Tanári kézikönyv

a 11–12. évfolyamokhoz

Szerkesztette:

2018. október 21.

Technikai munkák

(MatKönyv project, TEX programozás, PHP programozás, tördelés...)

Dénes Balázs, Grósz Dániel, Hraskó András,
Kalló Bernát, Szabó Péter, Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváh Miháy tér 8.
http://matek.fazekas.hu/
2005 / 2018

Tartalomjegyzék

Alkalmazott rövidítések

Könyvek neveinek rövidítései

A.I	Algebra, 7–8. évfolyam
A.II	Algebra, 9–10. évfolyam
A.III	Algebra, 11–12. évfolyam
ALG.II	Algoritmusok, 9–10. évfolyam
ANAL.III	Analízis, 11–12. évfolyam
F.I	Függvények, 7–8. évfolyam
F.III	Függvények, 11–12. évfolyam
G.I	Geometria, 7–8. évfolyam
G.II	Geometria, 9–10. évfolyam
G.III	Geometria, 11–12. évfolyam
GR.II	Speciális gráfelméleti példák, 9–10. évfolyam
K.I	Kombinatorika, 7–8. évfolyam
K.II	Kombinatorika, 9–10. évfolyam
K.III	Kombinatorika, 11–12. évfolyam
SZ.I	Számelmélet, 7–8. évfolyam
SZ.II	Számelmélet, 9–10. évfolyam
V.II	Valószínűségszmítás és statisztika, 9–10. évfolyam
VV.III	Városok viadala, 11–12. évfolyam
ZARUB	Nemzeti versenyek, 11–12. évfolyam

Segítség és megoldás jelzése

A feladatok sorszámánál kerek zárójelben „M” és „S” jelzi, ha a feladathoz (M)egoldás vagy (S)egítség található.
Például 5. (M) Oldjuk meg a ... vagy 5. (MS) Oldjuk meg a ...

Hivatkozás jelzése

A feladatok sorszámánál szögletes zárójelben zárójelben szám jelzi a feladat származását vagy kapcsolatát mutató hivatkozást az „Ajánlott irodalom” részben.
Például: 4. [20.] Oldjuk meg a ...

Algebra

1. Komplex számok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

2. Lianeáris algebra

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Vegyes feladatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Analízis

1. Topológiai alapfogalmak

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Függvények

1. Harmadfokú függvények

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

2. Az érintő

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Függvényvizsgálat

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Szélsőérték

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Egyenlőtlenségek

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. Alapvető integrálok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. Görbék

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Furcsa függvények

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. Vegyes feladatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Geometria

1. Geometriai szerkeszthetőség

1.1. b) megoldását az általános esetben részletezzük, l. a **??** d) részének a megoldását.

1.2. a) Ez a számtest nem különbözik a $Q(\sqrt{2})$ számtesttől.

b) és c) megoldása következik d) megoldásából.

d) Azt állítjuk, hogy $T(\sqrt{t})$ az $a+b\sqrt{t}$ alakú számokból áll, ahol a és b eleme T-nek. Könnyen látható, hogy az ilyen számok zártak az összeadásra és kivonásra és egyszerű számolással igazolható, hogy a szorzásra is zártak. Azt állítjuk, hogy az osztásra is zártak, ha nem nullával kell osztani. Ehhez elég belátni, hogy a nullától különböző $a+b\sqrt{t}$ szám reciproka is ilyen alakú. Ez a „gyöktelenítésből" következik:

$\frac{1}{a+b\sqrt{t}} = \frac{a-b\sqrt{t}}{a^2-tb^2} = \frac{a}{a^2-tb^2} - \frac{b}{a^2-tb^2}\sqrt{t}$,

és itt a nevező nem nulla. Ez következik abból, hogy egyrészt a kikötésünk szerint $a+b\sqrt{t}$ nem nulla, másrészt $a-b\sqrt{t}$ sem nulla, mert különben $\sqrt{t}$ maga is eleme volna T-nek, amit szintén kizártunk.

1.3. b) Megfelel például $u = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. u nyilván eleme a keresett számtestnek, tehát vele bővítve nem kaphatunk a keresettnél bővebbet. Másrészt u $\frac{1}{u} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. Ezt összeadva u-val és osztva kettővel megkapjuk $\sqrt{3}$-at, és hasonlóan kivonással kapjuk $\sqrt{2}$-t is. Tehát az u-val bővített számtest nem is szűkebb a keresettnél. Hasonlóan belátható, hogy ha ab nem nulla, akkor megfelel az $u = a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ szám is.

c) Az ötleteknél szereplő állítás kijön a **??** d) részéből. De kijön „gyöktelenítéssel" is. L. a **??** feladatot.

1.12. Mindenképp el kell jutni ennél a feladatnál odáig, hogy ha a és b egész (racionális), c nem egy egész (racionális) szám négyzete, akkor $(a+b\sqrt{c})^n$ (n pozitív egész) $A_n + B_n\sqrt{c}$ alakú, ahol A_n és B_n egész (racionális) számok, $(a-b\sqrt{c})^n$ pedig $A_n - B_n\sqrt{c}$ alakú. Lásd a **??** és a **??** feladatokat is.

2. didaktikai javaslat. A feladat szorosan kapcsolódik a másodrendű rekurziók és a Pell-egyenletek elméletéhez is, de ennek tárgyalására célszerű máskor visszatérni, itt más a cél, és ahhoz is sokat kell még dolgozni.

1.15. a) Elég bebizonyítanunk a következőt: ha $\sqrt[3]{2}$ nem eleme a T testnek, akkor T másodfokú bővítésének sem eleme.

b) T másodfokú bővítésének elemei $a+b\sqrt{t}$ alakúak valamely T-beli a, b, t számokra. (Itt $t > 0$ és $\sqrt{t}$ nem eleme T-nek.) Azt kell tehát belátni, hogy ezekre a számokra nem teljesülhet $(a+b\sqrt{t})^3 = 2$. A köbre emelést elvégezve az

$(3a^2+tb^2)b\sqrt{t} = 2 - a^3 - 3ab^2t$

egyenlőséghez jutunk. Mivel $\sqrt{t}$ nem eleme T-nek, de együtthatója is, a jobb oldalon álló kifejezés is T-beli, ezért ez az egyenlőség csak úgy állhat fent, ha $(3a^2+tb^2)b = 0$. Mivel $t >$ > 0, ez csak úgy lehetséges, ha $b = 0$. Ez viszont azt jelentené, hogy $a = \sqrt[3]{2}$ T-ben van, amit kizártunk.

1.18. A megoldás most is ugyanígy működik mindhárom esetben.

Általában is működik, tetszőleges $u+\sqrt{v}$ alakú számra, ahol u és v racionális számok. Az egyetlen kikötés, hogy v ne legyen egy racionális szám négyzete.

2. didaktikai javaslat. A megoldás persze működne például a $2+\sqrt[3]{3}$ számra is, itt azonban egy másfajta problémába ütközünk. Ezért ezeket a feladatokat később vesszük sorra. Természetesen ha a diákok maguktól előhozakodnak vele, akkor fel lehet adni már itt is a feladatot, de érdemes meggondolni, hogy nem célszerű-e elhalasztani a megbeszélését.

1.19. Ez a feladat nemcsak annak a tudatosítására jó, hogy a gyökök és együtthatók közötti összefüggésnél használjuk, hogy a polinomnak annyi gyöke van, ahanyadfokú, hanem arra is, hogy ha egy harmadfokú polinomnak van két gyöke, akkor könnyen tudjuk bizonyítani, hogy van egy harmadik gyöke is.

Érdemes megemlíteni azt is, hogy ez a harmadik gyök megegyezhet valamelyik előzővel is, de a gyökök és együtthatók közötti összefüggést ez „nem zavarja". (A feladatban persze mindhárom gyök külöböző.)

1.20. A feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy behelyettesítjük a megadott megoldást és A **??** megoldásához hasonlóan megmutatjuk, hogy $3+\sqrt{6}$ is megoldás, majd kiemeljük az $(x-3)^2-$ $-6=x^2-6x+3$ polinomot és a maradó $x+12$ polinom gyöke -12.

Egyszerűbbnek látszik a gyökök és együtthatók módszere, amit már A **??** feladat megoldásánál is használtunk. Ha már a két gyököt ismerjük, akkor azok összegét, 6-ot levonva a gyökök összegéből, -6-ból gyorsabban is megkapjuk, hogy a harmadik megoldás a -12. Itt azonban felmerül a kérdés, hogy honnan lehetünk biztosak a harmadik megoldás létezésében. Valójában ez a megoldás sem egyszerűbb, hiszen mint az említett feladatnál láttuk, ennek a bizonyítása talán legegyszerűbben megint csak a két gyöktényező kiemelésével történik.

De eljárhatunk úgy is, hogy megpróbáljuk racionális gyökkereséssel megkeresni a második gyököt, ez csak 36 osztói közül kerülhet ki. Aránylag hamar megtalálható tehát a -12 megoldás és ekkor gyökök és együtthatók összegével kapjuk a harmadik megoldásként $3+\sqrt{6}$-ot. (Amihez ismét tudnunk kell, hogy VAN harmadik megoldás.)

Ha ezt az utat követjük, akkor viszont a végén „visszakérdezhetünk", hogy biztosak lehettünk-e az elején, hogy lesz racionális gyöke az egyenletünknek?

1.21. A A **??** feladat megoldásához hasonlóan most is egy $E+F\sqrt{7}=0$ alakú egyenletet kapunk, ahol E és F egész, tehát mindkettő nulla. Ebből most is következik, hogy az egyenletnek megoldása a $2-\sqrt{7}$ szám is. Innen többféleképpen is továbbmehetünk.

1. A gyöktényezők kiemelhetőségét használva azt kapjuk, hogy a harmadfokú polinomból kiemelhető az $(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})=(x-2)^2-7=x^2-4x-3$ polinom. Minthogy ennek a polinomnak az együtthatói egészek és főegyütthatója, így a kiemelés után is egy egész együtthatós, elsőfokú polinom marad. Ennek a gyöke racionális. Azt kapjuk, hogy az egyenlet harmadik gyöke racionális.

2. A gyökök és együtthatók közötti összefüggést alkalmazva azt kapjuk, hogy a három gyök összege $\frac{-B}{A}$, ami racionális. Másrészt a már ismert két gyök összege 4, így a harmadik gyök is biztosan racionális. (Ismét használtuk a **??** feladat megoldásánál mondottakat a harmadik megoldás létezéséről.)

1.21. Ezt a feladatot azért érdemes előre venni, mert a diákok „az eddigi tapasztalatok alapján" könnyen azt fogják tippelni, hogy a harmadik megoldás egész lesz.

1.22. Érdemes a gyöktényezők kiemelését is végigkövetni.

1.24. Ez a feladat a **??** feladattal együtt lényegében általánosan összefoglalja mindazt, amit ez az alfejezet tartalmaz.

2. Tömegközéppont

2.9. Fordítsuk meg a kérdést! Adott az ABC háromszög és legyenek d_A, d_B, d_C tetszőleges valós számok, amelyek között van zérustól különböző. Igaz-e, hogy a (**??**) összefüggést kielégítő $(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ súlyozásokhoz tartozó tömegközéppontok egy egyenesen vannak?

A válasz igenlő, itt nem indokoljuk. Azonban abban a speciális esetben, amikor $d_A = d_B = d_C$, akkor mégsem valódi egyenest, hanem a sík „idális egyenesét" kapjuk. Ez a pontok tekintetében éppen az $\alpha + \beta + \gamma = 0$ esetnek felel meg, ekkor ugyanis az $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ rendszer súlypontja nem valódi pont, hanem az egymással párhuzamos AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek közös ideális pontja.

2.16. A feladat megoldható az AFC, BFC háromszögek AC, BC oldalaira felírt koszinusztételekkel is, felhasználva, hogy $\cos AFC\angle + \cos BFC\angle = 0$.

2.17. *Machó Bónis*

Ha csak azt akarjuk igazolni, hogy a külső szögfelezőknek a velük szemközti oldalegyenessel való metszéspontjaik egy egyenesen vannak, akkor hivatkozhatunk arra, hogy három kör páronkénti külső hasonlósági pontjai egy egyenesen vannak. Valóban, az AC oldalhoz hozzáírt körnek és az AB oldalhoz hozzáírt körnek a külső hasonlósági pontja a közös érintőjük – a BC oldalegyenes – és a centrálisuk – az A-nál fekvő szög külső szögfelezője – metszéspontja.

2.17. A b) feladatrész elején említett általános összefüggés a Desargues nevezetes tételéből is következik. Az ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögek ugyanis pontra nézve – a P pontra nézve – perspektívek, így egyenesre nézve is azok, és ez épp a bizonyítandó állítást jelenti.

2.19. Érdemes elolvasni a fenti Kömal A. 568. feladat Brianchon tételt használó frappáns megoldását a Kömal honlapján:

http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A568&l=hu

3. Inverzió

3.42. Zavarbaejtő kérdések diákoknak: tegyük fel, hogy az adott körök egymás külsejében helyezkednek el, igaz-e ebben az esetben, hogy a négy kör középpontja által meghatározott négyszög

1. érintőnégyszög?
2. beírt köre a $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ négyszög körülírt köre?

Az 1. kérdésre igen a válasz, a sugarak alapján látható, hogy a szemköztes oldalak hosszának összege egyenlő, de a 2. kérdés csak speciális elrendezéseknél igaz.

4. Komplex számok a geometriában

a **??**

4.16. Ha az egyik négyszögoldal egy ponttá zsugorodik akkor egy háromszögre vonatkozó eredményt kapunk. Két háromszögoldalra emelt négyzet középpontját összekötő szakasz merőleges és egyenlő a harmadik oldalra emelt négyzet középpontját a szemközti csúccsal összekötő szakasszal. Ebből az is következik, hogy a négyzetek középpontjait a szemközti csúccsal összekötő szakaszok egy pontban metszik egymást, hiszen ezek éppen a négyzet- középpontok által meghatározott háromszög magasságvonalai lesznek.

5. Projektív geometria

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

6. A gömb geometriája

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

7. A hiperbolikus sík Poincaré-modellje

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

8. Speciális görbék

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

9. Vegyes feladatok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

Kombinatorika

1. Statisztika

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

2. A Pascal háromszög

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

3. Páros gráfok

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

4. Kombinatorikus geometria

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.

5. Binomiális eloszlás

Ebben a fejezetben nincs információ tanároknak.