Tanári kézikönyv

a 7–8. évfolyamokhoz

Szerkesztette:
Dobos Sándor, Fazakas Tünde,
Hraskó András, Rubóczky György

2024. április 14.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2024

Tartalomjegyzék

Bevezető

Ez a könyv még nem egy igazi tanári kézikönyv, hanem csak egy példa arra, hogy a matkönyv projektben hogyan lehet tanári kézikönyvet létrehozni. Fejlesztése folyamatban.

A fejlesztés jelen állásában (2006. május) csak a számelmélet, algebra és kombinatorika kötetekkel foglalkoztunk, azok csak részben kidolgozottak. A kombinatorika kötet terveink szerint tartalmazza a gráfokkal és algoritmusokkal kapcsolatos feladatokat is. A kombinatorika kötetbe tartozna még a logika, a jelen kötetből ez még kimaradt. Két további kötetet szeretnénk még a 7-8. évfolyamoknak és tanáraiknak megírni: egyet geometriából és egyet a függvényekről. A halmazok témakörét ezen a szinten nem külön, hanem az egyes főtémákhoz kapcsolva vizsgáljuk (mértani helyes feladatok geometriából, oszthatósággal kapcsolatos halmazok számelméletből, stb.). Későbbi terveinkben szerepel a valószínűségszámítás és a statisztika témáinak feldolgozása. Hosszabb távon lehet, hogy érdemesenn a logika, algoritmusok (játékok) témaköreit a programozás témájával együtt külön kötetbe foglalni.

A 7-8. évfolyamos diákoknak gyakorlásra javasoljuk még a [11], [1] (ill. [5]) köteteket, a tehetséggonozásban pedig hasznos kiegészítő Róka Sándor könyve[7].

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Alkalmazott rövidítések

Algebra

Tematika

1.4. Algebra, 7. évfolyam: 25 óra

Tananyag: Az algebrai ismeretek ismétlése; a betűk célszerű használata; az algebrai kifejezésekkel való számolás gyakorlása egyszerű azonosságok, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásában.

Fogalmak: Egyenes és fordított arányosság, százalékláb, százalékérték; mérlegelv; a negatív egész kitevőjű hatvány; normálalak.

Tételek, összefüggések: Zárójelfelbontás, disztributivitás, $(a \cdot b)^2$, $(a+b)\cdot(a-b)$, $(a \pm \pm b)^2$ átalakítása (*nem készségszinten*). A hatványozás azonosságai konkrét esetekben. Út, idő, sebesség összefüggése.

Eljárások, algoritmusok: Számolás algebrai egész kifejezésekkel: zárójelfelbontás, disztributivitás, összevonás; egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel. Szöveggel megadott egyszerűbb feladatok lefordítása az algebra nyelvére, egyenletek felállítása.

Pontosítás: Arányossággal és százalékszámítással, algebrai átalakításokkal megoldható szöveges feladatok.

Alakalmazások: Egyszerűbb keverési feladatok, mozgásos feladatok.

2.4. Algebra, 8. évfolyam: 20 óra *A 20 óra kevés!*)

Tananyag: Egyszerű nevezetes algebrai azonosságok. A biztos algebrai készség megalapozása. A számfogalom bővítése, irracionális számok.

Fogalmak: Teljes négyzet, teljes köb. Nevezetes azonosságok, szorzattá alakítás és ezek szerepe egyenletek megoldásában. A négyzetgyök fogalma, irracionális számok, két szám számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepe (*sok és korai a négy közép*).

Tételek, összefüggések: a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4, a^3+b^3 szorzattá alakítása; teljes négyzet és teljes köb. A hatványozás azonosságai egész kitevőre; a négyzetgyökvonás azonosságai (*csak számokkal*). A megismert közepek közti egyenlőtlenségek (*sok és ekkor még felesleges*).

Eljárások, algoritmusok: Algebrai törtekkel való számolás begyakorlása (bővítés, egyszerűsítés, közös nevezőre hozás betűkkel); teljes négyzet és teljes köb felismerése; a megismert azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban, az egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőértékfeladatokban (*korai*), lineáris kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Törtes egyenletek.

Részletezés: 9-cel, 11-gyel való oszthatósági szabály bizonyítása; $x+\frac{1}{x} \geq 2$, ha x pozitív; szöveges szélsőértékfeladatok megoldása a tanult egyenlőtlenségekkel (*korai, sok*), az x^2, $\frac{1}{x}$ (x>0), $\sqrt{x}$ függvények gyenge konvexitásának bizonyítása (*a konvexitás fogalma is korai még 7-8-ban*); számolások Pithagoras-tétel segítségével.

Általános irányelvek

Aritmetika

A Gauss összegzéssel kapcsolatos feladatok: A.I.24.8, A.I.1.21, A.I.1.22, A.I.1.23, A.I.1.24, A.I.1.25, A.I.1.26, A.I.1.27 A.I.1.28, A.I.1.29, A.I.1.30, A.I.24.11

Relatív mozgással kapcsolatos példák: A.I.24.40, A.I.20.40, A.I.24.86, A.I.24.87,

1. Aritmetika

1.1. Amennyiben látjuk, hogy az alapműveletek elvégzés előjeles számokkal gondot okoz a diákoknak, akkor gyakorló feladatokat találhatunk a [6] könyvben.

1.2. Az a) feladatrész eredményéből műveleti azonosságok segítségével is megkaphatjuk a további eredményeket.

1.22.

1. didaktikai javaslat. A **c)** feladatot egymásnak is készíthetik a tanulók.

2. didaktikai javaslat. Lásd még a Sz.I.21.79 feladatot!

1.24. Lásd még a Sz.I.15.8. feladatot!

1.28. Ezekben a feladatokban is számolhatunk egy „átlagos” számmal. Az a) feladatrészben a csupa 2,5 „jegyből” álló négyjegyű szám az átlag, a b) esetben pedig az 3333.

1.30. Lásd még a Sz.I.21.15 feladatot és annak megoldását.

2. Aritmetika (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Arányosság

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Arányosság (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Szöveges feladatok

5.9. Megkérdezhetjük: „mi lehet a különbség?”. Lehet-e pld 97 hatszorosa? Lásd még a Sz.I.21.33. feladatot.

5.28. 92 tallért. Részletesebben lásd [4][140. old.]

5.29. 1 akó bor 120 peták, és 10 peták a vám 1 akóra. Részletesebben lásd [4][140. old.]

6. Betűkifejezések

Ez a fejezet „fordítási” gyakorlatokat tartalmaz. A tanulóknak el kell sajátítaniuk a feladatok szövegének matematikai lejegyzését és a betűs kifejezéseket értelmezniük kell. A betűs kifejezésekkel végzett műveletek a következő fejezetben találhatók.

6.17. A $2h^2$, $(2k)^2$, $2(-c)^2$ képletek esetében gyökvonásra is szükség van. Itt a pontos választ nem követeljük meg, csak alkalmat teremtünk arra, hogy felvetődjön a négyzetgyök létezésének problémája.

6.24. A következő rész Péter Rózsa írása alapján készült.

Ez a fejtörő hangzott el az osztályban:

Gondoltam egy számot, hozzáadtam 2-t, 3-szor vettem, és 18-at kaptam. Mely számra gondoltam?

Buzgón jegyezte egy tanuló a táblán: a gondolt szám g, a felírás $g+2\cdot 3=18$. Már mondta is valamelyik gyerek: „Az a valami, amihez $2\cdot 3$-at, vagyis 6-ot adva 18-at kapunk, csakis 12 lehet.”

De a feladat kitűzője határozottan rázta a fejét: „Nem, én 4-et gondoltam! Ehhez adtam 2-t, és így lett 6 belőle, azután szoroztam 3-mal, és így kaptam 18-at.”

A tanulók már másutt is találkoztak ilyen félreérthető szöveggel. Valamelyiküknek eszébe jutott a következő adoma, mely szerint Bánk bán a következő írásjelek nélküli levelet kapta:

A KIRÁLYNÉT MEGÖLNI NEM KELL FÉLNETEK JÓ LESZ HA MINDENKI BELEEGYEZIK ÉN NEM ELLENZEM

Ezt így is lehet olvasni:

A KIRÁLYNÉT MEGÖLNI NEM KELL. FÉLNETEK JÓ LESZ: HA MINDENKI BELEEGYEZIK, ÉN NEM. ELLENZEM.

De homlokegyenest ellenkező értelemben is felfogható:

A KIRÁLYNÉT MEGÖLNI NEM KELL FÉLNETEK. JÓ LESZ, HA MINDENKI BELEEGYEZIK, ÉN NEM ELLENZEM.

A matematikában is bizonyos írásjeleket kell bevezetnünk a félreértés elkerülésére. A fejtörő helyes feljegyzése:

Milyen g-re igaz?

$$\begin{aligned} & (g+2)\cdot 3 &= 18 \\ Még rövidebben :?\, g \quad & (g+2)\cdot 3 &= 18 \end{aligned}$$

Ezzel megszüntettük a kétértelműséget.

6.31. Érdemes visszakérdezni: hogyan módosul a feladat, ha a „céltól való távolság” helyett mindenütt az „egész pálya hossza” szerepel?

7. Betűkifejezések (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Műveleti azonosságok

8.19. A tanulócsoport képességétől, felkészültségétől függően tekintetbe vehetjük a negatív prímek esetét is.

8.46. A feladat variációival kapcsolatban lásd [10] 121. feladatát és a hozzá fűzött megjegyzéseket (ott, 33-34. old.)

9. Műveleti azonosságok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Hatványozás

10.41. Visszakérdezhetünk: „Ha az osztódás után egyetlen állatka sem pusztulna el, egy papucsállatka utódainak a térfogata mennyi idő alatt érné el a Nap térfogatát? (A papucsállatkák átlagban 27 óra alatt osztódnak ketté, a Nap térfogata körülbelül 10^{27} m^3.)

10.42. Visszakérdezhetünk: „Mennyi idő múlva boritaná mák az egész Földet? (A szárazföldek felszíne összesen körülbelül 135 millió km^2.)

10.49. Az osztály szintjétől, érdeklődésétől függően folytathatjuk a feladatot: „melyik pont felé tart” az egyes esetekben a bolha? Folytatás 9-10. osztályban: A.II.5.27. feladat.

10.53. Lásd [9][47. fel.].

11. Hatványozás (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Számrendszerek

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

13. Egyenletek I.

13.6. Rákérdezhetünk: „Mit figyelsz meg?”, ösztönözhetjük a diákokat, hogy ők is írjanak hasonló tulajdonságú egyenleteket.

13.73. Ha a teljes út km-ben $s = 180$, az ennek megtételéhez eredetileg szükséges idő órában t, akkor az új menetidő $t - 0{,}75$, így az eredeti és az új átlagsebesség kifejezhető, és közöttük az alábbi egyenlet írható fel:

$$1{,}2\frac{s}{t} = \frac{s}{t - 0{,}75}.$$

13.74. Jelölje a sík terepen menő útrész hosszát km-ben s, tehát az út $S = 42$ teljes hosszával a kaptató km-ben $42 - s$. Ha a sík részen a sebesség km/órában v_s, a kaptatón v_k, akkor a teljes idő órában:

$$\frac{s}{v_s} + \frac{42 - s}{v_k} = 9.$$

14. Egyenletek I. (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

15. Egyenlőtlenségek

15.22. Próbáljuk összeszedetni a diákokkal, milyen módszereket alkalmaztak az egyenlőtlenségek megoldása közben!

Gondoljuk meg együtt, hogy ugyanúgy bánhatunk-e az egyenlőtlenségekkel, mint az egyenletekkel!

16. Nevezetes azonosságok

16.48. Hívjuk fel a figyelmet, hogy ezek az azonosságok a A.I.16.47 feladat azonosságaiból is megkaphatók $b \mapsto (-b)$ helyettesítéssel!

17. Nevezetes azonosságok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

18. Egyenletek II.

Nem követeljük meg, hogy a diákok képesek legyenek önállóan meghatározni az értelmezési tartományt a hamis gyökök kiszűrésére. Csak azt várjuk el, hogy megtalálják a hibás lépést általunk adott rossz megoldásokban.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

19. Egyenletek II. (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

20. Egyenletrendszerek

20.9. Az $y = m(x-2)+1$ egyenlet megoldáshalmaza a síkon egy egyenes, amely tartalmazza a $(2;1)$ pontot. Az egyenes meredeksége az m szám. Minden egyenesnek van meredeksége, kivéve a függőleges – az y tengellyel párhuzamos – egyeneseket. A vizsgált paraméteres egyenlet tehát a $(2;1)$ pontot tartalmazó bármely olyan egyenes egyenlete lehet, amely nem párhuzamos az y tengellyel.

20.15. Hasznos kérdések:

1. Meg lehet-e mondani a körző, a ceruza vagy a radír árát?
2. Egy adatot módosíthatunk a szövegben. Melyik adat változtatása esetén lehet továbbra is megválaszolni a „Mennyit fizetett?” kérdést?

21. Egyenletrendszerek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

22. Négyzetgyök

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

23. Négyzetgyök (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

24. Vegyes feladatok

24.8. Folytatás: K.I.20.22

24.11. Nem lehet elszállítani a köveket: a 8 legkönnyebb kő össztömege nagyobb, mint 2 tonna.

24.47. 15625 néző volt eredetileg, a mérkőzés hat menetből állt.
A 2000. évi Varga Tamás Mat. Vers. II. kat-ban a 2. ford. 3. feladata a hetedikeseknél.

24.83. Jelölje az A-ból illetve a B-ből induló vonat teljes menetidejét t_A, illetve t_B. A találkozásig megtett idők egyenlők:

$$t_A - 4 = t_B - 9.$$

Jelölje a vonatok sebességét v_A, illetve v_B. A találkozási pont és A közti távolságot az egyik illetve másik vonat adatai alapján is felírhatjuk:

$$(t_A - 4)v_A = 9v_B.$$

A találkozási pont és B közti útrész kétféleképpen:

$$(t_B - 9)v_B = 4v_A.$$

Az utóbbi két egyenlet hányadosát képezve, felhasználva az első egyenletet, majd gyököt vonva kapjuk, hogy $\frac{v_A}{v_B} = \frac{3}{2}$, amiből $\frac{t_A}{t_B} = \frac{2}{3}$. Az A-ból induló vonaton összesen $4 + \frac{2}{3} \cdot 9 = 10$ órát, a B-ből induló pedig 15 órát tartott a teljes utazás.

24.87. 11-kor ér a gyalogos B-be.

24.99. A szerelvény 300 m hosszú.
A 2001. évi Varga Tamás Mat. Vers. II. kat-ban a 2. ford. 1- feladata a nyolcadikosoknál.

Függvények

1. Grafikonok

A fejezetben a statisztikai adatokat a KSH kiadványaiból válogattuk.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

2. Geometriai transzformációk

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Geometriai transzformációk (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Lineáris függvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Lineáris függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. Abszolútérték függvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. Abszolútérték függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Másodfokú függvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. Másodfokú függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Racionális törtfüggvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

11. Racionális függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Négyzetgyök függvény

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

13. Négyzetgyök függvény (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

14. Előjel, törtrész, egészrész

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

15. Előjel, törtrész, egészrész (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

16. Függvénytranszformációk

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

17. Függvénytranszformációk (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

18. Összetett függvények

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

19. Összetett függvények (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

20. Tulajdonságok, műveletek

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

21. Tulajdonságok, műveletek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

22. Grafikus megoldás

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

23. Grafikus megoldás (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

24. Függvénykapcsolatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

25. Függvénykapcsolatok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

26. Vegyes feladatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

27. Lineáris programozás

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Geometria

1. Szerkesztések I.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

2. Mértani helyek I.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Speciális síkidomok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. A Descartes koordinátarendszer

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Szimmetriák, transzformációk

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. Terület I.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. Terület I. (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Hasonlóság

Miután gyakoroltuk a középpontos hasonlóság végrehajtását, kísérleteztünk, fogalmaztassuk meg a gyerekekel a transzformáció tulajdonságait. A csoport erősségét, érdeklődését felmérve döntsünk arról, hogy a bizonyításokat is elvégezzük nyolcadikban vagy későbbre hagyjuk. Mindenképpen tegyük tisztába, hogy mi az állítás, mi az, amit most elfogadunk, mi az, amit bizonyítunk. Nem baj, ha a bizonyításokra csak kilencedikben térünk vissza, de akkor legyen világos a diák számára is, hogy itt megfigyelés alapján tett sejtésről van szó, amit a tanár szavára most elfogadunk, de bizonyítani kellene.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. Terület II.

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Terület II. (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

11. Síkgeometriai számítások

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Kockák

12.10. Változtassuk a kis kocka helyzetét és kérdezzünk rá az ekkor létrejövő részekre!

13. Kockák (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

14. Gúla

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

15. Gúla (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

16. Poliéder

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

17. Poliéderek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

18. Vegyes feladatok

18.21. Érdemes felvetni, hogy a G.I.18.21M1.,G.I.18.21M2. megoldásokban kapott számok tényleg egyenlőek-e, igazolható-e ez algebrtai úton.

18.23. A kör egy belső pontján átmenő húrok közül az a legrövidebb, amelynek felezőpontja az adott pont.

Ha nem mindegyik húr átmérő, akkor tekintsük közülük a legrövidebbet! Ennek felezőpontján nem megy át húr.

18.24. Igen, ez lehetséges.

Kombinatorika

Tematika

1.9. Kombinatorika, 7. évfolyam: 10 óra

Tananyag: A hozott kombinatorikai ismeretek rendszerezése: összeszámlálás, skatulyaelv, szöveges feladatok.

Fogalmak: Permutáció, $n!$, a skatulyaelv (*a geometriai skatulyaelv még nem*, leszámolás fagráfokkal.

Tételek, összefüggések: Sokszög átlóinak száma, n egyenes hány részre osztja a síkot (konkrét n-ekre), $\binom{n}{2}$, permutációk száma. Véges halmaz részhalmazainak száma. A Pascal–háromszög legegyszerűbb tulajdonságai (sorösszeg). A Fibonacci–sorozat legegyszerűbb tulajdonságai.

Eljárások, algoritmusok: Leszámolási feladatok megoldása pl. fagráf segítségével; tudatos leszámlálási módszerek kialakítása.

Pontosítás: Bonyolultabb skatulya-elves feladatok; leszámlálási feladatok; egyszerű feladatok, ahol pl. a sakktábla színezése segít; az állapotfüggvényt előkészítő egyszerű feladatok: invarianciával (pl. négyes maradék megmaradásával) bizonyítható feladatok; vegyes feladatok (pl. sakktáblán).

2.9. Kombinatorika, 8. évfolyam: 15 óra

Tananyag: A kombinatorikus gondolkodás fejlesztése.

Fogalmak: A teljes indukció előkészítése. Ismétléses permutáció, kombináció. $\binom{n}{k}$ kapcsolata a Pascal–háromszöggel. Geometriai skatulya.

Tételek, összefüggések: A Pascal–háromszög tulajdonságai (folytatás); véges halmaz részhalmazainak, páros-, páratlan elemszámú részhalmazainak száma (újabb bizonyítások). A logikai szita 2, 3 halmazra. Egyszerű minimum és maximum kereső feladatok. $\binom{n}{k}$ kiszámítása. Kombináció. A Fibonacci–sorozat tulajdonságainak kombinatorikus bizonyítása (*Ez mit jelent?*) Könyvtár-feladat: páronként nem diszjunkt intervallumoknak van közös pontja.

Eljárások, algoritmusok: Egyszerű kombinatorikai játékok. $\binom{n}{k}$ felhasználása feladatokban. Egyszerű feladatok teljes indukcióra. További feladatok a skatulya-elvre, geometriai skatulyára. Bonyolultabb leszámlálási, színezési feladatok. Olyan (pl. kombinatorikus geometriai) feladatok, amelyeknek megoldásánál hivatkozni kell arra, hogy végtelen sok lehetőség közül egy véges halmaz csak véges sok lehetőséget zár ki; vagy azt kell kihasználni, hogy valami egyesével változik (mindkettőre példa: mindig húzható olyan egyenes, amelynek két oldalán $n-n$ darab van adott $2n$ pont közül). $\phi(n)$ kiszámolása szita-formulával konkrét, $n = p \cdot q$, $n = p \cdot q \cdot r$, , $n = p^2$, $n = p^2 \cdot q$ alakú számokra. Az állapotfüggvényt előkészítő további feladatok.

1.10. Gráfelmélet, 7. évfolyam: 10 óra

Tananyag: A gráfelmélet egyszerű alapfogalmai és a gráfok felhasználása feladatmegoldásokban.

Fogalmak: Gráf, csúcs, él, pont fokszáma, fa konkrét feladatokban. Komplementer gráf, összefüggőség.

Tételek, összefüggések: A fokszámok összege páros.

Eljárások, algoritmusok: Permutációk ábrázolása gráffal (*Kell ez itt?*); osztók fája (*Ez mi?*), részhalmazok ábrázolása bináris fákkal; leszámlálási feladatok megoldása fákkal.

Pontosítás: Ismeretségre, rokonságra vonatkozó (tehát gráffal szemléltethető) egyszerű feladatok. Egyszerű Ramsey–típusú feladatok konkrét, kis számokra (pl. egy hattagú társaság bármely három tagja közül van kettő, aki ismeri egymást, akkor van a társaságban hármas ismeretség. *Inkább 8-9-ben javasoljuk a Ramsey témakört*).

Alkalmazások: Más tantárgyak fogalmi rendszerezéséhez is használhatók a fagráfok. Konkrét alkalmazás: kémiában a szénhidrogénekben a hidrogének számának paritása.

2.10. Gráfelmélet, 8. évfolyam: 10 óra

Tananyag: Euler-kör és út. Az alapfogalmak bővítése, új fogalmak előkészítése.

Fogalmak: Euler-vonal (kör és út). Út, kör, összefüggő gráf, fa és faváz fogalma konkrét feladatokon keresztül. Irányított gráf [és tournament (körmérkőzés)] fogalma konkrét feladatokon keresztül. Komplementer gráf. Páros gráf és páros körüljárású gráf.

Tételek, összefüggések: Ramsey-típusú tételek egyszerű esetekben (folytatás: pl. ha egy kilenctagú társaság bármely három tagja közül van kettő, aki ismeri egymást, akkor van négyes ismeretség. *Inkább 9. osztályban!*). Példák, ahol a mohó algoritmus működik. Euler-kör és út létezésének szükséges és elégséges feltétele. Ha minden pont foka legalább k, akkor van k pontú út és kör *Inkább 9. osztályban!*. Páros körüljárású gráf színezhető két színnel. [Tournamentben van pszeudógyőztes (példa tekintsük a legnagyobbat típusú bizonyításra) *Inkább 9. osztályban!*]. (*Ha a csúcsok száma v, akkor legalább $v-1$ él kell ahhoz, hogy összefüggő legyen a gráf.*)

Eljárások, algoritmusok: Adott gráfokban megfelelő tulajdonságú utat, kört, sétát (pl. Euler-utat, kört) keresni, [favázat keresni *Inkább 9. osztályban!*]; adott gráfról eldönteni, hogy összefüggő-e.

Részletezés: A nyolcadikos tananyag nem általános gráfelméleti tételekről, hanem konkrét gráfokra vonatkozó ismeretekről szól.

1.11. Algoritmusok, 7. évfolyam: 5 óra

Tananyag: Ismerkedés az algoritmusokkal, elsősorban konkrét matematikai játékokon és keresési feladatokon keresztül.

Fogalmak: A „biztosan nyerünk”, „nyerő helyzet”, „vesztő helyzet” fogalmának kialakítása konkrét játékokon keresztül. Mit jelentés a „kérdés” a barkochbában. Játékok szimmetriája konkrét egyszerű példákon. Egyszerű invarencia-elves feladatok.

Tételek, összefüggések: n-elemű halmazból gondolt elem kiválasztása minimális kérdéssel.

Eljárások, algoritmusok: Egyszerű szimmetrián alapuló játékok elemzése; mérések számának minimalizálásával kapcsolatos feladatok. A lehetséges „kérdések” tisztázása.

Pontosítás: Pl. 1-től 40 grammig minden egész grammot mérni akarunk egy kétkarú mérlegen. Milyen súlyokat válasszunk, hogy a lehető legkevesebb számú súlyra legyen szükség?

2.11. Algoritmusok, 8. évfolyam: 5 óra

Tananyag: További játék-algoritmusok, kiválasztási és rendezési algoritmusok.

Fogalmak: Kétszemélyes determinisztikus játékok stratégiája, „nyerő” és „vesztő” helyek konkrét játékoknál. A mohó algoritmus fogalma konkrét példákon (mikor jogos, mikor nem) (*Korai!*). Állapotfüggvény előkészítése konkrét példákon.

Tételek, összefüggések: n-elemű rendezett halmaz legnagyobb, legkisebb elemének kiválasztása $n-1$ összehasonlítással. n-elemű halmaz rendezése összefésüléssel, beszúrással (*Inkább kilencidekbe!*). Konkrét egyszerű példák, amikor a mohó algoritmus nem működik.

Eljárások, algoritmusok: Hanoi tornyai: palacsintaforgatás (rendezni úgy, hogy mindig egy adott szeletet forgathatok); 3, 4 [, 5] elem rendezése minimális összehasonlítással. Kétszemélyes játékok (nyerő vesztő helyzeteinek) elemzése.

Részletezés: Számítástechnikából ismert algoritmusok matematikai „vizsgálata”.

1. Bemelegítő feladatok

1.4. Vetessük össze a b) és az f) feladatrész eredményeit, magyaráztassuk meg az egyezést!

1.26. A b) feladatrészt többféleképpen is értelmezhetjük. Felmerülhet, hogy a sokszögön kívül eső átlót nem tekintjük átlónak (konkáv nyolcszög), illetve, hogy azokat az átlókat, amelyeknek egyenese egybeesik, nem különböztetjük meg. Kerestessünk ezekre példát, de ezen a szinten elég megbeszélni azt az értelmezést, amelyben bármely két nem szomszédost csúcsot összekötő szakaszt átlónak, tekintünk és ezeket mind különböző átlónak vesszük.

2. Leszámlálási feladatok

2.65. 7. és 8. osztályban a speciális tagozaton sem várjuk el, hogy ilyen típusú példákra általános megoldási módszert adjanak a diákok.

3. Leszámlálási feladatok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. A Pascal-háromszög

4.20. A feladat folytatását – a táblázatban szereplő számok kombinatorikai jelentésére vonatkozó feladatokat lásd a **??**., **??**., **??**. feladatokban.

5. A Pascal-háromszög (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. A szita-módszer

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. A szita-módszer (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. A skatulyaelv

8.14. Az n=4 esetben leírt módszer alapján, ha k-ra és l-re bizonyítottuk az állítást, akkor be tudjuk látni $k \cdot l$-re is.

8.18. A 21 helyett írhatunk a feladatba kisebb számot is, így jóval nehezebb lesz.

8.23. Ha a sík minden pontjához hozzárendelünk egy pozitív egészt, akkor is lesz olyan egész, amelyhez végtelen sok pont tartozik.

9. A skatulyaelv (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

10. Feladatok a sakktáblán

Ebben a fejezetben a sakktáblán bábuelhelyezések, lépéssorozatos feladatok, találhatók, melyek kötődnek magához a sakkjátékhoz. Ezen kívül ide csatoltuk a fedések és poliminók témakörét is.

10.1. Nem árt tisztázni, hogy a további hasonló jellegű kérdésnél, hogy mit tekintünk különböző elrendezésnek. Lehetne azonosnak tekinteni az egymásba forgatható felállásokat. A továbbiakban a feladatgyűjteményben nem így számolunk, hanem úgy képzeljük, hogy a tábla rögzített, a mezők az a1-h8 jelekkel neg vannak különböztetve.

10.17. Rengeteg módon variálhatjuk ezt a kérdést. Változtathatjuk a lefedésre váró idomot, vagy a lefedéshez használható elemeket. Erre látunk több példát az állapotfüggvénnyel kapcsolatosan a Vegyes feladatok között.

11. Feladatok a sakktáblán (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

12. Kombinatorikus geometria

12.14. Érdemes megpróbálni 8 és 10 szakaszból álló töröttvonalat is rajzolni.

12.15. Érdemes meggondolni, hogyan lehetne a b) részt az a) rész 2. megoldásának mintájára bebizonyítani.

12.17. A kerületi szögek, látókörök témakörét eleveníti fel ez a megoldás.

12.18. Ez olyan, mintha bajnokságot szerveztünk volna, ahol a különböző fordulók mérkőzései a különböző színek.

12.21. Érdemes egy hibás bizonyítással megbolondítani a diákokat. Teljes indukcióval szépen megmutatható, hogy az összes felezőmerőleges egy ponton megy át. Lásd [10][177. fel.].

12.24. Az előző feladat továbbgondolása: a színezést kívül pl kékkel kezdjük, s rábökve egy tetszőleges belső részre azt kérdezzük, hogy az milyen színű lesz? (Persze az egész színezés elkészítése nélkül.)

12.26. Érdemes a feladatot feladni egyenesek helyett körökkel is.

13. Kombinatorikus geometria (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

14. Játékok

Ebben a fejezetben szimmetria játékok, nyerő-vesztő lépéseket elemző és NIM játékot előkészítő feladatok találhatók.

A K.I.14.1., K.I.14.2., K.I.14.3., K.I.14.4. feladatokat mintapéldának gondoljuk, utána vegyesen következnek különböző játékok.

14.2. A fenti megoldásra nem könnyű rájönni, a gyerekek nem így csinálják. A diákok általában azt veszik észre, hogy a bal alsó sarokmezőnek a szomszédjaira nem jó lépni. Ahonnan viszont csak ezekre a „nem jó” mezőkre lehet lépni, oda nekünk érdemes lépni. Ezt folytatva a sakktáblán kialakul a mintázat, mely mezők „nem jók”, melyek pedig azok, amikre mi szeretnénk lépni.

Folytatásnak lásd még a K.I.14.6-K.I.14.6. feladatokat.

14.4. Más elemszámú kupacokkal indulva is érdemes három kupaccal játszani.

14.11. Az első (szimmetria-elvű) megoldást nehezebb észrevenni, ha a kiindulási tizenkét oldalú sokszög nem szabályos.

14.12. Ez a játék az osztójáték (Sz.I.4.27) táblás változata 2 dimenzióban.

14.16. Ez a feladat jóval nehezebb lesz, ha egyszerre két kupaccal játszunk.

14.19. Ez a játék lényegében ugyanaz, mint a K.I.14.6. feladat, de erre a diákok nem mindig jönnek rá.

14.22. Ez a játék nem túl izgalmas, de ha már három korong van, akkor sokkal élvezetesebb. Előzni most sem szabad, kezdjünk pl piros 8, kék 13, zöld 16 állapotról.

15. Játékok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

16. A teljes indukció

16.3. Tanári megjegyzés: A kezdőlépés a 4, 6, 8-ra bontás és ezekről hármasával lépkedve kapjuk meg minden további szám felbontását.

16.6. Egyenesek helyett megkérdezhetjük ugyanezt körökkel (lásd a K.I.12.24. feladatot), valamint téglalapokkal. A köröknél az előző gondolatmenet mintájára dolgozhatunk, a téglalapoknál viszont nem, sőt ott nem biztos, hogy van ilyen színezés.

16.14. A feladatot gyakran teljes indukcióval oldják meg, de ez tipikusan hibás (lásd [10][234. fel.] 294. oldal).

16.15. Érdemes ezt a feladatot nem indukciós feladatként feladni, hanem 5 hölgyre, a hívások számának megadása nélkül. Ekkor természetesen vetődik fel a kérdés: mi a helyzet n hölgy esetén.

16.17. Ezek után várható, hogy a gyerekek maguk fogják követelni a következő kérdést: Mely páratlan számok írhatók fel három pozitív, páratlan, összetett szám összegeként?

17. A teljes indukció (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

18. Gráfok

18.5. Az itt következő (a **??**., **??**., **??**.) feladatok a gráfelméleti nyelv bevezetését készítik elő. Részletes kidolgozásukat l. a 9-10. osztályos feladatgyűjtemény „Gráfelméleti alapfogalmak” c. fejezetének elején. A gráf fogalmának bevezetése nem sürgős nyolcadikban, ráérünk akkor, amikor a csoportot elég érettnek tartjuk hozzá. Ezért tettük a 9-10. osztályos anyagba.

18.14. A gráfelméleti nyelvre való átfogalmazást csak abban az esetben jogos kérdeznünk, ha előtte már bevezettük a gráfelméleti nyelvet. Szerencsésebbnek tartom ezzel várni kilencedikig, de ha úgy érezzük, hogy a csoport már érett rá, akkor mindenképp érdemes végigvenni e feladat előtt a 9-10. osztályos feladatgyűjtemény gráfelméleti alapfogalmakról szóló fejezetéből a gráffogalom bevezetésére szolgáló feladatokat. Természetesen az ott szereplő feladat helyett más feladattal is végigcsinálhatjuk ugyanazt, például a **??**. feladattal. Az általunk választott feladat előnye az, hogy rögtön felhívhatjuk a figyelmet az egyszerű gráf fogalmára, bevezethetjük az irányított gráf és a végtelen gráf fogalmát, és megmutathatjuk, hogy azokra nem igaz a feladat állítása. Továbbá rögtön kéznél van fokszám, a telített és az izolált pont fogalma is, és kapcsolódó feladatok átvezetnek a komplementer- és a részgráf fogalmához is.

19. Gráfok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

20. Vegyes feladatok

20.49. Ugyanígy igazolható 10 helyett bármely 4k+2 alakú számra a feladat állítása.

20.61. Nem, mivel a gyomos rész kerülete nem nőhet.

20.62. Nem érhető el. A kupacokban levő összes gyufaszám hármas maradéka nem változik. Kezdetben $7 + 34 = 13 \cdot 3 + 2$, a maradék 2. A végén $50 + 50 = 33 \cdot 3 + 1$, a maradék 1.

20.81. Nem kell erőltetni, hogy a gyerekek bizonyítsanak vagy hogy megtanítsuk nekik a formulát. Ezen a szinten az is siker, ha konkrét példák kiszámolása után észreveszik és megfogalmazzák hol található a Pascal háromszögben a megoldás.

Pontosítás és folytatás majd 9-10. évfolymon várható. Lásd pl. A K.II.19.8, K.II.19.9, K.II.19.10, K.II.19.11 feladatokat!

Számelmélet

Bevezetés

Ez a szöveg itt a tanári kézikönyvbe tartozó bevezető szöveg a Számelmélet témából.

Tematika

1.3. Számelmélet, 7. évfolyam: 25 óra

Tananyag: A hozott számelméleti ismeretek összefoglalása. Az oszthatóság elemi tulajdonságai az egész számok körében; prímszámok és egyszerű tulajdonságaik; legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös; a pozitív egész kitevőjű hatványozás. Számrendszerek.

Fogalmak: Természetes számok; egész számok. Oszthatóság; osztópárok. Prímszámok és összetett számok; ln.k.o és lk.k.t; két szám relatív prím. Négyzet és köbszámok; a pozitív egész kitevőjű hatványozás.

Tételek, összefüggések: Oszthatósági szabályok (2-vel, 5-tel, 3-mal, 9-cel, 11-gyel). A számelmélet alaptételének *kimondása* (bizonyítás nélkül). A hatványozás azonosságai konkrét esetekben (de még *nem* írjuk fel betűkkel az általános képleteket, az 8-os algebrai anyag). $a|n$ és $b|n$-ből $ab|n$ csak relatív prímekre következik, általában $[a, b]\,|n$.

Eljárások, algoritmusok: Prímszámok keresése Eratosztenész-féle szitával. Pozitív egész számok prímtényezős felbontása és alkalmazása legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározására. Műveletek egész kitevőjű hatványokkal. Műveletek osztási maradékokkal I. Egész számok hányadosának átalakítása (periodikus) tizedes törtté. Tízes számrendszerben felírt szám átalakítása más alapú számrendszerbe és viszont. Műveletek számrendszerekben.

Pontosítás: Oszthatósági feladatok megoldása a tanult eszközökkel; a hatványazonosságok felhesználása egyszerűbb feladatokban; biztos számolási készség törtekkel; zsebszámológép használata 3 vagy többjegyű számok prímtényezős felbontásához, illetve annak eldöntéséhez, hogy az adott szám prím-e.

2.3. Számelmélet, 8. évfolyam: 20 óra, 30?

Tananyag: Oszthatósági vizsgálatok. A számelméleti fogalmak és módszerek előkészítése feladatokkal. A prímszámok és eloszlásuk.

Fogalmak: Az osztók száma (d(n) függvény), a $\sum$ és $\prod$ jelek használata. Páronként relatív prím számok.

Tételek, összefüggések: A $\sqrt{2}$ irracionális, $\sqrt{n}$ is, ha nem egész (több bizonyítás). A prímek száma végtelen. A prímek közti különbség bármilyen nagy is lehet. $\frac{p}{q}$ mikor véges, mikor végtelen tizedes tört.

Eljárások, algoritmusok: Az euklideszi algoritmus alkalmazása két szám legnagyobb közös osztójának meghatározására konkrét esetekben. Műveletek osztási maradékokkal II. Tízes számrendszerben felírt szám átalakítása más alapú számrendszerbe és viszont.

Részletezés: Négyzetszámok maradékai. Oszthatóság és algebra kapcsolata (pld $a^2 - b^2 = 19$ egész megoldásai). Oszthatósági szabályok számrendszerekben (konkrét esetekben, n, $(n-1)$, $(n+1)$ osztóival való oszthatósági szabályok.

Alkalmazások: Például a 2^{2^n} alakú Fermat-prímek, a $2^p - 1$ (p prím) alakú Mersenne-prímek, $d(n) = k$ (k adott pozitív egész) alakú egyenletek megoldása.

Egyéb: Történeti érdekességek a számelmélettel kapcsolatban.

Általános irányelvek

A számelmélet anyag felépítésében két „külső” szempontot vettünk figyelembe: a tanulók bizonyítási igényének fejlesztését és a téma algebrával való kapcsolatát.

Alább sorra vesszük a legfontosabb témákat, a hozzájuk tartozó feladatokat.

Osztópárok

Sz.I.1.10, Sz.I.1.11, Sz.I.1.14, Sz.I.1.15, Sz.I.1.16, Sz.I.1.17, Sz.I.4.30, Sz.I.1.29, Sz.I.21.16, Sz.I.21.17, Sz.I.21.18.

A számelmélet alaptétele

Minden 1-nél nagyobb egész szám felbontható prímszámok szorzatára és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

A tanítás során illetve a versenyeken van egy kettősség az oszthatóság fogalmával kapcsolatban: hol csak a pozitív egészekre szorítkozunk (pl. az osztók, prímszámok tekintetében), hol pedig az összes egész számra (negatív osztókat, negatív, asszociált prímeket is figyelembe veszünk). Ezt a kérdést nem tartjuk nagyon mélynek, önkényesség van mindkét megközelítésben. Mi ahhoz tartjuk magunkat, hogy felhívjuk a diákok figyelmét erre a kettősségre, és egy-egy feladat kapcsán kitérünk az eltérő értelmezéseknek megfelelő megoldásokra. Az alaptétel esetén a különbség nem nagy.

A gyerekek számára a fenti tétel állítása nem érdekes, nem lényeges, inkább csak fölösleges szőrszálhasogatás. „Hülyeség, hát miért ne lenne egyértelmű a felbontás?" – mondják. Ez természetes, a tétel akkor válik izgalmassá, ha megjelennek, tartalmas, lényeges dolgokat leíró másfajta világok. Erre még sokat kell várni. Az adott szinten mi a következőképpen szoktunk eljárni:

I.) Az alaptételt a Sz.I.4.3., a Sz.I.4.4. feladatok megoldása után, a tapasztalatok összegzéseként fogalmazzuk meg, és részekre is bontjuk:

I.a) *Bármely pozitív egészt akárhogyan is kezdem tényezőkre bontani, majd a kapott tényezőket tovább bontani, mindig véges sok lépésben befejeződik az eljárás, mert tovább nem bontható számokat kapunk.*

I.b) *A kapott felbontás mindig ugyanaz, ha egyazon számból indulunk ki, csak a tényezők sorrendje lehet más.*

Nem építünk arra, hogy a diákok a tételt ezután már azonnal alkalmazni is tudják. Az alkalmazásra csak egy évvel később térünk vissza, a tétel bizonyítására pedig még később. A **I.a** tétel igazolásával azonban hamarabb is érdemes próbálkozni.

II.) A Sz.I.2., Sz.I.4. fejezetek példáiban gyűjtünk tapasztalatot, míg megfogalmazzuk az alábbi tételt (Sz.I.4.15). feladat).

A számelmélet alaptétele II. *Az $n \mid x \cdot y$ $(n > 1,\ n, x, y \in \mathbb{N})$ állításból pontosan akkor következik, hogy $n \mid x$ vagy $n \mid y$, ha n prím.*

Szó sincs róla, hogy e tételt bizonyítanánk, csak tapasztalati törvényként fogalmazzuk meg. A felismeréséhez vezető példákban is csak ellenpéldákat adunk azokra az állításokra, amelyek nem igazak, az igaz állításokat nem bizonyítjuk.

III.) Nyolcadikban játékos órát tartunk Párosországról , ahol nem igaz a számelmélet alaptétele. Lehet kirándulást tenni a $(3k + 1)$ alakú számok világában is.

IV.) A bizonyítási igény kialakulása és némi jártasság megszerzése után — a konkrét osztálytól, csoporttól függően nyolcadikban vagy később — visszatérünk a számelmélet alaptételének és II. verziójának összekapcsolására, ekvivalenciájuk igazolására.

Gyakorlatunkat egy konkrét példa különböző szintű megközelítésein is szemléltetjük.

Egy négyzetszám osztható 2-vel. Mit állíthatunk még róla?

Tapasztalati szint: a diák sorra veszi a páros négyzetszámokat, észreveszi, hogy mindegyik osztható néggyel.

Bizonyítási szint (konkrét forma): páratlan szám négyzete páratlan, ez nem jó, páros szám pedig $2k$ alakú, így négyzete osztható 4-gyel.

Osztók, osztóháló

A Sz.I.2-Sz.I.4. fejezetek feladatainak megoldása kapcsán a diákokban megszilárdul az az elképzelés, hogy a prímek az egész számok építőkövei. Képessé válnak arra, hogy a prímtényezős felbontás ismeretében felírják egy adott szám összes osztóját, általában anélkül, hogy igényük lenne igazolni, valóban nincs más osztó. Nem nagyon erőltetjük a bizonyítást, erre általában később térünk csak vissza.

Az osztók rendszerének áttekintésében nagyon nagy segítséget jelent a Sz.I.4.27. feladat átgondolása, az osztóháló fogalmának kialakítása. (Lásd még a Sz.I.21.28. feladatot.)

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Elvileg hatodikos anyag, de hetedikben tudatosítani szoktuk, hogy közös nevezőre hozásnál (Sz.I.1.4) a nevezők legkisebb közös többszörösét keressük meg. Az Sz.I.5. fejezet után már nem gond az lnko és lkkt prímtényezős alakjának felírása. Általában hetedikben terítékre kerül az $(a \mid x, b \mid x \Rightarrow [a,b] \mid x)$ összefüggés. A diákok ezt gyakran már maguk indokolják konkrét esetekben, a prímtényőket használják. Fokozatosan tudatosítjuk, hogy itt is a számelmélet alaptételének alkalmazásáról van szó. A duális állítás: $(x \mid a, x \mid b \Rightarrow x \mid (a,b))$. Ez mintha nehezebb lenne, csak később, nyolcadikban vagy azután kerül elő.

A legnagyobb közös osztó euklideszi algoritmussal való előállítását legkorábban nyolcadikban és akkor is csak konkrét példákban javasoljuk. Néhány ezzel kapcsolatos feladat: Sz.I.21.58, Sz.I.5.34, Sz.I.21.59, Sz.I.21.60, Sz.I.21.61, Sz.I.21.63, Sz.I.21.66, Sz.I.21.67, Sz.I.21.68.

Hasznos, ha előkerül néhány konkrét példában a legnagyobb közös osztó előállítása egész lineáris kombinációként. Lásd pld: Sz.I.21.56, Sz.I.21.57.

Maradékok

A fejezet első felében található feladatok algebrai alapismeretek nélkül is megoldhatók. A Sz.I.7.25 feladattól kezdve a hatványok maradékait vizsgáljuk. Ezeket a példákat magunk is időnként az algebra előkészítéséhez, máskor a betűkkel való számolás gyakoroltatásához használjuk. Lásd még a Sz.I.15.18. feladatot is.

1. Bemelegítő feladatok

A számelméleti bevezető rész egyik célja, hogy megismerjük diákjaink milyen előismerettel érkeztek a gimnáziumba és felelevenítsük a tanultakat.

Elvárható fogalmak, ismeretek: oszthatóság jelentése, prímszám fogalma, maradékos osztás.

Elvárható eljárás: alapműveletek elvégzése törtekkel, a közös nevező megtalálása, egyszerűsítés, bővítés.

Gyakori tévedés: az oszthatóság fogalmának az oszthatósági szabályokkal való keverése.

Altémák szerinti csoportosítás:

Alapműveletek:	az Sz.I.1.3, az Sz.I.1.4, az Sz.I.1.5
Páros, páratlan:	az Sz.I.1.19, az Sz.I.1.20
Oszthatóság:	az Sz.I.1.8, az Sz.I.1.16
Prímszámok:	az Sz.I.1.6, az Sz.I.1.7
Prímtényezőkre bontás:	az Sz.I.1.9, az Sz.I.1.25
Maradékos osztás:	az Sz.I.1.27, az Sz.I.1.28

1.15. a) A 72-nek és a 96-nak egyaránt 12 osztója van.

b) A prímeknek.

2. didaktikai javaslat. Ezt a feladatot arra szánjuk, hogy a diák barátkozzon a számokkal. Az a cél, hogy a nebuló egyenként keresse meg a számok osztóit.

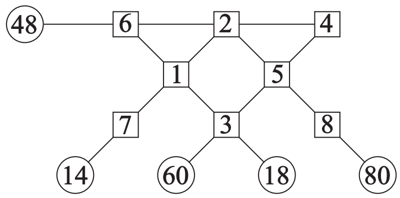
1.17. Nem baj, ha a gyök fogalmát nem tisztázzuk teljes pontossággal és mégis használjuk, igénybe vesszük a számológépet is.

1.23. a) A teljes összeg 55, ezt nem lehet két egyenlő részre osztani, így nincs megfelelő csoportokra bontás.

b) Erre sincs megoldás. Két gondolatmenet is adható erre.

I. A szorzat nem négyzetszám.

II. Csak az a csoport lesz héttel osztható, amelyikben a 7 szerepel.



1.25T.1. ábra.

1.28.

1. didaktikai javaslat. Gondot okozhat, hogy e klasszikus játékot a diákok egy része már ismeri. Pósa Lajos az alábbi variációt javasolja ebben az esetben.

Haladjon az egyik gyerek 0-tól felfelé, a másik pld 100-tól lefelé (továbbra is felváltva lépnek). Az nyer, aki kimond egy olyan számot, amelyet a másik is mondott. Ezt lehet táblán is játszani.

A feladat egy lehetséges folytatása a K.I.14.3. feladat.

2. didaktikai javaslat. A játék elemzése után ösztönözni szoktuk a nebulókat, hogy maguk kérdezzenek tovább. Néhány lehetőség:

- Nem 21-ig játszunk, hanem más számig.
- Nem 1-től 3-ig terjedő számmal, hanem 1 és k köztivel lehet növelni.
- m és k közti számmal lehet növelni.
- Az *veszt*, aki eléri a 21-et.

Lásd még a Sz.I.21.54 feladatot.

1.29. A 24-nek az alábbi számok nem osztói: 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23. Ez 16 szám. A második nyer, ha ügyes.

2. didaktikai javaslat. Játsszuk más számokkal is! Javasoljunk páros és páratlan számot és mindkét típusban négyzetszámot és nem négyzetszámot is!

2. Osztók

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Osztók (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Prímtényezők

4.4. A számelmélet alaptételét először ennek a feladatnak megoldása kapcsán szoktuk megfogalmazni. Érdemes visszakérdezni arra, hogy valóban minden pozitív egészből kiindulva véges lépésben befejeződik-e a prímtényezőkre bontó algoritmus.

4.15. $n = 0$ vagy $n = \pm 1$ vagy n prím (értelmezés szerint lehet: $|n|$ prím).

4.27. Ennek a játéknak a táblás változata 2 dimenzióban a K.I.14.12. feladat.

5. Közös osztó, közös többszörös

Ebbe a fejezetbe olyan...

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. Közös osztó, közös többszörös (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. Maradékos osztás

A diáknak meg kell tapasztalnia, hogy a maradékok összeadódnak és szorzódnak, majd ezeket — az algebrai formalizmus gyakorlása képpen — bizonyítania is kell.

A téma egyik alkalmazása az oszthatósági szabályok igazolása, folytatása pedig az euklideszi algoritmus.

Elő kell készíteni a maradékosztály fogalmát, olyan példákkal, amelyekben valamely maradékot a maradékosztály egy másik elemével érdemes helyettesíteni.

Maradékok motiválása: invarianciafeladat (papírtépkedés), 3 halmaz, bármely kettő metszete végtelen, közös részük mégis üres.

Konkrét utalás az algebra beveztetésére, betűjelölés használatára n-edik olyan szám, amelynek 3-as maradéka 1, vagy autós km köves.

9-es oszthatóság szabálya többet tud: a maradék is kijön. Versenypéldák. Kitalálós.

A témakör végén a négyzet és hatványszámokra vonatkozó maradékos példák következnek. Ezeket 8-ra???.

Ajánljuk még a [2] könyv 12. feladatát.

7.5. A feladat megoldása után visszakérdezhetünk: „Akkor ugye az is igaz, hogy bármely *két* egymást követő természetes szám összege is osztható *kettő*vel?”

8. Maradékos osztás (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. Oszthatósági szabályok

9.17. 99.

9.18. 102000564.

9.19. 8888888880.

10. Oszthatósági szabályok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

11. Számjegyek

11.5. $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

11.6. 42-vel. (részletesebben lásd [3][49.o].

11.7. Igen, 861 vagy 952 (részletesebben lásd [8][155.o].

11.8. 148°, 14°, 18° (részletesebben lásd [8][197.o].

11.12. Nincs. Az ilyen — $\overline{ABBA}$ alakú — számok oszthatók 11-gyel, így a négyzetszámok 121-gyel, de ezek négyjegyű négyzetszám többszörösei — azaz

$$16 \cdot 121, \qquad 25 \cdot 121, \qquad 36 \cdot 121, \qquad 49 \cdot 121, \qquad 64 \cdot 121$$

— nem megfelelő alakúak.

12. Számjegyek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

13. Számrendszerek

A számrendszer fogalmának előkészítése céljából ajánljuk a barkochbás feladatokat. Aki rájön hogyan lehet négy előre leírt kérdéssel kitalálni 16 dolog közül a gondolt tárgyat, számot, az lényegében maga megalkotja a kettes számrendszer fogalmát.

Előfordulhat, hogy olyan csoportban tanítunk, ahol többen ismerik a kettes számrendszert. Itt nagy mulatság lehet, ha a tanár megkéri a diákokat gondoljanak egy számra, míg ő kimegy, majd amikor bejön egy beszervezett diák padján található pénzérmékből kiolvassa a gondolt számot.

A Sz.I.21.69-Sz.I.21.70. példák is megelőzhetik a számrendszer fogalmának közös megbeszélését, de lehetnek utána is. A Sz.I.21.71-Sz.I.21.72 feladatok szokatlan számrendszerekről szólnak (3-as alap, -1, 0, 1-es jegyek), a Sz.I.21.73 feladat pedig a számok egy egészen más kezeléséről.

13.22. Hármas számrendszerben írtak. Valójában most mindketten 11 évesek.

13.23. Az alap bármelyik háromnál nagyobb egész szám lehet.

14. Számrendszerek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

15. Diofantikus egyenletek

15.10.

$$\begin{aligned} (a+1)+ \quad (a+2)+\ldots+ \quad (a+n) &= 1989, \qquad (1)\\ (a+n)+ \quad (a+n-1)+\ldots+ \quad (a+1) &= 1989 \qquad (2) \end{aligned}$$

így: $n\cdot(2a+n+1)=2\cdot 1989$, ahol n kisebb mint $2a+n+1$. Innen a felbontások száma 12. Ez pont a fele annak, ahány osztója van $2\cdot 1989$-nek. □

15.17. 7 vagy 14. Részletesebben lásd [2][125. fel.].

16. Diofantikus egyenletek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

17. Prímek eloszlása

A témához kapcsolódóan érdemes elővenni a korosztályos Kombinatorika kötet szita módszerrel kapcsolatos néhány példáját.

17.15. Érdekes kutatási téma lehet azokat az n pozitív egészeket keresni, amelyekre igaz, hogy n egymás utáni egész szám között mindig van olyan, ami a többihez relatív prím. Pl. $n=16$ is megfelelő, lásd [2][71. fel.].

17.28. A Sz.I.17.27, A Sz.I.17.13 feladatokban előállított számtani sorozatból gyorsan készíthetünk bűvös négyzetet.

18. Prímek (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

19. Racionális és irracionális számok

19.1. **a)** 8-as **b)** 2-es.

20. Racionális és irracionális számok (teszt)

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

21. Vegyes feladatok

21.2. 7 nagy piros, 53 kis piros, 5 nagy fehér, 2 kis fehér.

21.3. $y = 2$, $x = 3$, $z = 11$.

21.5. 12 vagy 19.

21.6. 1234 és 12340.

21.7. Két ilyen háromszög van. A harmadik oldal 15 ill. 36 cm.

21.8. Akkor nem esik ki senki a játékból, ha a labdázó gyerekek száma prímszám. Ha a játékosok száma összetett szám, már akkor kiesnek játékosok, amikor annyiadik szomszédhoz dobják a labdát, amennyi a szám (legkisebb) valódi osztója.

21.9. 3+5+7+11+13=39-től kell csak vizsgálódni. A 43 a legkisebb ilyen prím

21.10. $p = q = 2$, vagy $p = 2$ és $q = 3$.

21.13. Sajnos nem: a fejek száma mindig három többesével változik, így a fejek számának hármas maradéka változatlan.

21.14. Jelölje a résztáblázat bal fölső elemét a. A rész elemei:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{a} & (\mathrm{a}+1) & (\mathrm{a}+2) & (\mathrm{a}+3) & (\mathrm{a}+4) & (\mathrm{a}+5) & (\mathrm{a}+6) \\
(\mathrm{a}+10) & (\mathrm{a}+11) & (\mathrm{a}+12) & (\mathrm{a}+13) & (\mathrm{a}+14) & (\mathrm{a}+15) & (\mathrm{a}+16) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \bullet & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\mathrm{a}+50) & (\mathrm{a}+51) & (\mathrm{a}+52) & (\mathrm{a}+53) & (\mathrm{a}+54) & (\mathrm{a}+55) & (\mathrm{a}+56) \\
(\mathrm{a}+60) & (\mathrm{a}+61) & (\mathrm{a}+62) & (\mathrm{a}+63) & (\mathrm{a}+64) & (\mathrm{a}+65) & (\mathrm{a}+66)
\end{array}$$

A táblázat középpontjára ($\bullet$) szimmetrikus elemek egymást $2a + 66$-ra egészítik ki, így az elemek összege $49 \cdot (a + 33)$, ami valóban osztható 49-cel bármely egész számot jelöl is a. □

21.15. Az táblázat felfogható a $0, 1, 2, \ldots, 9$ és a $0, 10, 20, \ldots, 90$ számok összeadó-táblájának. Az említett 20 számot egyszer-egyszer vesszük tekintetbe, így a teljes összeg minden esetben

$$(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) + (0 + 10 + 20 + \ldots + 90) = 45 \cdot 11.$$

□

21.53. 3339, 7119, 9999.

21.55. 8.

21.63. **a)** -3, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 9. **b)** -4, -2, 0, 2.

21.70. Lásd [9][36. feladat, 78-79. o.]

21.76. 2 rubel. Részletesebben lásd [2][13. feladat]

21.79. **a)** nincs megoldás az összeg páratlan **b)** megválaszthatók **c)** megválaszthatók **d)** nem.

21.80. **a)** nem (9-es maradék) **b)** nem **c)** igen.

21.81. **a)** igen **b)** nem (3-as maradék) **c)** nem.

21.82. **a)** nem (az összeg 3-as maradéka) **b)** igen.

21.83. **a)** igen **b)** nem (különbség 3-as maradéka).

21.84. **a)** nem (összeg paritása) **b)** igen
c) Nem. A tetraéder csúcsai két halmazba sorolhatók úgy, hogy a kocka mindegyik éle az egyik halmazból a másikba fut (bennfoglalt tetraéderek). A halmazösszegek különbsége invariáns.
d) igen.

21.85. A probléma variációival kapcsolatban lásd [10][186. fel.] tanári megjegyzéseit!

Irodalomjegyzék

[1] Csúri József Duró Lajosné Gyapjas Ferencné Kántor Sándorné és Pintér Lajosné Bartha Gábor, Bogdán Zoltán: *Matematika feladatgyűjtemény I.* 12. kiad. Budapest, 1998, Nemzeti Tankönyvkiadó. ISBN 963 18 8911 4. A „Sárga könyv".

[2] I. M. Jaglom D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov: *Aritmetika és algebra.* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből sorozat, I. köt. Budapest, 1979, Tankönyvkiadó. ISBN 963 17 3843 4. Újabban a Typotex kiadó is megjelentette.

[3] Pogáts Ferenc: *Varga Tamás matematika versenyek.* Budapest, 1995, Typotex. ISBN 963 7546 58 8.

[4] Pogáts Ferenc: *Varga Tamás matematika versenyek II.* Budapest, 1997, Typotex. ISBN 963 7546 84 7.

[5] Paróczay József Szászné Simon Judit Gerőcs László, Orosz Gyula: *Matematika, Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény.* I. köt. 1. kiad. Budapest, 2005, Nemzeti Tankönyvkiadó. ISBN 963 19 4213 9.

[6] Kozmáné Jakab Ágnes Dr Szederkényi Antalné Vincze István Kosztolányi József, Mike János: *Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek.* 10. kiad. Szeged, 2004, Mozaik Oktatási Stúdió. ISBN 963 697 100 5.

[7] Róka Sándor: *2000 feladat az elemi matematika köréből.* Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 50 0.

[8] Pogáts Ferenc és Fazakas Tünde: *Varga Tamás matematika versenyek III.* Budapest, 2003, Typotex. ISBN 963 9326 80 1.

[9] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár.* Budapest, 1999, Typotex. ISBN 963 9132 31 4.

[10] Fazakas Tünde és Hraskó András (szerk.): *Bergengóc példatár 2.* Budapest, 2001, Typotex. ISBN 963 9326 10 0.

[11] Horvay Katalin és Reiman István: *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* 33. kiad. Budapest, 2004, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. ISBN 963 19 4795 5.