Tanári kézikönyv

a 7–8. évfolyamokhoz

Szerkesztette:
Dobos Sándor, Fazakas Tünde,
Hraskó András, Rubóczky György

2020. szeptember 20.

Technikai munkák
(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2020

Tartalomjegyzék

Bevezető

Ez a könyv még nem egy igazi tanári kézikönyv, hanem csak egy példa arra, hogy a matkönyv projektben hogyan lehet tanári kézikönyvet létrehozni. Fejlesztése folyamatban.

A fejlesztés jelen állásában (2006. május) csak a számelmélet, algebra és kombinatorika kötetekkel foglalkoztunk, azok csak részben kidolgozottak. A kombinatorika kötet terveink szerint tartalmazza a gráfokkal és algoritmusokkal kapcsolatos feladatokat is. A kombinatorika kötetbe tartozna még a logika, a jelen kötetből ez még kimaradt. Két további kötetet szeretnénk még a 7-8. évfolyamoknak és tanáraiknak megírni: egyet geometriából és egyet a függvényekről. A halmazok témakörét ezen a szinten nem külön, hanem az egyes főtémákhoz kapcsolva vizsgáljuk (mértani helyes feladatok geometriából, oszthatósággal kapcsolatos halmazok számelméletből, stb.). Későbbi terveinkben szerepel a valószínűségszámítás és a statisztika témáinak feldolgozása. Hosszabb távon lehet, hogy érdemesenn a logika, algoritmusok (játékok) témaköreit a programozás témájával együtt külön kötetbe foglalni.

A 7-8. évfolyamos diákoknak gyakorlásra javasoljuk még a [11], [1] (ill. [5]) köteteket, a tehetséggonozásban pedig hasznos kiegészítő Róka Sándor könyve[7].

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Algebra

Tematika

1.4. Algebra, 7. évfolyam: 25 óra

Tananyag: Az algebrai ismeretek ismétlése; a betűk célszerű használata; az algebrai kifejezésekkel való számolás gyakorlása egyszerű azonosságok, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásában.

Fogalmak: Egyenes és fordított arányosság, százalékláb, százalékérték; mérlegelv; a negatív egész kitevőjű hatvány; normálalak.

Tételek, összefüggések: Zárójelfelbontás, disztributivitás, $(a \cdot b)^2$, $(a + b) \cdot (a - b)$, $(a \pm \pm b)^2$ átalakítása (*nem készségszinten*). A hatványozás azonosságai konkrét esetekben. Út, idő, sebesség összefüggése.

Eljárások, algoritmusok: Számolás algebrai egész kifejezésekkel: zárójelfelbontás, disztributivitás, összevonás; egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel. Szöveggel megadott egyszerűbb feladatok lefordítása az algebra nyelvére, egyenletek felállítása.

Pontosítás: Arányossággal és százalékszámítással, algebrai átalakításokkal megoldható szöveges feladatok.

Alakalmazások: Egyszerűbb keverési feladatok, mozgásos feladatok.

2.4. Algebra, 8. évfolyam: 20 óra *A 20 óra kevés!*)

Tananyag: Egyszerű nevezetes algebrai azonosságok. A biztos algebrai készség megalapozása. A számfogalom bővítése, irracionális számok.

Fogalmak: Teljes négyzet, teljes köb. Nevezetes azonosságok, szorzattá alakítás és ezek szerepe egyenletek megoldásában. A négyzetgyök fogalma, irracionális számok, két szám számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepe (*sok és korai a négy közép*).

Tételek, összefüggések: $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^3 + b^3$ szorzattá alakítása; teljes négyzet és teljes köb. A hatványozás azonosságai egész kitevőre; a négyzetgyökvonás azonosságai (*csak számokkal*). A megismert közepek közti egyenlőtlenségek (*sok és ekkor még felesleges*).

Eljárások, algoritmusok: Algebrai törtekkel való számolás begyakorlása (bővítés, egyszerűsítés, közös nevezőre hozás betűkkel); teljes négyzet és teljes köb felismerése; a megismert azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban, az egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőértékfeladatokban (*korai*), lineáris kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Törtes egyenletek.

Részletezés: 9-cel, 11-gyel való oszthatósági szabály bizonyítása; $x + \frac{1}{x} \geq 2$, ha x pozitív; szöveges szélsőértékfeladatok megoldása a tanult egyenlőtlenségekkel (*korai, sok*), az x^2, $\frac{1}{x}$ (x>0), $\sqrt{x}$ függvények gyenge konvexitásának bizonyítása (*a konvexitás fogalma is korai még 7-8-ban*); számolások Pithagoras-tétel segítségével.

Általános irányelvek

Aritmetika

A Gauss összegzéssel kapcsolatos feladatok: A.I.24.8, A.I.1.21, A.I.1.22, A.I.1.23, A.I.1.24, A.I.1.25, A.I.1.26, A.I.1.27 A.I.1.28, A.I.1.29, A.I.1.30, A.I.24.11

Relatív mozgással kapcsolatos példák: A.I.24.40, A.I.20.40, A.I.24.86, A.I.24.87,

1. Aritmetika

1.1. Amennyiben látjuk, hogy az alapműveletek elvégzés előjeles számokkal gondot okoz a diákoknak, akkor gyakorló feladatokat találhatunk a [6] könyvben.

1.2. Az a) feladatrész eredményéből műveleti azonosságok segítségével is megkaphatjuk a további eredményeket.

1.22.

1. didaktikai javaslat. A **c)** feladatot egymásnak is készíthetik a tanulók.

2. didaktikai javaslat. Lásd még a Sz.I.21.79 feladatot!

1.24. Lásd még a Sz.I.15.8. feladatot!

1.28. Ezekben a feladatokban is számolhatunk egy „átlagos” számmal. Az a) feladatrészben a csupa 2,5 „jegyből” álló négyjegyű szám az átlag, a b) esetben pedig az 3333.

1.30. Lásd még a Sz.I.21.15 feladatot és annak megoldását.

2. Aritmetika (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Arányosság

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Arányosság (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Szöveges feladatok

5.9. Megkérdezhetjük: „mi lehet a különbség?”. Lehet-e pld 97 hatszorosa? Lásd még a Sz.I.21.33. feladatot.

5.28. 92 tallért. Részletesebben lásd [4][140. old.]

5.29. 1 akó bor 120 peták, és 10 peták a vám 1 akóra. Részletesebben lásd [4][140. old.]

6. Betűkifejezések

Ez a fejezet „fordítási” gyakorlatokat tartalmaz. A tanulóknak el kell sajátítaniuk a feladatok szövegének matematikai lejegyzését és a betűs kifejezéseket értelmezniük kell. A betűs kifejezésekkel végzett műveletek a következő fejezetben találhatók.

6.17. A $2h^2$, $(2k)^2$, $2(-c)^2$ képletek esetében gyökvonásra is szükség van. Itt a pontos választ nem követeljük meg, csak alkalmat teremtünk arra, hogy felvetődjön a négyzetgyök létezésének problémája.

6.24. A következő rész Péter Rózsa írása alapján készült.

Ez a fejtörő hangzott el az osztályban:

Gondoltam egy számot, hozzáadtam 2-t, 3-szor vettem, és 18-at kaptam. Mely számra gondoltam?

Buzgón jegyezte egy tanuló a táblán: a gondolt szám g, a felírás $g + 2 \cdot 3 = 18$. Már mondta is valamelyik gyerek: „Az a valami, amihez $2 \cdot 3$-at, vagyis 6-ot adva 18-at kapunk, csakis 12 lehet.”

De a feladat kitűzője határozottan rázta a fejét: „Nem, én 4-et gondoltam! Ehhez adtam 2-t, és így lett 6 belőle, azután szoroztam 3-mal, és így kaptam 18-at.”

A tanulók már másutt is találkoztak ilyen félreérthető szöveggel. Valamelyiküknek eszébe jutott a következő adoma, mely szerint Bánk bán a következő írásjelek nélküli levelet kapta:

A KIRÁLYNÉT MEGÖLNI NEM KELL FÉLNETEK JÓ LESZ HA MINDENKI BELEEGYEZIK ÉN NEM ELLENZEM

Ezt így is lehet olvasni:

A KIRÁLYNÉT MEGÖLNI NEM KELL. FÉLNETEK JÓ LESZ: HA MINDENKI BELEEGYEZIK, ÉN NEM. ELLENZEM.

De homlokegyenest ellenkező értelemben is felfogható:

A KIRÁLYNÉT MEGÖLNI NEM KELL FÉLNETEK. JÓ LESZ, HA MINDENKI BELEEGYEZIK, ÉN NEM ELLENZEM.

A matematikában is bizonyos írásjeleket kell bevezetnünk a félreértés elkerülésére. A fejtörő helyes feljegyzése:

Milyen g-re igaz?

$$(g + 2) \cdot 3 \quad = 18$$

$$Mégrövidebben :? \, g \qquad (g + 2) \cdot 3 \quad = 18$$

Ezzel megszüntettük a kétértelműséget.

6.31. Érdemes visszakérdezni: hogyan módosul a feladat, ha a „céltól való távolság” helyett mindenütt az „egész pálya hossza” szerepel?

7. Betűkifejezések (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Műveleti azonosságok

8.19. A tanulócsoport képességétől, felkészültségétől függően tekintetbe vehetjük a negatív prímek esetét is.

8.46. A feladat variációival kapcsolatban lásd [10] 121. feladatát és a hozzá fűzött megjegyzéseket (ott, 33-34. old.)

9. Műveleti azonosságok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Hatványozás

10.41. Visszakérdezhetünk: „Ha az osztódás után egyetlen állatka sem pusztulna el, egy papucsállatka utódainak a térfogata mennyi idő alatt érné el a Nap térfogatát? (A papucsállatkák átlagban 27 óra alatt osztódnak ketté, a Nap térfogata körülbelül 10^{27} m^3.)

10.42. Visszakérdezhetünk: „Mennyi idő múlva boritaná mák az egész Földet? (A szárazföldek felszíne összesen körülbelül 135 millió km^2.)

10.49. Az osztály szintjétől, érdeklődésétől függően folytathatjuk a feladatot: „melyik pont felé tart" az egyes esetekben a bolha? Folytatás 9-10. osztályban: A.II.5.27. feladat.

10.53. Lásd [9][47. fel.].

11. Hatványozás (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Számrendszerek

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

13. Egyenletek I.

13.6. Rákérdezhetünk: „Mit figyelsz meg?", ösztönözhetjük a diákokat, hogy ők is írjanak hasonló tulajdonságú egyenleteket.

13.73. Ha a teljes út km-ben $s = 180$, az ennek megtételéhez eredetileg szükséges idő órában t, akkor az új menetidő $t - 0{,}75$, így az eredeti és az új átlagsebesség kifejezhető, és közöttük az alábbi egyenlet írható fel:

$$1{,}2\frac{s}{t} = \frac{s}{t - 0{,}75}.$$

13.74. Jelölje a sík terepen menő útrész hosszát km-ben s, tehát az út $S = 42$ teljes hosszával a kaptató km-ben $42 - s$. Ha a sík részen a sebesség km/órában v_s, a kaptatón v_k, akkor a teljes idő órában:

$$\frac{s}{v_s} + \frac{42 - s}{v_k} = 9.$$

14. Egyenletek I. (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

15. Egyenlőtlenségek

15.22. Próbáljuk összeszedetni a diákokkal, milyen módszereket alkalmaztak az egyenlőtlenségek megoldása közben!

Gondoljuk meg együtt, hogy ugyanúgy bánhatunk-e az egyenlőtlenségekkel, mint az egyenletekkel!

16. Nevezetes azonosságok

16.48. Hívjuk fel a figyelmet, hogy ezek az azonosságok a A.I.16.47 feladat azonosságaiból is megkaphatók $b \mapsto (-b)$ helyettesítéssel!

17. Nevezetes azonosságok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

18. Egyenletek II.

Nem követeljük meg, hogy a diákok képesek legyenek önállóan meghatározni az értelmezési tartományt a hamis gyökök kiszűrésére. Csak azt várjuk el, hogy megtalálják a hibás lépést általunk adott rossz megoldásokban.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

19. Egyenletek II. (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

20. Egyenletrendszerek

20.9. Az $y = m(x-2)+1$ egyenlet megoldáshalmaza a síkon egy egyenes, amely tartalmazza a $(2;1)$ pontot. Az egyenes meredeksége az m szám. Minden egyenesnek van meredeksége, kivéve a függőleges – az y tengellyel párhuzamos – egyeneseket. A vizsgált paraméteres egyenlet tehát a $(2;1)$ pontot tartalmazó bármely olyan egyenes egyenlete lehet, amely nem párhuzamos az y tengellyel.

20.15. Hasznos kérdések:

1. Meg lehet-e mondani a körző, a ceruza vagy a radír árát?
2. Egy adatot módosíthatunk a szövegben. Melyik adat változtatása esetén lehet továbbra is megválaszolni a „Mennyit fizetett?” kérdést?

21. Egyenletrendszerek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

22. Négyzetgyök

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

23. Négyzetgyök (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

24. Vegyes feladatok

24.8. Folytatás: K.I.20.22

24.11. Nem lehet elszállítani a köveket: a 8 legkönnyebb kő össztömege nagyobb, mint 2 tonna.

24.47. 15625 néző volt eredetileg, a mérkőzés hat menetből állt.
A 2000. évi Varga Tamás Mat. Vers. II. kat-ban a 2. ford. 3. feladata a hetedikeseknél.

24.83. Jelölje az A-ból illetve a B-ből induló vonat teljes menetidejét t_A, illetve t_B. A találkozásig megtett idők egyenlők:

$$t_A - 4 = t_B - 9.$$

Jelölje a vonatok sebességét v_A, illetve v_B. A találkozási pont és A közti távolságot az egyik illetve másik vonat adatai alapján is felírhatjuk:

$$(t_A - 4)v_A = 9v_B.$$

A találkozási pont és B közti útrész kétféleképpen:

$$(t_B - 9)v_B = 4v_A.$$

Az utóbbi két egyenlet hányadosát képezve, felhasználva az első egyenletet, majd gyököt vonva kapjuk, hogy $\frac{v_A}{v_B} = \frac{3}{2}$, amiből $\frac{t_A}{t_B} = \frac{2}{3}$. Az A-ból induló vonaton összesen $4 + \frac{2}{3} \cdot 9 = 10$ órát, a B-ből induló pedig 15 órát tartott a teljes utazás.

24.87. 11-kor ér a gyalogos B-be.

24.99. A szerelvény 300 m hosszú.
A 2001. évi Varga Tamás Mat. Vers. II. kat-ban a 2. ford. 1- feladata a nyolcadikosoknál.

Függvények

1. Grafikonok

A fejezetben a statisztikai adatokat a KSH kiadványaiból válogattuk.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

2. Geometriai transzformációk

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Geometriai transzformációk (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Lineáris függvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Lineáris függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. Abszolútérték függvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. Abszolútérték függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Másodfokú függvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. Másodfokú függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Racionális törtfüggvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

11. Racionális függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Négyzetgyök függvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

13. Négyzetgyök függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

14. Előjel, törtrész, egészrész

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

15. Előjel, törtrész, egészrész (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

16. Függvénytranszformációk

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

17. Függvénytranszformációk (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

18. Összetett függvények

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

19. Összetett függvények (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

20. Tulajdonságok, műveletek

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

21. Tulajdonságok, műveletek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

22. Grafikus megoldás

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

23. Grafikus megoldás (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

24. Függvénykapcsolatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

25. Függvénykapcsolatok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

26. Vegyes feladatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

27. Lineáris programozás

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Geometria

1. Szerkesztések I.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

2. Mértani helyek I.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Speciális síkidomok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. A Descartes koordinátarendszer

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Szimmetriák, transzformációk

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. Terület I.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. Terület I. (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Hasonlóság

Miután gyakoroltuk a középpontos hasonlóság végrehajtását, kísérleteztünk, fogalmaztassuk meg a gyerekekel a transzformáció tulajdonságait. A csoport erősségét, érdeklődését felmérve döntsünk arról, hogy a bizonyításokat is elvégezzük nyolcadikban vagy későbbre hagyjuk. Mindenképpen tegyük tisztába, hogy mi az állítás, mi az, amit most elfogadunk, mi az, amit bizonyítunk. Nem baj, ha a bizonyításokra csak kilencedikben térünk vissza, de akkor legyen világos a diák számára is, hogy itt megfigyelés alapján tett sejtésről van szó, amit a tanár szavára most elfogadunk, de bizonyítani kellene.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. Terület II.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Terület II. (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

11. Síkgeometriai számítások

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Kockák

12.10. Változtassuk a kis kocka helyzetét és kérdezzünk rá az ekkor létrejövő részekre!

13. Kockák (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

14. Gúla

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

15. Gúla (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

16. Poliéder

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

17. Poliéderek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

18. Vegyes feladatok

18.21. Érdemes felvetni, hogy a G.I.18.21M1.,G.I.18.21M2. megoldásokban kapott számok tényleg egyenlőek-e, igazolható-e ez algebrtai úton.

18.23. A kör egy belső pontján átmenő húrok közül az a legrövidebb, amelynek felezőpontja az adott pont.

Ha nem mindegyik húr átmérő, akkor tekintsük közülük a legrövidebbet! Ennek felezőpontján nem megy át húr.

18.24. Igen, ez lehetséges.

Kombinatorika

Tematika

1.9. Kombinatorika, 7. évfolyam: 10 óra

Tananyag: A hozott kombinatorikai ismeretek rendszerezése: összeszámlálás, skatulyaelv, szöveges feladatok.

Fogalmak: Permutáció, $n!$, a skatulyaelv (*a geometriai skatulyaelv még nem*, leszámolás fagráfokkal.

Tételek, összefüggések: Sokszög átlóinak száma, n egyenes hány részre osztja a síkot (konkrét n-ekre), $\binom{n}{2}$, permutációk száma. Véges halmaz részhalmazainak száma. A Pascal–háromszög legegyszerűbb tulajdonságai (sorösszeg). A Fibonacci–sorozat legegyszerűbb tulajdonságai.

Eljárások, algoritmusok: Leszámolási feladatok megoldása pl. fagráf segítségével; tudatos leszámlálási módszerek kialakítása.

Pontosítás: Bonyolultabb skatulya-elves feladatok; leszámlálási feladatok; egyszerű feladatok, ahol pl. a sakktábla színezése segít; az állapotfüggvényt előkészítő egyszerű feladatok: invarianciával (pl. négyes maradék megmaradásával) bizonyítható feladatok; vegyes feladatok (pl. sakktáblán).

2.9. Kombinatorika, 8. évfolyam: 15 óra

Tananyag: A kombinatorikus gondolkodás fejlesztése.

Fogalmak: A teljes indukció előkészítése. Ismétléses permutáció, kombináció. $\binom{n}{k}$ kapcsolata a Pascal–háromszöggel. Geometriai skatulya.

Tételek, összefüggések: A Pascal–háromszög tulajdonságai (folytatás); véges halmaz részhalmazainak, páros-, páratlan elemszámú részhalmazainak száma (újabb bizonyítások). A logikai szita 2, 3 halmazra. Egyszerű minimum és maximum kereső feladatok. $\binom{n}{k}$ kiszámítása. Kombináció. A Fibonacci–sorozat tulajdonságainak kombinatorikus bizonyítása (*Ez mit jelent?*) Könyvtár-feladat: páronként nem diszjunkt intervallumoknak van közös pontja.

Eljárások, algoritmusok: Egyszerű kombinatorikai játékok. $\binom{n}{k}$ felhasználása feladatokban. Egyszerű feladatok teljes indukcióra. További feladatok a skatulya-elvre, geometriai skatulyára. Bonyolultabb leszámlálási, színezési feladatok. Olyan (pl. kombinatorikus geometriai) feladatok, amelyeknek megoldásánál hivatkozni kell arra, hogy végtelen sok lehetőség közül egy véges halmaz csak véges sok lehetőséget zár ki; vagy azt kell kihasználni, hogy valami egyesével változik (mindkettőre példa: mindig húzható olyan egyenes, amelynek két oldalán $n-n$ darab van adott $2n$ pont közül). $\phi(n)$ kiszámolása szita-formulával konkrét, $n = p \cdot q$, $n = p \cdot q \cdot r$, , $n = p^2$, $n = p^2 \cdot q$ alakú számokra. Az állapotfüggvényt előkészítő további feladatok.

1.10. Gráfelmélet, 7. évfolyam: 10 óra

Tananyag: A gráfelmélet egyszerű alapfogalmai és a gráfok felhasználása feladatmegoldásokban.

Fogalmak: Gráf, csúcs, él, pont fokszáma, fa konkrét feladatokban. Komplementer gráf, összefüggőség.

Tételek, összefüggések: A fokszámok összege páros.

Eljárások, algoritmusok: Permutációk ábrázolása gráffal (*Kell ez itt?*); osztók fája (*Ez mi?*), részhalmazok ábrázolása bináris fákkal; leszámlálási feladatok megoldása fákkal.

Pontosítás: Ismeretségre, rokonságra vonatkozó (tehát gráffal szemléltethető) egyszerű feladatok. Egyszerű Ramsey–típusú feladatok konkrét, kis számokra (pl. egy hattagú társaság bármely három tagja közül van kettő, aki ismeri egymást, akkor van a társaságban hármas ismeretség. *Inkább 8-9-ben javasoljuk a Ramsey témakört*).

Alkalmazások: Más tantárgyak fogalmi rendszerezéséhez is használhatók a fagráfok. Konkrét alkalmazás: kémiában a szénhidrogénekben a hidrogének számának paritása.

2.10. Gráfelmélet, 8. évfolyam: 10 óra

Tananyag: Euler-kör és út. Az alapfogalmak bővítése, új fogalmak előkészítése.

Fogalmak: Euler-vonal (kör és út). Út, kör, összefüggő gráf, fa és faváz fogalma konkrét feladatokon keresztül. Irányított gráf [és tournament (körmérkőzés)] fogalma konkrét feladatokon keresztül. Komplementer gráf. Páros gráf és páros körüljárású gráf.

Tételek, összefüggések: Ramsey-típusú tételek egyszerű esetekben (folytatás: pl. ha egy kilenctagú társaság bármely három tagja közül van kettő, aki ismeri egymást, akkor van négyes ismeretség. *Inkább 9. osztályban!*). Példák, ahol a mohó algoritmus működik. Euler-kör és út létezésének szükséges és elégséges feltétele. Ha minden pont foka legalább k, akkor van k pontú út és kör *Inkább 9. osztályban!*. Páros körüljárású gráf színezhető két színnel. [Tournamentben van pszeudógyőztes (példa tekintsük a legnagyobbat típusú bizonyításra) *Inkább 9. osztályban!*]. (*Ha a csúcsok száma v, akkor legalább $v-1$ él kell ahhoz, hogy összefüggő legyen a gráf.*)

Eljárások, algoritmusok: Adott gráfokban megfelelő tulajdonságú utat, kört, sétát (pl. Euler-utat, kört) keresni, [favázat keresni *Inkább 9. osztályban!*]; adott gráfról eldönteni, hogy összefüggő-e.

Részletezés: A nyolcadikos tananyag nem általános gráfelméleti tételekről, hanem konkrét gráfokra vonatkozó ismeretekről szól.

1.11. Algoritmusok, 7. évfolyam: 5 óra

Tananyag: Ismerkedés az algoritmusokkal, elsősorban konkrét matematikai játékokon és keresési feladatokon keresztül.

Fogalmak: A „biztosan nyerünk”, „nyerő helyzet”, „vesztő helyzet” fogalmának kialakítása konkrét játékokon keresztül. Mit jelentés a „kérdés” a barkochbában. Játékok szimmetriája konkrét egyszerű példákon. Egyszerű invarencia-elves feladatok.

Tételek, összefüggések: n-elemű halmazból gondolt elem kiválasztása minimális kérdéssel.

Eljárások, algoritmusok: Egyszerű szimmetrián alapuló játékok elemzése; mérések számának minimalizálásával kapcsolatos feladatok. A lehetséges „kérdések” tisztázása.

Pontosítás: Pl. 1-től 40 grammig minden egész grammot mérni akarunk egy kétkarú mérlegen. Milyen súlyokat válasszunk, hogy a lehető legkevesebb számú súlyra legyen szükség?

2.11. Algoritmusok, 8. évfolyam: 5 óra

Tananyag: További játék-algoritmusok, kiválasztási és rendezési algoritmusok.

Fogalmak: Kétszemélyes determinisztikus játékok stratégiája, „nyerő” és „vesztő” helyek konkrét játékoknál. A mohó algoritmus fogalma konkrét példákon (mikor jogos, mikor nem) (*Korai!*). Állapotfüggvény előkészítése konkrét példákon.

Tételek, összefüggések: n-elemű rendezett halmaz legnagyobb, legkisebb elemének kiválasztása $n-1$ összehasonlítással. n-elemű halmaz rendezése összefésüléssel, beszúrással (*Inkább kilencidekbe!*). Konkrét egyszerű példák, amikor a mohó algoritmus nem működik.

Eljárások, algoritmusok: Hanoi tornyai: palacsintaforgatás (rendezni úgy, hogy mindig egy adott szeletet forgathatok); 3, 4 [, 5] elem rendezése minimális összehasonlítással. Kétszemélyes játékok (nyerő vesztő helyzeteinek) elemzése.

Részletezés: Számítástechnikából ismert algoritmusok matematikai „vizsgálata”.

1. Bemelegítő feladatok

1.4. Vetessük össze a b) és az f) feladatrész eredményeit, magyaráztassuk meg az egyezést!

1.26. A b) feladatrészt többféleképpen is értelmezhetjük. Felmerülhet, hogy a sokszögön kívül eső átlót nem tekintjük átlónak (konkáv nyolcszög), illetve, hogy azokat az átlókat, amelyeknek egyenese egybeesik, nem különböztetjük meg. Kerestessünk ezekre példát, de ezen a szinten elég megbeszélni azt az értelmezést, amelyben bármely két nem szomszédost csúcsot összekötő szakaszt átlónak, tekintünk és ezeket mind különböző átlónak vesszük.

2. Leszámlálási feladatok

2.65. 7. és 8. osztályban a speciális tagozaton sem várjuk el, hogy ilyen típusú példákra általános megoldási módszert adjanak a diákok.

3. Leszámlálási feladatok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. A Pascal-háromszög

4.20. A feladat folytatását – a táblázatban szereplő számok kombinatorikai jelentésére vonatkozó feladatokat lásd a **??**., **??**., **??**. feladatokban.

5. A Pascal-háromszög (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. A szita-módszer

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. A szita-módszer (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. A skatulyaelv

8.14. Az n=4 esetben leírt módszer alapján, ha k-ra és l-re bizonyítottuk az állítást, akkor be tudjuk látni $k \cdot l$-re is.

8.18. A 21 helyett írhatunk a feladatba kisebb számot is, így jóval nehezebb lesz.

8.23. Ha a sík minden pontjához hozzárendelünk egy pozitív egészt, akkor is lesz olyan egész, amelyhez végtelen sok pont tartozik.

9. A skatulyaelv (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Feladatok a sakktáblán

Ebben a fejezetben a sakktáblán bábuelhelyezések, lépéssorozatos feladatok, találhatók, melyek kötődnek magához a sakkjátékhoz. Ezen kívül ide csatoltuk a fedések és poliminók témakörét is.

10.1. Nem árt tisztázni, hogy a további hasonló jellegű kérdésnél, hogy mit tekintünk különböző elrendezésnek. Lehetne azonosnak tekinteni az egymásba forgatható felállásokat. A továbbiakban a feladatgyűjteményben nem így számolunk, hanem úgy képzeljük, hogy a tábla rögzített, a mezők az a1-h8 jelekkel neg vannak különböztetve.

10.17. Rengeteg módon variálhatjuk ezt a kérdést. Változtathatjuk a lefedésre váró idomot, vagy a lefedéshez használható elemeket. Erre látunk több példát az állapotfüggvénnyel kapcsolatosan a Vegyes feladatok között.

11. Feladatok a sakktáblán (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Kombinatorikus geometria

12.14. Érdemes megpróbálni 8 és 10 szakaszból álló töröttvonalat is rajzolni.

12.15. Érdemes meggondolni, hogyan lehetne a b) részt az a) rész 2. megoldásának mintájára bebizonyítani.

12.17. A kerületi szögek, látókörök témakörét eleveníti fel ez a megoldás.

12.18. Ez olyan, mintha bajnokságot szerveztünk volna, ahol a különböző fordulók mérkőzései a különböző színek.

12.21. Érdemes egy hibás bizonyítással megbolondítani a diákokat. Teljes indukcióval szépen megmutatható, hogy az összes felezőmerőleges egy ponton megy át. Lásd [10][177. fel.].

12.24. Az előző feladat továbbgondolása: a színezést kívül pl kékkel kezdjük, s rábökve egy tetszőleges belső részre azt kérdezzük, hogy az milyen színű lesz? (Persze az egész színezés elkészítése nélkül.)

12.26. Érdemes a feladatot feladni egyenesek helyett körökkel is.

13. Kombinatorikus geometria (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

14. Játékok

Ebben a fejezetben szimmetria játékok, nyerő-vesztő lépéseket elemző és NIM játékot előkészítő feladatok találhatók.

A K.I.14.1., K.I.14.2., K.I.14.3., K.I.14.4. feladatokat mintapéldának gondoljuk, utána vegyesen következnek különböző játékok.

14.2. A fenti megoldásra nem könnyű rájönni, a gyerekek nem így csinálják. A diákok általában azt veszik észre, hogy a bal alsó sarokmezőnek a szomszédjaira nem jó lépni. Ahonnan viszont csak ezekre a „nem jó” mezőkre lehet lépni, oda nekünk érdemes lépni. Ezt folytatva a sakktáblán kialakul a mintázat, mely mezők „nem jók”, melyek pedig azok, amikre mi szeretnénk lépni.

Folytatásnak lásd még a K.I.14.6-K.I.14.6. feladatokat.

14.4. Más elemszámú kupacokkal indulva is érdemes három kupaccal játszani.

14.11. Az első (szimmetria-elvű) megoldást nehezebb észrevenni, ha a kiindulási tizenkét oldalú sokszög nem szabályos.

14.12. Ez a játék az osztójáték (Sz.I.4.27) táblás változata 2 dimenzióban.

14.16. Ez a feladat jóval nehezebb lesz, ha egyszerre két kupaccal játszunk.

14.19. Ez a játék lényegében ugyanaz, mint a K.I.14.6. feladat, de erre a diákok nem mindig jönnek rá.

14.22. Ez a játék nem túl izgalmas, de ha már három korong van, akkor sokkal élvezetesebb. Előzni most sem szabad, kezdjünk pl piros 8, kék 13, zöld 16 állapotról.

15. Játékok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

16. A teljes indukció

16.3. Tanári megjegyzés: A kezdőlépés a 4, 6, 8-ra bontás és ezekről hármasával lépkedve kapjuk meg minden további szám felbontását.

16.6. Egyenesek helyett megkérdezhetjük ugyanezt körökkel (lásd a K.I.12.24. feladatot), valamint téglalapokkal. A köröknél az előző gondolatmenet mintájára dolgozhatunk, a téglalapoknál viszont nem, sőt ott nem biztos, hogy van ilyen színezés.

16.14. A feladatot gyakran teljes indukcióval oldják meg, de ez tipikusan hibás (lásd [10][234. fel.] 294. oldal).

16.15. Érdemes ezt a feladatot nem indukciós feladatként feladni, hanem 5 hölgyre, a hívások számának megadása nélkül. Ekkor természetesen vetődik fel a kérdés: mi a helyzet n hölgy esetén.

16.17. Ezek után várható, hogy a gyerekek maguk fogják követelni a következő kérdést: Mely páratlan számok írhatók fel három pozitív, páratlan, összetett szám összegeként?

17. A teljes indukció (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.