5 vagy 6 **B)** t csak 6 lehet **C)** 6 vagy 12 **D)** 6, 12, vagy 26
E) Nincs ilyen t.

14.11. (M) Az 1000-et átváltjuk a alapú számrendszerbe. ($a > 1$, egész.) Melyik állítás nem lehet igaz?
A) Az eredmény kétjegyű. **B)** Az eredmény minden jegye 2.
C) Az eredmény 10 jegyű. **D)** Az eredmény minden jegye páratlan.
E) Az eredmény minden jegye 3.

14.12. (M) Legyen x a legkisebb pozitív egész szám, amely a alapú számrendszerben kétjegyű, y pedig a legnagyobb pozitív egész, amely b alapú számrendszerben még háromjegyű. Mennyi az $a \cdot b$, ha $x \cdot y = 130$?

A) 15 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 13 **E)** Nincs ilyen a és b.

14.13. (M) Tudjuk, hogy x darab olyan pozitív egész van, amely a alapú számrendszerben háromjegyű és y darab olyan pozitív egész van, amely b alapú számrendszerben négyjegyű, továbbá $x + y = 57$. Mi lehet a és b?

A) $a = 6$, $b = 3$ **B)** $a = 7$, $b = 2$ **C)** $a = 5$, $b = 4$ **D)** $a = 2$, $b = 3$ **E)** $a = 3$, $b = 3$

14.14. (M) Milyen alapú számrendszerben igaz, hogy 12+112+1112=1241.

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** Nincs ilyen számrendszer.

14.15. (M) Milyen alapú számrendszerben igaz, hogy $12 \cdot 34 = 452$?

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** Nincs ilyen számrendszer.

14.16. (M) A hatos számrendszerben felírt $\overline{123454x3}$ szám mely x esetén lesz osztható 9-cel?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

14.17. (M) Melyik a és d esetén igaz, hogy a alapú számrendszerben felírt 12112211122211112222 számosztható d-vel?

A) $a = 7$, $d = 3$ **B)** $a = 5$, $d = 4$ **C)** $a = 9$, $d = 4$ **D)** $a = 10$, $d = 9$ **E)** $a = 13$, $d = 12$

14.18. (M) Hány tízes számrendszerbeli pozitív egész számra teljesül, hogy az ötös számrendszerben $a0b$, a hetes számrendszerben pedig $b0a$ alakúak!

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Nincs ilyen szám.

14.19. (M) A 324-et a t alapú számrendszerbe átszámítva olyan négyjegyű számot kapunk, amelynek utolsó jegye 1. Határozzuk meg t értékét és a hiányzó jegyeket!

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 17 **E)** Nincs ilyen számrendszer.

14.20. (M) Melyik az a számrendszer, amelyben 2104-et 123-mal osztva hányadosul 12-t, maradékul 23-at kapunk?

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** Nincs ilyen számrendszer.

15. FEJEZET
Diofantikus egyenletek

15.1. Adjuk meg mindazokat az x, y egész számokat, amelyekre
a) $3x + 9y = 31$ **b)** $3x + 9y = 333331$!

15.2. Adjuk meg mindazokat az x, y egész számokat, amelyekre $x + x \cdot y = 11$!

15.3. Adjuk meg mindazokat az x, y egész számokat, amelyekre
a) $xy + x + y = 98$ **b)** $xy - x - y = 98$ **c)** $xy - 2x - 2y = 98$
d) $xy - 2x - y = 98$ **e)** $2xy - 2x - y = 98$ **f)** $2xy - x - y = 98$!

15.4. Két pozitív egész szám szorzata 1000-rel nagyobb az összegüknél. Melyek lehetnek ezek a számok?

15.5. Két pozitív egész szám összegének és szorzatának összege 1000. Melyek lehetnek ezek a számok?

15.6. Adjuk meg mindazokat az x, y pozitív egész számokat[1], amelyekre
a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$ **b)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$!

15.7. Adjuk meg mindazokat az x, y egész (nem feltétlenül pozitív) számokat, amelyekre $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{7}$!

15.8. Egy szultánnak 143 felesége volt. Uralkodása csak legfeljebb 1000 napig tartott, ezalatt végig adót szedett: az első nap 144 aranyat, többi napon pedig mindig egy arannyal többet, mint az azt megelőző napon. Halála után feleségei szét tudták egyenlően osztani egymás között a beszedett adót. Hány napig uralkodhatott a szultán?

15.9. Állítsuk elő 19 egymást követő egész szám összegeként a
a) 95-öt **b)** 97-et!

15.10. [13] Hányféleképpen lehet előállítani
a) 21-et **b)** 1989-et
egymást követő pozitív egészek összegeként?

15.11. Hányféleképpen lehet 1989-et előállítani egymást követő páratlan pozitív egészek összegeként?

15.12. Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek oldalai cm-ben mérve egész számok és egyik befogója
a) $13\,cm$ **b)** $14\,cm$ **c)** $12\,cm$ **d)** $\sqrt{202}\,cm$?

15.13. Egy téglalap alakú sütemény széle megégett. A sütit az oldalaival párhuzamos – teljesen végig érő – vágásokkal kisebb darabokra vágtuk. Azt tapasztaltuk, hogy az égett – tehát a süti széléről származó – darabok száma megegyezik az égett részt nem tartalmazó – belső – szeletek számával. Hány részre vágtuk fel a süteményt?

[1] Ajánlott olvasmány: [11][44-56.] „Óegyiptomi számolás” fejezetében a törtek kezeléséről szóló rész.

15.14. Hány olyan egymással nem egybevágó téglalap van, amelyben az oldalak centiméterben mérve egész számok, és a kerület mérőszáma megegyezik a terület mérőszámával (cm^2-ben mérjük a területet)?

15.15. [20] Van-e olyan konvex sokszög,
a) amelynek 117-tel több átlója van mint oldala?
b) amelynek 252 átlója van?
c) amelynek 172 átlója van?
d) amelyben az átlók száma prímszám?
e) amelyben az átlók számának és az oldalak számaának szorzata 160?

15.16. [22] Bergengóciában a múlt században az autók rendszáma meghatározott számú betűből, és a betűk után írt meghatározott számú számjegyből állt. Számjegyként a 10-es számrendszer bármely jegyét fel lehetett használni, de a rendszámban szereplő betűk csak a góc ábécé magánhangzóiból kerülhettek ki. A századfordulóra minden lehetséges rendszámot kiadtak. Ekkor az autók ötöde taxi volt. Ezeken nem volt külön „taxi” felirat, hanem onnan lehetett felismerni őket, hogy a rendszámukban voltak ismétlődő jelek.

Hány magánhangzó van a góc ábécében, és hány autó volt Bergengóciában a századfordulón?

15.17. [2] Egy sakkversenyen két hetedik osztályos és néhány nyolcadik osztályos tanuló vett részt. Minden résztvevő mindenkivel egy mérkőzést játszott. A két hetedik osztályos együtt szerzett 8 pontot, a nyolcadik osztályosok pedig egyenlő számú pontot szereztek. (A versenyen résztvevők 1 pontot kapnak, ha megnyerik a mérkőzést, és fél pontot a döntetlenért.) Hány nyolcadik osztályos vett részt a versenyen?

15.18. Hányféleképpen állíthatók elő két négyzetszám összegeként az alábbi számok?
a) 1998 **b)** 1999 **c)** 2000 **d)** 2001 **e)** 2002 **f)** 2003
g) 2004?

16. FEJEZET

Diofantikus egyenletek (teszt)

A 16.1-16.10. feladatok a „közép” szintnek, a 16.11-16.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

16.1. (M) Melyik a és b esetén nincs egész számokból álló megoldása az $ax + by = 23$ egyenletnek?

A) $a = 2, b = 3$ **B)** $a = 3, b = 4$ **C)** $a = 8, b = 9$ **D)** $a = 23, b = 33$
E) $a = 4, b = 6$

16.2. (M) Mely a szám esetén van egész számokból álló megoldása az $6x+12y = a$ egyenletnek?

A) $a = 4444$ **B)** $a = 6543$ **C)** $a = 5432$ **D)** $a = 9876$ **E)** $a = 5678$

16.3. (M) Megadtuk mindazokat az x, y egész számokat, amelyekre $x + x \cdot y = 19$. Hányféle értéket vehet fel x?

A) 1 **B)** 2 **C)** 0 **D)** 4 **E)** 4-nél több

16.4. (M) Keressük mindazokat az x, y egész számokat, amelyekre $x^2 + x + y^2 + y = 97531$. Hányféle értéket vehet fel x?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 4-nél több
E) nincs megoldás

16.5. (M) Keressük mindazokat az x, y egész számokat, amelyekre $xy + x + y = 100$. Hányféle értéket vehet fel x?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 3-nál több
E) nincs megoldás

16.6. (M) Hányféleképpen lehet 1234-et előállítani egymást követő páratlan pozitív egészek összegeként? Az összegben legalább két összeadandónak kell lennie.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3
D) 3-nál több **E)** nem lehet előállítani

16.7. (M) Hány olyan konvex sokszög van, amelynek átlóinak száma 2 hatvány?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4
D) 8 **E)** végtelen sok ilyen van

16.8. (M) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek oldalai cm-ben mérve egész számok és egyik befogója 10 cm?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 3-nál több
E) nincs ilyen

16.9. (M) Melyik szám állítható elő két négyzetszám különbségeként?

A) 1956 **B)** 1222 **C)** 1318 **D)** 1674 **E)** 1766

16.10. (M) Melyik szám nem állítható elő két négyzetszám összegeként?
A) 661 **B)** 74 **C)** 1003 **D)** 2500 **E)** 449

16.11. (M) Adott három végtelen hosszú számtani sorozat, első elemeik:
(a)13, 19, 25, 31, ...; (b) 8, 15, 22, 29, ...; (c) 2, 17, 32, 47, ...
Melyik igaz? **A)** Van olyan szám, amelyik mindhárom sorozatban szerepel. **B)** Van olyan szám, amely az (a) és (b) sorozatban szerepel. **C)** Van olyan szám, ami az (a) és (c) sorozatban szerepel. **D)** Bármely két sorozatnak van közös eleme. **E)** Nincs olyan szám, ami két sorozatban is előfordul.

16.12. (M) Hány olyan egymással nem egybevágó téglalap van, amelyben az oldalak centiméterben mérve egész számok, és a kerület mérőszámának kétszerese megegyezik a terület mérőszámával (cm^2-ben mérjük a területet)?
A) Nincs ilyen téglalap. **B)** 1 **C)** 2
D) 3 **E)** 3-nál több.

16.13. (M) Hány olyan konvex sokszög van, amelyben az átlók száma három pozitív egész kitevős hatványa?
A) Nincs ilyen. **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3
E) 3-nál több.

16.14. (M) 100 tallérért veszünk 100 állatot a vásáron. Az ökör ára 10 tallér, a disznó ára 5 tallér, a juh ára 0.5 tallér. Jelölje az állatok számát rendre o, d és j. Mekkora ennek a három számnak a szorzata?
A) 98 **B)** 810 **C)** 3600 **D)** 1345 **E)** 2500

16.15. (M) Két pozitív egész szám reciprokának összege $\frac{1}{13}$. A két szám közül a kisebbikre mi igaz? **A)** Nem lehet 14-nél kisebb. **B)** Nem lehet 20-nál nagyobb. **C)** Értéke 3 különböző szám is lehet. **D)** Páratlan. **E)** Két pozitív egész szám reciprokának összege nem lehet $\frac{1}{13}$.

16.16. (M) Az $Ax + By = C$ egyenletet szeretnénk megoldani az egész számok körében. A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele: **A)** A, B és C azonos paritásúak legyenek. **B)** A, B és C páronként relatív prímek legyenek. **C)** (A, B) osztója legyen C-nek. **D)** C osztója legyen A-nak és B-nek. **E)** A, B és C ne legyenek mind prímek.

16.17. (M) Az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenlet egész megoldásainak száma.
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4
E) Végtelen sok.

16.18. (M) Az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenletnek van olyan pozitív egész megoldása, amikor:
A) $a = 1848$ **B)** a és b is páratlan. **C)** ab hármas maradéka 1.
D) $a = b$ **E)** $a = 2$

16.19. (M) A $21x + 19y = 563$ egyenlet egész megoldásainak egyike x' és y'. Mi lesz még megoldás?
A) $x' + 21$ és $y' - 19$. **B)** $x' + 3$ és $y' + 3$.
C) $x' + 19$ és $y' - 21$. **D)** $x' + 563$ és $y' - 563$
E) Csak egy megoldás lehet.

16.20. (M) Melyik szám lehet három négyzetszám összege?

A) 487 **B)** 437 **C)** 327 **D)** 647 **E)** 567

17. FEJEZET
Prímek eloszlása

17.1. Két pozitív egész szám különbsége és a szorzata is prím. Melyik ez a két szám?

17.2. Két prímszám különbsége 1995. Határozzuk meg az összegük osztóit!

17.3. Hol van a legnagyobb hézag 1-től 100-ig a prímek között?

17.4. Hány ikerprím van 1 és 100 között? És hány trikerprím (azaz három szomszédos páratlan szám, amelyek mind prímek)? Vannak-e ilyenek még 100 fölött?

17.5. Adjunk meg

a) 10 **b)** n

egymást követő pozitív egész számot, melyek egyike sem prím!

17.6. Mutassuk meg, hogy van olyan 1-nél nagyobb egész szám, amely az első 100 prímszám egyikével sem osztható!

17.7. Igazoljuk, hogy végtelen sok prímszám van!

17.8. Az alábbi műveletek eredménye mind prímszám:

$2+1=3$ $2\cdot 3+1=7$ $2\cdot 3\cdot 5+1=31$

Igaz-e, hogy az első n prímszám szorzatánál eggyel nagyobb szám minden n esetén prím?

17.9. Mutassuk meg, hogy végtelen sok

a) $4k+3$ **b)** $3k+2$

alakú prímszám van ($k\in\mathbb{Z}$)!

17.10. Tekintsük az alábbi számokat:

$2^1+1=3$ $2^2+1=5$ $2^4+1=17$ $2^8+1=129.$

Általában a $2^{2^n}+1$ alakú számokat ($n\in\mathbb{N}$) Fermat-számoknak nevezik. Mutassuk meg, hogy bármely két Fermat-szám relatív prím!

(Fermat azt hitte, hogy $2^{2^n}+1$ értéke mindig prím. Ezt Euler cáfolta meg 1732 körül, megmutatva, hogy $2^{2^5}+1$ nem prím.)

17.11. A Fermat-számok segítségével adjunk új bizonyítást arra, hogy végtelen sok prímszám van!

17.12. [2] Bizonyítsuk be, hogy ha három 3-nál nagyobb prímszám számtani sorozatot alkot, akkor a sorozat különbsége osztható hattal!

17.13. (M) [2] Tíz 3000-nél kisebb prímszám számtani sorozatot alkot. Melyek ezek a számok?

17.14. Igazoljuk, hogy minden pozitív egész számokból álló végtelen hosszú számtani sorozatban végtelen sok összetett szám van!

17.15. (M) [2] Bizonyítsuk be, hogy öt egymás utáni egész szám közül mindig ki lehet választani egy olyat, amely az összes többihez relatív prím!

17.16. (M) Készítsünk algoritmust, ami eldönti egy számról, hogy prím-e.

17.17. (M) Készítsünk algoritmust, ami megszámolja a prímszámokat egy adott számig.

17.18. (M) Készítsünk algoritmust, ami kiírja fájlba a prímszámokat egy adott számig.

17.19. (M) Készítsünk algoritmust, ami $4n+1$ alakú prímszámokat keres ($n \in \mathbb{N}$).

17.20. (M) Készítsünk algoritmust, ami $4n+1$ alakú prímszámokat keres és fájlba menti őket ($n \in \mathbb{N}$).

17.21. (M) Készítsünk algoritmust, ami a megtalált $4n+1$ alakú prímszámokat felbontja két négyzetszám összegére. ($n \in \mathbb{N}$).

17.22. (M) Készítsünk algoritmust, ami Fermat-féle prímeket keres. Fermat-prímnek nevezünk egy számot, ha felírható 2^n+1 alakban, ahol n kettőhatvány ($n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$).

17.23. (MS) Készítsünk algoritmust, ami Mersenne-prímeket keres. A Mersenne-prím olyan prímszám, ami felírható 2^p-1 alakban, ahol p prímszám.

17.24. Jelölje $p(n)$ az n-edik prímet. Írjunk programot, amely beolvassa n értékét és kiírja $p(n)$-t!

17.25. (S) Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, amelynek egyik kezdőszelete sem összetett szám? (Pld a 137 kezdőszeletei: 1, 13, 137.)

17.26. (S) Melyik az a 10 legkisebb egymást követő pozitív egész, amelyek egyike sem prím?

17.27. Megadandó pozitív prímekből álló 10-tagú számtani sorozat.

17.28. (MS) [15] Keressünk különböző prímszámokból álló 3×3-as bűvös négyzetet!

18. FEJEZET

Prímek (teszt)

A 18.1-18.10. feladatok a „közép” szintnek, a 18.11-18.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

18.1. (M) Két prímszám különbsége 51. Határozzuk meg az összegük legnagyobb prím osztóját!
A) 3 **B)** 7 **C)** 11 **D)** 23 **E)** 41

18.2. (M) Három 3-nál nagyobb prímszám számtani sorozatot alkot. Mekkora lehet a differencia?
A) 4 **B)** 6
C) 8 **D)** 10
E) Az előző négy egyike sem.

18.3. (M) Melyik nem igaz? **A)** Végtelen sok prím van. **B)** Végtelen sok $4k + 3$ alakú prím van. **C)** Végtelen sok $3k - 1$ alakú prím van. **D)** Minden prímnél végtelen sok nagyobb prím van. **E)** Végtelen sok $15k + 9$ alakú prím van.

18.4. (M) Melyik igaz? **A)** Van 100 szomszédos szám, amelyek egyike sem prím. **B)** Minden $n > 2$ egész esetén van olyan prím, ami n-nel osztható. **C)** Minden $n >$ > 2 egész esetén van két olyan pozitív prím, ami osztója n-nek. **D)** $n!+1$ nem lehet prím. **E)** $n! + 1$ minig prím.

18.5. (M) Milyen számjegyre végződik az első 100 pozitív páratlan szám szorzata?
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

18.6. (M) Mi a törzstényzős felbontása a 6000-nek?
A) $6 \cdot 10^3$ **B)** $6 \cdot 2^3 \cdot 5^3$ **C)** $6^3 \cdot 5^3$ **D)** $3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$ **E)** $3 \cdot 2^4 \cdot 5^3$

18.7. (M) Mi a törzstényzős felbontása a $63^{12} \cdot 147^{11}$-nek?
A) $3^{35} \cdot 7^{34}$ **B)** $3^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 147^{11}$ **C)** $3 \cdot 21^{12} \cdot 3 \cdot 49^{11}$
D) $63 \cdot 12 \cdot 147 \cdot 11$ **E)** $3^{34} \cdot 7^{35}$

18.8. (M) Melyik következtetés helyes, ha x, y pozitív egészek?
A) $35 \mid xy \Rightarrow 35 \mid x$ vagy $35 \mid y$ **B)** $17 \mid xy \Rightarrow 17 \mid x$ vagy $17 \mid y$
C) $57 \mid xy \Rightarrow 57 \mid x$ vagy $57 \mid y$ **D)** $12 \mid xy \Rightarrow 6 \mid x$ vagy $6 \mid y$
E) $21 \mid xy \Rightarrow 3 \mid x$ vagy $7 \mid y$

18.9. (M) Melyik következtetés nem helyes, ha x pozitív egész?
A) $3 \mid x$ és $10 \mid x \Rightarrow 30 \mid x$ **B)** $3 \mid x$ és $10 \mid x \Rightarrow 15 \mid x$
C) $3 \mid x$ és $10 \mid x \Rightarrow 2 \mid x$ **D)** $3 \mid x$ és $10 \mid x \Rightarrow 12 \mid x^2$
E) $3 \mid x$ és $10 \mid x \Rightarrow 40 \mid x^2$

18.10. (M) Egy x pozitív egész szám négyzete osztható 135-tel. Mire lehet ebből következtetni?

A) $x \geq 135^2$ **B)** $x \leq 135^2$ **C)** x osztható 45-tel
D) x osztható 25-tel **E)** x páratlan

18.11. (M) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek az 360-szorosa egy egész szám harmadik hatványa?

A) 1 **B)** 75 **C)** 25 **D)** 15 **E)** 5

18.12. (M) Melyik n és k esetén lesz igaz: bárhogy is választunk ki n egymást követő pozitív egész számot, a szorzatuk biztosan osztható k-val.

A) $n = 6$, $k = 7$ **B)** $n = 3$, $k = 4$ **C)** $n = 4$, $k = 24$ **D)** $n = 5$, $k = 25$
E) $n = 7$, $k = 27$

18.13. (M) 100!-t átváltjuk 99-es számrendszerbe. Hány 0-ra fog végződni?

A) 100 **B)** 33 **C)** 1 **D)** 9 **E)** 99

18.14. (M) Két játékos felváltva mondhatja az n pozitív osztóit, de az n-et, és már kimondott osztó osztóját nem lehet mondani. Az veszt, akinek már nem marad osztó. Mely n és k szám esetén igaz, hogy kezdő először k-t választva meg tudja nyerni a játékot?

A) $n = 44$, $k = 1$ **B)** $n = 24$, $k = 4$ **C)** $n = 36$, $k = 4$ **D)** $n = 32$, $k = 4$
E) $n = 36$, $k = 1$

18.15. (M) Hány pozitív osztója van $220 \cdot 250 \cdot 270$-nek?

A) 220 **B)** 240
C) 250 **D)** 270
E) Az előző négy egyike sem.

18.16. (M) Hány olyan pozitív egész van, amelynek a 6-tal osztható osztóinak száma éppen 6?

A) Nincs ilyen szám. **B)** 1
C) 2 **D)** 4
E) Végtelen sok ilyen szám van.

18.17. (M) A 12 melyik hatványának van pontosan 66 osztója?

A) 66 **B)** 6
C) 65 **D)** 5
E) Az előző négy egyike sem

18.18. (M) Legyen x a legkisebb 65-tel osztható szám, amelynek pontosan 65 osztója van. Melyik nem igaz?

A) x osztható 5-tel **B)** x osztható 2-vel **C)** x osztható 169-cel
D) $x > 65^6$ **E)** $x < 65^8$

18.19. (M) Legyen x a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelynek pozitív osztóit nagyság szerint növekedő sorrendben felírva a hatodik a 15. Mennyi x jegyeinek összege?

A) 9 **B)** 8
C) 7 **D)** 6
E) Az előző négy egyike sem.

18.20. (M) Legyen x a legkisebb olyan szám, amelyet 2-vel szorozva köbszámot, hárommal szorozva négyzetszámot kapunk. Mennyi x jegyeinek összege?

A) 7

B) 9

C) 11

D) 12

E) Az előző négy egyike sem.

19. FEJEZET
Racionális és irracionális számok

19.1. [13] Ha

a) $\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{1}{52}$

tizedestört alakjának felírnánk több mint 100 tizedesjegyét, akkor mi állna a 100. helyen?

19.2. Számoljuk ki $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ és $\frac{6}{7}$ tizedestört alakját és tegyünk megfigyelést!

Számoljuk ki $\frac{1}{13}$ értékét! Melyik tört tizedestört alakját lehet ennek alapján azonnal megmondani az alábbiak közül:

a) $\frac{2}{13}$; **b)** $\frac{3}{13}$; **c)** $\frac{4}{13}$?

19.3. Válasszuk ki az alábbi törtek közül azokat, amelyek tizedestört alakja véges!

$\frac{3}{40}$, $\frac{31}{7}$, $\frac{21}{60}$, $\frac{3}{1024}$, $\frac{1}{2005}$, $\frac{7}{1250}$.

19.4. Határozzuk meg, hogy az alábbi törtek tizedestört alakjában hány jegy van a tizedesvessző után!

$\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{125}$, $\frac{1}{5120}$, $\frac{4}{512}$.

19.5. Az alábbi törtek tizedestört alakja periodikus. Adjunk felső becslést a periódus hosszára!

$\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{19}$, $\frac{123}{2005}$.

19.6. Igaz-e, hogy minden racionális szám tizedestört alakja periodikus vagy véges?

19.7. Melyek azok a racionális számok, amelyek tizedestört alakja véges?

19.8. Van-e olyan tizedestört, amelyik nem periodikus?

19.9. A négyzetszámokból a következő tizedestörtet készítjük:

$$0{,}149162536\ldots.$$

Mi ennek a számnak a

a) 100-adik

b) 1000-edik tizedesjegye?

c) Ismétlődő tizedestört-e a fenti szám?

19.10. **a)** Adott a síkon egy négyzet. Szerkesszünk kétszer akkora területű négyzetet körzővel és vonalzóval!

b) Hányszorosa lesz az így kapott négyzet oldala az eredeti négyzetének?

19.11. Adott a síkon egy szakasz. Képzeljünk el egy kockát, melynek ez a szakasz az oldaléle. Szerkesszünk a kocka testátlójával egyenlő hosszú szakaszt! Milyen hosszú a testátló, ha az adott szakasz hossza 1 egység?

19.12. Van-e olyan négyzetszám, amelynek a

a) kétszerese, **b)** háromszorosa, **c)** négyszerese, **d)** hatszorosa,

e) tizenkétszerese

is négyzetszám?

19.13. Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális, azaz nem írható fel két egész szám hányadosaként!

19.14. Melyek azok az n pozitív egészek, amelyekre $\sqrt{n}$ irracionális?

19.15. Adott a síkon az egységnyi hosszúságú szakasz. Szerkesszünk

a) $\sqrt{2}$, **b)** $\sqrt{n}$

hosszúságú szakaszt körzővel és vonalzóval!

19.16. Döntsük el az alábbi számokról, hogy racionálisak vagy irracionálisak!

a) $2\sqrt{2}$, **b)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, **c)** $\sqrt{169}$, **d)** $\sqrt[3]{2}$.

19.17. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

a) Két racionális szám összege mindig racionális;
b) Két irracionális szám összege mindig irracionális;
c) Egy racionális és egy irracionális szám összege mindig irracionális;
d) Két racionális szám szorzata mindig racionális;
e) Egy racionális és egy irracionális szám szorzata mindig irracionális;
f) Két irracionális szám szorzata mindig irracionális.

19.18. Igazoljuk, hogy tetszőlegesen adott hat irracionális szám közül mindig kiválasztható három úgy, hogy bármely kettő összege irracionális!

19.19. Igaz-e, hogy tetszőlegesen adott

a) hét **b)** öt **c)** négy

irracionális szám közül mindig kiválasztható három úgy, hogy bármely kettő összege irracionális?

19.20. (M) Készítsünk algoritmust, ami közönséges tört alakból tizedes tört alakba tud átváltani.

19.21. (M) Készítsünk algoritmust, ami közönséges tört alakból tizedes tört alakba tud átváltani és megtalálja a tizedestört alak periódusát is!

19.22. Készítsünk algoritmust, ami tizedes törtet tovább nem egyszerűsíthető közönséges tört alakba tud átváltani, ha

a) az adott tizedestört véges;
b) a tizedestört a periódusával és az az előtti résszel adott.

20. FEJEZET

Racionális és irracionális számok (teszt)

A 20.1-20.10. feladatok a „közép” szintnek, a 20.11-20.20. példák az „emelt” szint követelményeinek felelnek meg.

20.1. (M) A $\frac{3}{7}$ tizedestört alakjában mi a tizedesvessző utáni 100. jegy?
A) 2 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 1

20.2. (M) Melyik tört tizedestört alakja véges?
A) $\frac{1}{160}$ **B)** $\frac{1}{28}$ **C)** $\frac{1}{27}$ **D)** $\frac{1}{75}$ **E)** $\frac{1}{110}$

20.3. (M) Az $\frac{5}{32}$-ed tizedestört alakjában hány nem 0 jegy van a tizedesvessző után?
A) 7 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 32
E) végtelen sok

20.4. (M) Melyik az a tört, amelynek a tizedestört alakja véges és a tizedesvessző után 10 értékes szám áll? (Onnantól pedig csupa 0.)
A) $\frac{10}{11}$ **B)** $\frac{11}{10}$ **C)** $\frac{1}{2^{11}}$ **D)** $\frac{1}{10^9}$ **E)** $\frac{1}{5^{10}}$

20.5. (M) Milyen hosszú a $\frac{1}{13}$ tört tizedestört alakjában a periódus hossza?
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

20.6. (M) Az alábbi törtek tizedestört alakjában melyiknél lesz a periódus hossza 3?
A) $\frac{1}{30}$ **B)** $\frac{1}{33}$ **C)** $\frac{1}{5\cdot 3}$ **D)** $\frac{1}{111\cdot 3}$ **E)** $\frac{1}{101\cdot 33}$

20.7. (M) Melyik irracionális?
A) $\sqrt{256}$ **B)** $\sqrt{900}$ **C)** $\sqrt{9000}$ **D)** $\sqrt{250000}$ **E)** $\sqrt{4900}$

20.8. (M) Melyik a $0,\dot{2}\dot{3}$ közönséges tört alakja?
A) $\frac{99}{23}$ **B)** $\frac{9}{923}$ **C)** $\frac{2}{399}$ **D)** $\frac{23}{99}$ **E)** $\frac{239}{9}$

20.9. (M) Melyik a $2{,}3\dot{4}5\dot{6}$ közönséges tört alakja?
A) $\frac{9999}{23456}$ **B)** $\frac{9999}{23454}$
C) $\frac{9999}{3456}$ **D)** $\frac{9999}{3454}$
E) Az előző négy egyike sem.

20.10. (M) Hány irracionális szám van a következő halmazban:
$H = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{100}\}$.
A) 100 **B)** 90 **C)** 50 **D)** 10 **E)** 0

20.11. (M) A $\frac{11112222}{33333333}$ tizedestört alakjában mi a tizedesvessző utáni 100. jegy?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 9

20.12. (M) Melyik tört tizedestört alakja véges?
A) $\frac{1}{625}$ **B)** $\frac{1}{120}$ **C)** $\frac{1}{1001}$ **D)** $\frac{1}{48}$ **E)** $\frac{1}{1956}$

20.13. (M) Melyik a $98{,}7\dot{6}54\dot{3}$ közönséges tört alakja?
A) $\frac{9876}{5432}$ **B)** $\frac{1}{9876543}$ **C)** $\frac{9876543}{1001}$ **D)** $\frac{3456789}{9999}$ **E)** $\frac{3142148}{3333}$

20.14. (M) Legyen a és b pozitív egész, $b < 11$, $(a, b) = 1$. Melyik az $\frac{a}{b}$ alakú törtek közül a legkisebb, amelyikre $\frac{a}{b} > \frac{2}{3}$?
A) $\frac{5}{8}$ **B)** $\frac{5}{7}$ **C)** $\frac{7}{10}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{6}{9}$

20.15. (M) Milyen hosszú a $\frac{1}{11111}$ tört tizedestört alakjában a periódus hossza?
A) 99 **B)** 11110 **C)** 5 **D)** 11 **E)** 9

20.16. (M) Az alábbi törtek tizedestört alakjában melyiknél lesz a periódus hossza 6?
A) $\frac{7}{11}$ **B)** $\frac{2}{17}$ **C)** $\frac{7}{13}$ **D)** $\frac{7}{9}$ **E)** $\frac{7}{12}$

20.17. (M) Melyik racionális?
A) $\frac{3}{4+\sqrt{6}}$ **B)** $\sqrt[3]{4^6}$ **C)** $\sqrt{\sqrt[3]{46}}$ **D)** $3 + \sqrt{4} + \sqrt{6}$
E) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6}$

20.18. (M) Melyik igaz? **A)** Hat irracionális szám közül mindig kiválasztható kettő, melyek összege irracionális. **B)** Két irracionális szám összege mindig irracionális. **C)** Két irracionális szám szorzata mindig irracionális. **D)** Négy irracionális szám közül mindig kiválasztható három úgy, hogy bármely kettő összege irracionális. **E)** Ha két irracionális szám összege racionális, akkor a szorzatuk is racionális.

20.19. (M) Egy szabályos oktaéder minden éle x, testátlója y hosszúságú. Mekora az $x : y$?
A) $1 : \sqrt{2}$ **B)** $1 : \sqrt{3}$ **C)** $\sqrt{3} : 2$ **D)** $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{2} : 3$

20.20. (M) Hány irracionális szám van a következő 10 szám között:

$$a_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

$$a_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}?,$$

$$\vdots$$

$$a_{10} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}?$$

A) 10 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 2

21. FEJEZET
Vegyes feladatok

21.1. Melyek azok a háromjegyű prímszámok, amelyek számjegyeit összeszorozva 10-et kapunk?

21.2. [13] Egy urnában 67 fehér és piros golyó van. Vannak köztük kicsik és nagyok. Tudjuk:
-a piros golyók száma osztható 5-tel;
-a nagy piros golyók száma egyenlő a fehér golyókéval;
-a legkevesebb a kis fehér golyókból van;
-mindegyik fajta golyó száma prím.

Hány golyó van az egyes fajtákból?

21.3. [13] Oldjuk meg a prímek körében a

$$2x + 3y + 6z = 78$$

egyenletet!

21.4. Vágjunk ki kartonból szabályos sokszöget, középpontját rögzítsük gombostű hegyével, és forgassuk e körül. Határozzuk meg azt a legkevesebb oldalszámú sokszöget, amelyik 25,5°-os elforgatás után egybeesik eredeti kontúrjával.

21.5. [3] 7800 Ft-ot fizettem ki 1000-es, 500-as és 100-as címletű bankjegyekben. Az 500-as és a 100-as bankjegyek száma megegyezett. Hány db bankjeggyel fizethettem?

21.6. [3] Két természetes szám összege 13574. Az egyik szám 10-zel osztható. Ha ennek utolsó jegyét elhagyom, akkor éppen a másik számot kapom. Melyik ez a két szám?

21.7. [3] Hány olyan – egymással nem egybevágó – háromszög létezik, amelynek két oldala 21 és 27 cm, harmadik oldala – cm-ben mérve – hárommal osztható szám, kerületének mért mérőszáma pedig héttel osztható?

Mekkora a harmadik oldal?

21.8. [13] Egy baráti társaság elment kirándulni. A nagy erdei tisztáson a következő játékot találták ki: körbeálltak, Jolán kezdte a játékot úgy, hogy először mindenki a baloldali szomszédjának dobta a labdát, majd miután Jolánhoz visszajutott a labda, mindenki a baloldali második szomszédjának dobta, amíg az ismét Jolánhoz nem került. És így tovább. A játékból kiesik az, aki valamelyik fordulóban nem jut labdához, mielőtt az visszakerülne Jolánhoz. Kevesebben voltak 20-nál. Hányan lehettek, ha tudjuk, hogy a játékból senki sem esett ki?

21.9. [13] Melyik az a legkisebb prímszám, amelyet elő lehet állítani 2, 3, 4 és 5 különböző prímszám összegeként is?

21.10. [13] Mely p és q prímekre lesz $pq - 1$ és $pq + 1$ is prím?

21.11. Egy dobozban 103 kavics van. Péter és Pál felváltva vesznek ki a dobozból legalább egy, de legfeljebb 10 kavicsot. Amikor a doboz kiürült, mindketten megszámolják, hogy összesen hány kavicsot vettek ki külön-külön. Ha ez a két szám relatív prím, akkor Péter nyert. A játékot kezdő Péter tud-e úgy játszani, hogy biztosan ő nyerjen?

21.12. Bontsuk fel két háromjegyű szám szorzatára az 555555-öt és a 777777-et!

21.13. [5] Varázsországban a Nagy Zöld Sárkánynak 100 feje van. A mesebeli Vitéznek olyan kardja van, amivel egy csapásra csak 33 vagy 21 vagy 17 fejét tudja levágni. Igen ám, de az első esetben a Sárkánynak 18 új feje nő ki, a második esetben 36, a harmadikban pedig 14. Ha a Sárkánynak az összes feje lehullott, akkor már nem nő ki több. Le tudja-e győzni a Vitéz a Sárkányt?

21.14. [13] Egy 10×10-es négyzetalakú táblázatba beírjuk az egész számokat 1-től 100-ig úgy, hogy az első sorba 1-től 10-ig, a másodikba 11-től 20-ig, stb növekvő sorrendbe írjuk le a számokat. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is veszünk ki ebből a táblázatból egy 7-szer 7-es összefüggő résztáblázatot, az ebben leírt számok összege mindig osztható 49-cel!

21.15. [13] Egy 10×10-es négyzetalakú táblázatba beírjuk az egész számokat 0-tól 99-ig úgy, hogy az első sorba 0-tól 9-ig, a másodikba 10-től 19-ig, stb növekvő sorrendbe írjuk le a számokat. Ezután elhelyezünk a táblázaton 10 db korongot úgy, hogy a sakk szabályai szerint mint bástyák ne üssék egymást. Adjuk össze az általuk lefedett számokat és bizonyítsuk be, hogy bármely, a feltételeknek megfelelő lefedés esetén ez az összeg osztható 5-tel és 9-cel is!

21.16. [19] **a)** Egy szultán börtönének 100 cellájában 100 elítélt raboskodott. Mindegyik ajtaján egy-egy kétállású zár volt, amely egy forgatásra nyithatóvá tette az ajtót, de még egy forgatásra zárt. Egyik nap a szultán jókedvében leküldte a börtönbe első szolgáját, hogy fordítson minden cella zárján egyet. Hamar gondolt egy újat és leküldte második szolgáját is, hogy az minden második záron forgasson még egyet. Iziben küldte is harmadik szolgáját, hogy az minden harmadik záron fordítson. Ez így ment a 100-adik szolgáig, aki csak a legutolsó, a 100-adik záron fordított egyet. Mely ajtók mögül szabadulhatott ki a rab ezek után?

b) A szultánnak az a parancsa, hogy az első őr minden záron fordítson egyet, a második őr minden második záron fordítson kettőt, a harmadik minden harmadikon hármat, és így tovább, és végül a századik minden századikon százat. Mely cellák lakói hagyhatják el a börtönt?

21.17. Egy számnak 100 osztója van. Mi lesz az eredmény, ha összeszorozzuk a száz osztót?

21.18. [21] Egy pozitív egész összes (pozitív) osztójának összegét elosztjuk ugyanezen osztók reciprokainak összegével. Mit kapunk eredményül?

21.19. Összeszorozzuk 1-től kezdve az első 100 pozitív egész számot:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ \ldots \ \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$$

Mi az utolsó 0-tól különböző számjegye az így kapott számnak?

21.20. Írjunk egy 3×3-as táblázat 9 mezőjébe 9 különböző pozitív egész számot úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok szorzata 270 legyen!

21.21. Egy hajóskapitánynak fia is van lánya is van. Életkorának, a hajó méterben mért hosszának és gyerekei számának szorzata 32118. Hány éves a kapitány?

21.22. A görögök *tökéletes szám*nak nevezték azokat a számokat, amelyek egyenlők önmaguknál kisebb osztóik összegével. A legkisebb pozitív tökéletes szám a 6, hiszen $6 = 1 + 2 + 3$. Melyek a 100-nál kisebb tökéletes számok?[1]

[1] Ajánlott olvasmányok: [14] 1. fejezete, [11] „Püthagoreusok számelmélete” című fejezete (86-87. oldal)

21.23. Hány olyan 1000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a
a) 2 és 3 számok közül pontosan eggyel;
b) 2, 3 és 5 számok közül pontosan eggyel osztható?

21.24. [19] Igaz-e, hogy öt egymást követő természetes szám szorzata osztható 8-cal? 16-tal? 24-gyel? 5-tel? Mi a legnagyobb szám, amellyel biztosan osztható?

21.25. [19] Igaz-e, hogy ha öt pozitív egész szám szorzata két nullára végződik, akkor van köztük olyan négy szám, melyeknek a szorzata is két nullára végződik?

21.26. A tanár egy nagy pozitív egész számot írt a táblára. A diákok a számot látva így szóltak:
1. tanuló: a táblára írt szám osztható 2-vel;
2. tanuló: a szám 3-mal is osztható;
3. tanuló: 4-gyel is ....; és ez így ment tovább az utolsó (30.) tanulóig:
30. tanuló: ez a szám 31-gyel is osztható.

A tanár pedig így válaszolt: két diák kivételével mindenkinek igaza van. Ez a két diák pedig egymás után szólalt meg.

Melyik két diák tévedett?

21.27. Hét gazfickó a sötét erdő mélyén megbúvó kunyhóban sajátos módon osztozkodott a rabolt aranyakon. Körbe ültek és egyikőjük megszámolta a zsákmányolt aranytallérokat. Nosza, el is vett magának annyit, amennyi a tallérok száma számjegyeinek összege. Erre biza' jobboldali szomszédja is nekiállt megolvasni a maradék aranyakat és ő is épp annyit tett el magának, mint az aranytallérok száma számjegyeinek összege. Így ment ez sorban, két körön át, mígnem elfogyott az utolsó aranytallér is. Csudálkoztak is fenemód, hogy nem ám csak mindőjük éppen kétszer vett, de egyformán is jutott mindegyik gonosznak, csupáncsak hírhedett vezérük Sobri Jóska lett náluknál gazdagabb.

Hányadiknak vett Sobri Jóska az aranyból?

21.28. 10^4-nek legfeljebb hány pozitív osztója adható meg úgy, hogy egyik se legyen osztója valamelyik másiknak?

21.29. Számozzuk meg sorrendben egy 8×8-as sakktábla sorait és oszlopait, és minden mezőre írjuk rá a mező sorszámának és oszlopszámának összegét. Helyezzünk most el 8 bástyát a táblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást, azaz minden sorban és minden oszlopban pontosan egy bástya álljon. Melyik bábuelhelyezésnél lesz a bástyák alatti számok összege a lehető legnagyobb?

21.30. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a természetes számok körében:

$$314x + 25y = 1995.$$

21.31. Tudjuk, hogy

$$\frac{3 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 24 \cdot 35 \cdot \ldots \cdot 899}{4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot \ldots \cdot 900} = \frac{p}{q},$$

ahol $p, q > 0$ egészek és $(p, q) = 1$. Számítsuk ki p és q értékét (a bal oldali tört nevezőjében a négyzetszámok szorzata szerepel 4-től 900-ig, a számlálóban a megfelelő tényezők pedig az 1-gyel kisebb számok)!

21.32. Adott egy $19°$-os szög. Csak körző és vonalzó felhasználásával szerkesszünk ennek alapján $1°$-os szöget! (Leírandó a szerkesztés menete!)

21.33. Képeztük egy háromjegyű szám és fordítottjának különbségét.A kapott szám első jegye 3.

a) Mennyi a különbség?
b) Mik lehettek az eredeti számok?

21.34. [19] Van-e olyan négyzetszám, amelyben a számjegyek összege
a) 150; **b)** 18?

21.35. [19] Igaz-e, hogy ha x egész szám, és x^2 osztható 6-tal, akkor x is osztható 6-tal?

21.36. [19] Keressünk olyan négyzetszámot, amelynek a számjegyeit összeadva az eredmény
a) 21; **b)** 15; **c)** 27; **d)** 36; **e)** 8!

21.37. [19] Milyen maradékot adhat egy négyzetszám jegyeinek az összege
a) 3-mal osztva; **b)** 9-cel osztva?

21.38. [19] Bizonyítsuk be, hogy ha p és p^2+8 törzsszámok, akkor p^2+p+1 is törzsszám!

21.39. [19] Van-e olyan pozitív egész n, amelyre $17 \mid 11^n$?

21.40. [19] Van-e egész megoldása a következő egyenletnek?
a) $x^2 = 3y+2$ **b)** $x^2 = 3y+1$ **c)** $x^2+y^2 = 4z+3$
d) $x^2+y^2+z^2 = 8k+7$

21.41. [19] A 8 és a 9 két olyan egymást követő szám, melyek mindegyike hatványszám, vagyis egy egész számnak 1-nél nagyobb kitevőjű hatványa $(8 = 2^3,\ \ 9 = 3^2)$. Nehéznek látszó megoldatlan probléma a matematikában, hogy van-e még a számsorban valahol egymás mellett két hatványszám. Az is megoldatlan, hogy van-e a számsorban valahol három egymást követő hatványszám. Próbáljuk meggondolni, hogy van-e a számsorban négy egymást követő hatványszám!

21.42. [19] Írjunk a 423-hoz három számjegyet úgy, hogy az így keletkezett hatjegyű szám osztható legyen 5-tel, 6-tal és 7-tel!

21.43. [19] Mi lehet az utolsó négy jegye egy 25-re végződő szám négyzetének?

21.44. [19] Igaz-e, hogy a következő sorozatban végtelen sok 3-mal osztható szám van? Bizonyítsuk is állításunkat!

$$5,\ 55,\ 555,\ 5555,\ 55\,555, \dots$$

(a sorozat n-edik eleme olyan n jegyű szám, amelynek minden számjegye 5).

21.45. [19] Igaz-e, hogy a

$$31,\ 331,\ 3331,\ 33\,331,\ 333\,331, \dots$$

sorozatban (a sorozat n-edik eleme olyan $(n+1)$ jegyű szám, amelynek az első n számjegye 3, az utolsó számjegye pedig 1)
a) végtelen sok 13-mal osztható szám van;
b) végtelen sok 7-tel osztható szám van?
Igazoljuk is az állítást!

21.46. [19] Bizonyítsuk be, hogy a következő számtani sorozatban végtelen sok csupa 2-es számjegyből álló szám van! (A számtani sorozat egymást követő elemei között a különbség állandó.)

$$14, 27, 40, 53, 66, \ \dots$$

21.47. Ebben a feladatban az

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

összeget vizsgáljuk. Mutassuk meg, hogy az összeg értéke nem lehet egész szám, ha

a) $n = 1024$ **b)** $n = 1021$ **c)** $n = 1000$.

d Van-e olyan 1-nél nagyobb n egész szám, amelyre a vizsgált összeg értéke is egész?

21.48. Az a_1, a_2, a_3, …, a_{49} pozitív egész számok összege 999. Legfeljebb mennyi lehet ennek a 49 számnak a legnagyobb közös osztója?

21.49. Legfeljebb hány számot lehet kiválasztani az 1, 2, 3, …, 100 számok közül úgy, hogy

a) bármelyik kettő relatív prím legyen?

a) egyik se legyen osztója másik kiválasztottnak?

21.50. [10] András a tengerparton kagylót gyűjtött. Hat csoportba rendezte fajtájuk szerint. – Érdekes – mondta, a különböző kupacokban lévő kagylók száma páronként relatív prím. Ezután két kupacot kiválasztott, mindkettőből elvett egy-egy kagylót, s ezeket a vödrébe tette. Összesen kilencszer választott kupacpárt, s vett el egy-egy kagylót. Így a hat kupacban ugyanannyi kagyló maradt. Hány kagylót gyűjtött Andris és hogyan csoportosította azokat?

21.51. Írjunk be az alábbi táblázat 6 mezőjébe egy-egy 0-tól különböző számjegyet úgy, hogy a két sorban (balról jobbra) egy-egy pozitív egész szám négyzete álljon, továbbá a három oszlopban is négyzetszámok legyenek!

21.52. Oldjuk meg a következő rejtvényt:

$$M + A = T + E + K,$$

$$M^2 = A^2 + T^2 + E^2 + K^2.$$

Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.

21.53. Határozzuk meg azokat a négyjegyű, 9-re végződő számokat, amelyek oszthatók számjegyeik mindegyikével.

21.54. *Nehezített számlétra*

Két játékos felváltva mond pozitív egész számokat. A kezdőnek 1-et kell mondania, az n-edszerre megszólaló játékos pedig az ellenfele által legutóbb kimondott számot valamely 1 és n közötti egész számmal növelheti meg. Az nyer, aki kimondja a 100-at.

Kinek van nyerő stratégiája?

21.55. [13] Mi lesz a végeredményül kapott tört nevezője $\frac{100!}{2^{100}}$ egyszerűsítése után?

21.56. [22] Bergengóciában pénzreformot vezettek be. Ezentúl csak ötbengócos és hétbengócos[2] lesz.

a) Lehet-e 101 bengóc egy csoki ára? Azaz ki lehet-e fizetni pontosan 101 bengócot, ha nem tudnak visszaadni?

b) Mely összegek fizethetők ki visszaadás nélkül?

c) És visszaadással?

21.57. [22] Bergengócia új uralkodója saját képét szeretné a bengócokon viszontlátni. Ezért a régi pénzeket visszavonja, ezentúl csak 6 és 15 bengócosok lesznek. Most mit lehet kifizetni

a) visszaadással;

b) visszaadás nélkül?

21.58. (M) [3] A 948 és a 417 minegyikét ugyanazzal a kétjegyű számmal elosztva egyenlő maradékokat kapunk. Mekkora a maradék?

21.59. (MS) [22] Melyik az az n pozitív egész szám, amelyre a 23479 szám n-nel osztva 50-nel nagyobb maradékot ad, mint a 34539?

21.60. [22] Számítsuk ki az 11111111 és a 100 darab 1-esből álló szám legnagyobb közös osztóját!

21.61. [22] Adjuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre a $\frac{7n+6}{5n+3}$ tört tovább egyszerűsíthető!

21.62. [20] Milyen k természetes számokra lesznek a következő törtek természetes számok?

a) $\frac{3k-1}{5}$ **b)** $\frac{22k+12}{7}$ **c)** $\frac{16k+12}{5}$ **d)** $\frac{k+11}{k-9}$ **e)** $\frac{k+17}{k-3}$

f) $\frac{k+17}{k-6}$

Hány megfelelő k érték található az egyes feladatokban? Ahol végtelen sok, ott írjuk fel az általános alakjukat is!

21.63. [13] Adjuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre a

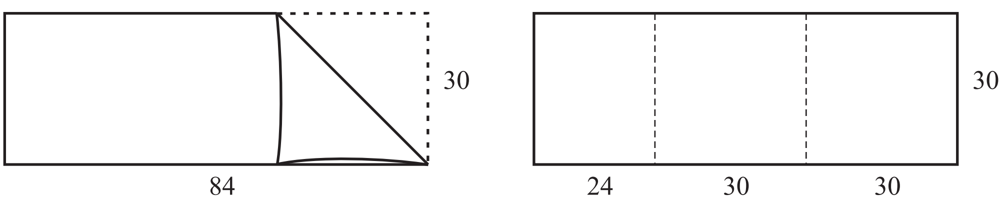
a) $\frac{n+3}{n-3}$; **b)** $\frac{n^2+2}{n+1}$

tört értéke egész szám!

21.64. [19] Egy téglalap alakú lap egyik oldala 385 cm, a másik 105 cm. Egységoldalú négyzetekre fel lehet darabolni maradék nélkül, 2 egység oldalúakra nem lehet feldarabolni maradék nélkül. Lehet-e 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... egység oldalú négyzetekre maradék nélkül feldarabolni?

Mekkora a legnagyobb olyan négyzet oldala, amilyenre fel lehet darabolni maradék nélkül?

21.65. [19]

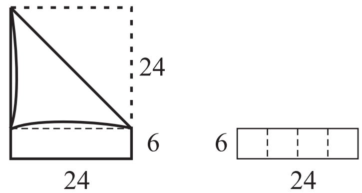


21.65.1. ábra.

[2] bengóc a bergengóc forint

Egy 30 cm $\times$ 84 cm-es téglalap alakú papírlapnak behajtjuk a sarkát a 21.0.1. ábrán látható módon és 30 cm oldalú négyzeteket hajtogatunk belőle, amennyit csak lehet.

A négyzeteket levágjuk, és a megmaradó csíkból olyan négyzeteket hajtogatunk, amelyeknek az oldala a papírcsík kisebbik oldalával egyezik meg (esetünkben 24-gyel). Ebből is annyit hajtogatunk, amennyit csak tudunk (példánkban egy 24 cm oldalú négyzetet tudunk, 21.0.2. ábra).



21.65.2. ábra.

A négyzetet levágjuk, és a megmaradó csíkból hasonló módon mindig négyzeteket hajtogatunk, egészen addig, amíg sikerül a papírcsíkot csupa négyzetre hajtogatni.

Csináljuk meg az alábbi méretű téglalapokra is!

a) 16×36 **b)** 50×36 **c)** 51×36

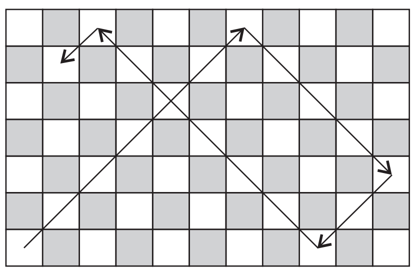
21.66. [22] Beszínezzük a koordinátarendszer rácspontjait. Egyetlen szabályt kell betartanunk: az $(a; b)$ pontnak ugyanolyan színűnek kell lennie, mint az $(a - b; a)$ és az $(a; b - a)$ pontnak, bármely egész számokat jelöljön is a és b. Következik-e a szabályból, hogy

a) a $(19; 99)$ és a $(199; 3383)$ pontok;

b) a $(234; 1001)$ és a $(611; 7007)$ pontok

egyforma színűek lesznek?

21.67. [10] Az $n \times m$-es sakktábla egy fehér sarkából indul a futó. A tábla széléhez érve mindig elfordul derékszögben (lásd a 21.0.1. ábrát!), ha sarokba ér megáll.



21.67.1. ábra.

a) Mely n és m esetén járja be a futó az összes fehér mezőt?

b) Összesen hány mezőt érint az $n \times m$-es sakktáblán?

21.68. [10] Felírtuk az $n = 135$ és a $k = 311$ számokat. Ketten játszanak, felváltva átírják n és k értékét.

A soron lévő játékos n és k közül kiválasztja a nagyobbikat, s néhányszor levonja belőle a kisebbiket. (Legalább egyszer le kell vonnia a kisebbik számot, de a kivonás eredménye soha nem lehet negatív.) Ezután a kisebbik számot és az új számot írja n és k helyébe és átadja a stafétabotot a másik játékosnak.

Kinek van nyerő stratégiája, „Kezdő”-nek, vagy „Második”-nak, ha az

a) nyer; **b)** veszít,

aki már nem tud változtatni a számokon?

21.69. [7, 11] Alább egy ókori egyiptomi algoritmikus számolási eljárás egy példája látható mai számírással átírva. A számolás a 41, 37 számokból indul ki. Mire való az eljárás és hogyan működik? Magyarázzuk meg!

		4	1	3	7
		8	2	1	8
	1	6	4		9
	3	2	8		4
	6	5	6		2
1	3	1	2		1
1	**5**	**1**	**7**		

21.70. [21] II. Pomádé király halálosan gyűlölte elődjét, I. Pomádét, ezért országában betiltotta az 1-es számjegy használatát. Országában így kellett számolni:

$$2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 20,\quad 22,\quad \ldots\quad .$$

Vajon milyen számot használtak II. Pomádé király birodalmában az 1998 helyett? Más szóval, melyik az 1998. szám a számsorukban?

21.71. Lisztet árulunk. Van egy kétkarú mérlegünk, amellyel

a) 1-től 10-ig

b) 1-től 32-ig

kezdve minden egész kilogrammnyi tömeget ki szeretnénk mérni. Ehhez kiválaszthatunk néhány mérősúlyt. Legkevesebb hány mérősúllyal odható meg a feladat? Hány kg-osak legyenek a mérősúlyok?

c) Öt ügyesen választott mérősúllyal hány kg-ig tudunk minden egész kilogrammnyi tömeget kimérni?

21.72. Az asztalon van egy kő, melynek tömegéről tudjuk, hogy kilogrammban mérve egész és legfeljebb

a) 10 kg

b) 32 kg.

Egy kétkarú mérleg és néhány ügyesen megválasztott mérősúly segítségével kell eldöntenünk, hogy pontosan mennyi a kő tömege. Legkevesebb hány mérősúllyal odható meg a feladat? Hány kg-osak legyenek a mérősúlyok? (A mérleget többször is használhatjuk.)

c) Határozzuk meg az n egész szám legnagyobb értékét úgy, hogy öt megfelelő segédsúly és egy kétkarú mérleg segítségével, bármely olyan kő tömege meghatározható legyen, amelyről tudvalevő, hogy tömegének kilogrammban vett mérőszáma 1 és n közti egész szám! (A kétkarú mérleget tetszőleges sokszor használhatjuk, de csak a segédsúlyokat és mérendő tárgyat rakhatjuk serpenyőibe, és ezeket nem darabolhatjuk fel.)

21.73. [4] Az alábbi – kissé hiányos – táblázat megmutatja, hogyan számolnak a heva törzsbeliek saját nyelvükön és melyik testrészükre mutatva jelzik az adott számot.

namalu	2	bal mutatóujj
keli	5	bal kisujj
tagu	7	
aluene	8	bal könyök
kolu		
opey	12	bal fül
	1	
aley	10	
ilaw	11	a nyak bal része
favalo	3	bal kéz középső ujj
kay-maluene	22	jobb csukló
		jobb kéz a csukló és a könyök között
ni		bal szem
kay-tamey	19	
	24	jobb mutatóujj
	6	
kay-name	23	
kay-kolu	26	
kay-keli		
patapa		orr

Töltsük ki a táblázat hiányosságait!

21.74. Alább két szomszédos páros egész szám négyzetét láthatod.

$$152415787751564791571470221617965857842778256$$

$$152415787751564791571519604333606302695344324$$

Határozzuk meg a közöttük található páratlan szám négyzetét!

21.75. Bizonyítsuk be, hogy 5^n bármely $n > 0$ egész esetén előáll két pozitív négyzetszám összegeként!

21.76. [2] Volt egyszer két testvér, s kettejüknek volt egy birkanyája. Fogták magukat, eladták a birkákat, s pontosan annyi rubelt kaptak minden egyes birkáért, ahány birka összesen volt a birkanyájban. A kapott pénzt a következőképpen osztották el: először az idősebb testvér vett el magának 10 rubelt, majd az öccse, aztán megint az idősebb fiú, és így tovább. Utoljára a fiatalabbnak már nem jutott 10 rubel, ezért elvette az aprópénzt, s hogy igazságos legyen az osztozkodás, az idősebbik nekiadta még a bicskáját. Mennyit ért a bicska?

21.77. Tekintsük az

$$n = 1234567891011\ldots 200020001$$

számot! **a)** Négyzetszám-e az n szám?

b) Az n szám jegyeinek felcserélésével kaphatunk-e négyzetszámot?

21.78. Számoljuk ki 3421548832 négyzetét zsebszámológép segítségével! (A pontos értéket keressük.)

21.79. Megválaszthatók az előjelek a

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n$$

kifejezésben úgy, hogy a kifejezés értéke 0 legyen? Oldjuk meg a feladatot
a) $n = 21$ **b)** $n = 20$ **c)** $n = 19$ **d)** $n = 18$
esetén!

21.80. (S) Az asztalon fekszik egy papírlap. Ezt tíz részre téptük, majd az egyik részt szintén tíz részre vágtunk. Így haladtunk tovább: egy-egy lépésben mindig kiválasztottunk egy darabot és azt tízfelé téptük. Lehetséges-e, hogy bizonyos számú lépés után
a) 201 **b)** 200 **c)** 199
darab papír lesz az asztalon?

21.81. (S) Az asztalon fekszik egy papírlap. Ezt tíz vagy tizenhat részre téphetjük; majd a kapott részek bármelyikét szintén tíz vagy tizenhat részre vághatjuk. Ilyen lépések egymás utáni alkalmazásával elérhetjük-e, hogy
a) 400 **b)** 399 **a)** 22
darab papír legyen az asztalon?

21.82. (S) Két kupacban gyufák vannak. Egy-egy alkalommal valamelyik kupacba beteszünk néhány szálat, s ugyanekkor a másik kupacba kétszer annyit helyezünk. Elérhető-e, hogy mindkét kupacban 50 gyufaszál legyen, ha kezdetben az egyes kupacokban
a)7 és 34 **b)** 1 és 3
szál gyufa volt.

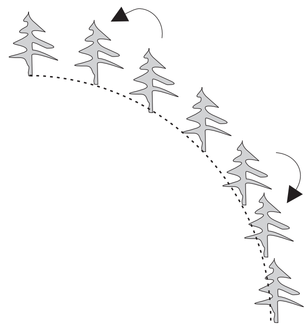
21.83. (S) Két kupacban gyufák vannak. Egy-egy alkalommal valamelyik kupacból elveszünk néhány szálat, s a másik kupacba kétszer annyit helyezünk. Elérhető-e, hogy mindkét kupacban ugyanannyi gyufaszál legyen, ha kezdetben az egyes kupacokban
a)7 és 34 **b)** 1 és 3
szál gyufa volt.

21.84. Egy kocka csúcsaiba számokat írtunk. Egy-egy alkalommal valamelyik él két végén álló számot 1-gyel növelhetjük. Ezt az eljárást néhányszor megismételve elérhető-e, hogy minden csúcsban ugyanaz a szám álljon, ha kezdő állapotban
a) az egyik csúcsban 1-es, a többiben 0 van;
b) az egyik él két csúcsában 1-es, a többi csúcsban 0 van;
c) az egyik lapátló két csúcsában 1-es, a többi csúcsban 0 van;
d) az egyik testátló két csúcsában 1-es, a többi csúcsban 0 van?

21.85. [?] Egy tetraéder éleire felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat. Ezután minden csúcsra elvégeztük a következő műveletet: az ide futó éleken lévő számokat összeadtuk, és ráírtuk a csúcsra. Kaphattunk-e a csúcsokon egyforma számokat?

21.86. [17, 11.] Egy rét körül körben 44 fa áll, mindegyik fán egy-egy picinyke cinke. Időnként két cinke egyszerre átrepül a szomszédos fára, de mindig ellenkező irányba: az egyik az óra járása szerint következőbe, a másik az óra járásával ellentétes irányba. Bizonyítsuk be, hogy a cinkék így sose fognak összegyűlni ugyanazon a fán.
Mi a helyzet n fa és n cinke esetén?

21.87. (M) Készítsük el az euklideszi algoritmus struktogramját.



21.86.1. ábra.

21.88. Gondolkodjunk el azon, hogy a számítógép hogyan ábrázolja (ábrázolja-e egyáltalán) az irracionális számokat.

Segítség, útmutatás

1. Bemelegítő feladatok

1.20. Az egyik részfeladatra nincs megoldás (miért?) a másikra van.

1.21. Írjunk fel sok példát, keressünk közös okot, amely mutatja, hogy nem prím az eredmény!

1.23. **a)** Vizsgáljuk a számok összegét! Nem biztos, hogy lehet jól rendezni!
b) Vizsgáljuk a számok szorzatát!

1.24. **a)** Itt lehetséges a két csoportra osztás!
b) Ez nem lehetséges. Miért?

2. Osztók

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

3. Osztók (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

4. Prímtényezők

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

5. Közös osztó, közös többszörös

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

6. Közös osztó, közös többszörös (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

7. Maradékos osztás

7.22.

1. segítség, útmutatás. Próbáljuk ki sok prímre! Hány megoldás adódott?

2. segítség, útmutatás. Próbáljuk igazolni, hogy csak egy megoldás van!

3. segítség, útmutatás. Van-e olyan q prím, amivel mindig osztható p, $2p+1$, $3p+2$, $4p+3$ és $6p+1$ egyike?

8. Maradékos osztás (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

9. Oszthatósági szabályok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

10. Oszthatósági szabályok (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

11. Számjegyek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

12. Számjegyek (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

13. Számrendszerek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

14. Számrendszerek (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

15. Diofantikus egyenletek

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

16. Diofantikus egyenletek (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

17. Prímek eloszlása

17.23. Célszerű felhasználni a már előállított prímszámkereső, prímtesztelő algoritmusokat.

17.25. Oszthatósági feltételek vizsgálatával szűkítsük a lehetőségeket, majd alkalmazzunk számítógép-programot!

17.26. Lásd a 17.12-17.13. feladatokat!

17.28. A 17.27. feladat megoldásából kiindulva is kereshetünk megoldást.

18. Prímek (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

19. Racionális és irracionális számok

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

20. Racionális és irracionális számok (teszt)

Ez a fejezet nem tartalmaz segítséget és útmutatásokat.

21. Vegyes feladatok

21.59. Lásd a 21.58 feladat megoldását (115. oldal).

21.80. Kezdjünk el próbálgatni, írjuk fel a darabszámokat, tegyünk megfigyelést!

21.81. Kezdjünk el próbálgatni, írjuk fel a darabszámokat, tegyünk megfigyelést!

21.82. Kezdjünk el próbálgatni, írjuk fel a darabszámokat, tegyünk megfigyelést!

21.83. Lásd a 21.83. feladatot

Megoldások

1. Bemelegítő feladatok

1.3.

a) $\dfrac{81}{8}$ **b)** $\dfrac{3}{4}$ **c)** $\dfrac{13}{14}$ **d)** 4 **e)** $\dfrac{11}{91}$

1.4.

a) $\dfrac{79}{180}$ **b)** $\dfrac{163}{294}$ **c)** $-\dfrac{1}{66}$ **d)** $\dfrac{2}{7}$ **e)** $\dfrac{1}{5}$
f) $\dfrac{9}{182}$ **g)** $-\dfrac{257}{1274}$

1.5.

a) $\dfrac{1}{10}$ **b)** $\dfrac{1}{7}$ **c)** $\dfrac{1}{343}$ **d)** $\dfrac{8}{33}$ **e)** $\dfrac{20}{63}$ **f)** $\dfrac{19}{81}$
g) $\dfrac{7}{3}$ **h)** $\dfrac{29}{6}$ **i)** $-\dfrac{1}{70}$ **j)** $\dfrac{677}{630}$ **k)** $\dfrac{39}{11}$

1.6. Az ötjegyű szám: 23572.

1.7. Sárinak igaza volt, a lehetőségek: 5,5,3 vagy 5,3,3.

1.8. $5 \cdot 6$, $9 \cdot 10$, stb.

1.9. $3 \implies 6 \longrightarrow 30 \implies 60 \longrightarrow 300 \implies 600$

1.11. Az eredmények rendre
a) 9, 7, 4, 12, 8; **b)** 18, 14, 8, 24, 16;
c) 5, 4, 2, 6, 4; **d)** 10, 8, 4, 12, 8.

1.14. **a)** a 2-nek; **b)** 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33;

1.16. $210 = 14 \cdot 15 = (-14) \cdot (-15)$. Ehhez eljuthatunk az osztókat vizsgálva vagy a szomszédos számok szorzatának nagyságát elemezve is.

1.18. A válaszok:
a) Igaz; **b)** Nem igaz; **c)** Igaz; **d)** Nem igaz;
e) Igaz; **f)** Nem igaz; **g)** Igaz; **h)** Nem igaz
i) Nem igaz; **j)** Igaz;

1.19. Nem. A szorzat csak úgy lehet páratlan, ha mind a négy tényező páratlan, de ekkor összegük páros.

1.20. a) Nincs megoldás. A szorzat páratlan, tehát mindhárom tényezőnek páratlannak kell lennie, de ekkor összegük is páratlan.

b) Sok megoldás van, pld: 1, 1, 2001. □

1.21. Az összeg 3-nál nagyobb, de mindig osztható hárommal, így nem prím.

Többféleképpen is igazolhatjuk, hogy az összeg mindig osztható hárommal. Megmutathatjuk pld, hogy az összeg mindig a középső elem háromszorosa. □

1.22. 2+3+5+7=17. Minden más esetben páros az összeg (és nem a 2). □

1.26. 251 és 521.

1.27. a) A lefutott táv $9 \cdot 390 + 120m$, azaz $3630m$.

b) A lefutott táv $11 \cdot 390 - 120m$, azaz $4170m$.

c) Az 5000-et elosztjuk maradékosan 390-nel:

5	0	0	0	:	390=12
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	0		
	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{0}$		

azaz $5000 = 12 \cdot 390 + 320 = 13 \cdot 390 - 70$.

Tehát Jóska összesen 12 teljes kört tett és a rajt után van $320m$-rel. Csak $70m$-t kell ugyanabban az irányban tovább haladnia, hogy visszajusson kiindulási helyére, ez a rövidebb út.

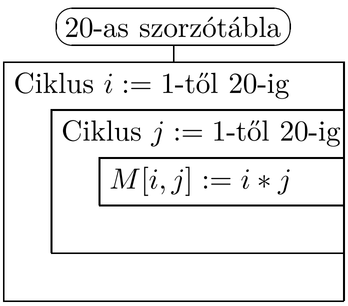
d) $5000 = 13 \cdot 380 + 60 = 14 \cdot -320$, tehát most 13 teljes kört tett meg, és visszafelé kell mennie $60m$-t.

e) Ezen a pályán $6150m$ tesz ki néhány teljes kört, azaz 6150 egy olyan osztóját keressük, amely m-ben reálisan kifejezi egy futópálya hosszát. Abban is biztosak lehetünk, hogy ez az osztó 150-nél nagyobb, hiszen egyébként Jóska előbb megállt volna, de 300-nál sem kisebb, mert Jóska nem váltott irányt.

A megmaradt 10-zel osztható számok közül csak a 410 osztja 6150-et, tehát a pálya hossza $410m$.

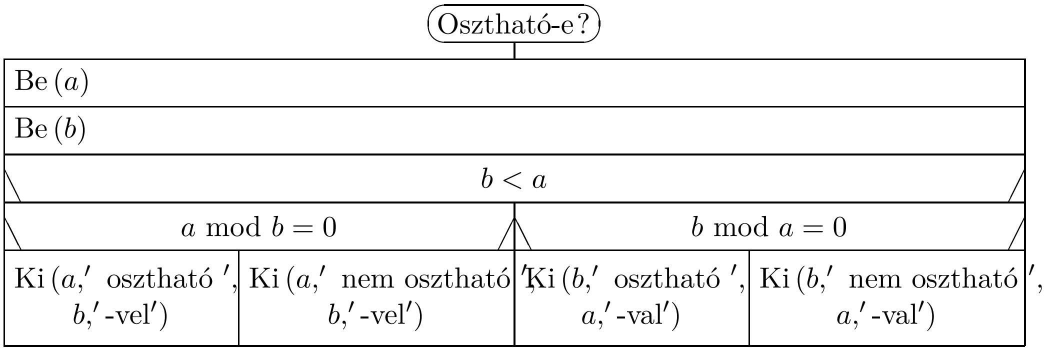
Megjegyezzük, hogy a 6150 prímtényezős alakjából — $6150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 41$ — is el lehet jutni ehhez az eredményhez. □

1.30.

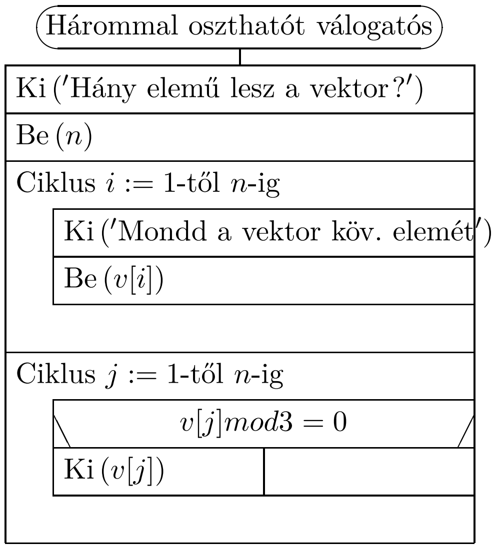


2. Osztók

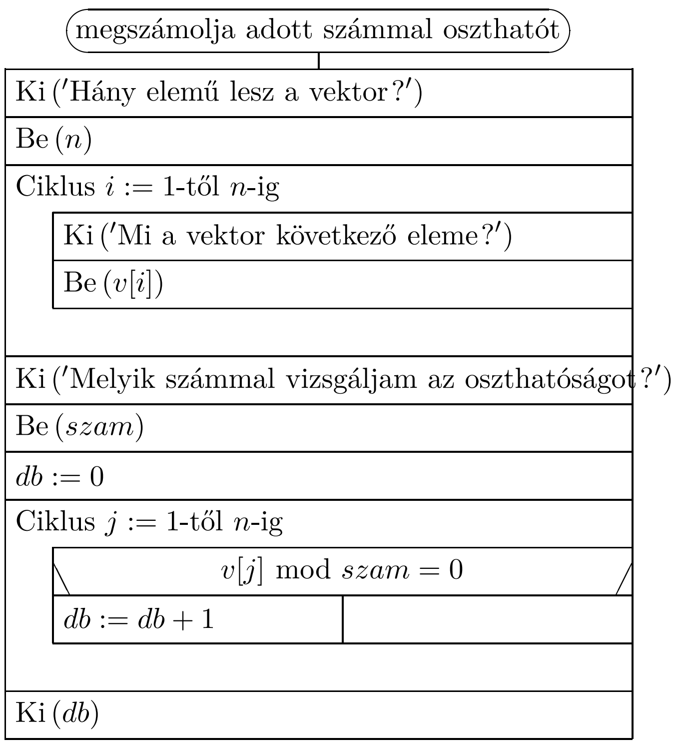
2.16.


Osztható-e?
Be (a)
Be (b)
$b < a$
a mod $b = 0$
b mod $a = 0$
Ki $(a,'$ osztható $', b,'$ -vel$')$
Ki $(a,'$ nem osztható $', b,'$ -vel$')$
Ki $(b,'$ osztható $', a,'$ -val$')$
Ki $(b,'$ nem osztható $', a,'$ -val$')$

2.17.


Hárommal oszthatót válogatós
Ki $('$Hány elemű lesz a vektor?$')$
Be (n)
Ciklus $i :=$ 1-től n-ig
Ki $('$Mondd a vektor köv. elemét$')$
Be $(v[i])$
Ciklus $j :=$ 1-től n-ig
$v[j] mod 3 = 0$
Ki $(v[j])$

2.18.


megszámolja adott számmal oszthatót
Ki $('$Hány elemű lesz a vektor?$')$
Be (n)
Ciklus $i :=$ 1-től n-ig
Ki $('$Mi a vektor következő eleme?$')$
Be $(v[i])$
Ki $('$Melyik számmal vizsgáljam az oszthatóságot?$')$
Be $(szam)$
$db := 0$
Ciklus $j :=$ 1-től n-ig
$v[j]$ mod $szam = 0$
$db := db + 1$
Ki (db)

3. Osztók (teszt)

3.1. **C**

3.2. **A**

3.3. **A**

3.4. **D**

3.5. **C**

3.6. **A**

3.7. **B**

3.8. **D**

3.9. **D**

3.10. **A**

4. Prímtényezők

4.50.

prímtényezős felbontás

Ki ('Melyik számot bontsam prímtényezőkre?')

Be (x)

Ciklus $i := 2$-től $gyök(x)$-ig

  Ciklus amíg x mod $i = 0$

    $x := x/i$

    Ki (i)

4.51.

prímtényezőkből szám

Ki ('Hány darab prímszámot fogsz mondani?')

Be (n)

$x := 1$

Ciklus $i := 1$-től n-ig

  Ki ('Mi a következő prímszám?')

  Be ($szam$)

  $x := x * szam$

Ki (x)

5. Közös osztó, közös többszörös

5.15. Véges sok 1-nél nagyobb egész szám **legnagyobb közös osztójának prímtényezős felbontásában** a közös prímtényezők szerepelnek, mindegyik az előforduló legkisebb pozitív kitevővel.

Például $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 108 = 2^2 \cdot 3^3 \qquad (240, 108) = 2^2 \cdot 3 = 12.$

Megjegyzés: az 1 kitevőket nem írtuk ki. Ha kiírjuk, így alakul a példa:

$240 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \qquad 108 = 2^2 \cdot 3^3 \qquad (240, 108) = 2^2 \cdot 3^1 = 12.$

Ha nincs közös prímtényező (relatív prímek), akkor a legnagyobb közös osztó 1.

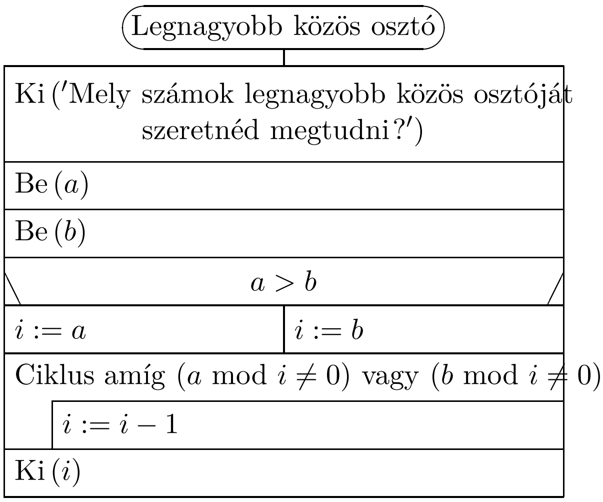
Véges sok 1-nél nagyobb egész szám **legkisebb közös többszörösének prímtényezős felbontásában** a bennük előforduló összes prímtényező szerepel, mindegyik az előforduló legnagyobb kitevővel.

Például $[240, 108] = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 2160$

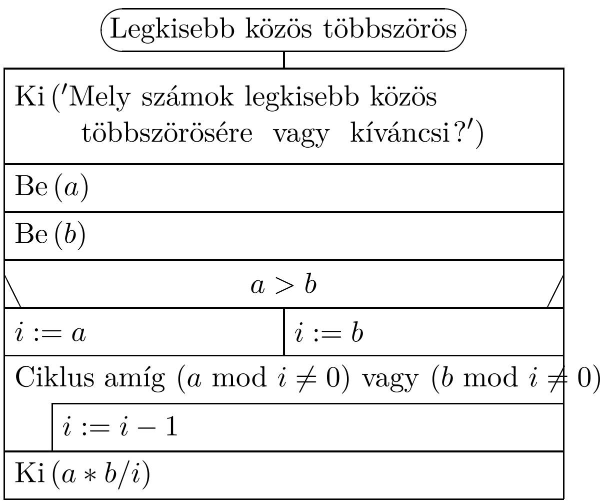
5.34. A két szám legnagyobb közös osztója a különbségüket is osztja.

a) 1, **b)** 2, **c)** 1, **d)** 3, **e)** 1,
f) 18.

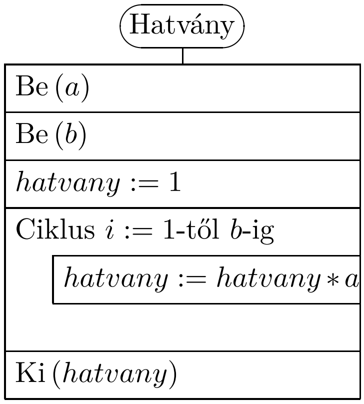
5.35.



5.36.



5.37.



6. Közös osztó, közös többszörös (teszt)

6.1. D

6.2. C

6.3. B

6.4. A

6.5. D

6.6. A

6.7. B

6.8. C

6.9. D

6.10. D

6.11. D

6.12. A

6.13. C

6.14. E

6.15. E

6.16. C

6.17. B

6.18. C

6.19. A

6.20. A

7. Maradékos osztás

7.22. Egyetlen egy ilyen prím van, az 5.

7.44. a)

Osztás mod nélkül

- Ki ('Melyik számot osszam el?')
- Be (a)
- Ki ('Melyik számmal?')
- Be (b)
- Ciklus amíg $a >= b$
  - $a := a - b$
- Ki (a)

b)

osztás div nélkül

- Ki ('Melyik számot osszam el?')
- Be (a)
- Ki ('Melyik számmal?')
- Be (b)
- $db := 0$
- Ciklus amíg $a >= b$
  - $a := a - b$
  - $db := db + 1$
- Ki (db)

8. Maradékos osztás (teszt)

8.1. D

8.2. C

8.3. C

8.4. D

8.5. B

8.6. D

8.7. E

8.8. B

8.9. C

8.10. E

8.11. E

8.12. B

8.13. A

8.14. E

8.15. C

8.16. C

8.17. D

8.18. B

8.19. A

8.20. B

9. Oszthatósági szabályok

9.20. a)

Tízzel osztós

Be (a)	
Str $(a, szov)$	
$szov[length(szov)] = '0'$	
Ki ('Osztható 10-zel')	Ki ('Nem osztható 10-zel')

b)

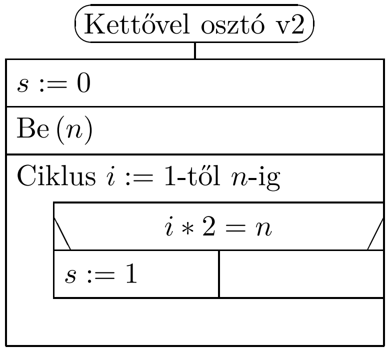
Öttel osztós

Be (a)	
Str $(a, szov)$	
$(szov[length(szov)] = '0')$ or $(szov[length(szov)] = '5')$	
Ki ('Osztható 5-tel')	Ki ('Nem osztható 5-tel')

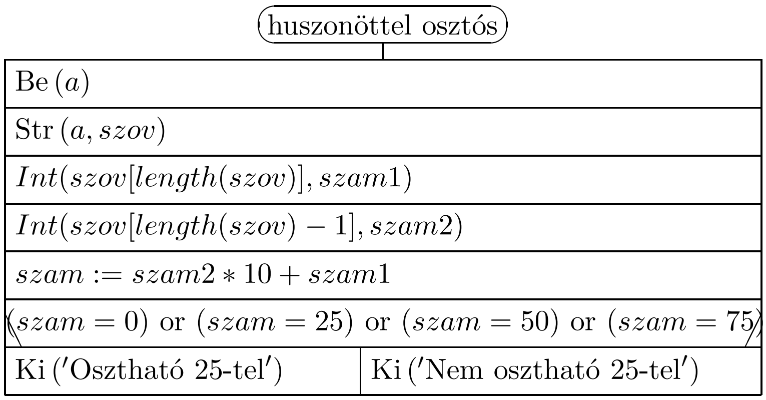
c)

Kettővel osztós

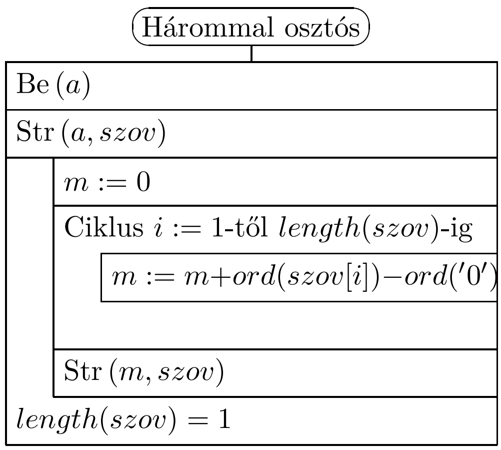
Be (a)	
Str $(a, szov)$	
Int $(szov[length(szov)], szam)$	
$(szam = 0)$ or $(szam = 2)$ or $(szam = 4)$ or $(szam = 6)$ or $(szam = 8)$	
Ki ('Osztható 2-vel')	Ki ('Nem osztható 2-vel')


Kettővel osztó v2
$s := 0$
Be (n)
Ciklus $i :=$ 1-től n-ig
$i * 2 = n$
$s := 1$

d)


huszonöttel osztós
Be (a)
Str $(a, szov)$
$Int(szov[length(szov)], szam1)$
$Int(szov[length(szov) - 1], szam2)$
$szam := szam2 * 10 + szam1$
$(szam = 0)$ or $(szam = 25)$ or $(szam = 50)$ or $(szam = 75)$
Ki ('Osztható 25-tel')
Ki ('Nem osztható 25-tel')

e)


Hárommal osztós
Be (a)
Str $(a, szov)$
$m := 0$
Ciklus $i :=$ 1-től $length(szov)$-ig
$m := m + ord(szov[i]) - ord('0')$
Str $(m, szov)$
$length(szov) = 1$

f)

Kilenccel osztós

Be (a)

Str $(a, szov)$

Ciklus $i :=$ 1-től $length(szov)$-ig

$m := m + ord(szov[i]) - ord('0')$

Str $(m, szov)$

$length(szov) = 1$

$(m = 0)$ or $(m = 9)$

Ki ('Osztható kilenccel')	Ki ('Nem osztható kilenccel')

g)

Tizeneggyel osztós

Be (a)

Ciklus $i :=$ 1-től $length(szov)$-ig

$m1 := m1 + ord(szov[i]) - ord('0')$

$i := i + 1$

Ciklus $i :=$ 2-től $length(szov)$-ig

$m2 := m2 + ord(szov[i]) - ord('0')$

$i := i + 1$

$a := m1 - m2$

$a < 11$

$(a = 0)$

Ki ('Osztható 11-gyel')	Ki ('Nem osztható 11-gyel')

h)

n-nel osztós

Be (a)

Be (n)

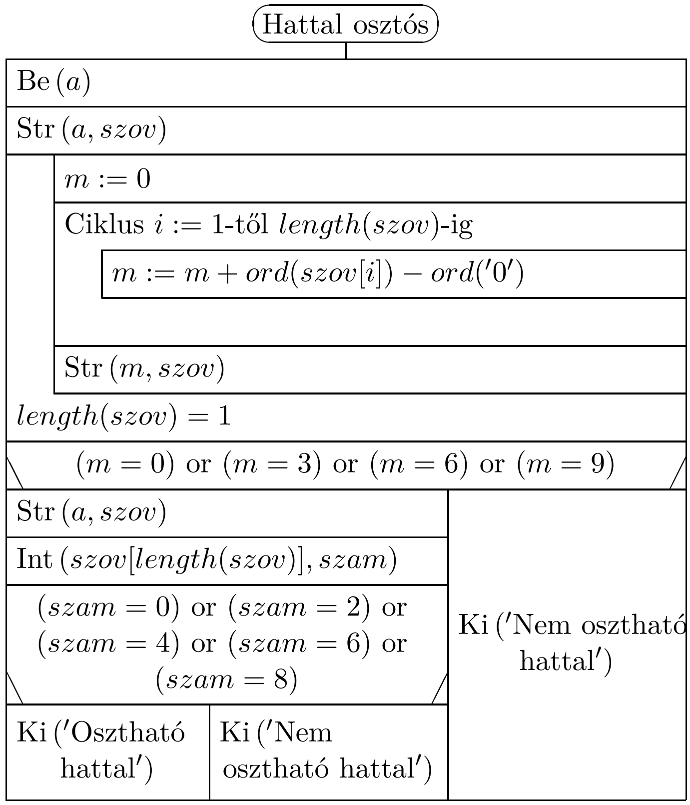
Ciklus amíg $a > n$

$a := a - n$

$a = 0$

Ki ('Osztható')	Ki ('Nem osztható')

i)



10. Oszthatósági szabályok (teszt)

10.1. A

10.2. B

10.3. C

10.4. D

10.5. C

10.6. A

10.7. E

10.8. B

10.9. C

10.10. B

10.11. D

10.12. C

10.13. B

10.14. D

10.15. C

10.16. A

10.17. B

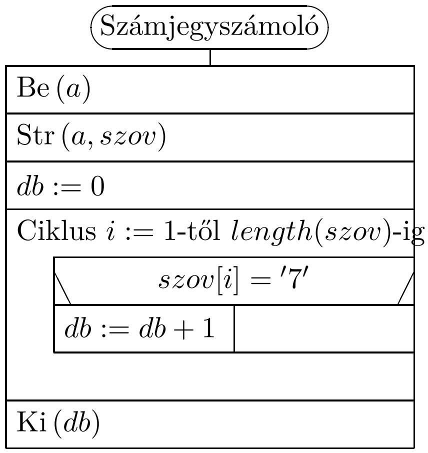
10.18. B

10.19. E A helyes válasz 99.

10.20. C

11. Számjegyek

11.16.



12. Számjegyek (teszt)

12.1. D

12.2. C

12.3. D

12.4. C

12.5. A

12.6. C

12.7. A

12.8. B

12.9. A

12.10. E

12.11. E

12.12. B

12.13. D

12.14. B

12.15. A

12.16. D

12.17. B

12.18. C

12.19. A

12.20. C

13. Számrendszerek

13.21. 321+424, 342+403, 410+340, 444+301

13.27.

Kettesből tizesbe

Be (k)

$szam := 0$

Ciklus $i :=$ 1-től 8-ig

$szam := szam * 2 + ord(k[i]) - ord('0')$

Ki ($szam$)

13.28.

Tetszőleges kettesből tizesbe

Be (k)

$szam := 0$

Ciklus $i :=$ 1-től $length(k)$-ig

$szam := szam * 2 + ord(k[i]) - ord('0')$

Ki ($szam$)

13.29.

Tizesből kettesbe

- **char** $sz[256]$
- Be (a)
- $i := 16$
- Ciklus amíg $a \neq 0$
  - $a mod 2 = 1$
    - igen: $sz[i] := '1'$; $a := (a-1)/2$
    - nem: $sz[i] := '0'$; $a := a/2$
  - $i := i - 1$
- Ciklus amíg $i \neq 0$
  - $sz[i] := '0'$
  - $i := i - 1$
- Ki (sz)

13.30.

Kettesből tizenhatosba

- Ki $('$Melyik számot szeretnéd átváltani?$')$
- Be (k)
- Ciklus $j :=$ 1-től 2-ig
  - $szam := 0$
  - Ciklus $i :=$ 1-től 4-ig
    - $szam := szam * 2 + ord(k[i + (j-1) * 4]) - ord('0')$
  - $szam < 10$
    - igen: Ki $(szam)$
    - nem: $Ki(chr(ord('\mathrm{A}') + szam - 10))$

13.31.

Tetszőlegesből tetszőlegesbe

Ki ('Melyik számrendszerből?')

Be ($ebbol$)

Ki ('Melyik számrendszerbe?')

Be ($ebbe$)

Ki ('Melyik számot szeretnéd átváltani?')

Be (a)

$szam := 0$

Ciklus $i := 1$-től $length(a)$-ig

  $szam := szam * ebbol + ord(k[i]) - ord('0')$

$i := 1$

Ciklus amíg $szam \neq 0$

  $valami := szam mod ebbe$

  Str ($valami, sz[i]$)

  $szam := (szam - (szam mod ebbe))/ebbe$

  $i := i + 1$

Ciklus $j := 1$-től $(i - 1)$-ig

  Ki ($sz[(i - 1) - j + 1]$)

14. Számrendszerek (teszt)

14.1. A

14.2. B

14.3. C

14.4. D

14.5. B

14.6. A

14.7. C

14.8. B

14.9. A

14.10. C

14.11. E

14.12. A

14.13. B

14.14. C

14.15. D

14.16. B

14.17. A

14.18. B

14.19. E

14.20. C

15. Diofantikus egyenletek

Ez a fejezet nem tartalmaz megoldást.

16. Diofantikus egyenletek (teszt)

16.1. E

16.2. D

16.3. D

16.4. E

16.5. D

16.6. E

16.7. A

16.8. A

16.9. A

16.10. C

16.11. B

16.12. D

16.13. A

16.14. B

16.15. A

16.16. C

16.17. E

16.18. A

16.19. C

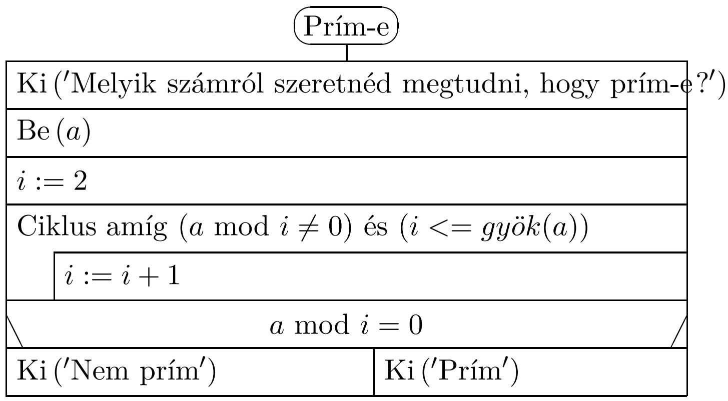
16.20. B

17. Prímek eloszlása

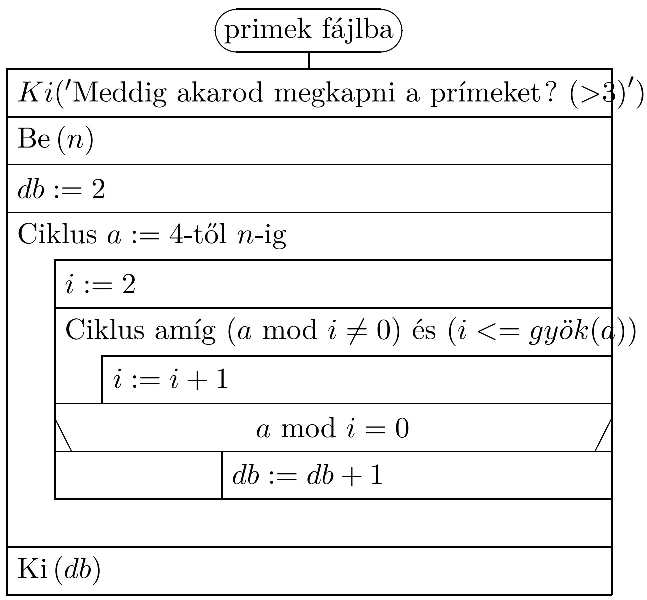
17.13. Lásd [2][70a. fel.].

17.15. Legalább két páratlan szám van köztük és legalább az egyik páratlan nem osztható hárommal. A hárommal és kettővel sem osztható szám relatív prím a többihez.

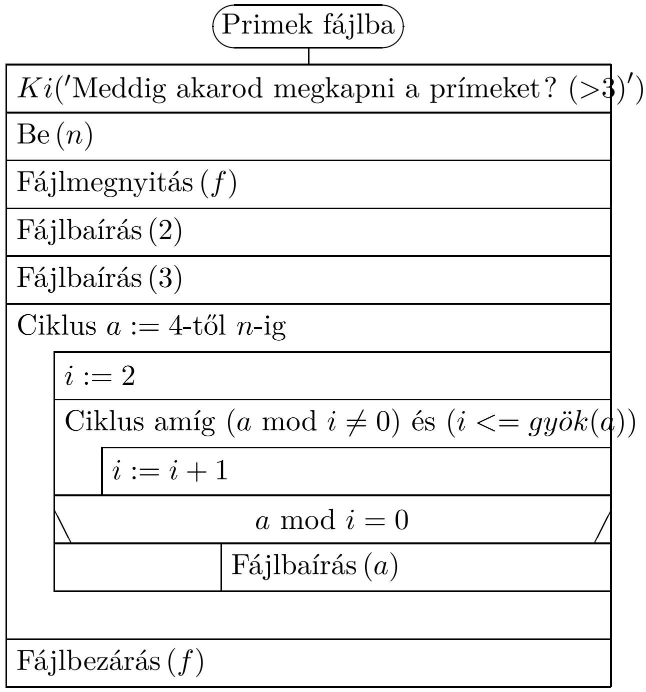
17.16.



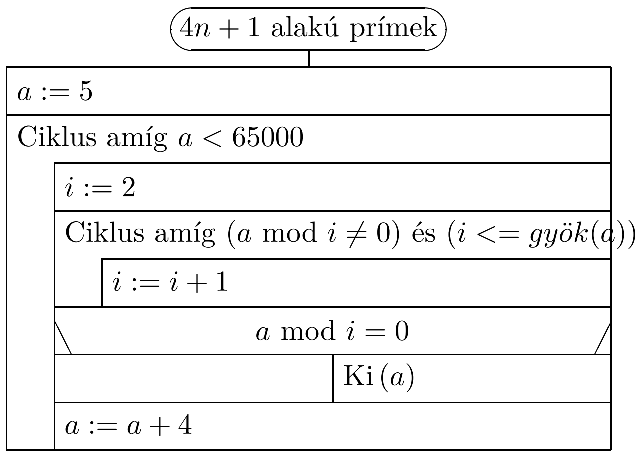
17.17.



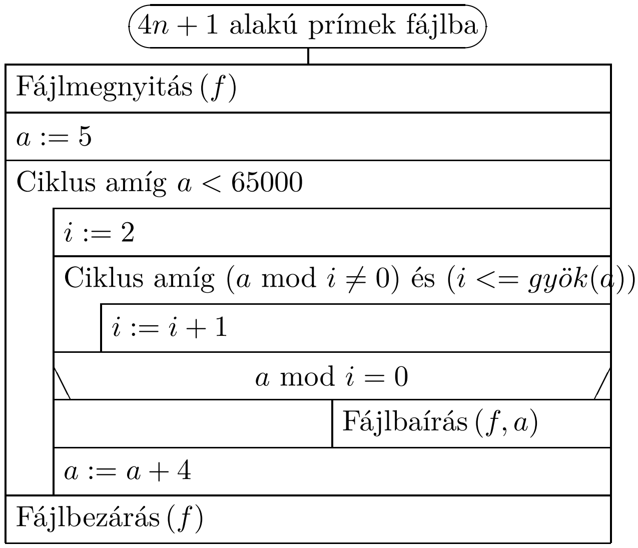
17.18.


Primek fájlba
Ki('Meddig akarod megkapni a prímeket? (>3)')
Be (n)
Fájlmegnyitás (f)
Fájlbaírás (2)
Fájlbaírás (3)
Ciklus a := 4-től n-ig
$i := 2$
Ciklus amíg (a mod $i \neq 0$) és ($i <= gyök(a)$)
$i := i + 1$
a mod $i = 0$
Fájlbaírás (a)
Fájlbezárás (f)

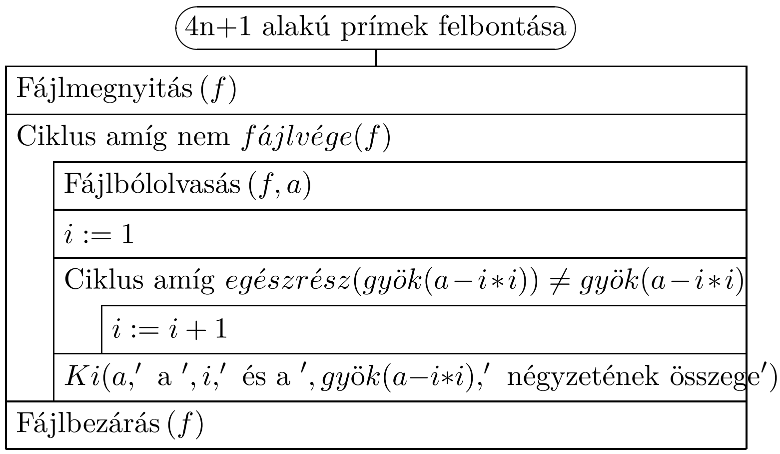
17.19.


$4n + 1$ alakú prímek
$a := 5$
Ciklus amíg $a < 65000$
$i := 2$
Ciklus amíg (a mod $i \neq 0$) és ($i <= gyök(a)$)
$i := i + 1$
a mod $i = 0$
Ki (a)
$a := a + 4$

17.20.


4n + 1 alakú prímek fájlba
Fájlmegnyitás (f)
a := 5
Ciklus amíg a < 65000
i := 2
Ciklus amíg (a mod i ≠ 0) és (i <= gyök(a))
i := i + 1
a mod i = 0
Fájlbaírás (f, a)
a := a + 4
Fájlbezárás (f)

17.21.


4n+1 alakú prímek felbontása
Fájlmegnyitás (f)
Ciklus amíg nem fájlvége(f)
Fájlbólolvasás (f, a)
i := 1
Ciklus amíg egészrész(gyök(a−i∗i)) ≠ gyök(a−i∗i)
i := i + 1
Ki(a,' a ', i,' és a ', gyök(a−i∗i),' négyzetének összege')
Fájlbezárás (f)

17.22.

Fermat-prím keresés

- Be (n)
- Ciklus $i := 1$-től n-ig
  - $a := 1$
  - Ciklus $j := 1$-től i-ig
    - $a := a * 2$
  - $b := 1$
  - Ciklus $k := 1$-től a-ig
    - $b := b * 2$
  - $b := b + 1$
  - $l := 2$
  - Ciklus amíg $(b \text{ mod } l \neq 0)$ és $(l <= gy\ddot{o}k(b))$
    - $l := l + 1$
  - $b \text{ mod } l = 0$
    - (nem): –
    - (igen): Ki (b)

17.23.

Mersenne-prím keresés

- Fájlmegnyitás (f)
- Ciklus amíg nem $f\acute{a}jlv\acute{e}ge(f)$
  - Fájlbólolvasás (f, p)
  - $a := 1$
  - Ciklus $i := 1$-től p-ig
    - $a := a * 2$
  - $a := a - 1$
  - $l := 2$
  - Ciklus amíg $(a \text{ mod } l \neq 0)$ és $(l <= gy\ddot{o}k(b))$
    - $l := l + 1$
  - $a \text{ mod } l = 0$
    - (nem): –
    - (igen): Ki (a)
- Fájlbezárás (f)

17.28. Lásd [15][359. fel.].

18. Prímek (teszt)

18.1. C

18.2. B

18.3. E

18.4. A

18.5. C

18.6. E

18.7. A

18.8. B

18.9. E

18.10. C

18.11. B

18.12. C

18.13. D

18.14. A

18.15. B

18.16. E

18.17. D

18.18. B

18.19. A

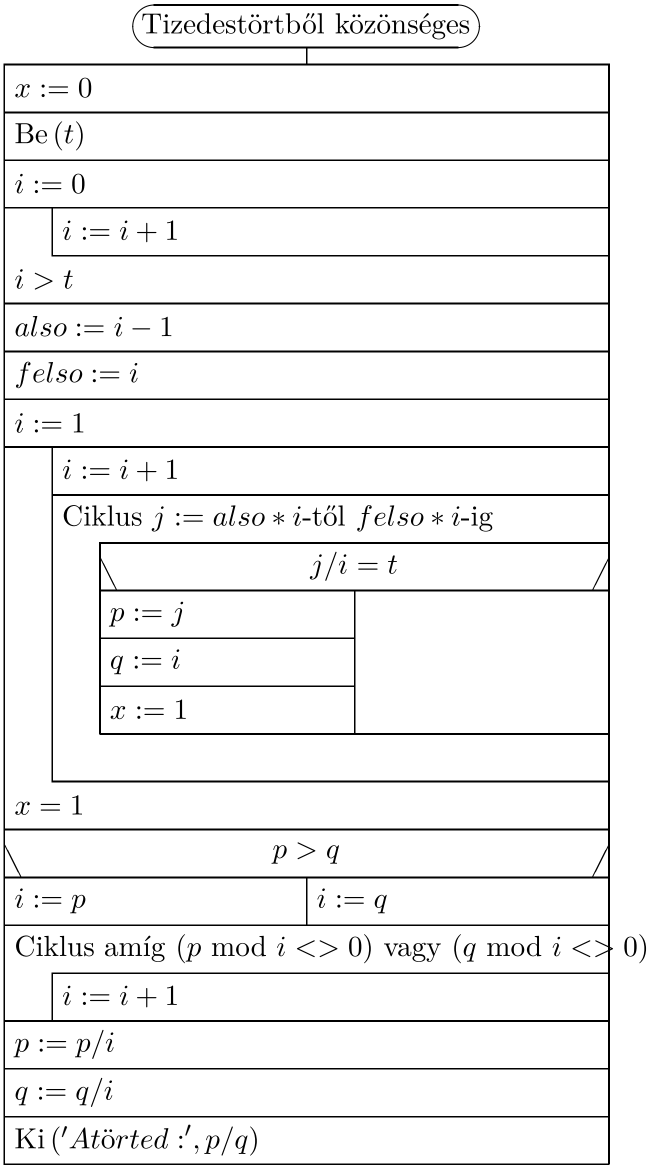
18.20. B

19. Racionális és irracionális számok

19.20.

Tizedestört készítés
Ki ('Add meg a tört számlálóját és nevezőjét')
Be (a)
Be (b)
$c := a/b$
Ki ($'atörttizedesalakja:', c$)

19.21.



20. Racionális és irracionális számok (teszt)

20.1. B

20.2. A

20.3. B

20.4. E

20.5. C

20.6. D

20.7. C

20.8. D

20.9. B

20.10. B

20.11. C

20.12. A

20.13. E

20.14. C

20.15. C

20.16. C

20.17. B

20.18. A

20.19. A

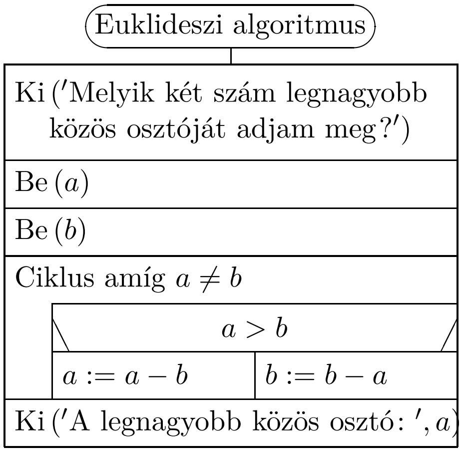
20.20. B

21. Vegyes feladatok

21.58. A két szám különbsége osztható kell legyen a kétjegyű számmal. $531 = 3 \cdot 3 \cdot 59$-ből adódik, hogy az egyetlen lehetséges kétjegyű osztó az 59, így a maradék 4, hiszen $948 = 16 \cdot 59 + 4$, $417 = 7 \cdot 59 + 4$. $\square$

21.59. $34539 = l \cdot n + m$, azaz
$$34589 = l \cdot n + m + 50, \tag{1}$$
míg
$$23479 = k \cdot n + m + 50, \tag{2}$$
így a két egyenlet különbségéből $11110 = (l - k) \cdot n$, azaz $n \mid 11110$. Az n szám tehát 11110 valamelyik 50-nél nem kisebb osztója. Ilyenből 10 van:
$$101, 202, 55, 505, 1111, 110, 1010, 2222, 5555, 11110.$$
Ezeket azonban ellenőrizni kell és kiderül, hogy 101, 202, 55 és 110 nem megfelelők, mert ha a 34539 szám n-es maradékát 50-nel megnöveljük, akkor n-nél nagyobb maradékot kapunk (a maradék „átfordul”). A megoldások $505, 1111, 1010, 2222, 5555, 11110$. $\square$

21.87.


Euklideszi algoritmus
Ki ('Melyik két szám legnagyobb közös osztóját adjam meg?')
Be (a)
Be (b)
Ciklus amíg $a \neq b$
$a > b$
$a := a - b$
$b := b - a$
Ki ('A legnagyobb közös osztó: ', a)

Ajánlott irodalom

Átfogó művek

Feladatgyűjtemények: [?], [15].
Olvasmányok: [11]; [?].
Tankönyv: [19].

Bemelegítő feladatok

Számolás törtekkel: [?]

Számrendszerek

Feladatgyűjtemények: [?][4. fejezet], [1][I.5. fejezet]
Olvasmányok: [?], [7], [?].

Vegyes feladatok feladatok

Feladatgyűjtemények: [3], [?], [18], [?], [?], [6].

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Irodalomjegyzék

[1] Csúri József Duró Lajosné Gyapjas Ferencné Kántor Sándorné és Pintér Lajosné Bartha Gábor, Bogdán Zoltán: *Matematika feladatgyűjtemény I.* 12. kiad. Budapest, 1998, Nemzeti Tankönyvkiadó. ISBN 963 18 8911 4. A „Sárga könyv".

[2] I. M. Jaglom D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov: *Aritmetika és algebra.* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből sorozat, I. köt. Budapest, 1979, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 3843 4. Újabban a Typotex kiadó is megjelentette.

[3] Pogáts Ferenc: *Varga Tamás matematika versenyek.* Budapest, 1995, Typotex. ISBN 963 7546 58 8.

[4] Faragó Gergely: Nyelvi játékok. Gyűjtés.

[5] Urbán János Imrecze Zoltánné, Reiman István: *Fejtörő feladatok felsősöknek.* 3. átdolgozott. kiad. H-5310, Kisújszállás, Mikes utca 14., 1999, Szalay Könyvkiadó.

[6] Kalmár László Matematikaverseny. a Kis Matematikus Baráti Körök versenye. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/adatbazis/Kalmar_Laszlo_verseny.html`.

[7] Lánczos Kornél: *Számok mindenütt.* Budapest, 1972, Gondolat.

[8] Mike János és Vincze István Kosztolányi József: *Érdekes matematikai feladatok.* Szeged, 1992, Mozaik Oktatási Stúdió. ISBN 963 7679 19 7.

[9] Kovács Csongorné (Mara) és Szeredi Éva közlése.

[10] Kvant, fizikai és matematikai tudományos népszerűsítő folyóirat. A Szovjet, majd az Orosz Tudományos Akadémia és a Pedagógiai Tudományok Akadémiájának lapja. URL `http://kvant.mirror0.mccme.ru/`.

[11] Sain Márton: *Nincs királyi út!* Budapest, 1986, Gondolat Kiadó. ISBN 963 281 704 4.

[12] Sokan pótlandó: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából.* Budapest, 1990, Tankönyvkiadó. ISBN pótlandó.

[13] Rubóczky György közlése.

[14] Freud Róbert: Prímszámok – ősi problémák, új eredmények, 2005. URL `http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2005/eloadas_2005_11_22_freud.html`. Előadás 2005. november 22-én a Fővárosi Fazekas Mihály Gimnáziumban.

[15] Róka Sándor: *2000 feladat az elemi matematika köréből.* Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 50 0.

[16] Varga Tamás: *Osztójáték.* 3. kiad. Budapest, 1975, Tankönyvkiadó, Budapest, 161–178. p. ISBN 963 17 1047 5. Tanulmányok.

[17] N. B. Vasziljeva (szerk.): *Kvant feladatgyűjtemény.* I. köt. 1997, Bjuro Kvantum. ISBN 5 85843 002 3. A Kvant feladatai 1970-től 1980-ig.

[18] Pogáts Ferenc és Fazakas Tünde: *Varga Tamás matematika versenyek III.* Budapest, 2003, Typotex. ISBN 963 9326 80 1.

[19] Gábos Adél és Halmos Mária: *Számelmélet munkafüzet I. osztály.* Budapest, 1991, Calibra kiadó. Matematika-módszertani kutatócsoport.

[20] Gábos Adél és Halmos Mária: *Algebra 1.* Budapest, 2000, Műszaki Könyvkiadó. ISBN 963 16 2612 8. Matematika-módszertani kutatócsoport, Pósa Lajos Algebra kéziratának és tanári véleményének felhasználásával.

[21] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár.* Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 31 4.

[22] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár 2.* Budapest, 2001, Typotex. ISBN 963 9326 10 0.